

Didactique de la géométrie

Peut-on commencer à faire le point ?

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Laboratoire André Revuz, Université Paris-Diderot, Université d'Artois,

Marie-Hélène Salin

Laboratoire LACES, équipe DAESL, Université Victor Segalen Bordeaux 2

Résumé

Cet exposé répond à une demande de revue de questions sur le thème de la géométrie. Nous avons d'emblée apporté deux limitations à notre travail : d'une part, centrer la réflexion sur la géométrie dans la scolarité obligatoire, primaire et collège, sans aborder la question de la construction et de la formulation de la démonstration et sans inclure la mesure des grandeurs géométriques ; d'autre part, réaliser seulement une revue des travaux français. Même dans ce cadre restreint, nous ne présentons pas une synthèse des travaux existants. En revanche, en nous appuyant sur des recherches réalisées sur ce thème depuis 1973 (date avancée en 1993 comme marquant le début de la didactique des mathématiques), nous essayons de formuler et d'argumenter des questions, abordées ou non par les recherches, qui nous paraissent importantes pour l'enseignement de la géométrie à ces niveaux et qu'il nous paraît souhaitable d'aborder dans les recherches à venir. Nous tentons de situer les cadres théoriques utilisés dans ces recherches dans un questionnement plus général, avec un souci de nature épistémologique, épistémologie des mathématiques, mais aussi épistémologie de la didactique.

Mots-clés

Géométrie, enseignement de la géométrie, revue de questions de didactique de la géométrie, espace sensible, espace graphique, modélisation, enseignement obligatoire, développement historique de la didactique de la géométrie, recensement de travaux.

Introduction

Cet exposé répond à une demande des organisateurs du séminaire, Lalina Coulanges et Christophe Hache : réaliser une revue de questions autour des travaux en didactique de la géométrie. Nous les remercions de nous avoir donné l'occasion de travailler ensemble. C'était un travail intéressant mais un gros travail et il n'est pas fini. Nous sommes conscientes de ne pas avoir répondu à la commande qui, à mesure que nous avançons nous paraissait de plus en plus vaste. Nous y avons apporté deux limitations : d'une part, nous n'avons considéré que la géométrie dans la scolarité obligatoire, primaire et collège, sans aborder la question de la construction et de la formulation de la démonstration et sans inclure la mesure des grandeurs géométriques ni les vecteurs. D'autre part, nous nous sommes limitées aux travaux francophones et même français. En revanche, nous avons essayé d'ancrer notre questionnement dans une réflexion prenant en compte le développement historique de la didactique des mathématiques en France et de la didactique de la géométrie en particulier, en remontant en amont de ce qu'on appelle habituellement didactique. Nous ne ferons donc pas une synthèse des travaux de didactique de la géométrie. Une telle synthèse resterait à faire. Notre projet a plutôt été de

questionner les travaux qui ont accompagné et étudié l'enseignement de la géométrie en France et son évolution depuis une quarantaine d'années¹ et d'essayer d'en tirer des questions pour des recherches futures.

Nous nous sommes intéressées plus particulièrement au début du collège parce qu'il nous paraît important de développer des recherches à ce niveau puisque c'est là et pas beaucoup avant que peut se négocier vraiment l'entrée dans une démarche géométrique théorique (pré-axiomatique). En effet, c'est à partir de cet âge que le développement des enfants et de leurs connaissances permet de l'envisager et c'est à partir de ce niveau que les enseignants, spécialistes de mathématiques, sont censés disposer de la formation mathématique nécessaire à cet enseignement.

Nous n'avons pas envisagé les questions du point de vue des cadres théoriques actuellement utilisés en didactique de la géométrie pour garder toute liberté d'introduire les distinctions et catégories qui nous semblaient pertinentes afin d'essayer d'englober tout ce qui a été fait, et aussi d'identifier ce qu'il serait intéressant de faire. Évidemment nous partageons une culture didactique très liée à la théorie des situations qui sera peut-être perceptible.

Tout notre travail est porté par une forte interrogation épistémologique, épistémologie de la géométrie bien sûr mais aussi épistémologie de la didactique, notamment sur ses finalités : nous avons essayé de dépasser la perspective de l'enseignement actuel et de nous mettre dans une perspective plus générale avec l'idée que la didactique vise non seulement à aider les enseignants et la formation des enseignants mais aussi à éclairer les choix des décideurs.

Nous avons d'une part cherché à tirer le bilan de ce qui a été fait en tentant d'identifier les avancées, les abandons, les questions qui restent à creuser. D'autre part, nous avons essayé de croiser ce bilan avec un regard sur des aspects épistémologiques et théoriques pour voir comment on pouvait poser maintenant des questions pour les recherches en didactique de la géométrie pour le primaire et le collège, en amont et en parallèle de celles concernant la démonstration.

Dans une première partie, nous présenterons notre vision du développement historique des travaux de didactique de la géométrie en France. Dans une deuxième partie, nous reviendrons sur les finalités de l'enseignement de la géométrie et nous nous intéresserons plus particulièrement à ce que nous appelons l'espace graphique, comme interface entre les aspects pratiques et théoriques de la géométrie. Au fil de cette réflexion, nous dégagerons quelques questions qui nous paraissent se poser en didactique de la géométrie. Dans la conclusion, nous tenterons quelques pistes pour une synthèse (future) des travaux existants et pour de nouvelles recherches. Il faut noter qu'au moment de la préparation et de la présentation de cet exposé, les actes de l'école d'été de 2007 n'étaient pas parus et que nous n'avons eu accès qu'à une partie des versions provisoires des textes ; comme nous n'avons participé ni l'une ni l'autre à cette école d'été, même si nous référons ici ou là à quelques-uns des textes qui en sont issus, notre travail est donc à considérer comme une contribution supplémentaire au thème « Géométrie » de ces actes plutôt que comme une suite.

1 Il serait intéressant de remonter plus loin, en particulier dans la première moitié du 20^{ème} siècle, au cours duquel de nombreux mathématiciens ont réfléchi et écrit sur la géométrie et son enseignement (Poincaré, Méray, Bourlet, Fréchet...)I

Première partie : Regard historique sur les travaux de didactique de la géométrie

Une première question concerne la date à partir de laquelle commencer cet historique. Le colloque « Vingt ans de didactique » ayant eu lieu en 93, nous avons décidé de regarder ce qui s'est passé à partir des années 73.

Une deuxième question est relative aux moyens de recueillir de l'information sur cette période : Grand N commence en 74, RDM en 80, Petit x en 83, Repères IREM en 90. Mais, dès leur création à partir de 1969, les IREM travaillaient et l'APMEP a publié des brochures attestant des travaux de l'époque, dont beaucoup concernaient l'enseignement de la géométrie, objet de nombreuses polémiques.

Notre « état des lieux » est découpé en deux parties : 73-93 puis à partir de 93. 93 est la borne de ce premier état des lieux car c'est une date à laquelle les textes donnant de grandes orientations pour les recherches sur l'enseignement de la géométrie ont été publiés et serviront de point de départ à de nombreuses thèses.

Quatre raisons (au moins) expliquent pourquoi il est intéressant de réaliser un historique : il y a des questions récurrentes, par contre d'autres se posent qui n'étaient pas évoquées, d'autres ne sont pratiquement plus prises en compte alors qu'elles n'ont pas été résolues, enfin, l'EIAH a mis en lumière de nouveaux objets.

1. Premier état des lieux : 1973-1993

Les années 73-83 : le travail des groupes IREM

A la création des IREM, la didactique n'est pas constituée en tant que discipline, (elle ne porte pas encore de nom), les groupes de recherche qui se constituent ont pour but d'associer enseignants du secondaire, professeurs d'école normale et enseignants du supérieur pour travailler à partir des nouveaux programmes, liés aux mathématiques modernes².

- **Au point de départ du questionnement sur la géométrie dans les IREM**, il y a le programme du collège de 70-73. Voici ce qu'André Revuz écrivait en 1975 :

« Le programme de 70 était dans l'esprit de ceux que j'appellerais modestement les plus lucides de ses auteurs, un programme de transition avec un objectif immédiat : donner clairement à la géométrie le statut épistémologique qui est le sien, de théorie physique, et un objectif plus lointain : diffuser l'idée que le modèle le plus opérationnel de la réalité qu'elle étudie est celui d'un espace affine sur un espace vectoriel de dimension 3 et muni d'un produit scalaire. »

Cette intention a été réalisée par la commission Lichnerowicz en choisissant de

« traiter des propriétés affines d'abord (en 4ème) et de mettre provisoirement entre parenthèses la notion de distance ».

Mais il y a loin de passer des intentions au contenu effectif de l'enseignement, d'où la création de nombreux groupes IREM sur ce sujet, comme le groupe Jeomatri (IREM de Grenoble). Revuz note la production de ce groupe comme un exemple très intéressant de manuel montrant « qu'il est parfaitement possible de faire comprendre aux élèves le statut épistémologique de la géométrie, c'est-à-dire, en particulier le statut des axiomes », et ceci dans le cadre de l'introduction de la géométrie affine en 4ème.

2 A partir de 83, la didactique naissante se saisit de la question de l'enseignement de la géométrie, de manière plus fondamentale que dans cette première décennie, où les équipes IREM sont confrontées à l'impact des décisions prises par la commission Lichnerowicz.

Pourtant, très vite, (à partir de 73), certains groupes IREM réagissent face au traumatisme que provoque la « géométrie des maths modernes » sur l'ensemble des enseignants de collège.

L'IREM de Clermont-Ferrand lance une Offre Publique de Collaboration (OPC) pour une expérimentation de programmes de quatrième et troisième (surtout en géométrie mais non exclusivement). Cinq IREM répondent favorablement, et la recherche est inscrite parmi les recherches INRDP³. Une évaluation fouillée est menée sous l'égide de Régis Gras, avec tout l'arsenal statistique qu'il développe.

Voici comment cette recherche est présentée (Pérol, 1979) :

« Il s'agit de préparer un éventuel changement de programme applicable après les diverses phases de l'expérimentation, donc dans quelques années. [...] La Commission ministérielle Lichnerowicz a, lors de sa réunion du lundi 2 avril, approuvé le principe d'une telle expérimentation. [...] nous pensons que les programmes actuels ont de très graves défauts et que les nouvelles annexes et commentaires divers ne peuvent constituer que des palliatifs. Il faut donc songer à les remplacer et, pour faire mieux, il faut cette fois les appuyer sur une expérimentation sérieuse. Parmi les reproches que nous pouvons adresser aux actuels programmes, relevons-en deux pour fonder sur eux nos propositions.

1) Les élèves qui ne poursuivront pas des études par la voie longue ont été considérés comme sans intérêt. Les tracés divers dont beaucoup auront besoin n'arrivent qu'après des chapitres plus théoriques qui leur font perdre pied. Nous soutenons que c'est, au contraire, sur leurs besoins à eux que l'enseignement doit être bâti et que l'on obtiendra ainsi, par surcroît, un meilleur enseignement pour ceux qui poursuivront des études longues de mathématiques.

2) La voie actuelle choisie pour l'apprentissage n'a été justifiée que par ses qualités comme voie d'exposition. En caricaturant à peine, on pourrait dire qu'a été faite pour elle la première phase du mode d'emploi de Bourbaki. Mais nous ne pouvons pas supposer à nos élèves "une certaine habitude du raisonnement mathématique" puisque notre tâche à nous est précisément de les rapprocher de ce but éloigné. »

Les objectifs principaux de cette recherche OPC sont de « fonder davantage l'enseignement de la géométrie sur l'activité des élèves, s'intéresser ainsi prioritairement non à l'édification d'une mathématique mais au développement des diverses capacités de tous les élèves ». Les orientations choisies sont relatives aux méthodes d'enseignement, à l'axiomatique et aux démonstrations.

Il s'agit selon nous, d'une des premières recherches en didactique des mathématiques, tentant de prendre en compte à la fois les contenus mathématiques, les objectifs de l'enseignement et les sujets de l'enseignement, les élèves. Les observations se sont déroulées dans 30 classes et ont touché entre 600 et 800 élèves. Cette recherche a fourni beaucoup de matériaux pour les brochures publiées par l'APMEP : Géométrie au premier cycle tome 1, APMEP n°21 (1977), tome 2 n°22 (1978) et un compte-rendu : Recherche inter-IREM 73-78 en géométrie de 4ème-3ème dite OPC : « Réflexion critique et évaluation » publié dans la brochure APMEP n° 34 (1979).

En ce qui concerne les résultats des élèves, la différence de score au test de sortie entre les élèves des classes témoins et ceux des classes expérimentales est nette en géométrie (+ 36%), les enfants faibles et les redoublants progressent mieux dans ces dernières que dans les classes témoins.

3 Nom à l'époque de l'INRP actuel.

- **En 78, arrivent de nouveaux programmes de 4ème - 3ème**, résultat de négociations complexes entre l'Inspection Générale, le ministère et l'APMEP. Ces programmes motivent certains groupes IREM à diversifier et approfondir leurs travaux. De nouvelles brochures sont publiées par l'APMEP : Activités mathématiques en quatrième-troisième n°33 (1980) et n° 38 (1981).

Comment caractériser le contenu de ces quatre brochures ? Elles témoignent d'un questionnement diversifié de la part des nombreux rédacteurs des articles⁴ sur des questions de fond comme : la géométrie, théorie physique ou théorie mathématique, le rôle à donner à l'axiomatique dans l'enseignement en 4ème et 3ème, l'importance du lien géométrique-numérique et du point de vue vectoriel ; elles témoignent à la fois d'une culture mathématique importante (dans le choix et la présentation des activités proposées aux professeurs pour leurs élèves) et de conceptions pédagogiques nouvelles, marquées par les méthodes actives. Toutefois, sans être totalement absente, la question des finalités de l'enseignement de la géométrie est peu présente, le problème du rapport de l'élève aux figures tracées n'est pas vraiment étudié même s'il est évoqué par certains, (voir Revuz 1979 p.29 et Barra et coll., même op. p.38). On ne trouve pas d'analyse *a priori* des situations rapportées ni d'observations systématiques de classes.

- **En ce qui concerne le primaire**, contrairement à ce qui s'était passé pour le secondaire, ce n'est que peu à peu que les personnes engagées dans les recherches IREM vont s'intéresser à la géométrie. Par contre, dès la fin des années 70, on trouve dans les aides pédagogiques publiées par la COPIRELEM ainsi que dans les ERMEL CE et CM, et dans Grand N, des descriptions d'activités géométriques riches et nouvelles par rapport aux enseignements traditionnels, expérimentées dans des classes. Toutefois, ces activités ne sont pas cadrées, il n'y a pas de réflexion générale sur les finalités de l'enseignement de la géométrie ni sur les savoirs à enseigner.

La décade 83-93

Deux « institutions » différentes travaillent sur l'enseignement de la géométrie : les groupes IREM, engagés dans l'action sur le terrain, qui produisent des documents pour l'élaboration de nouveaux programmes puis leur mise en œuvre, et les universitaires, qui produisent des études plus fondamentales.

- **Entre 79 et 85, des groupes IREM** travaillent à l'élaboration de documents pour préparer puis mettre en œuvre de nouveaux programmes dont la parution s'échelonne entre 85 (pour la 6ème où ils sont mis en application en 1986) et 88. L'enseignement de la géométrie y occupe une place importante, avec l'apprentissage du raisonnement déductif qui doit commencer dès la 6ème.

Le travail sur cette question est jalonné par la parution des suivis scientifiques et de différentes brochures IREM, qui font une place importante, à partir de la quatrième à la réflexion sur l'enseignement de la démonstration.

L'émergence de points de vue plus proprement didactiques : des textes importants

A la troisième école d'été, Colette Laborde (1984) fait un « exposé sur la géométrie ». La 4ème partie s'appelle « Problèmes d'enseignement de la géométrie », elle dégage trois thèmes sur lesquels des recherches seraient à développer : restauration d'une problématique de la géométrie, le dessin et la figure géométrique, le numérique et le géométrique. Elle cite peu de références françaises.

4 dont nous conseillons la lecture à ceux qui ne les connaîtraient pas !

C'est à partir de 83 que sont publiées les premières réflexions de fond sur l'enseignement de la géométrie :

Brousseau (1983) : « Étude de questions d'enseignement. L'exemple de la géométrie » (Séminaire Grenoble).

Arsac (1988) : « L'origine de la démonstration » (RDM 8.3) puis Arsac & coll (1992) : « Initiation au raisonnement déductif au collège » (PUL).

Duval (1988) : « Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence » (Annales de didactique n°1).

Duval et Egret (1989) : « L'organisation déductive du discours » et : « Comment une classe de 4ème a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration » (Annales de didactique n°2).

Chevallard & al. (1991-92-93) : Autour de l'enseignement de la géométrie au collège.

Chevallard et Julien (1991) : première partie, Petit x 27

Mercier et Tonnelle (1992) : deuxième partie Petit x 29

Mercier et Tonnelle (1993) : troisième partie Petit x 33

Toutes ces dates sont un peu fictives, car les travaux dont certains témoignent ont été initiés antérieurement, en particulier à l'occasion de l'accompagnement par les IREM des nouveaux programmes de collège 1985. C'est le cas des textes d'Arsac, Chevallard *et al.*, Duval, dont les statuts sont d'ailleurs très différents.

Ces textes, très riches, sont difficilement résumables. Nous pouvons tout de même essayer de préciser leur visée afin de montrer la diversité des problématiques dégagées à cette période ⁵.

Les propositions de Guy Brousseau

Elles s'insèrent dans une réflexion plus générale sur le sens des connaissances, lié aux situations dans lesquelles elles fonctionnent. Brousseau propose de différencier la géométrie comme modèle de l'espace et la géométrie comme théorie mathématique en présentant deux situations fondamentales, représentatives de ces deux fonctions.

Cet article est référencé dans de nombreux travaux, qui ne touchent pas tous à la géométrie étant donné l'horizon ouvert par l'article. Il restaure « une problématique de la géométrie » comme modèle de l'espace qui peut permettre de donner un cadre, une cohérence et des outils méthodologiques pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et il propose une entrée dans la problématique géométrique au collège s'appuyant à la fois sur un rapport explicite à l'espace et sur des interventions didactiques fortes de l'enseignant.

Les travaux d'Arsac

Son étude d'épistémologie didactique de la démonstration emprunte à Balacheff la distinction entre preuve et démonstration. Il pose ainsi son objet :

« Tout le problème consiste à comprendre comment on peut être amené à passer de preuves fondées sur l'évidence de la figure à des démonstrations dont la figure n'est plus que le support, ce qui est d'ailleurs le problème posé dans l'enseignement de la géométrie » (Arsac opus cité p. 276).

Cette étude sert de base aux travaux de l'IREM de Lyon, sur l'initiation au raisonnement déductif dans le domaine de la géométrie, qui en privilégie le sens. Une des situations étudiées, « le triangle aplati », va devenir emblématique des questions d'autres chercheurs sur le rapport à la figure : Berthelot & Salin (1992), Berté (1995-1996), Floris (1995).

⁵ On voit apparaître les noms des futurs directeurs de thèse dans les recherches en didactique des mathématiques sur la géométrie.

Les travaux de Duval

Annales 1 : Duval expose trois formes⁶ d'appréhension des figures de géométrie : perceptive, opératoire et discursive que l'élève doit savoir distinguer. Il insiste sur le rôle de l'appréhension opératoire⁷.

Annales 2 : Le premier article est relatif à l'apprentissage de la démonstration et s'appuie sur une analyse cognitive de la démonstration. Le deuxième propose une ingénierie ayant pour but d'aider les élèves à maîtriser les aspects « techniques » de la démonstration en 4ème.

Les travaux de l'équipe marseillaise

« L'approche tentée consiste à produire une image objective de ce qu'est dans la réalité historico-culturelle la géométrie » en répondant aux questions suivantes :

- Quel est l'objet de la géométrie ?
- Qu'est-ce que l'espace ?
- Comment s'organisent nos connaissances relatives à l'espace ?
- Comment se construit le savoir géométrique ?
- Comment se sert-on du savoir géométrique ?

Comme le texte de Brousseau, ceux de l'équipe marseillaise embrassent large ! Il s'agit de relancer la réflexion des professeurs confrontés au nouveau programme, (le dossier date de 87) sur : « Qu'est-ce que la géométrie ? » et « Géométrie et enseignement ». Les questions ci-dessus sont abordées d'un point de vue épistémologique appuyé sur de nombreux exemples. Dans le deuxième article, un très long développement porte sur le travail du schéma. La troisième partie comporte une courte analyse sur les rapports des élèves à la géométrie enseignée en 6ème et 5ème et une liste d'exemples illustrant la question « Est-il possible de rendre visibles les mathématiques à l'œuvre dans le cours de géométrie du collège ? ». La conclusion annonce une suite qui n'est pas venue, malheureusement :

« Nous pourrions envisager maintenant de nous affronter à la question centrale que tout enseignement de la géométrie se doit de prendre en charge, celle de la géométrie comme *lieu d'exercice de la rationalité*. C'est ce que nous ferons dans un dernier volet, à venir. Mais il fallait retrouver pour cela le chemin de l'espace sensible, pour que la géométrie aide à construire cet objet culturel qui voudrait se donner pour universel et naturel, comme s'il faisait partie du milieu de toute action spatiale. Il fallait donc que la géométrie donne des outils de modélisation de l'espace. C'est seulement à ce prix que la géométrie pourra ne plus être, pour les élèves du Collège, l'occasion d'un travail purement matériel ou symétriquement l'occasion d'un travail purement formel. Le rapport de modélisation que nous cherchons à trouver permet en effet que le retour à l'espace sensible serve de moyen de validation des résultats du travail géométrique. Ces résultats deviennent en effet, dans l'espace sensible de l'action matérielle, des réponses vérifiables expérimentalement. »

- **Deux cours de la 5ème Ecole d'été (1989)** font le point sur les recherches sur l'enseignement de la géométrie, (publiés dans le volume 9.3 de RDM).

Laborde (1990) : « L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques » (RDM 9.3, p. 337-363).

Arsac (1990) : « Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France » (RDM 9.3, p. 247-280).

6 Dans un texte ultérieur paru en 1994 dans Repères-IREM n° 17, il en ajoutera une quatrième : l'appréhension séquentielle, liée à la construction avec des instruments.

7 Cf Mesquita Ana (1989) et Padilla Sanchez Virginia (1992).

L'existence de ces deux cours suppose un développement important des recherches depuis 1984, développement effectivement en cours de réalisation, qui marque la différence avec la période précédente, riche en propositions d'actions innovantes mais peu contrôlées.

C. Laborde commence par préciser ce qu'elle entend par phénomène didactique, fait d'observation interprété à l'aide d'une analyse. Le cours procède à un découpage des phénomènes lié au fonctionnement du système didactique selon le triplet : détermination des contenus d'enseignement, organisation des interactions savoirs-apprenants, organisation entre savoirs, enseignant et apprenants en situation d'enseignement. L'auteur dégage en particulier trois jeux « subtils » liés à l'organisation des milieux des situations d'enseignement de la géométrie : le jeu sur la perception, le jeu sur les instruments, et le jeu sur les systèmes de signifiants, qu'elle met en relation avec les phénomènes didactiques relevés dans les recherches citées.

Le but de l'article d'Arsac est de classer les problématiques présidant aux recherches actuelles sur l'enseignement de la démonstration et du raisonnement. Ces recherches se situent dans deux perspectives différentes : certaines, réalisées dans des groupes IREM et publiées dans les « Suivis scientifiques » partent des problèmes rencontrés par les professeurs et proposent des remédiations. D'autres s'appuient sur une analyse épistémologique du fonctionnement de la démonstration et essaient d'en tirer des conséquences didactiques. L'article montre que ces deux points de départ conduisent à des problématiques différentes : le premier met l'accent sur les problèmes liés à la forme, le second sur les problèmes du sens des démonstrations. L'auteur met en doute la possibilité de l'enseignement systématique de la démonstration.

- Quelques thèses soutenues pendant cette période (83-93), importantes pour leurs répercussions sur les recherches ultérieures sur l'enseignement de la géométrie :

N. Balacheff : Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège (1987).

D. Grenier : Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième (1988).

B. Parsys : Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée : contribution à l'étude de la relation voir/savoir (1989).

R. Berthelot et M.H. Salin : L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire (1992).

2. Et depuis 1993 ?

Les recherches en didactique se sont développées dans de nombreuses directions. L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, qui nous occupe ici, a été l'objet d'un certain nombre de thèses et d'articles originaux⁸, dont il est impossible de faire une synthèse. Nous avons toutefois tenté de les classer pour faire apparaître les thèmes d'études principaux et dégager en conclusion quelques questions nous paraissant essentielles, questions qui seront reprises et développées dans la seconde partie de notre exposé. Nous n'avons retenu ici que les thèses et les articles renvoyant à des recherches de grande envergure, ne pouvant citer tous les articles intéressants mais plus ponctuels, publiés dans Petit x ou Grand N.

⁸ Par le terme « original », nous désignons des articles qui ne sont pas la reprise ou l'exploitation assez proche de thèses. Ex : Berté (1995)

Quatre thèmes d'études

Nous avons réalisé à peu près (et difficilement) une partition des textes en quatre thèmes, mais beaucoup d'entre eux comportent des parties qui relèveraient d'une autre catégorie que celle dans laquelle nous les avons placés. Voici les titres de ces quatre thèmes :

- Analyse de l'enseignement : Transposition didactique et comparaisons curriculaires.
- Observation, analyse et interprétation des difficultés d'enseignement et d'apprentissage, particulièrement dans l'enseignement au collège et dans la formation des PE.
- Production d'ingénieries didactiques, en réponse à une problématique précise.
- Les recherches développées pour la formation professionnelle.

Les recherches faisant appel aux EIAH nous ont posé particulièrement problème : pour beaucoup d'entre elles, les EIAH ne sont pas étudiées en tant que telles mais elles constituent un moyen d'examiner certaines questions et d'en approfondir l'étude. Aussi, nous avons ajouté une étoile à côté du nom de l'auteur de la publication. Il faut noter l'importance de l'article de Laborde et Capponi (1994), dont le titre : « Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique » évoque l'un des arrière-plans théoriques des recherches menées sur l'enseignement de la géométrie dans certains EIAH⁹.

Analyse de l'enseignement : Transposition didactique et comparaisons internationales	
Transposition didactique	Thèses ou programmes de recherche portant sur des comparaisons curriculaires entre la France et d'autres pays
<i>Analyse du processus sur un contenu particulier :</i> Tavignot (1991) <i>Étude de la transposition didactique d'un point de vue épistémologique :</i> Chaachoua (1997)*, Both Carvalho (2001)* <i>Articulation des concepts :</i> Berté (1995) RDM 15/3 Dans beaucoup de thèses non citées ici, une partie relève de l'étude de la transposition didactique, d'un point de vue historique.	France / Allemagne : Cabassut (2005) France / Italie : Celi (2002) France / Chili : projet Ecos DIDIREM-Valparaíso (2006) France / Vietnam : Doan Huu (2001),

⁹ Ayant écarté le champ de la démonstration de notre exposé, nous ne citons pas non plus les travaux autour des EIAH concernant la démonstration en géométrie.

Des thèses ou travaux visant à décrire l'enseignement ordinaire, analyser et interpréter les difficultés d'enseignement, particulièrement au collège et dans la formation des PE

<i>Analyse de l'existant (élèves et/ou enseignants)</i> Rauscher (1993) Abboud-Blanchard (1994)* Fregona (1994) Mul (2000) Assude & Gélis (2002)* Horoks* (2006) <i>Formation des enseignants</i> Rolet (1996)* Vergnes (2000) Houdement & Kuzniak (1999 à 2007) Caliskan (2006)* Tapan (2006)* Jore (2006)* Acosta (2008)*	<i>Conceptions, connaissances des élèves et/ou des enseignants</i> Pfaff (1991) Jovenet (1998) Vadcard (2000)* Miyakawa (2005) Lima (2006)* Bulf (2008) <i>Aspects langagiers</i> Robotti (2002) Mathé (2006)
---	--

Production et / ou analyse d'ingénieries didactiques, associées à d'autres thèmes d'études (école et collège)

<i>Enseignement primaire</i> Fregona (1994) Argaud (1998)* Gobert (2001) Equipe ERMEL (2006) Equipe lilloise (2005 et ss) Coutat (2006)*	<i>Collège</i> Rommevaux (1997) Groupe « Didactique des mathématiques » IREM d'Aquitaine (Petit x 65; 70) Jahn (1998)* Recherche INRP collège (Pressiat et al) colloque inter-irem géométrie 2000) Laguerre (2005) Restrepo (2008)*
--	---

Les recherches développées pour la formation professionnelle

Bessot A.& Eberhard M. : Représentations graphiques d'assemblages de cubes et finalités des situations. (1987) et Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment (1993)
Bessot A. & Laborde C.: Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture - tracé du bâtiment (2006)
Bessot A. Laborde C., Metzler L. (2006) Construction du simulateur et usages en formation

Ces recherches concernent l'apprentissage des connaissances nécessaires à la maîtrise des rapports avec l'espace physique dans le cadre de la formation professionnelle des métiers du bâtiment. Initiées en 1988 par Annie Bessot et Madeleine Eberhardt, elles ont donné lieu à plusieurs publications. La continuité et la richesse de ces travaux ne sont pas assez connues ! Seront-ils poursuivis après le départ à la retraite de leurs auteurs ?

Quelques remarques sur cette liste de travaux

Différents aspects des recherches sur l'enseignement de la géométrie apparaissent plus ou moins clairement selon les cadres théoriques et les objets de recherche :

- Aspects épistémologiques : nature de la géométrie, finalités de la géométrie, de son enseignement, objets de la géométrie ;
- Aspects sémiotiques : figures, langage, instruments...
- Aspects conceptuels, rapport à la géométrie, aux objets de la géométrie ;
- Aspects institutionnels, choix curriculaires, organisation de l'enseignement ;
- Aspect « situations », organisation d'un milieu d'apprentissage ;
- Aspects liés à la médiation de l'enseignant : pratiques des enseignants, formation des enseignants, médiation sémiotique.

Mais ces aspects ne prennent pas tous la même importance dans les travaux cités, et il faudrait en étudier l'évolution, par exemple sur ces dix dernières années. A la fin de cette revue, il nous semble que quatre questions importantes se dégagent actuellement, sur lesquelles nous allons revenir :

Quatre questions actuelles importantes

Les finalités de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire

La question ne paraît plus être posée (du point de vue de la recherche), malgré les difficultés rencontrées dans le choix qui a été fait en France avec les programmes de 85 et suivants pour le collège et le virage pris en 2008 pour l'école primaire, (rejet des apprentissages spatiaux au delà du cycle 2). Ceci nécessite comme le disait Chevallard en 86, de se poser à nouveau la question « qu'est-ce que la géométrie ? »

Que faut-il enseigner à l'école primaire et comment ?

Suivant les finalités choisies, des réponses différentes peuvent être apportées à la première partie de la question. Pour la seconde partie, malgré des propositions d'ingénieries très riches, le « comment ? » reste une question ouverte si elle doit prendre en compte une contrainte forte, l'insuffisance de formation des professeurs d'école, tout particulièrement en ce qui concerne la géométrie.

Figures, rapports aux figures et à la démonstration

C'est la question en débat depuis toujours, que le choix d'introduire des « ilots déductifs » en 6ème a encore plus mise en lumière. Cela aurait pu être « La Question », unique, de l'exposé car elle met en relation l'avant (le primaire) et l'après (4ème et au delà).

Quelle(s) structuration(s) pour le savoir géométrique au collège et à l'école primaire ?

Cette question, objet de tant de débats pour le collège dans les années 70, semble très peu abordée actuellement. Elle demeure pourtant essentielle. A quoi sert de s'acharner sur la démonstration, à en faire un objet d'enseignement si elle n'est pas au service de la construction d'un savoir géométrique consistant ?

Deuxième partie : Quelques réflexions théoriques pour tenter de préciser ces premières questions

1. Qu'est-ce que la géométrie ? Pourquoi l'enseigner ?

Trois modes de fonctionnement de la géométrie

Nous avons vu que Brousseau a différencié la géométrie comme modèle de l'espace et la géométrie comme théorie mathématique en présentant deux situations fondamentales, représentatives de ces deux fonctions de la géométrie. René Berthelot et Marie-Hélène Salin ainsi que d'autres chercheurs par la suite ont précisé et mis en œuvre cette distinction pour analyser des séquences d'enseignement en primaire ou au collège. En y ajoutant l'intérêt de la géométrie pour modéliser d'autres domaines de savoir, nous pouvons distinguer, hors de tout projet d'enseignement, trois modes de fonctionnement de la géométrie :

- 1) La géométrie comme théorie mathématique autonome (indépendamment de son rapport avec l'espace physique), gouvernée par une axiomatique pouvant revêtir différentes formes : géométrie euclidienne, analytique, vectorielle, etc. et justifiée par sa cohérence et son utilité dans le champ des mathématiques voire d'autres disciplines scientifiques.
- 2) La géométrie comme modèle de l'espace physique, « technologie de l'espace, théorie de la maîtrise pratique de l'espace » comme le dit Chevallard (1990-91, p. 60), auquel on peut attribuer, comme pour tout modèle, deux sens de fonctionnement, deux finalités :
 - une finalité pratique : on utilise le modèle dans le but d'agir sur le réel pour obtenir un résultat concret, une réalisation matérielle ou un déplacement, soit comme professionnel soit pour la vie quotidienne ;
 - une finalité théorique : on construit le modèle pour comprendre le réel et le théoriser.
- Ces deux finalités sont liées : le modèle théorique, quel qu'il soit, doit permettre de rendre compte des problèmes pratiques.
- 3) La géométrie comme modèle (au sens de moyen de représentation) pour d'autres champs de savoir, c'est-à-dire pour produire une représentation géométrique d'autres grandeurs, de notions issues d'autres champs de savoir, y compris à l'intérieur même des mathématiques et constituer pour ces divers champs un puissant outil heuristique, ce qu'on appelle parfois la pensée géométrique ou l'intuition géométrique par le fait qu'on peut transférer dans ces champs des intuitions issues de notre rapport à l'espace (cf. jeux de cadres, Douady, 1987).

Ces trois modes de fonctionnement ne sont pas étrangers. Les théories mathématiques, aussi abstraites soient-elles, gardent un lien avec la réalité parce que les axiomes ne sont pas choisis n'importe comment. Même quand ils le sont pour des raisons purement logiques, ils le sont en référence à d'autres théories qui, à l'origine, ont été construites pour modéliser un pan de réalité. C'est particulièrement vrai en géométrie. Ainsi les géométries non euclidiennes sont nées d'interrogations portées par l'axiomatique euclidienne qui, elle, visait à modéliser la réalité. Les théories algébriques de la géométrie sont nées pour unifier des théories correspondant à des points de vue différents. Nous y reviendrons. Elles évitent le problème de l'espace mais ne le règlent pas.

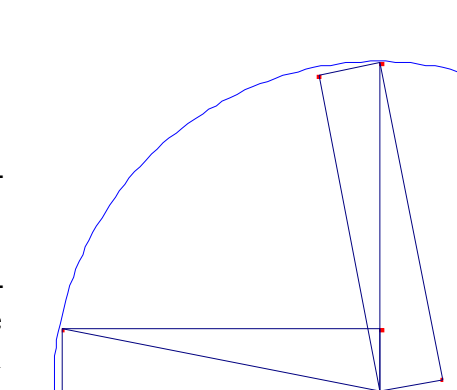
« Certes le géomètre peut refuser de comparer son expérience avec celle du physicien. Il peut s'enfermer dans des systèmes axiomatiques, en posant comme données *a priori* les axiomes et la logique de la déduction. Il évitera ainsi, de justesse, le problème de l'espace (...) mais il n'aura rien fait pour l'éclairer. » Gonseth, 1945, I-8.

Pour l'enseignement dans la scolarité obligatoire, nous allons surtout nous intéresser au deuxième mode de fonctionnement avec ses deux finalités, pratique et théorique. Remarquons cependant que l'enseignement a presque toujours une finalité théorique même si elle est différée, y compris dans l'enseignement professionnel, du moins tel qu'il se fait actuellement : ce n'est jamais la précision de la réalisation pratique qui intéresse le professeur mais la justesse du raisonnement dans le modèle théorique ; or la finalité a évidemment un effet majeur sur le contrat didactique. Ceci nous amène une première question :

Le savoir mathématique se limite-t-il à la finalité théorique ? L'enseignement des mathématiques se limite-t-il à la finalité théorique des savoirs mathématiques ?

Pour l'éclairer, arrêtons-nous un instant sur la géométrie comme moyen de contrôle de l'espace, sur le rapport théorie/pratique en géométrie.

- Une première remarque, c'est que, quelle que soit la finalité, la théorie peut dispenser de l'expérience, ce que nous pouvons illustrer avec un exemple vécu par l'une d'entre nous : devant installer un meuble dans une pièce assez basse, la théorie lui a suggéré de mesurer la diagonale du rectangle de côté quand le meuble était encore sur le sol, ce qui lui a permis d'éviter d'abîmer le plafond. De même, pour fabriquer une vitre en forme de parallélogramme (cf. Berthelot & Salin, 1992), un vitrier géomètre aurait pu se contenter de trois mesures sans réaliser un encadrement sur place.



- Une deuxième remarque, c'est que la théorie permet d'expliquer les résultats de l'expérience, comme dans le cas des médiatrices ou du triangle aplati (Berthelot & Salin, 1992).

- Une troisième remarque, c'est qu'il faut distinguer plusieurs niveaux d'expérience, notamment sur le terrain avec les objets de la réalité ou sur le papier avec des schémas, des figures qui représentent soit la réalité soit un modèle théorique.

- Enfin, si la théorie donne une solution, la réalisation effective (et même la possibilité de cette réalisation) dépend des instruments ; inversement, on peut disposer d'une solution satisfaisante dans la pratique même si la théorie ne donne qu'une solution approchée voire démontre l'inexistence d'une solution exacte.

On retrouve ici les trois aspects de la géométrie soulignés par Gonseth (1946, ch. II) : intuition, expérimentation, déduction :

- L'intuition porte avec elle son évidence, elle se présente comme une réalité immédiate. La connaissance par intuition est une connaissance *a priori* chez l'adulte mais elle se construit progressivement chez l'enfant.
- Il y a plusieurs niveaux d'expérimentation. Pour que la géométrie assume l'aspect d'une discipline expérimentale, il faut en réaliser les notions et les êtres par des objets. La réalisation des objets et des instruments n'est pas au hasard : elle s'appuie sur l'intuition que nous avons de l'espace, des formes et des possibilités de déplacer les objets.
- La théorie permet de régler et d'interpréter l'expérience : les actes de l'expérimentateur ne sauraient être séparés de la réflexion qui les inspire.
« L'activité théorique se présente comme une expérimentation mentale sur des éventualités nettement conçues et telles que l'intuition sache chaque fois décider si elles sont compatibles ou si elles sont contradictoires entre elles. Ces éventualités, pour une part, s'im-

posent ; et, pour une autre part, l'esprit les imagine librement. Elles sont par ailleurs soumises aux règles du raisonnement, c'est-à-dire aux lois qui régissent leurs combinaisons. » (Gonseth, 1946, II-62)

Dans les synthèses successives, la théorie contrôle de plus en plus l'intuition. Au final, quand on a une axiomatisation complète, on ne recourt à l'intuition que dans le cadre de ce qui a été défini par la théorie mais l'intuition du sensible peut continuer à fonctionner justement parce que les axiomes ne sont pas quelconques : le choix des axiomes est lié à l'intuition du monde sensible, avec des économies obtenues par déduction. Comme le dit Gonseth, (1946, II-67) « En géométrie, le théorique tient partout à l'intuitif ».

Ce que dit aussi et surtout Gonseth, c'est qu'à aucun niveau de théorisation, on ne peut séparer les trois aspects, intuitif, expérimental, théorique. Il y a une dialectique entre les différents niveaux : chacun influe sur les autres. Il ajoute que si l'on regarde ce que font les auteurs de manuels (en 1946 ou avant, donc) et non ce qu'ils disent, on voit que tous font appel aux trois aspects et qu'aucun ne peut amener un démenti à l'autre. Cela se voit clairement aussi dans l'utilisation par un expert d'un logiciel de géométrie dynamique : il utilise l'expérimentation dans une dialectique entre l'intuition visuelle sur l'écran, la théorie dont il dispose et celle qui est embarquée dans les outils du menu.

Pourquoi enseigner la géométrie ? Qu'enseigner en géométrie ?

Le rapport de la commission Kahane sur la géométrie (Kahane, 2002¹⁰) énumère un certain nombre de raisons d'enseigner la géométrie dans la scolarité obligatoire. Nous en retenons ici trois principales liées aux modes de fonctionnement que nous avons identifiés plus haut :

On peut considérer qu'il est nécessaire d'enseigner la géométrie à tous les enfants en lien avec sa finalité pratique : la géométrie donne des moyens de contrôle de l'espace et de traitement de problèmes qui se posent dans l'espace (objets de l'espace et espace des déplacements). Elle est donc utile pour tout le monde dans la vie personnelle et sociale ; elle a une utilité spécifique dans certaines professions.

On peut enseigner la géométrie comme théorie mathématique axiomatique pour assurer les fondements de la géométrie pratique et trouver des solutions aux problèmes qu'elle pose ; c'est aussi et surtout une source de problèmes non aisément algorithmisables favorisant le développement du raisonnement déductif.

De plus, l'utilisation de l'intuition géométrique dans d'autres domaines demande que cette intuition soit créée, quel que soit le point de vue considéré, pratique ou théorique.

Cependant, les raisons d'enseigner la géométrie sont étroitement liées à la question de ce qu'il faut enseigner en géométrie. De plus, du point de vue de la didactique de la géométrie, par delà les raisons d'enseigner la géométrie, et le choix de ce qu'il faut enseigner en géométrie se pose encore une autre question que nous n'aborderons guère : comment enseigner la géométrie ? Avant de revenir sur ce qu'il nous paraît important de considérer pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au collège ainsi que dans la formation des enseignants, nous vous proposons un petit détour historique et épistémologique qui nous permettra d'aborder en termes de continuités et de ruptures, d'abord le développement de la géométrie, ensuite son enseignement.

¹⁰ Le rapport est paru en 2000, il a été publié chez Odile Jacob en 2002.

Continuités et ruptures dans le développement des théories géométriques

Dans le développement des théories, tel que le décrivent Dahan-Dalmedico et Pfeiffer (1986)¹¹, on observe des développements dans différentes directions et des réorganisations qui englobent ce qui précède, c'est-à-dire une progression dialectique.

Aux 17ème et 18ème siècles, on a d'abord des développements et des apports qui marquent des avancées importantes pour la suite :

- La géométrie analytique

L'apport de Descartes (1637) est fondamental par la rencontre de la géométrie avec l'algèbre, l'introduction du calcul pour éviter les cas de figure.

- La géométrie projective

Par la suppression du cas particulier des parallèles, elle permet d'éviter les cas de figure dans la géométrie synthétique. Le projet de Desargues (1591-1661) est de « faire profiter la théorie des coniques des acquis des peintres en perspective et inversement [d']améliorer les techniques des artistes, ingénieurs et tailleurs de pierre en les formulant en termes mathématiques concis » (D.-D. & P., p. 128). Son principal ouvrage « Brouillon project d'une atteinte aux événements d'une rencontre du cône avec un plan » (1639) ne fut tiré qu'à 50 exemplaires que l'auteur distribuait à ses amis géomètres. Il utilise un vocabulaire particulier mis au point avec ses amis de l'académie Mersenne (1635) mais a peu de retentissement à son époque. Ses idées sont reprises par Pascal (1623-1662) et La Hire (1640-1718). Beaucoup plus tard, en 1854, Chasles redécouvre une copie du « Brouillon project ».

Poncelet (1788-1867) reconstruit la géométrie dans sa prison en Russie (comme officier de Napoléon) à partir de ses souvenirs des cours de Monge et Carnot et y développe ses propres recherches. Le traité des propriétés projectives des figures paraît en 1822 et marque une réaction à la trop forte emprise de la géométrie métrique, renforcée par l'emploi exclusif des méthodes analytiques. Il veut donner à la géométrie synthétique une aussi grande généralité que celle qui caractérise la géométrie analytique (en particulier en évitant la considération des cas de figure). Il met pour la première fois l'accent sur l'idée de transformation géométrique, vue comme correspondance entre figures de deux plans qui transforme un point de la première en un point de la seconde ou un point de la première en une droite de la seconde (dualité). (D.-D. & P., p. 139-146)

- La géométrie descriptive

Monge (1746-1818) aurait élaboré sa théorie entre 1760 et 1770 alors qu'il était chargé à l'école du génie de Mézières de résoudre un délicat problème du relief d'une fortification (D.-D. & P., p. 137-139). La géométrie descriptive est introduite dans les programmes de l'école normale de l'an III.

Au 19ème siècle, la découverte des géométries non euclidiennes pose la question des fondements et de la possibilité d'unification des différentes théories.

- Les géométries non euclidiennes (D.-D. & P., p. 151-159)

Vers 1800 (et même un peu avant) des mathématiciens commencent à envisager qu'on peut remplacer le postulat des parallèles par sa négation et Gauss (1777-1855) puis Lobatchevski (1793-1856) et Bolyai (1802-1860) commencent à développer des géométries à laquelle ils refusent toute faculté de décrire l'espace physique. Jusqu'en 1800 la géométrie euclidienne était censée décrire le monde sensible ; ses théorèmes étaient considérés comme absolument vrais. (D.-D. & P., p. 153-159). Gauss s'intéresse à l'axiome des parallèles dès 1792 et deve -

¹¹ Abrégé dans la suite D-D & P.

loppe cette étrange géométrie à partir de 1813 mais ne publie pas, craignant les clameurs des Béotiens. Vers 1825, Bolyai et Lobatchevski élaborent indépendamment une théorie équivalente à celle de Gauss (hypothèse de l'angle aigu dans le quadrilatère de Saccheri). Ils publient respectivement en 1826 et 1833. Riemann (1826-1866) en 1854, lors de son admission à la faculté de philosophie de Göttingen, rédige son célèbre mémoire intitulé « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » publié en 1867.

Le lien entre les objets mathématiques et le monde réel est remis en question. Riemann écrit :

« Une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions. Or il s'ensuit de là nécessairement que les propositions de la géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience... » (cité par D-D & P. p 159).

Il reconnaît dans l'espace physique une variété à 3 dimensions, formée seulement par son contenu matériel, qui détermine également sa métrique. Si les corps sont indépendants des lieux, la courbure de l'espace doit être constante. Mais cette courbure constante n'est plus nécessaire si l'on fait dépendre la métrique de la répartition de la matière. Le corps entraîne le champ métrique qu'il engendre : il y a interaction entre l'espace et les corps qui y sont plongés (D-D & P. p. 159).

- *Algébrisation des géométries projectives (coordonnées homogènes)*

En 1847 Von Staudt (1798-1867) définit des coordonnées projectives permettant de libérer la géométrie projective de toute considération métrique, elles sont reformulées par la suite par Klein pour les rendre indépendantes de l'axiome des parallèles. Parallèlement Möbius (1790-1868) et Plücker (1801-1868) introduisent (Plücker, 1829, 1834) les coordonnées homogènes qui permettent de formuler analytiquement les propriétés de la géométrie projective.

- *Interprétation projective des propriétés métriques*

Des efforts visent aussi à l'interprétation projective des propriétés métriques : Laguerre (1834-1886) tente en 1853 de mettre la mesure des angles sur des bases purement projectives. Cayley (1859) élabore indépendamment, à l'aide d'une forme quadratique dans le plan projectif, une mesure projective des longueurs et des angles qui généralise celle de Laguerre.

- *Synthèse de Klein*

Dès 1871 Klein entrevoit la possibilité d'englober les géométries non euclidiennes dans la géométrie projective en examinant cas par cas les géométries engendrées par les différentes quadriques de l'espace. Il parvient en 1872 à unifier les géométries ainsi que la méthode analytique et la méthode synthétique (projective) en proposant dans le programme d'Erlangen une classification des géométries par les groupes de transformation.

Finalement, après le fondement ensembliste des nombres apparu dès la fin du 19ème siècle, le 20ème siècle voit la reformulation en termes d'espaces vectoriels. Ainsi, plus de 20 siècles après la crise des irrationnels et une première définition de ce qui deviendra les réels, appuyée sur les rapports de grandeurs avec un raisonnement par cas et par l'absurde (Eudoxe), le changement de point de vue qui conduit au fondement de la géométrie sur les nombres est totalement achevé. Nous retenons de ce détour historique que la géométrie s'est développée d'abord pour traiter des problèmes d'espace et de grandeurs, que la mesure des grandeurs a conduit à étendre les nombres et à fonder les réels, que la géométrie s'est développée ensuite pour cadrer théoriquement de plus en plus l'intuition spatiale ; on peut y voir des ruptures amenées

par la considération d'un nouveau point de vue (par exemple l'indépendance de l'axiome des parallèles) mais aussi des réorganisations et réinterprétations qui maintiennent l'unité du savoir géométrique.

En conclusion, pour l'enseignement, on pourrait distinguer trois points de vue sur la géométrie en prenant en compte d'une part les finalités (pratique/théorique) et d'autre part à l'intérieur de la finalité théorique, l'axiomatisation à la Euclide à partir d'objets décrivant l'espace et l'axiomatisation à partir des espaces vectoriels qui met les réels au départ et n'intervient explicitement que dans le supérieur. Cependant, toutes les théories ne se valent pas du point de vue de la pratique. Faut-il privilégier la facilité des démonstrations ou l'adéquation avec les connaissances spatiales ? Quelle place donner à chacune, à quel moment ? La question se pose (de manière différente) pour les élèves et pour la formation des enseignants. Au bout du compte, il nous semble qu'il reste un choix pour le secondaire : fonder la géométrie sur les grandeurs en ne faisant apparaître les nombres qui y sont cachés que dans un deuxième temps ou mettre les nombres dès le début et tout fonder sur les nombres. L'enseignement classique correspond au premier choix. C'est le deuxième choix qu'on a essayé de faire dans les années 70. Ne peut-on faire actuellement une synthèse dialectique : redonner toute leur place aux grandeurs pour le sens sans se priver des nombres quand ils permettent de simplifier considérablement les écritures et les raisonnements ?

Pour l'enseignement, ce détour soutient donc la question : *quelle place accorder aux nombres et aux grandeurs dans l'enseignement de la géométrie pour assurer à la fois la cohérence de l'enseignement et son utilité pour répondre aux différentes finalités ?*

Continuités et ruptures dans l'enseignement obligatoire

Beaucoup de travaux l'ont montré, il y a une rupture nécessaire dans le rapport aux figures quand on les envisage du point de vue de la démonstration. Ainsi, les travaux des années 80 ont identifié la rupture entre « la géométrie d'observation » et « la géométrie de démonstration »¹² en passant de la cinquième à la quatrième. La réponse des programmes a été d'initier à la démonstration dès le début du collège. On a ainsi introduit plus tôt un rapport symbolique aux figures (il faut faire confiance à ce qui est codé donc au langage symbolique et pas à ce qu'on peut vérifier avec les instruments). Actuellement, dans l'enseignement, cette rupture se fait donc au début du collège avec rejet des connaissances du primaire. Est-il nécessaire qu'elle se situe à ce niveau ? Ne peut-on envisager une construction plus progressive au long de l'enseignement de la géométrie en primaire et au début du collège, d'un point de vue théorique appuyé sur la recherche de propriétés générales et l'enrichissement continu des connaissances théoriques mais en s'appuyant sur un milieu constitué de « figures-dessins » (au sens de Parzysz, 1989) ?

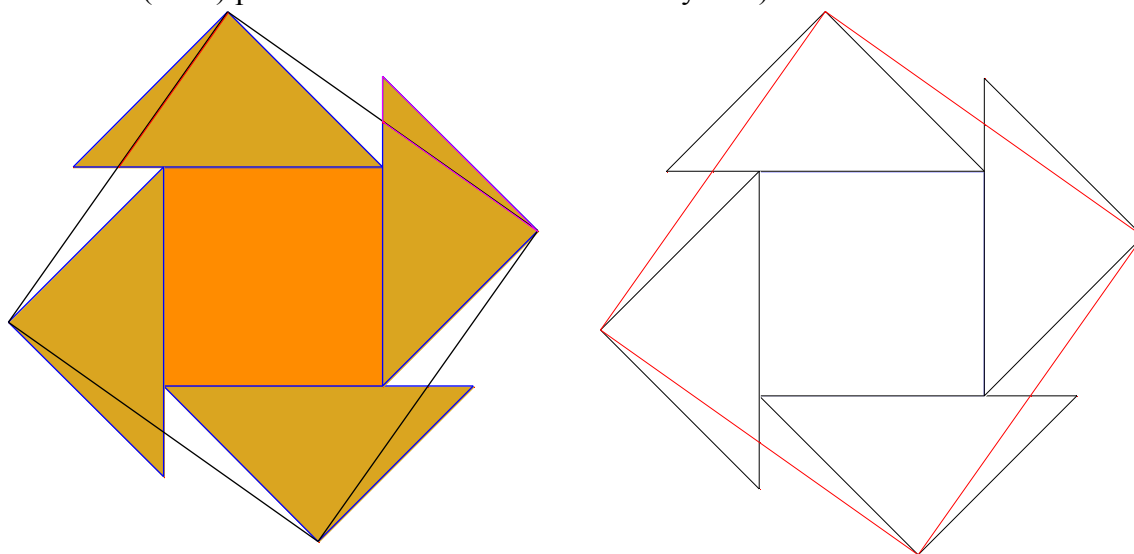
Par ailleurs, dans l'enseignement primaire, la reproduction de figures-dessins passe le plus souvent par l'usage de mesures. Au début du collège, le sens du terme « reproduire » est censé se modifier mais pour que tous les élèves aient une même figure, plus facile à contrôler, on impose souvent des mesures alors qu'elles n'interviennent pas pour le problème posé. L'usage fréquent des mesures, qui a pour conséquence de fixer la figure, n'enlève-t-il de la généralité et de la richesse aux problèmes concernant les dessins géométriques ? On peut dès le primaire adopter un point de vue différent, en donnant une place à ce que l'équipe de Lille a appelé la restauration de figures (cf. Duval, Godin, Perrin-Glorian, 2005 ; Duval et Godin, 2005 ; Keskessa, Perrin-Glorian, Delplace, 2007) : il s'agit de reproduire une figure donnée (modèle) en

¹² D'autres dénominations ont été utilisées plus tard comme « géométrie du constat » et « géométrie déductive ». Ces diverses dénominations à usage des professeurs sont discutables.

donnant une amorce de la figure à obtenir : le jeu sur le modèle, l'amorce et sur les instruments disponibles permet la mise en œuvre de propriétés géométriques indépendamment des mesures.

Faut-il dès le début du collège, considérer la figure d'un point de vue symbolique (codage, texte) et apprendre à se méfier de ce que disent les instruments ? Ne peut-on s'appuyer sur l'usage des instruments dans la construction d'un point de vue théorique ? L'usage des instruments de géométrie n'est-il pas à construire lui-même en lien avec celui des propriétés géométriques dont ils sont porteurs ? A l'entrée en sixième, cet usage, notamment celui de l'équerre est encore problématique pour beaucoup d'élèves (Offre, Perrin-Glorian, Verbaere, 2006).

La nécessité de démontrer passe par le souci de généralité et peut se rencontrer dès la manipulation d'objets géométriques matériels tels les gabarits ou les dessins. Prenons un exemple tiré de Abu-l'Wafa : il s'agit de fabriquer un carré trois fois plus grand qu'un carré donné (voir aussi Maurin (2008) pour le doublement d'un carré au cycle 3) :



On peut obtenir le grand carré par découpage de deux des carrés ou en dessinant les morceaux dans la bonne position. Comment prouver qu'on obtient bien un carré ? Quels sont les outils théoriques pour faire une démonstration qui prolonge la résolution du problème pratique ? On voit ici que les définitions et théorèmes dont on dispose permettent plus ou moins facilement de rendre compte de la manipulation. Une démonstration proche de la manipulation consisterait à montrer l'égalité des petits triangles qu'on déplace en utilisant l'égalité des angles opposés par le sommet, l'égalité à un demi-droit des angles des triangles rectangles isocèles et donc l'égalité des autres angles ainsi que l'égalité des côtés des triangles rectangles isocèles. On montre l'existence d'angles droits par compensation d'angles. Ce genre de raisonnement est entièrement appuyé sur l'expérience et la manipulation (compensation des aires des triangles) mais le découpage a une portée théorique : la finalité est théorique et non pratique, même si on découpe et superpose les petits triangles dans un premier temps. La finalité est théorique à partir du moment où on se pose la question : est-ce que cela marcherait pour n'importe quel carré ? En faisant cela, on travaille sur les grandeurs, longueurs et aires mais on n'a nul besoin de faire intervenir les nombres. Par la suite, on pourra faire le lien et remarquer qu'on a ici une construction géométrique de racine de 3. Cependant, avec l'organisation actuelle de la géométrie on n'a plus de moyen de faire ce type de raisonnement proche d'une manipulation sur les surfaces parce que les cas d'isométrie des triangles n'arrivent qu'en seconde et même plus du tout avec les nouveaux programmes. On dispose en cinquième de la symétrie centrale

mais la symétrie centrale est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre pour obtenir une démonstration : elle demande par exemple d'identifier un parallélogramme qui n'apparaît pas immédiatement sur la figure.

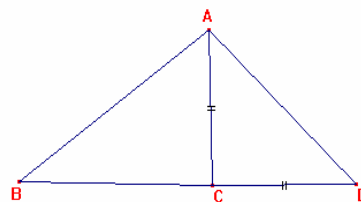
Dans l'équipe de Lille, les situations de reproduction de figures étudiées ont justement parmi leurs objectifs de tenter d'appuyer la construction des concepts géométriques en amenant des questions de nécessité à propos de tracés de figures matérielles.

Actuellement, dans l'apprentissage de la démonstration, on apprend aux élèves à se méfier de la figure ; en particulier les irrationnels (ou les idécimaux) sont abondamment utilisés pour introduire des contradictions entre point de vue des mesures et point de vue théorique dans des exercices mettant en général en jeu le théorème de Thalès ou le théorème de Pythagore. On prend des valeurs numériques telles que des points ont l'air alignés, des angles ont l'air droit mais ils ne le sont pas du fait de l'irrationalité d'une des mesures. Cependant, peut-on supposer que des mesures de segments données sont des valeurs exactes ? Quel sens ont des calculs théoriques sur des figures particulières ?

Par exemple, dans le problème ci-contre, proposé en quatrième :

Si on avait supposé l'angle ACD droit et demandé de calculer AD on aurait trouvé $4,8\sqrt{2}$ dont une valeur approchée à 1mm près est justement 6,8. L'angle ACB est droit puisque ABC est semblable au triangle 3, 4, 5 (il faut bien que l'un des deux angles soit droit pour qu'on puisse conclure).

1) Réaliser la figure suivante avec $BC=6,4\text{cm}$, $AC=CD=4,8\text{cm}$; $AD=6,8\text{cm}$; $BA=8\text{cm}$.



2) Les points B, C, D sont-ils alignés ? Justifier.

Les exercices de ce type fournissent des mesures dont on ne dit pas avec quelle précision elles sont connues ; on demande aux élèves de construire une figure avec ces mesures et bien souvent, à la précision qu'il serait légitime de supposer d'après les données (1mm près), les calculs ne permettent pas de trancher.

Cette remarque ne veut pas dire que ce type de problème n'est pas intéressant, au contraire. Mais, pour qu'il ait un sens, il faut pouvoir élucider jusqu'au bout la différence entre la figure tracée et la figure théorique, distinguer ce qui relève de la précision des mesures et du soin du tracé et ce qui relève de la théorie. Faut-il utiliser ce genre de problème quand on n'a pas encore abordé les irrationnels ? *Comment traiter la question des approximations dans les rapports entre nombres et géométrie ? Quelle élucidation peut-on en faire ? A quel niveau ?*

Ces questions nous ramènent à celle de la finalité de l'enseignement de la géométrie en distinguant l'enseignement obligatoire, l'enseignement professionnel, l'enseignement scientifique, la formation des enseignants. Veut-on principalement, pour l'enseignement scientifique, une théorie efficace qui permette d'aller le plus vite possible aux résultats ? Dans ce cas, le choix des années 70¹³ était peut-être bon. Mais l'enseignement obligatoire doit ouvrir à tous les autres enseignements et à la formation générale de tout un chacun. Si l'on considère que le travail sur les figures et les objets de l'espace est nécessaire et formateur en lui-même, il faut en tirer les conséquences et lui accorder une place suffisante. *Une question qu'il serait sans doute important d'approfondir : celle de l'usage de la géométrie « théorique » dans les problèmes professionnels.*

¹³ Nous pensons aux programmes du lycée ; la question de ce que pourrait être un programme de collège qui permette d'introduire l'algèbre linéaire dès le lycée reste entière mais faut-il la poser ?

Continuités et ruptures dans la formation des enseignants

Le changement de modèle de la géométrie introduit une vraie rupture au niveau du supérieur : la géométrie élémentaire peut se retrouver dans le modèle des espaces affines euclidiens. Cependant, malgré l'utilisation d'un certain vocabulaire géométrique en algèbre linéaire, le lien entre la géométrie du secondaire et celle du supérieur n'est pas nécessairement fait.

Dans l'enseignement et la formation des enseignants, coexistent ainsi deux modèles : d'une part le modèle axiomatique euclidien, y compris complété par Hilbert où on peut construire les nombres à partir de la mesure des grandeurs et donc où les nombres se déduisent de la géométrie ; d'autre part, le modèle construit sur les espaces vectoriels avec $\mathbb{R}$ au départ.

Les choix à faire concernant la formation des enseignants en géométrie dépendent évidemment des choix faits pour la formation des élèves. Nous pouvons cependant pointer les questions suivantes :

Quand, comment fait-on le lien entre les deux modèles théoriques dans la formation des enseignants du secondaire ? Comment repenser la géométrie élémentaire d'un point de vue supérieur ?

La formation des professeurs des écoles pose des questions différentes mais tout aussi importantes et pas plus faciles. *Est-ce que c'est leur capacité à faire des démonstrations qu'il est pertinent de développer ou leur capacité à utiliser les concepts géométriques pour raisonner sur les problèmes de l'espace (espace physique ou espace de la feuille de papier) ?*

2. L'espace graphique¹⁴ : Lieu d'expérimentation dans les deux finalités

Dans la réflexion sur le rapport entre théorie et pratique concernant la géométrie, l'expérience et l'expérimentation jouent un rôle important¹⁵, notamment par la schématisation et la réalisation de figures, sur lequel nous allons nous arrêter maintenant pour essayer de décrire le rôle de ce qu'on peut appeler l'espace graphique (que ce soit une feuille de papier ou un écran d'ordinateur) comme terrain d'expérimentation en géométrie, aussi bien dans un problème pratique, posé et à résoudre dans l'espace sensible que pour un problème géométrique (théorique). Nous l'illustrerons d'abord par quelques exemples issus de la littérature.

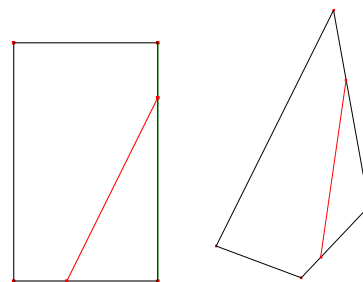
La géométrie comme moyen de résoudre des problèmes de l'espace sensible dans une problématique de modélisation

Nous commencerons par un exemple extrait de la thèse de Sophie Gobert (Gobert 2001). Il s'agit d'un problème de mesure de distance inaccessible décrit par Berthelot et Salin (1992) et dont une mise en œuvre en CM2 est étudiée par S. Gobert sous le nom « Terrain et tige ».

14 Cette partie a été laissée proche de l'exposé du séminaire ; les textes : Gobert (2009) publié depuis, et Gobert (à paraître dans ce même volume), enrichissent la réflexion sur le sujet.

15 Voir le travail bibliographique de Gobert et Hersant (2009).

Un terrain de forme polygonale est dessiné dans la cour (rectangle pour la séance 1, quadrilatère quelconque pour la séance 4), dans lequel on ne peut pas entrer et qu'on ne peut pas survoler non plus ; une tige joint deux côtés consécutifs ; il faut déterminer sa longueur sans faire de calcul (précision apportée au cours de la séance 1) ; différents types « d'instruments » sont à la disposition des élèves.

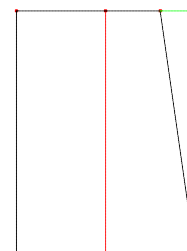


A la première séance (rectangle), les élèves sont tous dans une problématique pratique, voire le calcul¹⁶, même si un groupe essaie de se servir de figures géométriques à construire à l'extérieur du « terrain ». Les deuxième et troisième séances se passent en classe avec des tracés sur papier : il s'agit d'abord d'expliciter ce qu'on a fait dans la cour puis de prévoir ce qu'on va faire à la séance suivante. La consigne a un caractère de généralité imposé par le fait qu'on ne dispose pas du terrain : elle porte sur les méthodes. Cependant, à la séance 2, un élève ne rentre pas dans cet aspect général : il veut faire un dessin à l'échelle du terrain. De plus, pour tous, le contrôle des actions et des propriétés se fait par la vue dans les deux environnements ; l'usage des instruments est le même (par exemple, le fait de prolonger un segment avec la règle sans prendre appui sur le segment déjà tracé).

Il ressort cependant que des procédures géométriques apparaissent plus facilement dans l'environnement papier-crayon, en lien avec la situation spatiale. Par exemple, la référence à la situation dans la cour empêche le pliage dans le cas de la symétrie et oblige à chercher des propriétés géométriques. Les connaissances géométriques, explicitées à la séance 2 avec l'aide de l'enseignant, sont à adapter à la séance 3, notamment en ce qui concerne la symétrie puisqu'il n'y a plus d'angle droit.

Ainsi, les élèves rentrent dans une certaine mesure dans la problématique de modélisation au niveau de la méthode qu'ils justifient par les propriétés des figures qu'ils essaient de construire : « c'est dans l'articulation dialectique des deux environnements que peut être rendue plus efficace la dévolution de la problématique de modélisation pour la construction (apprentissage) des modèles géométriques utilisés. » (Gobert 2001).

Mercier et Tonnelle (1992) fournissent un autre exemple intéressant où le problème pratique se pose dans l'espace à 3 dimensions : il s'agit de construire un toit pour un bâtiment de base trapézoïdale. C'est un vrai problème professionnel, un peu plus complexe que celui du vitrier qui doit faire une vitre en forme de parallélogramme. Le maçon, comme le vitrier, y apporte une solution pratique appuyée sur l'expérience et ne mettant en œuvre que des connaissances spatiales. L'usage de la représentation est beaucoup plus complexe puisqu'il demande une coordination de plans ou un raisonnement sur une figure en perspective.



L'exemple montre que le maçon a deux problèmes : choisir les bons plans pour représenter son problème de l'espace (3 projections qu'il faut coordonner) puis traiter le problème successivement dans deux plans. Cet exemple montre une fois de plus que la théorie dispense de l'expérience ou qu'elle aide à choisir les bonnes expériences (optimisation du coût conceptuel, temporel et pécuniaire). Il amène aussi à poser la question de l'enseignement général du collège qui doit déboucher à la fois sur le professionnel et sur le théorique.

¹⁶ Ils essaient de trouver une formule donnant la longueur à partir de certaines mesures qu'ils effectuent.

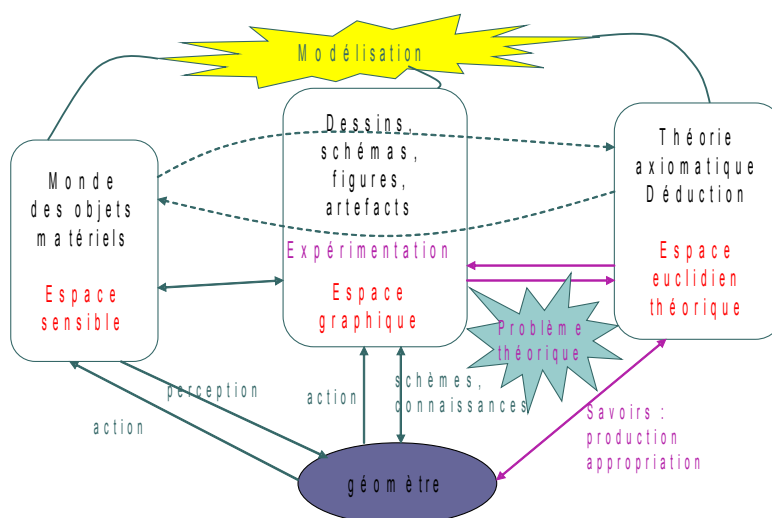
Ces deux exemples posés dans l'espace sensible montrent que l'expérimentation graphique est différente de l'expérimentation dans la réalité et nous suggèrent quelques premières réflexions :

- Le schéma amène une position différente par rapport à l'espace : on est à l'extérieur de la feuille (micro-espace plutôt que méso-espace) ce qui contribue à mettre à distance l'espace sensible.
- Il correspond à une mise en signes des relations repérées dans l'espace ; il permet aussi de produire de nouveaux signes (par exemple construction de nouveaux tracés) qu'il faudra interpréter dans l'espace.
- Il y a des niveaux différents dans l'expérimentation graphique qui permet de mettre en relation un problème dans l'espace et son traitement géométrique où on est plus ou moins près d'un discours organisé (voir aussi les distinctions faites par Chevallard et Jullien (1991, p. 56-59), Mercier et Tonnelle (1992 p. 23-37) entre « schéma » permettant la représentation d'une idée, « épure d'une expérience graphique » et « figure de géométrie », notamment Mercier et Tonnelle (1992 p. 34) :

« Nous appellerons *schéma* la présentation de l'idée que l'expérience réalise et *épure* sa réalisation. Le risque de confusion vient du fait que les outils sémiotiques employés dans les deux cas paraissent les mêmes : des traits sur une feuille. Schéma et épure sont des objets graphiques que l'on prend pour eux-mêmes, ce qui n'est pas le cas du dessin et de la figure qui *représentent* des objets absents, le premier représentant un objet matériel, la seconde des relations mathématiques : les relations spatiales théorisées qui forment la géométrie ».)

Les trois espaces de la géométrie

En résumé... nous pouvons distinguer trois espaces : l'espace sensible, l'espace graphique et l'espace euclidien théorique. Le schéma suivant tente de représenter les interactions entre ces différents espaces dans une problématique de modélisation.



Le géomètre peut être un mathématicien ou un élève ou un professionnel. Suivant le cas, la finalité n'est pas la même, les savoirs ne sont pas les mêmes. Le problème est dans l'espace sensible. Le schéma permet de représenter des objets ou des situations de l'espace sensible, de les amener dans le micro-espace plan de la feuille de papier. Nous ne différencions pas ici le cas d'un problème dans l'espace 3D et celui d'un problème 2D. Il est bien évident que la schématisation est beaucoup plus complexe dans le premier cas. La construction de maquettes, dont Rommevaux (1997) a montré la fécondité, permet aussi de ramener le problème dans le micro-espace des objets qu'on manipule. La schématisation permet ainsi d'identifier dans les données du problème des éléments théoriques qui permettent de le modéliser.

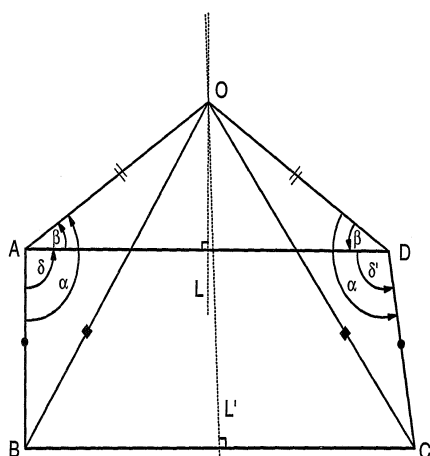
Le dessin ou la figure (qui sera éventuellement à refaire de ce nouveau point de vue) peut ensuite devenir un représentant d'un objet théorique qui permet la déduction, une figure-dessin qui peut elle-même être une épure c'est-à-dire la réalisation effective d'une expérience graphique (Chevallard et Jullien, 1991, Mercier et Tonnelle, 1992).

L'espace graphique, par le double regard qu'il permet sur les figures-dessins nous paraît un point clé de la modélisation géométrique.

Dans ces deux exemples relatifs à la problématique de modélisation d'un problème de l'espace sensible, nous nous sommes intéressés à la finalité pratique. Examinons maintenant le rôle de la figure dans la géométrie avec une finalité théorique.

L'espace graphique : lieu d'expérimentation pour l'élaboration théorique

Nous partons, ici aussi, d'un exemple : il est extrait de « La bosse des maths » (Dehaene 1997 p. 273) et permet de se demander dans quelle mesure on peut raisonner juste sur une figure fautive. Le problème est théorique. La figure représente un objet théorique mais elle porte aussi des propriétés visuelles particulières qui peuvent traduire d'autres propriétés géométriques non prévues *a priori*, éventuellement contradictoires avec l'objet théorique étudié et dont il est difficile de faire abstraction. L'une de nous a proposé cet exemple à des PLC2 pendant plusieurs années de suite : les seuls qui ont trouvé d'où venait l'erreur ont commencé par refaire la figure avec des instruments de géométrie.



Démonstration : Soit un quadrilatère ABCD tel que les côtés AB et CD soient égaux et que l'angle $\delta = \angle BAD$ soit droit. L'angle $\delta' = \angle ADC$ est arbitraire. Nous allons pourtant prouver qu'il égale l'angle droit δ .

Soit L la médiatrice du segment AD et L' celle du segment BC. Soit O l'intersection de L et L'. Par construction, O est équidistant des points A et D ($OA = OD$) et également des points B et C ($OB = OC$). Comme $AB = CD$, les triangles OAB et ODC ont des côtés égaux et sont donc semblables. Donc leurs angles sont égaux :

$\angle BAO = \angle ODC = \alpha$.

Le triangle OAD étant isocèle, on a également $\angle DAO = \angle ODA = \beta$.

D'où nous déduisons $\delta = \angle BAD = \angle BAO - \angle DAO = \alpha - \beta$; et $\delta' = \angle ADC = \angle ODC - \angle ODA = \alpha - \beta$; soit $\delta = \delta'$. Ce qu'il fallait démontrer.

Où est l'erreur ? Réponse page 295 !

L'expert (le mathématicien) qui résout un problème de géométrie contrôle un double rapport à la figure : théorique sur la figure comme représentant un objet géométrique théorique, perceptif sur la figure matérielle sur la feuille de papier, qu'elle soit tracée à main levée, construite à la règle et au compas, sur papier quadrillé ou sur l'écran de son ordinateur avec un logiciel (avec de plus un double contrôle de l'effet des déplacements dans le cas de la géométrie dynamique). Pour cela, il doit disposer d'une appréhension opératoire de la figure (Duval 1994), manipuler avec pertinence les sur et sous-figures, reconnaître des configurations dans des positions variées, des tailles différentes... Il se sert des propriétés visuelles, même s'il raisonne dans la théorie. Beaucoup de textes ont abordé la discussion de la nature et du rôle de la figure dans un problème de géométrie : du « figural concept » de Fischbein (1993) aux distinctions faites par Laborde et Capponi (1994) en passant par la distinction dessin/figure (Parzysz 1988). Nous pouvons dans ce cas reprendre la partie droite de notre schéma : l'espace graphique permet d'expérimenter sur une réalisation matérielle du problème théorique, « l'épure » dont parlent Chevallard, Jullien, Mercier et Tonnelle.

Et pour les élèves ?

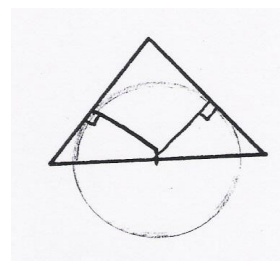
Nous partons encore d'un exemple pour illustrer le rôle des figures et l'interaction figure-texte dans la résolution d'un problème de géométrie. Il est extrait d'un article de V. Celi et A. Bessot (Celi & Bessot, 2008). Le texte du problème est le suivant :

Écrire un programme de construction qui permette à un camarade de troisième de construire un cercle tangent aux côtés d'un angle donné.
Tout dessin dans le programme de construction est interdit.
Vous ne devez jamais utiliser les mots « tangent », « tangente », etc...
Votre programme sera transmis à un binôme d'une classe de troisième d'un autre établissement.

C'est un problème de construction. La preuve est pragmatique (on obtient la figure attendue). Les élèves travaillent en binôme.

Examinons la recherche du binôme 8 qui fait partie des 5 binômes sur 13 qui fournissent un message final qu'on peut interpréter comme constructible à la règle et au compas. Au cours du travail, le binôme 8 rédigera 3 messages.

Avant le message 1, on assiste à une prise de conscience de la demande de généralité « Il faut un truc qui marche avec tous les triangles ». Les élèves ont produit la figure ci-contre. Les perpendiculaires sont tracées à main levée par E1 dans une discussion avec E2 qui lui dit qu'au départ il n'avait pas pensé que « tangente ça veut dire qu'il y a un angle droit (...) par rapport au rayon du cercle » alors que E1 y avait pensé.

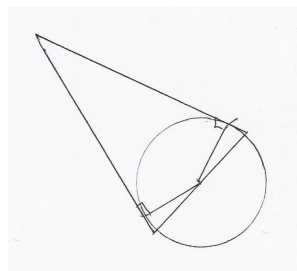


Le triangle et le cercle ont sans doute été tracés en prenant le problème à l'envers puisque l'article dit que « les élèves du binôme 8 commencent par chercher à résoudre le problème du tracé d'un angle tangent à un cercle donné (problème réciproque plus routinier) » (p. 34).

Le message 1 est rédigé après 17 mn

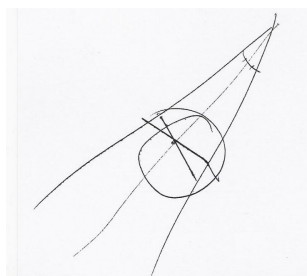
tracé le troisième côté.
du de l'angle - prenant le milieu
de ce côté comme centre du
cercle et tracer le cercle
façon à ce qu'il ne coupe

Une deuxième figure est tracée pour tester le message 1. Le triangle est tracé à la règle par E2 « je teste à la règle » ; le reste est contrôlé visuellement. E1 déclare que ça ne marche que parce que le triangle est aigu. E2 s'inquiète des perpendiculaires et les trace à l'équerre.



Ensuite, E2 refait un dessin à main levée « et tu fais deux angles droits qui partent et qui se coupent ici, au milieu [avec l'équerre] et s'ils se coupent là, cela veut dire qu'ils sont à égale distance. » [...]

E1. En fait, il faut tracer la bissectrice de l'angle.

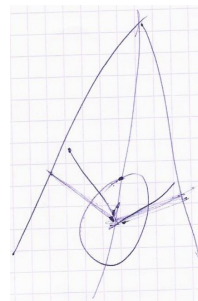


Le message 2 est écrit après 27 minutes d'interaction

Tracer la bissectrice de l'angle donné.
 Placer ensuite les points de façon à ce qu'ils coupent la bissectrice en un même point.
 Prendre ce point comme centre du cercle.

E2. le cercle il peut être ça ! On n'a pas dit la taille du cercle !

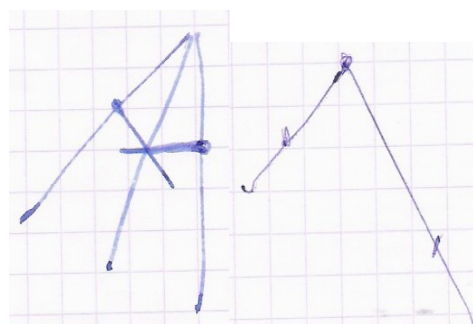
Cercle de rayon ? ... même pas de rayon... de rayon ?... et aussi on n'a pas donné de noms aux points. Il faut nommer les points...



E1. Il faut déjà que l'on place ces deux points au même niveau là [puis trace la bissectrice à main levée]

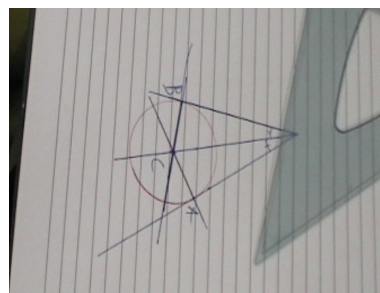
E2. Il faut voir ce que cela fait si on ne place pas au même niveau.

Ouais ! Il faut qu'on les place à la même distance de l'angle, à égale distance de l'angle



Message final du binôme 8 (après 31 minutes)

- Tracer la bissectrice de l'angle donné.
- Placer un point A et un point B sur chaque côté de l'angle et à égale distance du sommet.
- Tracer les droites perpendiculaires aux 2 côtés, qui passent par A et B et coupent la bissectrice en un point C.
- Prendre le point C comme centre du cercle et la longueur AC comme rayon.



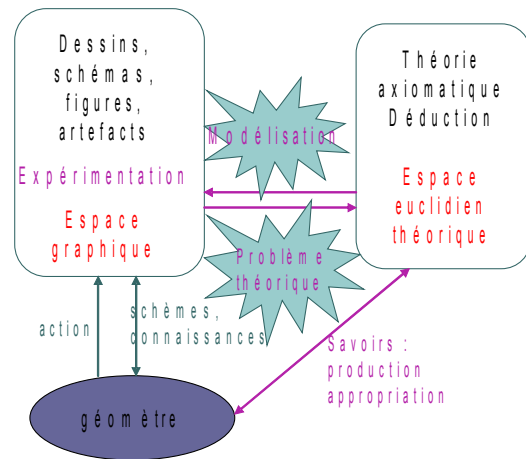
Il est testé aux instruments (règle graduée, rapporteur, équerre). Le compas ne sert qu'à tracer le cercle.

De cet exemple et des analyses proposées, nous retenons quelques remarques plus générales :

- Les instruments sont utilisés au moment de la dévolution (seulement la règle et l'équerre, le reste, égalité de longueur et partage de l'angle, se font avec un contrôle visuel lié sans doute à la symétrie) et au moment de la vérification des messages.
- Dans la discussion et l'échange des arguments, ce sont les dessins à main levée qui dominent en faisant apparaître nettement la caractéristique visuelle correspondant à la propriété géométrique à prendre en compte.
- Les élèves ont une image mentale du dessin attendu appuyée sur la symétrie qui joue au niveau intuitif. Les premiers échanges visent à se mettre d'accord sur les propriétés de cette image (en particulier les rayons perpendiculaires). La discussion porte essentiellement sur les moyens d'obtenir les effets visuels attendus par une construction aux instruments. Les propriétés géométriques sont utilisées dans ce but. La perpendicularité est explicitée ; les autres propriétés restent implicites.

- Ici on a un problème posé dans l'espace graphique. Les savoirs géométriques servent au contrôle de l'espace graphique. On pourrait dire que c'est aussi une modélisation mais mettant en jeu deux des espaces seulement (petite boucle dans le schéma de la page 68), ce qui correspond à la problématique de modélisation de Berthelot et Salin (1992) mais entre l'espace graphique et l'espace théorique.

- On pourrait jouer sur le coût des instruments pour faire évoluer les procédures, les propriétés géométriques utilisées et faciliter l'apparition d'une construction à la règle et au compas.



Des questions plus générales

1) Il semble que dans l'enseignement les professeurs dépensent beaucoup d'énergie à apprendre aux élèves à se méfier des figures et des mesures. Mais ne leur apprend-on pas trop tôt à se méfier de quelque chose d'indispensable dont l'usage n'est pas encore suffisamment construit pour eux ? (voir Berthelot & Salin 2001).

2) Pour jouer son rôle crucial, l'espace graphique ne nécessite-t-il pas un apprentissage de l'élève et une gestion précise en tant que milieu de la part de l'enseignant ? Ne mérite-t-il pas une étude plus poussée de la part des chercheurs ? Cette étude demanderait de prendre en compte la complexité de l'activité sémiotique en géométrie. Plusieurs chercheurs se réfèrent aux travaux de Peirce pour cette étude (Conne 2008) et cet aspect apparaît dans les travaux de l'école d'été 2007 (cf. Bloch 2009 ; Gobert 2009).

3) Dans l'espace graphique, les tracés peuvent se faire à main levée ou avec des instruments. La place des instruments dans l'apprentissage de la géométrie a été peu étudiée jusqu'ici. Elle pourrait l'être dans trois directions au moins :

— Etude de l'instrumentation aussi bien des instruments usuels que des logiciels.

Les concepts d'instrumentation et d'instrumentalisation introduits par Rabardel (1995) en appui sur la notion de schème à partir de la distinction entre artefact et instrument ont été utilisés en didactique des mathématiques pour étudier l'usage des technologies numériques. Ils seraient sans doute utiles aussi pour étudier les difficultés dans l'usage par les élèves des instruments classiques de géométrie. En effet, si l'on considère que les artefacts sont les objets matériels construits par l'homme qui permettent de construire ou d'effacer des figures-dessins, on peut y inclure, avec plus ou moins d'importance suivant les niveaux d'enseignement considérés, outre les logiciels qui permettent de produire des dessins géométriques, les instruments de géométrie classiques, mais aussi du matériel plus rudimentaire : gabarits, pochoirs, ou autres morceaux de papier gardant une partie plus ou moins grande d'une forme qu'on veut reproduire, des supports comme le papier quadrillé, et aussi ciseaux, gomme... Ces artefacts permettent de produire des caractéristiques graphiques visuelles qui se traduisent par des propriétés géométriques. Leur utilisation pertinente pour obtenir les effets visuels attendus, par des techniques identifiées ou non, nécessite plus ou moins de connaissances géométriques. L'usage des artefacts pour apprendre la géométrie suppose pour l'utilisateur la construction de schèmes, certains liés à la connaissance de l'artefact lui-même et à son appropriation, d'autres davantage liés aux connaissances géométriques et à l'usage de l'artefact avec un but externe, qui correspondent à ce que Rabardel a appelé instrumentation et instrumentalisation.

— Etude des instruments comme élément du milieu et variable didactique.

– Etude des rapports dialectiques entre usage des instruments de géométrie et déconstruction dimensionnelle.

Ces deux dernières questions sont abordées dans les travaux du groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais (voir bibliographie).

Conclusion

Nous avons posé de nombreuses questions au cours du déroulement de ce texte. Nous tentons dans cette conclusion d'indiquer des pistes pour une synthèse des travaux existants ou pour de nouvelles recherches. Nous les regrouperons en cinq grands thèmes.

1. Questions de transposition didactique. Un projet d'ensemble à étudier...

Peut-on imaginer une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie du primaire à la fin du secondaire, tenant compte de finalités différentes pour chaque degré ...

- qui parte de formulations à partir d'expériences concrètes et de problèmes posés dans l'espace sensible en primaire et début du collège,
- pour déboucher sur la synthèse euclidienne (avec une redondance d'axiomes et sans viser l'exhaustivité) construite progressivement au cours du collège,
- avant d'introduire les vecteurs et la géométrie analytique,
- pour reprendre le tout dans l'enseignement supérieur à partir de la notion d'espace vectoriel ?

Ce projet semble bien vaste, il nous semble pourtant important de situer des recherches plus ciblées dans un continuum cohérent à élaborer. Sur ce sujet, nous connaissons peu de travaux français¹⁷.

2. La conception d'ingénieries pour l'école et le début du collège demande d'aborder un grand nombre de questions dont nous retenons ici quelques-unes :

Le recueil des ingénieries existantes destinées à cette tranche de la scolarité serait d'un volume imposant. Il nous semble que leur regroupement, leur étude et leurs prolongements pourraient se faire autour de trois grandes questions :

- L'expérience quotidienne ne suffit pas pour constituer un milieu sur lequel appuyer l'entrée dans la géométrie parce qu'elle reste implicite : il faut pouvoir prendre du recul par rapport à cette expérience et formuler, décrire, représenter, etc. *Quelle expérience construire pour constituer un milieu adéquat à l'apprentissage de la géométrie ?* Il y a aussi un vocabulaire en situation à mettre en place. Le rôle du langage est assez peu étudié. Certains travaux se sont cependant intéressés à ces questions, par exemple la thèse de Anne-Cécile Mathé (2006) qui s'appuie sur les apports de Wittgenstein pour étudier les jeux de langage autour des solides dans des classes de primaire. En amont de ces expériences, comment l'enseignement des mathématiques en primaire peut-il prendre en charge la construction de certaines connaissances spatiales ? Lesquelles ? Quelles relations avec l'enseignement d'autres disciplines ?

¹⁷ Voir Brousseau (2000), peu connu, présentant une réflexion de fond sur le sujet

- *Comment articuler le travail dans les différents espaces, y compris avec un logiciel de géométrie dynamique ?* Les distinctions entre différents paradigmes pour la géométrie (Houdement et Kuzniak, 2000; Houdement, 2007), celle entre GI et GII notamment, reprise dans beaucoup de travaux sur la géométrie de l'école et du collège, ont permis de formuler et d'expliquer certains malentendus courants dans l'enseignement de la géométrie au collège ; elles donnent des pistes pour la formation des enseignants mais donnent-elles des outils pour concevoir des ingénieries didactiques ? Les réflexions que nous présentons dans les parties II.1.4 et II.2 nous semblent à approfondir et développer pour la conception ou l'analyse de telles ingénieries.

- *Comment construire un savoir géométrique consistant à partir de l'entrée dans la démonstration ?* S'il semble y avoir accord maintenant sur le fait que celle-ci ne peut se faire qu'après avoir suffisamment pratiqué la déduction, *la question du choix des axiomes et des définitions* se pose réellement, même si on n'en parle pas dans ces termes aux élèves. Il n'est pas indifférent que les axiomes soient ou non proches de l'expérience concrète qui peut se construire dans l'espace sensible ou dans l'espace graphique. Il nous semble qu'il serait bon de reprendre certaines des réflexions menées sur ce thème dans les années 70 et d'en mener de nouvelles comme a commencé à le faire Berté (1995) et (1997).

3. La problématique de modélisation

Si nous revenons plus spécifiquement sur cette problématique, issue des travaux de Berthelot et Salin, c'est parce qu'elle semble une piste intéressante pour l'enseignement de la géométrie à l'école et au collège en suscitant des besoins théoriques à partir d'une finalité pratique. Elle n'a pourtant été que peu reprise dans les recherches ultérieures¹⁸, peut-être à cause de la difficulté de la faire vivre dans des ingénieries didactiques du fait de l'écart important avec les pratiques ordinaires. Les recherches qui ont poursuivi les travaux de Berthelot et Salin ont montré qu'il était nécessaire de reprendre la réflexion tant du point de vue de la consistance théorique des problématiques pratique et de modélisation que du point de vue expérimental, en particulier concernant la problématique de modélisation spatio-géométrique. L'étude de la problématique de modélisation par la conception et la mise en œuvre d'ingénieries didactiques soulève en effet diverses questions, notamment liées au rôle de la schématisation et à la formation des enseignants, dont nous donnons quelques exemples.

Questions sur le rôle de la schématisation

Isabelle Bloch (Bloch & Pressiat, 2009), s'interroge sur la construction des références spatiales nécessaires à un fonctionnement correct de la problématique de modélisation et propose de développer des recherches sur des situations de schématisation.

Questions concernant la démarche de modélisation du point de vue de l'apprentissage des élèves

Ex : Quels types de raisonnements géométriques sont-ils accessibles aux élèves avant la 4ème au travers de situations de modélisation spatio-géométriques ?

Questions expérimentales concernant l'enseignement

Ex : Peut-on identifier des conditions scolaires minimales qui permettent d'installer un processus de modélisation (programmes, coordination entre classes ou cycles, attente des familles vis à vis de l'école, rapport individuel au savoir, rapport des enseignants à l'espace et à la géométrie) ?

18 Il faut noter l'importance du travail des équipes de l'INRP (ERMEL, 2006) qui s'en sont partiellement inspiré et proposent un cursus pour le cycle 3 intéressant mais complexe !

4. Éléments constitutifs du travail du professeur particulièrement complexes pour l'enseignement de la géométrie

De nombreuses recherches ont montré la complexité particulière de l'enseignement de la géométrie relatives :

- aux différents types d'interactions possibles avec le milieu : rapports effectifs, ostension assumée, ostension déguisée, ostension maîtrisée (Gobert 2001). *Quelles sont les marges de manœuvre de l'enseignant ?*
- aux interactions langagières : *Quels sont les contrôles possibles du professeur sur les interactions langagières, les formulations ?*

Comment alors concevoir une formation spécifique pour les professeurs, d'école, du secondaire, de l'enseignement professionnel ?

5. Réflexion à mener sur les cadres théoriques spécifiques à la géométrie.

Nous n'avons pas abordé la question de la compatibilité des différents cadres théoriques utilisés en didactique de la géométrie. Nous avons laissé cette question pour les échanges terminaux mais, vu l'heure tardive et le public relativement clairsemé, aucun point de la discussion n'a porté sur cette question. Nous tentons de l'amorcer ici. Il nous semble que les distinctions que nous venons de faire en termes de finalités de la géométrie, de problématiques et d'espaces (sensible, graphique, euclidien) ne recoupent pas les différents paradigmes définis par Houdement et Kuzniak, même si ces distinctions partent de préoccupations communes. Le découpage des questions nous paraît différent : GI et GII nous semblent surtout distinguer des « paradigmes » (si tant est que l'on puisse employer ce mot) différents au niveau des moyens de validation mis en œuvre alors que c'est la finalité et la problématique que nous mettons en avant dans nos distinctions. Notre réflexion sur l'espace graphique tend à montrer la complémentarité et la compatibilité des points de vue sous-tendus par la « géométrie naturelle » et la « géométrie axiomatique naturelle » plutôt que leur incommensurabilité, une fois qu'ils sont maîtrisés. L'incommensurabilité semble plutôt se situer entre des rapports aux figures ou des contrats didactiques. La discussion sur la compatibilité des cadres théoriques et leur articulation est donc ouverte : peut-on les articuler ou correspondent-ils à deux visions radicalement différentes de la géométrie ? Quelle est la portée de chacun des cadres ? Les résultats obtenus dans des cadres différents sont-ils compatibles ?

Bibliographie

Arsac G. (1988). L'origine de la démonstration. Essai d'épistémologie didactique *Recherches en didactique des mathématiques*. 8.3, 267-312.

Arsac G. (1990). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, 247-280.

Arsac G. & al. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon.

Barra & al. (1975). Quelle géométrie ? *Géométrie au premier cycle tome I*. brochure APMEP n°21 38-49.

- Berté A. (1995). Différents ordres de représentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15/3, 83-130.
- Berté A. (1996-1997). Progressions et problématiques en géométrie à partir d'un exemple. l'inégalité triangulaire. *Petit x* 45, 41-53.
- Berthelot R. & Salin M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse. Université de Bordeaux 1.
- Berthelot, R. & Salin M.H (2000-2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie de constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, 56, 5-34.
- Bloch I. & Pressiat A. (2009). L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances. In Bloch I. & Conne F. (2009). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIV^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, 65-88. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Brousseau G. (1983). Étude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. LSD, IMAG. Université Fourier. Grenoble.
- Brousseau G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, in *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques de l'Université de Crète*. Rethymon.
- Celi V. & Bessot A. (2008). Statut et rôle du dessin dans la formulation d'un programme de construction au collège. *Petit x* n° 77, 23-46.
- Chevallard Y. & Jullien M. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (1^{ère} partie). *Petit x* n° 27, 41-76.
- Conne F. (2008). L'expérience comme signe didactique indiciel. *Recherches en didactique des mathématiques*. 28/2, 219-264.
- Dahan-Dalmedico A. & Pfeiffer J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*. Paris : éditions du Seuil, collection Points-sciences.
- Dehaene S. (1997). *La bosse des maths*. Paris : Odile Jacob.
- Douady R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7/2, 5-32.
- Duval R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactiques de Strasbourg*, 57-74. IREM de Strasbourg
- Duval R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM* n°17, 121-138.
- Duval R. & Egret M.A. (1989). L'organisation déductive du discours : interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol. 2.
- Duval R. & Godin M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N* n° 76, 7-27.
- Duval R., Godin M. & Perrin-Glorian M.J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela et Houdement (éds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, Année 2004*. pp. 5-89. Paris : Éditions ARDM, IREM Paris 7.

- ERMEL (2006). *Propositions d'enseignement de la géométrie au cycle 3*. Paris : Hatier.
- Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 24 n°2, 139-162.
- Floris R. (1995). La géométrie traite-t-elle des illusions d'optique ? quatre élèves aux prises avec le triangle aplati. *Petit x* n° 39 29-53.
- Gobert S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Gobert S. (2009). Éléments d'analyse a priori pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. In Bloch I. & Conne F. (2009). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. CD-rom des ateliers et séminaires de la XIVème école d'été de didactique des mathématiques*. 19 pages. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Gobert S. ET Hersant M. (2009). « Espace, figure, géométrie ». Étude pour que la question vive. In Bloch I. & Conne F. (2009). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. CD-rom des ateliers et séminaires de la XIVème école d'été de didactique des mathématiques*. 27 pages. Grenoble : La pensée sauvage.
- Gobert S. (à paraître). Conditions a priori sur les ostensifs du milieu pour faire signe d'un objet de savoir in Coulange & Hache *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2009*. ARDM & IREM Paris7.
- Godin M. ET Perrin-Glorian M.J. (2009). De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. In COPIRELEM. *Enseigner les mathématiques à l'école, où est le problème ? Actes du colloque de Bombannes, juin 2008. résumé* p. 83, texte complet dans le CD-rom associé.
- Gonseth F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Editions du Griffon, Lausanne.
- Houdement C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre la géométrie de l'école et la géométrie du collège. *Repères IREM* n° 67, 69-84.
- Houdement C. & Kuzniak A. (1999). Sur un cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*. 40/3, 283-312.
- Houdement C. & Kuzniak A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/1, 89-115.
- Kahane J.P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*. Chapitre 3 : La géométrie. pp. 87-169. Paris : Odile Jacob.
- Keskessa B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N* n°79, 33-60.
- Laborde C. (1984). Exposé sur la géométrie *Actes 3ième École d'été de didactique des mathématiques* Institut IMAG, 189-207.
- Laborde C. (1990). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, 337-363.

Laborde C. & Capponi B. (1994). Cabri-Géomètre, constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°14/1.2, 165-210.

Mathé A. C. (2006). *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3*. Thèse de doctorat Université Lyon 1.

Maurin C. (2008). Mesurer ? pour quoi faire ? deux exemples de situations pour des élèves de CM2 et de 6ème, *Grand N* n° 81.

Mercier A. & Tonnelles J. (1992). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (2^{ème} partie). *Petit x* n° 29, 15-56.

Mercier A. & Tonnelles J. (1993). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (3^{ème} partie). *Petit x* n° 33, 5-35.

Offre B., Perrin-Glorian M.J. & Verbaere O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N* n° 77, 7-34 et *Petit x* n° 72, 6-39.

Parzysz B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (1), 79-92.

Parzysz B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée : contribution à l'étude de la relation voir/savoir* Thèse de doctorat Université Paris 7.

Pérol C. (1979). O.P.C. Qu'est-ce que c'est ? In *Recherche inter-Irem 1973-78, en géométrie de 4ème-3ème, dite OPC : réflexion critique et évaluation* Brochure APMEP n° 34, p. 5.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Revuz A. (1975). Ainsi passent les programmes, *Géométrie au premier cycle tome 1* brochure APMEP n°21 p. 22-35.

Rommevaux M.P. (1997). *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. Thèse, université de Strasbourg 1.

Liste des documents répertoriés

Abboud-Blanchard M. (1994). *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire des mathématiques : symptôme d'un malaise. Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Acosta M. (2008). *Démarche expérimentale, validation et ostensifs informatisés. Implication dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble et Université de Genève.

APMEP (1977) et (1978). *Géométrie au premier cycle* tome 1 n°21, tome 2 n°22.

APMEP (1980) et (1981). *Activités mathématiques en quatrième-troisième* n°33 et n°38

Argaud H. C. (1998). *Problèmes et milieux a-didactiques pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

Assude T. & Gélis J.M. (2002). Dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*. 50, 259-287.

Balacheff N. (1987). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*. Thèse de doctorat. Université Grenoble 1.

- Bessot A. & Eberhard M.. (1987). Représentations graphiques d'assemblages de cubes et finalités des situations. in *Le dessin technique*, Ed. Hermès, Paris-Londres-Lausanne.
- Bessot A., Déprez S., Eberhard M. & Gomas B. (1993). Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment. In A. Bessot et P. Vérillon (eds) *Espace graphique et graphismes d'espace. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bessot A. & Laborde C. (2006). Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment. *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2005*. ARDM&IREM Paris7.
- Bessot A., Laborde C. & Metzler L. (2006). Designing a simulator for marking out in building trades and using it in vocational education. *Workshop "TEL in working context", 13-15 November 2006*, Grenoble.
- Both Carvalho N. (2001) .*Le sort des problèmes de constructions dans le contexte français de l'enseignement des transformations géométriques, au lycée, dans les années 1990. Une étude didactique en classe de seconde, avec une approche des aspects fonctionnels utilisant Cabri-géomètre II*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.
- Bulf C. (2008). *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7.
- Cabassut R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Caliskan N. (2006). *Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en œuvre : quelles motivations, quelles pratiques ?* Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Celi V. (2002). *Une comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Chaachoua H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.
- COMMISSION INTER-IREM COPIRELEM (1983). *Aides pédagogiques pour le cycle Moyen. Géométrie. Elem-Math. T. 7*. APMEP : brochure 49.
- Doan Huu (2001). *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane - Une étude comparative entre deux institutions : la classe de seconde en France et la classe II au Viêt-Nam*. Thèse Université de Grenoble 1.
- Équipe DIDIREM - ÉQUIPE PUC (2006). Valparaíso (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. *Numéro spécial s6* IREM Paris 7.
- Equipe LILLOISE (2005 et ss). Les changements de regard sur les figures. *Grand N* n° 76-79.
- ERMEL (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire Cours élémentaire tome I*. Ed. Sermap-OCDL.
- ERMEL (1982). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cours moyen tome 3*. Ed Sermap Hatier.

- Fregona D. (1994). *Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie, interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.
- Grenier D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.
- Horoks J. (2006). *Les triangles semblables en classe de 2^{nde} : des enseignements aux apprentissages. Etude de cas*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Jahn A. P. (1998). *Des transformations de figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde*. Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.
- Jore F. (2006). *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Jovenet A. M. (1998). Perception et conceptualisation de la symétrie. Une situation adaptée aux élèves myopathes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18/1, 35-58.
- Keskessa B. (1992). *Preuves et résolutions de problèmes de lieux géométriques. Une étude comparée des environnements papier-crayon et cabri-géomètre en classe de seconde*. Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.
- Laguerre E. (2005). *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Lima I. (2006). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs : étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.
- Mesquita A. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie - Eléments pour une typologie*. Thèse de doctorat Université Strasbourg.
- Miyakawa T. (2005). *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.
- Mul A. (2000). *Enseignement de la géométrie du cycle III à la sixième. Des éléments du quotidien scolaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Padilla Sanchez V. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat Université Strasbourg.
- Pfaff N. (1991). *Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès*. Thèse de doctorat, Université Paris 5.
- Rauscher J.C. (1993). *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg.
- Restrepo A. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6^{ème}*. Thèse université Grenoble 1.
- Robotti E. (2002). *Le rôle médiateur de la verbalisation entre les aspects figuraux et théoriques dans un problème de démonstration en géométrie plane*. Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.
- Rolet C. (1996). *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1.

Rommevaux M.P. (1997). *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg 1.

Tapan S. (2006). *Différents types de savoirs mis en œuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique*. Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.

Tavignot P. (1991). *L'analyse du processus de transposition didactique. Exemple de la symétrie orthogonale au collège*. Thèse de doctorat, Université Paris 5.

Vadcard L. (2000). *Étude de la notion d'angle sous le point de vue des conceptions*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.

Vergnes D. (2000). *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.