# Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège

Caroline Bulf, bulf@math.jussieu.fr

Université Paris Diderot, Equipe DIDIREM

**Résumé**

Le travail de recherche relaté ici décrit la ou plutôt les recherches effectuées au cours de ma thèse (Bulf 2008). La problématique de notre travail de thèse s'articule autour de la question générale sur le rôle joué par la symétrie axiale, en tant qu'élément de notre réalité, dans l'apprentissage des autres transformations du plan enseignées au collège. Agit-elle en tant qu'obstacle ou en tant que levier ? Nous faisons référence à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991) pour analyser la conduite de l'élève mais aussi au cadre des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (ETG) de Houdement et Kuzniak (2006) quant à la nature du travail géométrique en jeu dans l'activité de l'élève.

Notre travail de thèse comprend trois études distinctes mais complémentaires que nous avons choisies d'exposer ici :

– une étude portant sur la nature du concept de symétrie dans l'Espace de Travail Géométrique des tailleurs de pierre et des ébénistes.
– une étude portant sur l'Espace de Travail Géométrique des élèves d'une classe de 5$^{e}$ et d'une classe de 3$^{e}$ à travers l'analyse d'un questionnaire commun.
– une étude cherchant à expliquer les résultats obtenus concernant l'ETG personnel de ces élèves en questionnant les effets de l'enseignement reçu par ces élèves.

**Mots clefs**

Didactique des mathématiques, géométrie élémentaire, enseignement secondaire, transformations du plan, symétrie, conceptualisation, paradigmes géométriques, espaces de travail géométrique.

## I Problématique de recherche et cadre théorique associé

### 1. Questionnement de départ : le rôle de la réalité

Notre travail de recherche s'inscrit au départ dans le courant actuel de recherche en didactique des mathématiques qui porte sur l'étude du rôle de la réalité dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous avons choisi de nous concentrer sur l'étude d'un concept mathématique au fort pouvoir d'évocation dans notre environnement quotidien mais qui est également présent dans l'institution scolaire : le concept de symétrie. En effet la symétrie axiale est abordée dès l'école élémentaire à travers des activités de pavage ou de pliage puis elle est introduite de manière formelle en 6$^{e}$. Aussi, d'un point de vue constructiviste, on peut supposer que la symétrie axiale va participer à la construction des nouvelles connaissances visées par le collège, autrement dit la symétrie centrale en 5$^{e}$, la translation en 4$^{e}$, et la rotation en 3$^{e}$ (selon le découpage stipulé par les programmes et en vigueur au moment de notre recherche[1]).

1 BO n°10 Hors-Série du 15 octobre 1998, pp. 106-114 (programme de 3e). BO n°5 Hors-Série du 9 septembre

Le recours à la réalité peut se révéler être un levier pour atteindre les concepts scientifiques visés par l'enseignement des mathématiques. Nous faisons là référence à deux courants actuels de recherche en didactique des mathématiques : la *Realistic Mathematics Education* (RME) (Presmeg & Van Den Heuvel-Panhuizen 2003) dont Freudenthal (1983) fut l'investigateur en Hollande ; et le cadre de la Didactique des Domaines d'Expérience (DDE) (Bartolini-Bussi & Boero, 1998) sous l'égide de Boero (1999) en Italie. Ces deux courants fonctionnent dans des directions orthogonales à partir d'un contexte réel (Kuzniak et al., 2008). La mathématisation verticale proposée par la RME s'inspire de Freudenthal, qui voit les mathématiques comme une activité humaine qui consiste à résoudre et à chercher des problèmes dans un processus de mathématisation. Ainsi, les « *mathematics in context* » proposées par certaines de leurs situations ont pour but d'accéder à des niveaux plus élevés et plus abstraits de connaissance par l'intermédiaire de la réalité. La DDE s'apparente davantage à une mathématisation de dimension horizontale, car on questionne les potentialités de différents contextes réels, à travers l'expérimentation et la manipulation, dans le but de faire émerger des concepts mathématiques.

Cependant, le rôle de la réalité dans la construction de connaissances scientifiques peut se poser en termes d'obstacles : obstacle de l'image familière, obstacle de l'expérience première, obstacle du sens commun (Bachelard 1934). Dans le cas de la symétrie axiale, de nombreux travaux en psychologie notamment (Rock & Leaman 1963) (Palmer 1985) suggèrent même l'idée d'un obstacle perceptif. Il a été montré dès la fin du XIXème siècle par Mach les effets de l'axe médian vertical sur la perception. Cet aspect de la symétrie n'est pas négligeable car la perception fait partie intégrante du processus de conceptualisation (Vergnaud 2007). Pour illustrer notre propos, nous citons l'exemple suivant (figure 1) proposé par Mach et largement repris par la suite, dans lequel on perçoit plutôt un carré à gauche et plutôt un losange à droite alors que seule la position de la figure change.

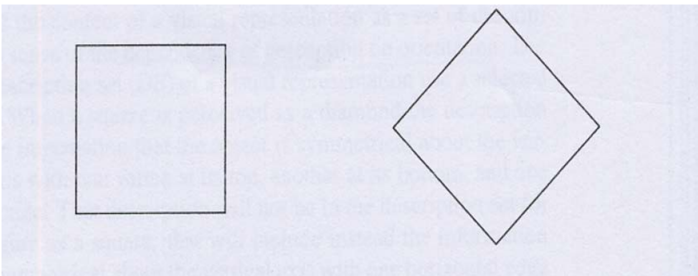

*Figure 1 : la perception du carré-diamant (Giaquinto 2005, p. 32)*

Palmer et Giaquinto expliquent alors cet effet par la mise en évidence d'une paire d'axes de symétrie dans les deux cas par rapport à la gravité (figure 2) : la figure est perçue comme un carré lorsque les médiatrices des côtés forment un repère orthogonal (dans le sens de la gravité sur la feuille de papier), alors que cette figure est perçue comme un losange lorsque les bissectrices des angles, que les sommets « saillants » mettent en évidence, forment un repère orthogonal par rapport à la gravité[2] .

2004, pp. 4-16 (programme de 6e). BO n°5 Hors-Série du 25 août 2005, pp. 9-16 (programme de 5e). BO n°6 Hors-Série du 19 Avril 2007 (nouveaux programmes pour la rentrée 2008).

2 "*The figure is seen as a square when its side-bisector axes are vertical and horizontal and as a diamond when its angle-bisector axes are vertical and horizontal : in these orientations the gravitational bias selectively reinforces one pair of frames and not the other*" (Palmer 1985, p. 72).

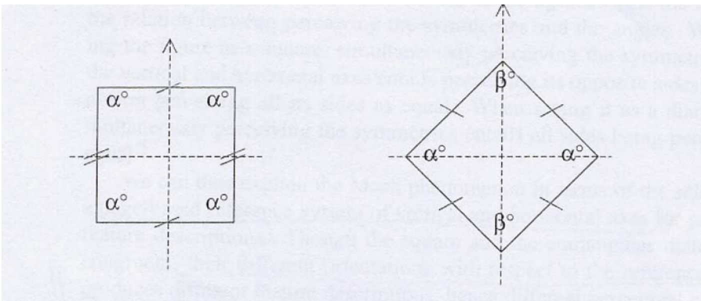


*Figure 2 : interprétation du carré-diamant (Giaquinto, 2005, p. 37)*

Dans le cadre de la didactique des mathématiques, de nombreux travaux témoignent des effets de la symétrie axiale sur les conceptions des élèves dont (Grenier & Laborde 1988), (Denys 1986), (Grenier 1990) et (Lima 2006). Ces auteurs mettent en évidence la résistance d'un certain nombre de conceptions familières erronées liées à la symétrie axiale (la verticalité, l'alignement, le découpage en deux plans distincts superposables, etc.). Tavignot (1993) traite plutôt la question de l'impact du poids culturel et familier dans l'enseignement en problématisant la question de la transposition didactique d'un tel concept dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard. En particulier, l'auteur met en évidence des décalages entre les choix de la noosphère et les choix didactiques des professeurs. Concernant l'enseignement des autres transformations du plan, Cassan (1997) suggère que la très forte institutionnalisation de la symétrie axiale peut être un obstacle à l'apprentissage visé par l'enseignement de la symétrie centrale ; Bkouche (1992) souligne le caractère artificiel de l'enseignement des propriétés de conservation ainsi que la négligence des concepts d'invariance et enfin Jahn (1998) se concentre sur la transition collège/lycée et révèle la négligence de la dialectique globale/ponctuelle.

Notre travail consiste alors à croiser ces différents constats concernant l'enseignement et l'apprentissage de la symétrie axiale et des autres transformations du plan. On se demande en particulier si on peut relier les conceptions résistantes de la symétrie axiale chez les élèves aux difficultés didactiques rencontrées lors de l'enseignement des autres transformations du plan. Et si ces difficultés existent, sont-elles inhérentes au concept de symétrie ou sont-elles liées à l'organisation actuelle des programmes ?

## 2. Construction du cadre théorique

Nous avons construit un cadre d'analyse qui va nous permettre de problématiser cette première approche du concept de symétrie concernant son rôle dans la construction des nouvelles connaissances visées par le collège. Vergnaud (1991) place au cœur du processus de conceptualisation la notion de représentation du réel dont l'étude est révélée à travers l'activité de l'élève. Nous adoptons le point de vue de Vergnaud qui considère l'apprentissage comme l'adaptation de schèmes (un schème étant l'organisation invariante de la conduite dans une classe de situation donnée). Nous faisons donc référence à la théorie des champs conceptuels mais nous avons en réalité mené une étude partielle du champ conceptuel des isométries car nos analyses insistent surtout sur l'adaptation de certains invariants opératoires (concepts et théorèmes-en-acte) dans un seul type de situations.

Afin de compléter cette approche cognitive, nous faisons référence au cadre de Houdement et Kuzniak (2006) des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (ETG) afin de prendre en compte la spécificité géométrique du travail de l'élève en jeu. En particulier nous supposons que **l'articulation de ces deux cadres révèle la notion d'ETG comme un espace privilégié pour analyser la conceptualisation en jeu.** En effet, Houdement et Kuzniak catégorisent les modes de pensée géométriques en termes de paradigmes géométriques qui se caractérisent par leur rapport à la réalité. La Géométrie I (GI), « la géométrie naturelle » concerne des raisonnements géométriques qui reposent sur la perception et la manipulation d'objets matériels issus de l'espace local et réel. Et réciproquement, l'espace local et réel apparaît comme un support privilégié pour GI (on suppose que le schème du pliage fait ainsi partie de GI). La Géométrie II (GII), la « géométrie axiomatique naturelle » concerne des raisonnements géométriques dits hypothético-déductifs mettant en jeu des modèles mathématiques prédéfinis dans un système tel que celui de la géométrie euclidienne. Et réciproquement, ces modèles mathématiques sont prédéfinis pour faire fonctionner des raisonnements hypothético-déductifs tels que ceux réalisés dans le cadre de la géométrie euclidienne. L'approche formelle de la symétrie axiale au collège par exemple met en jeu des modèles mathématiques concernant le point, la droite, etc. Nous éludons dans notre étude la Géométrie III (GIII), la « géométrie axiomatique formaliste », car elle ne concerne ni le collège ni la réalité. Les interconnexions décrites ici entre paradigmes géométriques ne sont pas exclusives. Il existe des modèles de référence implicites dans GI, et, l'espace réel et local peut également être sollicité dans GII. Il n'existe pas de frontière nette entre ces deux paradigmes ; on parlera plutôt de basculements de paradigmes, ou de jeu GI-GII, car on peut effectivement passer d'un paradigme à un autre au cours d'une même situation. On suppose alors que ce jeu GI-GII est en partie régulé par le contrat didactique (Brousseau 1998) autrement dit il dépend des relations maître-élève qui ont eu lieu durant l'enseignement qui précède l'activité observée.

De plus, si les deux paradigmes GI-GII sont en interaction alors **l'espace réel** et **les objets de référence** le sont aussi. Cette interaction peut nécessiter un processus de construction impliquant l'intervention d'**outils** (artefacts, schèmes d'action, etc.). L'articulation de ces trois composants (l'espace réel et local, les objets de référence, les outils) constitue alors **l'Espace de Travail Géométrique (ETG).** C'est à ce niveau que se situe notre point d'ancrage de la théorie des champs conceptuels car cette articulation rend compte du processus conceptualisation au sens de Vergnaud :

> « Ce que j'entends par conceptualisation, c'est l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi-directe, ou d'une construction. » (Vergnaud 2007, p342)

On reconnaît alors dans cette citation les composants de l'ETG (« objets du monde », « propriétés ») et l'intérêt de leurs liens (« relations et transformations », « perception », « construction ») dans le processus de conceptualisation. L'ETG apparaît ainsi finalement comme un espace privilégié pour analyser la conceptualisation en jeu et nous interpréterons en termes d'invariants opératoires les relations et articulations des différents composants de l'ETG qui vont alors s'adapter lors de l'enseignement et de l'apprentissage des différentes transformations du plan au collège.

### 3. Formulation des questions de recherche

Nous sommes maintenant en mesure de formuler les questions de recherche qui problématisent notre questionnement de départ, précédemment énoncé, concernant le rôle de la symétrie axiale dans l'apprentissage et l'enseignement des autres transformations du plan :

- **Q1 : La symétrie axiale pilote-t-elle l'organisation et les inférences des invariants opératoires des autres transformations du plan au collège dans la construction de l'ETG personnel de l'élève ? Si oui, comment ?**
- **Q2 : Comment l'ETG personnel évolue-t-il au cours de l'enseignement des autres transformations du plan ?**
- **Q3 : Quel est l'ETG idoine développé en classe ? Quelle est la distance entre cet ETG idoine et l'ETG personnel que l'élève développe finalement ?**

  Avant de nous attaquer à ces questions dans un contexte exclusivement scolaire, nous avons mené une étude dans une réalité professionnelle dont la pratique privilégie le recours à la géométrie GI, contrairement à l'institution scolaire qui privilégie GII.

## II Etude de l'Espace de Travail Géométrique des tailleurs de pierre et des ébénistes

Cette étude est donc directement motivée par ce lien immédiat avec la réalité et la méthodologie mise en œuvre nous permet une observation du concept de symétrie dans l'action car les situations rencontrées se réfèrent dans l'action au concept de symétrie, et « au fond de l'action, la conceptualisation » (Vergnaud 1996). On cherche alors à étudier la nature du concept de symétrie dans un paradigme *a priori* GI assumé et à déterminer sa place dans l'ETG personnel de l'artisan.

### 1. Méthodologie adaptée

Nous avons rencontré quatre tailleurs de pierre (nous noterons TP) et trois ébénistes (TB pour Tailleur de Bois) dans leurs ateliers. Nous avons mené des entretiens exploratoires semi directifs à partir de photos de motifs de la Cathédrale Notre Dame de Paris (voir un extrait ci-contre) et des cas de figures courants en taille de pierre ou de bois tels qu'une volute, révélant différents cas de symétries. Les questions portent principalement sur le tracé du motif et sa réalisation, en essayant d'insister sur la justification des techniques, des instruments et des moyens de contrôle. Il s'agit d'une situation d'action dans laquelle on retrouve une phase de communication et de validation (nous ne faisons pas référence à la théorie des situations) afin de faire parler et réfléchir les artisans sur leurs propres actions. Comme Bessot et Laborde le rappellent : « moins une tâche est problématique, plus les actions pour la réaliser sont transparentes et donc difficiles à expliciter » (Bessot & Laborde, 2005). D'où l'intérêt que l'entretien se déroule dans leurs ateliers, où ils se retrouvent dans leur environnement familier et peuvent alors appuyer leur discours par de courtes démonstrations avec leurs propres outils.

Inspirées par les travaux antérieurs sur le rôle des mathématiques en voie professionnelle (Bessot & Laborde 2005) (Straesser 2000) et ou sur les mathématiques dans l'activité professionnelle (Noss, Hoyles & Pozzi 2000) (Williams & Wake 2007), nos analyses se basent sur les procédures et les formulations recueillies à travers notre corpus qui regroupe les retranscriptions de tous les entretiens (dont certains extraits sont donnés dans le développement de ce papier), quelques photos et vidéos, ainsi que le recueil des dessins et figures réalisés lors des entretiens.

## 2. La symétrie, un concept organisateur de la conduite

L'analyse de ces données a mis en évidence une structuration de l'espace par des invariants opératoires propres de la symétrie axiale, dont principalement le schème de bidécomposabilité, c'est-à-dire le fait de décomposer en deux parties superposables, dans lequel on retrouve le concept-en-acte d'invariance globale et d'invariance point par point. L'artisan « prépare » son espace personnel en déterminant des repères extra-figure (le support et le cadre de la figure sont indépendants de la figure) qui supporteront la figure. Les repères intra-figure (dépendants de la figure) « structurent » la figure de manière la plus adaptée d'après l'artisan, au problème pratique posé. Ces repères constituent pour l'artisan des repères de position (pour positionner les instruments par exemple), de mesure ou encore de tracé, afin de mettre en évidence les régularités de la figure (dont l'axe -ou le centre- de symétrie est un repère évident).

> TP1 : « Il faut que j'aie les dimensions, pour pouvoir me dire dans quel cadre ça rentre et dans quel bloc capable, j'entends par là les dimensions maximales de l'ouvrage, une fois que j'ai les dimensions par rapport à un axe ou des cotes. (…) Il est inscrit dans une surface plane. (…) Pour vérifier que le motif est bien cadré sur cet axe et que j'ai le bon axe. (…) C'est-à-dire on trace un trait droit, qui sera l'axe, on prend les dimensions capables, on prend les contours, ensuite on reprend les cotes déterminantes, et ça va nous déterminer l'emplacement du motif (…) donc l'axe vertical me permet de faire une symétrie correcte, en fait, c'est une croix, ça cale quelque chose, je ne sais pas comment vous expliquer ça, c'est une cible en fait. Si je trace la même croix sur un morceau de pierre et que je la fixe au calque à cet endroit, ça me permet de caler les choses. »

Pour réaliser ce travail de structuration, l'artisan dispose d'un répertoire d'objets de référence (tels que le point, la droite, le cercle, le carré, etc.) ainsi que des techniques, cristallisé dans la pratique. La mise en œuvre de ces objets de référence et techniques à travers une instrumentation spécifique dans l'espace réel et local constitue l'Espace de Travail Géométrique personnel de l'artisan. La formulation de ces différents composants est parfois tellement proche de celle que l'on pourrait trouver dans les ouvrages de référence (les deux principaux cités par les artisans sont (Chanson 1988) et (Ricaud 1999)), elle-même tellement proche de celle que l'on peut trouver dans les éléments d'Euclide, qu'on ne peut finalement distinguer la véritable origine de leur pratique. Nous parlons alors d'un véritable phénomène d'intrication entre ces différents facteurs (ouvrages de référence, enseignement, expériences, etc.). Cependant, leur répertoire semble relativement figé car lors de situations incidentelles, c'est-à-dire lors de situations légèrement différentes de celles qu'ils ont l'habitude de résoudre, ils ne questionnent pas la validité de la technique et l'adaptent en développant plutôt des « stratégies d'ajustement » (au « jugé » ou *via* des instruments de mesure plus spécifiques). Par exemple, la technique de la médiatrice de deux cordes pour retrouver le centre d'un arc de cercle ou d'une courbe est généralement citée par les artisans mais elle est peu restituée dans son intégralité. Ils complètent leur construction en mesurant au réglé [3] ou en utilisant un perroquet[4].

3 Un réglé ou règle : « Toute baguette ou latte parfaitement rectiligne, graduée ou non, utilisée pour le tracé de traits droits. » (Une particularité du réglé est qu'il n'y a pas de bords contrairement à la règle ordinaire graduée de l'écolier).

4 Un perroquet : « Règle plate incurvée, utilisée pour tracer de longues courbes ». Ces définitions proviennent de l'ouvrage de JeanVigan (1994) Dictionnaire général du bâtiment, Le petit Dicobat, Rig-Orangis : Arcanture.

> TP1 : « Je vais prendre un segment [la corde], je vais trouver son milieu, soit par cote soit par croisé d'arc avec le compas [technique de la médiatrice]. Je prends la pointe de mon compas sur un côté que j'aurai déterminé, j'envoie à l'œil plus loin que la moitié, je trace un arc de cercle, la même chose sur l'autre point et je rejoins forcément, clac. (…) Et là-dessus je peux retrouver mon rayon… mais je ne me souviens plus très bien…. »

## 3. Un exemple de théorème-en-acte généré par la pratique

Une de nos questions portait sur la construction d'une volute simple. Un des ébénistes a alors répondu :

> TB1: « On est obligé de <u>développer</u> une <u>première fois</u> puis d'<u>inverser</u> pour qu'il se retrouve complètement à l'<u>opposé</u>. »

La symétrie centrale est interprétée (et mimée) comme la composée de deux symétries axiales dont les axes sont : un horizontal puis un vertical dans un même plan. On retrouve le rôle prépondérant de cette paire d'axes, signifiant de la composée de deux symétries axiales. On « développe » en deux temps : il s'agit de la succession de deux « dépliages ». Ce schème met en relation les concepts-en-acte de conservation, d'invariance globale et d'orientation. On peut alors faire l'hypothèse que l'origine de cette conception vient d'une technique propre à l'ébénisterie : la marqueterie. En effet, cette technique consiste à reproduire un motif issu d'une fine tranche de bois par « développement » en 3D (puisqu'on plie et déplie une fine feuille de bois) en suivant des composées de symétries axiales d'axe horizontal ou vertical, ou des composées de translation (développement 2D), ou encore des composées de symétries axiales et translations, autrement dit des symétries glissées. Ainsi, dans le cas de la volute simple, on retrouve les gestes quotidiens et routiniers associés à ceux de la marqueterie, d'où la mise en œuvre naturelle de composées de symétries axiales.

## 4. Conclusion sur l'étude de l'ETG des tailleurs de pierre et des ébénistes et liens vers l'institution scolaire

Finalement cette étude concernant l'ETG personnel des tailleurs de pierre et ébénistes (plus largement développée dans le chapitre 3 de la thèse) a permis de mettre en évidence une organisation de la conduite de l'artisan dirigée en partie par des invariants caractéristiques de la symétrie axiale. De plus, l'articulation des composants de son ETG révèle une forte intrication des objets de référence et des techniques tirées d'apprentissage antérieurs ou de leurs propres expériences. Cela nous incite à penser que le concept de symétrie dont ils réfèrent n'est pas une conception experte du concept familier ni une conception antagoniste à une conception scientifique mais correspond plutôt à un concept intermédiaire, un concept « naturalisé ». Enfin, l'organisation relativement figée de cet ETG révèle la mise en œuvre de stratégies d'ajustement possibles notamment par une très forte instrumentalisation.

On distingue justement la rupture entre GI et GII par cette gestion de l'approximation. Le collège lui cherche à détacher l'élève de cette GI en reniant cette approximation (même efficace). Nous revenons alors vers nos questions de recherche (Q1, Q2, Q3) précédemment énoncées en se demandant alors quelle est l'adaptation et l'organisation des invariants opératoires de la symétrie dans une géométrie qui ne se veut plus figée mais au contraire tend vers GII. Nous abordons la partie la plus conséquente de la thèse (développée surtout dans les chapitres 6 et 7 de la thèse) qui porte notamment sur l'analyse d'un questionnaire commun proposée dans une classe de 5e et dans une classe de 3e et sur l'analyse des observations des séances d'enseignements des transformations du plan en vue d'expliquer les résultats obtenus.

# III Etude longitudinale au collège

Comme déjà évoqué, nous avons réalisé une étude partielle du champ conceptuel des isométries car nous n'avons pas choisi une entrée par les situations (au sens de Vergnaud) c'est-à-dire que nous n'avons pas considéré un ensemble de situations qui génère alors des classes caractérisées par des invariants opératoires. Vergnaud lui-même décrit la complexité d'une telle entreprise dans le cadre de la géométrie :

> « (…) il est bien difficile de construire des situations et d'élaborer des exercices relevant de la géométrie des figures sans toucher en même temps la question des positions relatives et la question des transformations. De même, il n'y a pas de géométrie des transformations sans figures et sans positions. » (Vergnaud 2001)

Nous avons alors choisi une autre entrée, celle des concepts mathématiques inhérents au concept de symétrie et que l'on retrouve dans les invariants opératoires constitutifs du schème. Nous avons alors déterminé un seul type de situations : la reconnaissance des transformations du plan à partir d'un support graphique et d'un énoncé qui ne propose pas de dénomination des objets représentés (« soit un triangle … ») ni aucune hypothèse sur des propriétés mathématiques.

## *1. Apport des travaux de Duval dans l'analyse de l'ETG*

Un premier questionnaire exploratoire a pointé la nécessité de la prise en compte du type de déconstruction des figures au sens de Duval (2005). En effet les différentes stratégies mises en œuvre par l'élève impliquent différents traitements de la figure possibles. Duval définit trois types de déconstruction figurale :

- **la décomposition méréologique** implique un découpage de la figure de départ (dans le plan par exemple on notera 2D) en sous-figures de même dimension (2D). Duval propose l'exemple du parallélogramme (figure 3) découpé en triangles (dans ce cas, les sous-figures sont de même forme ; le découpage est homogène).

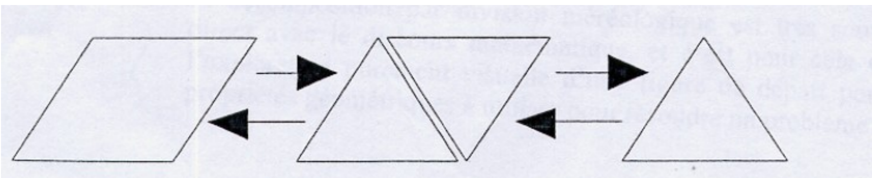

*Figure 3 : exemple d'une décomposition méréologique (Duval 2005, p. 21-22)*

- **la déconstruction instrumentale** implique l'utilisation d'outils (règle graduée, compas, etc.) dans le but de reconstruire la figure. Dans le cas de la symétrie axiale, l'élève peut par exemple, reconnaître le schème de construction de la médiatrice.

- **la déconstruction dimensionnelle** implique une déconstruction en unités figurales de dimension inférieure (figure 4) dans le but de mettre en relation ces unités figurales (1D ou 0D). Par exemple, certaines propriétés métriques sont caractéristiques de la symétrie axiale ou centrale.

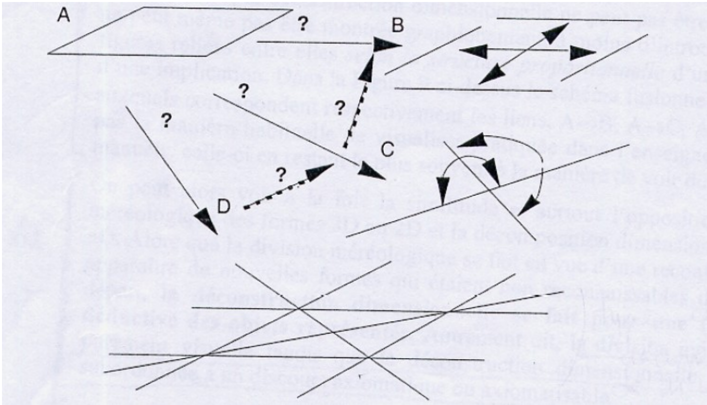


*Figure 4 : « Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle d'une forme » (Duval 2005, p. 23).*

Duval oppose la déconstruction dimensionnelle à la décomposition méréologique et à la déconstruction instrumentale.

> « Même les activités de construction de figures, […] car l'attention porte justement sur la reconstruction d'unités figurales 2D à partir d'unités figurales 1D automatiquement produites par l'instrument. C'est pourquoi la déconstruction dimensionnelle, c'est-à-dire le passage des surfaces aux lignes (les lignes n'étant pas visuellement des bords), représente une révolution cognitive par rapport aux autres types de visualisation. [ …] Alors que la division méréologique se fait en vue d'une reconfiguration faisant apparaître de nouvelles formes qui étaient reconnaissables dans la figure de départ, la déconstruction dimensionnelle se fait pour une (re)construction déductive des objets représentés. Autrement dit, la division méréologique reste purement visuelle tandis que la déconstruction dimensionnelle est entièrement subordonnée à un discours axiomatique ou axiomatisable ». (Ibidem, pp. 23-24).

Par conséquent, le processus de déconstruction dimensionnelle est nécessaire pour accéder à la géométrie déductive, autrement dit pour atteindre GII d'après notre cadre théorique.

Ainsi, l'analyse du traitement de la figure au sens de Duval, selon la transformation en jeu, permet de décrire les relations entre les composants de l'ETG (c'est à dire l'espace réel et local ou le support graphique, les instruments et les objets de référence). Une nouvelle question est alors formulée, qui nourrit directement les questions Q1 et Q2 :

- **Q4 : Quel est le rôle joué par la symétrie axiale dans le traitement de la figure dans la construction de l'ETG personnel de l'élève ?**

## 1. Méthodologie adaptée et traitement des données

Nous avons proposé un questionnaire à deux moments cruciaux où les connaissances des élèves ont été déstabilisées :
- en 5$^{e}$ après l'enseignement de la symétrie centrale
- et en 3$^{e}$ après l'enseignement de la rotation.

Nous proposons dans ce papier seulement l'analyse de la situation dite des triangles (figure 5 et 6) qui se déroulait en deux temps.

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s) transforme(nt) :

a) 1 → 2
b) 2 → 3

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

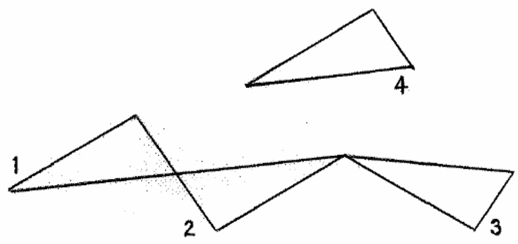


*Figure 5 : la situation des triangles dans le cas dit de perception globale (PG).*

Dans la première tâche (figure 5) dite PG (Perception Globale), il s'agit de reconnaître une symétrie centrale ou une rotation de 180° à partir d'un support graphique sur fond blanc dans lequel les figures considérées ne sont pas nommées mais désignées dans leur ensemble par un chiffre. La deuxième tâche (figure 6) est donnée huit jours plus tard. Il s'agit toujours de reconnaître les mêmes transformations du plan mais cette fois le support graphique est un quadrillage et les figures sont nommées par leur sommet sur le support graphique et dans l'énoncé. L'énoncé (dans les deux cas) est adapté au niveau scolaire (on ne parle que de symé - tries en classe de 5e).

Dans chacun des cas suivants, dites quelle(s) symétrie(s), translation(s), rotation(s) transforme(nt) :

a) ABC en EDC
b) CDE en GFE
c) ABC en MNP

Justifiez vos réponses.
Si vous effectuez des tracés sur la figure ci-dessous, merci de ne pas les effacer.

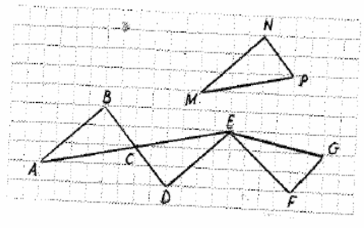


*Figure 6 : la situation des triangles dans le cas dit de perception ponctuelle (PP).*

Nous faisons alors l'hypothèse que la prise d'informations par l'élève va changer selon la per - ception suggérée par la tâche. Les variables didactiques des deux tâches étant différentes (fond blanc, quadrillage, points nommés), elles appellent *a priori* à un traitement différent.

En particulier, l’énoncé des tâches ne propose ni de dénomination des objets représentés ni des hypothèses qui fixeraient des propriétés mathématiques. Aussi, si un élève propose les propriétés mathématiques relevées sur le graphique (perceptivement, ou en mesurant), elles peuvent être vraies ou presque vraies (par exemple : AC=CE ou AC et CE sont presque égales) sont des propositions recevables tout comme AC n’est pas égale à CE si l’on tient compte des marges d’erreurs. Etant donné que l’élève peut se satisfaire de constatations perspectives, on suppose que l’organisation des composants de l’ETG va être différente dans ces deux tâches : PG s’inscrirait plutôt dans un paradigme GI et PP plutôt dans GII (même si ce n’est finalement pas tout à fait GII car aucune propriété mathématique n’est donné en amont). Cette dichotomie n’étant pas stricte étant donné que l’énoncé affirme qu’il faut reconnaître des transformations, donc c’est qu’elles existent. Le support blanc étant plus vierge, les adaptations possibles de l’élève y sont plus larges et plus diverses (l’élève peut se contenter de superposition acceptables et donc se situer dans GI ou passer à une discrétisation du plan et proposer des égalités de mesures et déduire les transformations en jeu, il s’agit alors d’un raisonnement déductif, c’est en ce sens que nous inscrivons plutôt l’ETG dans GII) tandis que dans le cas PP, les figures sont désignées par leur sommet dans un quadrillage pouvant servir de repère. De plus, une description point par point de la figure et de son image est suggérée dans l’énoncé. Cependant, les perceptions suggérées par la tâche n’impliquent par que l’élève va s’inscrire dans l’une ou l’autre perception exclusivement comme nous le verrons a posteriori. En effet l’analyse des productions des élèves porte surtout sur les différences de traitement des figures selon la transformation en jeu et selon le changement de contrat (c'est-à-dire selon la perception suggérée par la tâche) en 5$^{e}$ et en 3$^{e}$. **Nous allons en particulier mettre en évidence comment le comportement attendu des élèves en 5$^{e}$ et en 3$^{e}$ révèle la stabilité de leur ETG mais également met en évidence des traitements de la figure propres aux transformations en jeu et différentes à ces deux niveaux scolaires.**

Nous avons choisi de mener une étude qualitative des productions. Néanmoins, nous avons recueilli 30x2 copies en 3$^{e}$ et 27x2 copies en 5$^{e}$, nous avons donc choisi de réaliser une classification des productions selon des critères de réussite et selon la stabilité de cette réussite afin d’organiser nos analyses et de mettre en évidence des profils d’élèves. Nous définissons plusieurs catégories et sous-catégories :

- CATEGORIE VRAI-VRAI (V-V) : les élèves proposent des réponses correctes quelle que soit la tâche c'est-à-dire dans la situation PG puis PP.
  - SOUS-CATEGORIE VRAI-VRAI Variable : les élèves de cette sous-catégorie présentent des changements explicites dans la justification de leurs réponses (toujours correctes quelle que soit la tâche).
  - SOUS-CATEGORIE VRAI-VRAI Invariable : les élèves de cette sous-catégorie ne présentent pas des signes de changement dans la justification de leurs réponses.

- CATEGORIE FAUX-FAUX : les élèves présentent des réponses erronées (ou pas de réponses du tout) dans les deux cas PG et PP.
  - SOUS-CATEGORIE FAUX-FAUX Variable : les élèves de cette sous-catégorie présentent des changements explicites dans la justification de leurs réponses (pourtant toujours incorrectes).
  - SOUS-CATEGORIE FAUX-FAUX Invariable : les élèves de cette sous-catégorie ne présentent pas de signes de changement dans la justification de leurs réponses.

- CATEGORIES MIXTES : les élèves changent de réponses selon la perception suggérée par la tâche :
  - CATEGORIE FAUX-VRAI : les élèves présentent des réponses erronées dans la situation PG mais correctes dans la situation PP.
  - CATEGORIE VRAI-FAUX : les élèves présentent des réponses correctes dans la situation PG mais erronées dans la situation PP.

Nous avons également numéroté les copies d'élèves :

- 3.i : i allant de 1 à 29 élèves en 3e (l'élève de la copie 3.30 était absent lors d'une des deux séries du questionnaire, on compte alors 29 élèves au lieu de 30).
- 5.j : j allant de 1 à 26 élèves en 5e (l'élève de la copie 5.16 était absent lors d'une des deux séries du questionnaire, on compte alors 26 élèves au lieu de 27).

Les tableaux suivants (6.5 et 6.6) répertorient la conduite de tous les élèves interrogés selon la perception suggérée par la tâche à la question a. (où il s'agit de reconnaître une symétrie centrale - SC - ou une rotation de 180°) et à la question b. (où il s'agit de reconnaître une symétrie axiale - SA -). Nous avons représenté par une flèche le comportement d'un élève à la question a. puis à la question b. Certaines flèches vont alors dans la même direction, nous obtenons ainsi plusieurs profils d'élèves en fonction des changements similaires de catégories d'une transformation à une autre. On distingue les élèves qui appartiennent à la catégorie V-V et les élèves qui présentent au moins une fois une erreur (catégories mixtes et F-F). Parmi ces élèves de 3e qui sont au moins une fois dans l'erreur, on constate que certaines flèches vont dans la même direction, c'est-à-dire qu'un certain nombre d'élèves ont le même comportement à la question a. et à la question b. On distingue ainsi clairement deux profils d'élèves, et nous les avons représentés par un nuage de couleur dans le tableau 6.5.

En revanche en 5e, on ne distingue pas de flèches qui ont la même direction (hormis les flèches – bien moins nombreuses qu'en 3e – qui représentent les élèves qui appartiennent à la catégorie V-V). En effet, les profils sont beaucoup plus éclatés et on ne relève pas vraiment de comportements similaires dans l'erreur. Par exemple, il semble que les élèves qui appartiennent à la catégorie F-F *invariable* à la question b. (ces élèves ne reconnaissent pas la symétrie axiale) ont tous eu un comportement différent à la question a. (un disque coloré regroupe ces élèves dans le tableau 6.6).

# Deux pages « paysage » dans un fichiers à part

## 2. Etude de l'ETG personnel des élèves de la classe de 3e

Nous avons analysé chaque production d'élève de chaque profil. Nous avons alors déduit que l'ETG personnel des élèves de 3$^{e}$ semblait relativement stable. Nous expliquons cette stabilité par un usage souple (et sans erreurs) des invariants opératoires caractéristiques de la symétrie axiale selon la tâche (et comme attendu *a priori)*. Les élèves de 3$^{e}$ semblent adapter leur ETG selon la perception suggérée par la tâche lorsqu'il s'agit de reconnaître une symétrie. Par exemple, un élève citera plutôt des arguments empiriques tels que le « reflet du dessin » dans le cas dit de « perception globale » (tout en inscrivant sur la figure le codage de l'orthogonalité) pour justifier la symétrie axiale alors que dans le cas dit de « perception ponctuelle », ce même élève justifiera la reconnaissance de la symétrie axiale en donnant explicitement et uniquement les relations d'orthogonalité entre deux segments (d'extrémité un point et son image) et en laissant le support graphique vierge. Dans ce cas, l'élève met en œuvre explicitement une déconstruction dimensionnelle de la figure afin de justifier sa reconnaissance de la symétrie par des propriétés caractéristiques de celle-ci dans le cadre de la géométrie affine euclidienne. Nous caractérisons l'ETG personnel des élèves de 3$^{e}$ comme étant stable car on distingue un seul type d'erreur qui porte sur la reconnaissance de rotation erronée à la fois dans le cas a. et dans le cas b. et quelle que soit la perception suggérée par la tâche. L'élève applique alors le théorème-en-acte de cocyclicité qui consiste à vérifier que si un point et son image supposée appartiennent à un même cercle, alors il s'agit d'une rotation. Ce théorème-en-acte est valide dans le cas a. (car il s'agit d'une rotation de 180°) mais n'est pas valide dans le cas b. car il s'agit de reconnaître une symétrie axiale (figure 7). Ce théorème-en-acte rend compte d'une déconstruction instrumentale car l'élève retrouve le schème instrumenté (avec le compas) de la construction de l'image d'un point par une rotation. Cependant ce théorème-en-acte ne prend pas en compte la conservation de la mesure d'angle qui est pourtant une caractéristique mathématique essentielle de la rotation. On pouvait s'attendre à une telle erreur étant donnée la position relative des deux triangles. Cependant, cette erreur est également fréquente dans le cas PP alors que la transformation est décrite point par point : « CDE en GFE ».

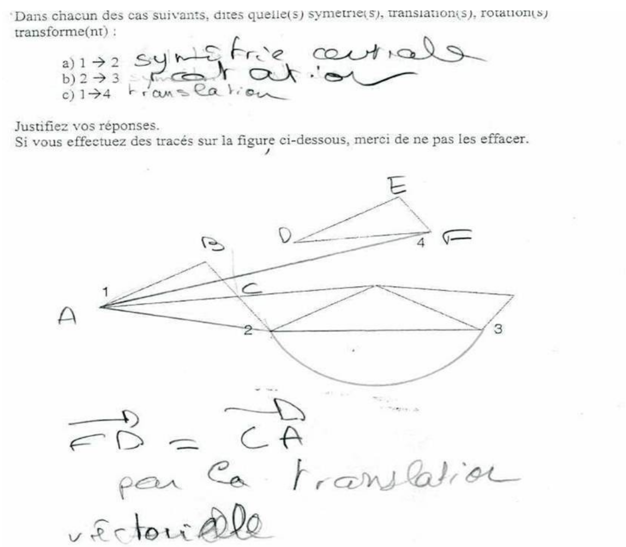


*Figure 7 : exemple d'un emploi non valide du théorème en acte de cocyclicité dans le cas PG.*

On observe ainsi un traitement de la figure différent selon la transformation en jeu :

- **une déconstruction instrumentale dans le cas de la rotation**, qui semble relativement constante quelque soit la perception suggérée par la tâche. Malgré le changement de contrat, le rapport à la figure reste celui mise en œuvre par une déconstruction instrumentale. Ceci semble cohérent avec la thèse de Duval qui oppose la déconstruction instrumentale et la déconstruction dimensionnelle ; cette dernière n'allant pas de soi et est pourtant la seule à être associée avec une activité discursive.
- **une adaptation à la tâche dans le cas de la symétrie axiale** (et même centrale), pouvant aller jusqu'à la mise en œuvre d'une déconstruction dimensionnelle maîtrisée et qui conduit jusqu'à un véritable raisonnement déductif. En effet « l'appréhension discursive d'une figure correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive » (Duval 1994, p. 124).

### *3. Etude de l'ETG personnel des élèves de la classe de 5e*

D'après le tableau 6.6, les profils des élèves de la classe de 5$^{e}$ sont plus éclatés. Ceci annonce en effet que l'ETG personnel des élèves de 5$^{e}$ est plus instable que celui des élèves de 3$^{e}$ (ce qui n'est pas surprenant). Les erreurs y sont plus diversifiées. On relève notamment un « amalgame d'une notion sur un support donné » au sens d'Artigue (1990), déjà remarqué dans les travaux de Cassan (1997). Certains élèves reconnaissent davantage de symétries axiales erronées dans le cas PG et davantage de symétries centrales erronées dans le cas PP (il serait nécessaire d'étudier des situations intermédiaires où l'axe n'est pas vertical et les figures n'ont pas de points communs). Nous justifions néanmoins ces confusions du fait de la trop grande proximité des invariants opératoires entre ces deux transformations à ce niveau scolaire (bien que l'une soit un déplacement et l'autre un antidéplacement). Nous relevons en particulier des effets de contrat exprimant des passages artificiels vers la déconstruction dimensionnelle dans le cas PP. Illustrons notre propos en citant l'exemple d'un élève (et il n'est pas le seul) qui propose des réponses correctes dans le cas PG mais qui propose des réponses erronées dans le cas PP (alors que le quadrillage révèle l'axe de symétrie vertical contrairement à la situation PG). En effet, cet élève justifie ses réponses dans le cas PG par des arguments empiriques du type « si on replie la figure sur la droite (d) on s'aperçoit que la figure est superposable » (question b.) alors qu'il change d'avis et justifie la reconnaissance d'une symétrie centrale (erronée donc) à la question b. dans le cas PP par l'énonciation d'une propriété au format institutionnel « car dans la symétrie centrale l'image d'une figure est une figure de même longueur et c'est le cas ici ».

## 4. Conclusion : une évolution du statut de la symétrie axiale à travers l'ETG personnel de l'élève

Si nous comparons les ETG personnels des élèves de 5$^{e}$ et de 3$^{e}$, la symétrie axiale semble jouer un rôle très différent à ces deux niveaux dans la construction de l'ETG personnel de l'élève. En 5$^{e}$, la symétrie axiale apparaît plutôt comme un obstacle didactique car elle génère de nombreuses erreurs dues à la proximité des invariants opératoires entre la symétrie axiale et la symétrie centrale. On relève en particulier un passage artificiel vers la déconstruction dimensionnelle, phénomène qui nous renvoie au point de vue de Duval qui dénonce les contraintes institutionnelles de l'enseignement secondaire « à faire comme si la déconstruction dimensionnelle était évidente, alors qu'elle est contraire au fonctionnement normal et intuitif de la visualisation » (Duval 2005, p. 47). En revanche en 3$^{e}$, la symétrie axiale semble plutôt jouer un rôle essentiel dans l'organisation de l'ETG de l'élève et semble s'adapter à la tâche, révélant même une dialectique GI-GII maîtrisée. La symétrie axiale permet même à l'élève d'organiser son propre réseau de propriétés métriques et même de réaliser un raisonnement déductif. Les invariants opératoires relatifs à la reconnaissance de la symétrie semblent cette fois opposés à ceux de la rotation. En effet les invariants opératoires de cette dernière (qui renvoient plutôt à une déconstruction instrumentale) semble figés quelques soient les changements de variables didactiques prévues entre les cas PG et PP.

Il serait alors approprié de proposer des tâches intermédiaires jouant sur d'autres variables didactiques (telles que la position des figures en proposant des figures qui n'ont pas de points communs par exemple) afin de confirmer l'hypothèse que la perception suggérée par la tâche module la distance entre l'ETG personnel de l'élève et l'ETG de référence attendu par le professeur en fonction de la transformation en jeu. Dans le but d'expliquer les résultats obtenus à partir de l'analyse de ces tâches, nous avons observé l'enseignement reçu par ces élèves concernant la symétrie centrale en 5$^{e}$ et la rotation en 3$^{e}$, donné par le même professeur Mme B.

## 5. Liens avec l'enseignement reçu par ces élèves

Ce paragraphe concerne directement la question Q3 de recherche concernant la distance entre l'ETG mis en place par le professeur et l'ETG que l'élève s'approprie finalement. Nous questionnons la transférabilité des processus de déconstruction des figures soulevée par Duval (2005) et qui, d'après l'auteur, ne vont pas de soi. Quelle est la prise en charge de ces différents passages de déconstruction dimensionnelle par l'enseignant à ces deux niveaux différents : en 5$^{e}$ et en 3$^{e}$ ?

### *Méthodologie adaptée : analyse des séances en terme d' « incidents »*

Notre méthodologie d'analyse se concentre sur l'analyse des malentendus entre le professeur et les élèves, visibles à partir de nos retranscriptions des séances. Nous faisons alors référence à la notion d' « incident » au sens de Roditi (2003) :

> « Une manifestation publique (au sens où elle s'intègre à la dynamique de la classe) d'un élève ou d'un groupe, en relation avec l'enseignement, et en décalage négatif par rapport à l'ensemble des réponses correctes envisageables compte tenu de la tâche proposée. » (Roditi 2003, p192)

### *Résultats : une distance sous-estimée entre L'ETG « standard » mis en place par le professeur et l'ETG personnel de l'élève*

Nos analyses ont alors mis en évidence une distance sous-estimée entre l'ETG idoine mis en place par le professeur et l'ETG personnel de l'élève en 5$^{e}$ et en 3$^{e}$. Cette distance peut alors s'expliquer en partie par des incidents relatifs à des changements implicites de dimension des objets en jeu qui font écho à un phénomène décrit par Duval (2005) : le « hiatus dimensionnel ».

> « Toutes les progressions de connaissances semblent s'organiser selon le même ordre « conceptuel » : ((((points→droites)→segments de droites)→polygones)→polyèdres). […] cela va donc dans un sens contraire du travail long et nécessaire de déconstruction dimensionnelle pour entrer dans la compréhension des connaissances géométriques. » (Duval 2005, p45-47)

Nous illustrons notre propos par un extrait de séquences lors de la construction du symétrique d'une figure par symétrie centrale lors de la première séance consacrée à la symétrie centrale en 5e. Cet extrait témoigne alors d'un malentendu entre le professeur et l'élève concernant la dimension dans laquelle s'inscrit l'ETG de l'élève et celui du professeur :

> « E : ben moi je calque sur la figure F1, après avec le compas, je mets le compas sur le point O et sur le calque.
> P : Ah! La pointe du compas ? Donc qu'est-ce que tu fais avec le point O ?
> E : C'est l'axe.
> P : C'est l'axe ? Le point c'est l'axe… c'est un point !
> E : Oui.
> P : Un axe, c'est une droite. Et qu'est-ce que tu fais avec ce point avec ton compas dessus ? … Il dit qu'il met le compas sur le point O et après ?
> E' : Après il met le compas sur le point O et il tourne la feuille.
> P : Vous avez entendu ? (…) Quel geste a-t-elle fait ? Elle a tourné quoi ?
> E : Autour de O.
> P : Autour du point O qui lui est … complètement…
> E : L'axe de symétrie.
> P : C'est le centre ! »

Les échanges fermés entre l'élève et le professeur révèlent un malentendu résistant. Le professeur s'attend à ce que l'élève dise que le centre de symétrie est fixe ou est le centre de symétrie, or l'élève fait une correspondance des signifiants (par analogie avec la symétrie axiale) de cette invariance alors matérialisée par la branche du compas. Par conséquent pour l'élève, « le centre de symétrie est donc l'axe de symétrie », alors que le professeur lui, considère seulement le plan et donc le centre de symétrie. Les interlocuteurs n'usent donc pas des mêmes référents, et leur ETG ne sont pas dans la même dimension (celui de l'élève se situe en 3D alors que celui du professeur est en 2D), ce qui provoque cet incident.

Nous expliquons aussi cette distance par des incidents provoqués par la dénaturation de certaines pratiques institutionnalisées comme l'illustre cet extrait de séances en classe de 3 e lors de l'institutionnalisation de la construction de l'image d'un segment par une rotation. On assiste alors à la mise en place du théorème-en-acte de cocyclité, identifié d'après notre questionnaire.

> « E : Je prends la distance AO et je reporte de l'autre côté.
> P : Et après ?
> E : Ben on fait un genre de demi-cercle.
> P : un arc de cercle.
> E : Un arc de cercle de 50°.
> P : Un arc de cercle. Et je mesure un angle de 50° (…) je trace et j'obtiens le point A'. Faites ça avec organisation, c'est-à-dire moi je vous conseille de transformer le point A puis de transformer le point B puis de tracer le segment; ne faites pas tout en même temps, et tournez dans le sens positif.
> E **: On fait aussi le point B avec 50° ?**
> P : Pardon ? Ben oui, c'est la même rotation. Dis donc demain matin, si vous venez en cours, prenez votre compas et votre rapporteur, ça peut servir… »

On constate alors que le professeur met en place de manière séquentielle la construction de l'image d'un segment par une rotation (étape par étape et avec la représentation externe des arcs de cercle) dans laquelle finalement le lien entre les étapes à travers la conservation de la mesure d'angle, caractéristique mathématique de la rotation, n'est pas institutionnalisé, car tout se passe comme si cela allait de soi « ben oui, c'est la même rotation ».

### *Conclusions sur les liens avec l'enseignement reçu par ces élèves*

Les deux extraits de séances cités précédemment illustrent bien les effets possibles de l'enseignement reçu par ces élèves sur la construction de leur ETG et donc sur le processus de conceptualisation en jeu. On relève en particulier des changements implicites de la dimension des objets mathématiques en jeu, qui peuvent provoquer un certain nombre d'incidents et par la suite des adaptations erronées (et relevées par la suite dans notre questionnaire). Nous caractérisons ces effets comme une conséquence de l'existence d'une distance (sous-estimée) entre l'ETG « standard » mis en place par le professeur (impliquant des basculements implicites de paradigmes GI-GII, et aussi, ce qu'appelle Duval le « hiatus dimensionnel ») et l'ETG personnel que l'élève s'approprie finalement.

## IV Conclusions générales, limites et perspectives

Notre recherche porte sur les effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège. Nous avons adopté le terme de conceptualisation au sens de Vergnaud, c'est-à-dire que nous avons cherché à étudier le processus d'appréhension d'un concept chez un élève à travers son activité (scolaire). Nous avons alors déterminé un type de situation (la situation de reconnaissance des transformations du plan) que nous avons proposé à des élèves de 5$^{e}$ et de 3$^{e}$ afin d'étudier et de comparer les différentes adaptations de leurs invariants opératoires qui organisent leur Espace de Travail Géométrique. Un tel dispositif méthodologique et théorique avait pour but de répondre aux questions de recherche Q1 et Q2 citées précédemment qui avaient pour but de nourrir la question plus générale concernant le rôle de la symétrie axiale en tant que levier ou en tant qu'obstacle dans l'apprentissage des autres transformations du plan. Les résultats obtenus après notre travail de recherche comportent évidemment des nuances et ne nous permettent pas de trancher entre ces deux pôles : obstacle ou levier. Nos analyses se sont concentrées sur le rôle joué par la symétrie axiale dans le traitement de la figure au cœur de la construction de l'ETG personnel de l'élève (Q4) qui alimente alors les questions de recherche Q1 et Q2.

Dans le cas des élèves de 3$^{e}$, nous avons mis en évidence une opposition entre les invariants opératoires de la rotation et ceux de la symétrie axiale. Selon la tâche, la reconnaissance de la symétrie axiale organise une déconstruction dimensionnelle de la figure et met en place un réseau de propriétés dans le cadre de la géométrie affine euclidienne : l'orthogonalité, le milieu, l'équidistance, la conservation des mesures, ou encore la symétrie vue comme une application du plan point par point, tandis que la rotation s'en tient à une déconstruction instrumentale (théorème-en-acte de cocyclicité) de la figure inhibant les propriétés de conservation métriques telle que la conservation de la mesure d'angle. Dans certains cas observés, la symétrie axiale assure donc l'organisation des éléments de dimension inférieure (1D et 0D) de la figure en vue d'un raisonnement déductif pour reconnaître justement une symétrie axiale.

Notre étude de cas des ETG personnels des élèves de 5$^{e}$ a mis en évidence un rôle très différent attribué à la symétrie axiale. Les schèmes de reconnaissance de la symétrie axiale et ceux de la symétrie centrale sollicitent certains concepts et théorèmes-en-acte communs tels que le schème de bidécomposabilité, l'équidistance, le milieu et la conservation des mesures assurée par le principe de superposition. La proximité de ces schèmes provoque, chez certains élèves, un « amalgame » entre la symétrie axiale et la symétrie centrale. Dans certains cas observés, la symétrie axiale apparaît donc comme un obstacle cognitif, voire didactique d'après nos observations de classe (non relatées ici). On constate ainsi un changement de statut accordé à la symétrie axiale au cours du collège. Pourquoi et comment s'opère un tel basculement ?

Nous avons observé les premières séances d'enseignement de la symétrie centrale en 5 ᵉ et de la rotation en 3ᵉ du même professeur, Mme B. (qui était le professeur de ces élèves interrogés) afin d'étudier le rôle joué par l'enseignement. Notre objectif était de répondre aux questions de recherche Q3 (énoncées précédemment). Les basculements de paradigmes, le « hiatus dimensionnel » à propos des changements de dimension des objets mathématiques en jeu ou encore la dénaturation par l'élève de certaines pratiques institutionnalisées en classe, peuvent expliquer l'existence d'une distance entre l'ETG idoine (standard) construit en classe et l'ETG personnel que l'élève s'approprie finalement. Ces glissements sont difficilement prévisibles car ils se forment lors d'incidents qui peuvent sembler négligeables (comme l'incident lié à la conservation de la mesure d'angle en 3ᵉ) ou semblent camouflées tant que l'élève ne se retrouve pas dans une situation qui les mette explicitement en défaut.

L'intérêt de ce travail porte également sur l'étude de la conduite d'une population dans des activités qui ne visent pas un raisonnement géométrique déductif, mais qui vise une réalité pratique. La symétrie axiale apparaît comme un concept organisateur de la conduite dans ces deux institutions pourtant bien distinctes. Dans le cas de l'institution scolaire, la symétrie axiale peut révéler une maîtrise de la dialectique GI-GII, mais il resterait à démontrer si de tels basculements de paradigmes sont favorables au développement de la pensée géométrique. Dans le contexte de l'institution professionnelle, la symétrie axiale se révèle être un concept « naturalisé » (dans le sens où la routinisation de certaines pratiques a poli l'origine de ces pratiques), et joue un rôle organisateur dans l'organisation de l'Espace de Travail Géométrique de l'artisan. Il resterait également à déterminer, dans le cadre de la didactique professionnelle, si ce concept pourrait être apparenté à un « concept pragmatique » au sens de Pastré (2002).

Nous indiquons dans ce paragraphe un certain nombre de limites (non exhaustif) à ce travail : celles de nature méthodologique mais aussi celles liées au contexte humain et culturel dans lequel s'est réalisé ce travail de recherche. Nous évoquerons également la portée limitée de nos résultats par rapport à l'ambition initiale de ce travail.

L'un des choix théoriques porte sur la théorie des champs conceptuels. Nous avons nuancé dès le début notre utilisation de ce cadre théorique en nous limitant à un seul type de situations. Or, une étude du champ conceptuel plus aboutie impliquerait l'analyse d'autres classes de situations (dont celle de construction par exemple ou encore à partir de situations intermédiaires inspirées de celles présentées ici qui permettraient de tenir compte d'autres variables didactiques) et permettrait de mettre en évidence d'autres types d'invariants et de compléter notre étude sur la construction de l'ETG personnel d'un élève. Nous pouvons également envisager de poursuivre ce travail à partir de ces données déjà récoltées mais non exploitées. Un autre pan méthodologique que nous n'avons pas exploité est celui de mener des entretiens individuels avec certains élèves. En effet, un entretien individuel aurait également guidé voire précisé certaines de nos interprétations concernant des signifiants graphiques isolés. Notre thèse est finalement une étude partielle des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries, car, d'une part, nous n'avons pas considéré le cas de la translation, et d'autre part parce que le processus de conceptualisation des isométries n'est tout simplement pas achevé en classe de 3ᵉ. Au contraire, l'enseignement des transformations du plan continue au lycée, notamment à travers la géométrie analytique où l'élève sera amené à reconsidérer à nouveau le groupe des isométries. Les schèmes disponibles de l'élève s'adapteront donc à de nouvelles situations. Notre étude rend tout de même compte de certains effets didactiques liés directement au concept de symétrie axiale dans la nature même du travail géométrique de l'élève.

Enfin, la récolte de nos données s'est déroulée entre septembre 2005 et juin 2007 sous la contrainte d'un certain programme scolaire qui a changé depuis. En effet, la rotation a été supprimée des programmes à la rentrée 2008. Un tel changement va donc impliquer une nouvelle conceptualisation des transformations du plan auprès des élèves de collège et relance alors le débat sur le rôle accordé à la symétrie axiale, qui va peut-être être encore plus dogmatique. Quel effet aura ce retardement de l'enseignement des rotations ? Va-t-il conforter le rôle organisateur du concept de symétrie dans le développement du réseau des propriétés qui caractérisent les isométries ? Toutes ces questions nous offrent également de nouvelles perspectives de recherche et de nouvelles investigations possibles.

## Bibliographie


Artigue M. (1990), Épistémologie et Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 241-286.

Bachelard G. (1934), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris : Vrin (édition 2004).

Bartolini-Bussi M. & Boero P. (1998), *Teaching and Learning Geometry in Contexts, ICMI study perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, Kluwer, 52-62.

Bessot A. & Laborde C. (2005), *Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture – tracé du bâtiment*, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier Grenoble (document interne).

Bkouche R. (1992), De la géométrie et des transformations, *Repères IREM*, 4, 135-158.

Boero P. (ed.) (1999), Teaching and learning mathematics in context, *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1-3).

Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : la Pensée Sauvage.

Bulf C. (2008), *Etude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Irem Paris 7.

Cassan (Gobert) S. (1997), Centre de symétrie d'une figure, comparaisons de productions d'élèves de CM2 et de cinquième, *Petit x*, 46, 55-84.

Chanson L. (1988), *Traité d'ébénisterie*, Dourdan : H. VIAL (15ème édition).

Denys B. & Grenier D. (1986), Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais face à une même tâche de construction, *Petit x,* 12, 33-56.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères – IREM,* 17, 121-138.

Duval R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53

Euclide (1994), *Les éléments d'Euclide*, traduction et commentaires de B. Vitrac Paris : PUF.

Freudenthal H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht/Boston/Lancaster: Mathematics Education Library, Reidel Publishing Company.

Giaquinto M. (2005), *From symmetry perception to basic geometry*, in: Mancosu P., Jorgensen K. F. & Pederson S.A., *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, Springer, 31-55.

Grenier D. & Laborde C. (1988), *Transformations géométriques – Le cas de la symétrie orthogonale*, in : Vergnaud G., Brousseau G., & Hulin M. (éd.) *Didactique et acquisition des grenierconnaissances scientifiques, Actes du colloque de Sèvres Mai 1987*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 65-86.

Grenier D. (1990), Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(1), 5-60.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Jahn A.P. (1998), *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-Géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Kuzniak A. Parzysz B. et Vivier L. (2008), Du monde réel au monde mathématique, un parcours bibliographique et didactique, *Cahier de DIDIREM*, IREM de l'Université Paris Diderot (Paris 7), 58, 5-22.

Lima I. (2006), De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs – Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Noss R., Hoyles C. & Pozzi S. (2000), *Working knowledge: Mathematics in use*, in: Bessot A. & Ridgway J. *Education for Mathematics in the workplace*, Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, 24, 17-35.

Palmer S.E. (1985), The role of symmetry in shape perception, *Acta Psychologica*, 59, 67-90.

Pastré P. (2002), L'analyse du travail en didactique professionnelle, *Revue française de Pédagogie*, 138, janvier-février-mars, 9-17.

Presmeg N. & Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2003), Realistic Mathematics Education Research: a PME special issue, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.

Ricaud P. (1999), *Tracés d'Atelier et géométrie Tome 1 et Tome 2*, Dourdan : H. VIAL.

Rock I. & Leaman R. (1963), An experimental analysis of visual symmetry, *Acta Psychologica*, 21, 171-183.

Roditi E. (2003), Régularité et Variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 183-216.

Straesser R. (2000), *Mathematical means and Models from vocational contexts – a german perspective*, in: Bessot A. & Ridgway J. *Education for Mathematics in the workplace*, Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, 24, 65-80.

Tavignot P. (1993), Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 13(3), 257-294.

Vergnaud G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 133-170.

Vergnaud G. (1996), *Au fond de l'action, la conceptualisation*, in : Barbier G.-M (dir.) *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, Paris : PUF, 275-292.

Vergnaud G. (2001), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, *Actes du colloque GDM* (Groupe des Didacticiens des Mathématiques) [5].

Vergnaud G. (2007) *in* : Merry M. (dir.) *Activité Humaine et Conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presses Universitaires du Mirail. 27-37 & 341-357.

Williams J. & Wake G. (2007), Black boxes in workplace mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 64, 317-343.

5 http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/ConfMontrealmai2001.pdf