Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques

Cécile Ouvrier-Buffet

IUFM de Créteil-Paris 12

DIDIREM ; ERTé Maths à Modeler

Résumé

Un numéro spécial de ZDM (2004, volume 36) est consacré aux mathématiques discrètes. Plusieurs articles traitent de l'intégration des mathématiques discrètes dans le curriculum, dans différents pays. Cette branche « jeune » des mathématiques suscite l'intérêt du fait des nouvelles potentialités qu'elle offre. En effet, elle permet d'engager les étudiants dans une démarche mathématique, offrant ainsi un champ à part entière pour l'apprentissage de la preuve, de la modélisation, mais pas seulement. Certains soulignent même combien l'expérience en mathématiques discrètes peut favoriser le développement de processus heuristiques chez des étudiants ayant des difficultés en mathématiques.

Depuis plusieurs années, l'équipe Maths à Modeler propose des SiRC (Situations-Recherche pour la Classe). Ces situations sont souvent issues de la recherche mathématique et permettent un apprentissage de transversaux (processus de preuves, de définition, de modélisation, etc.). Certaines ouvrent une autre perspective : il s'agit d'appréhender, dans le discret, des concepts réputés difficiles à enseigner dans le continu. Une situation sera analysée de ce point de vue. Se poseront alors des questions encore plus méta concernant : les liens entre discret et continu, la pertinence d'avoir recours aux mathématiques discrètes pour enseigner des concepts enseignés dans un cadre continu, mais aussi la mise en place d'une problématique et la construction d'un questionnement mathématique (ou : comment permettre à des étudiants d'avoir une expérience mathématique ?).

Mots clefs

Mathématiques discrètes, situations-recherche, construction de définitions, déplacements sur la grille, problème de Frobenius.

Introduction

Ces 25 dernières années, les mathématiques discrètes se sont singulièrement développées. Elles touchent divers champs des mathématiques, tels que la théorie des groupes, la géométrie, la théorie des nombres, la combinatoire, la théorie des graphes, la cryptographie. Les structures discrètes sont des configurations que l'on peut décrire par un ensemble fini ou dénombrable de relations et les objets discrets sont ceux que l'on peut décrire par des éléments finis ou dénombrables. Mais c'est aussi et surtout une façon de considérer un objet mathématique (Grenier-Payan 1998).

Ce champ des mathématiques s'est certes nourri des autres, mais il a également développé des modes de raisonnement et de construction d'objets spécifiques. J'ai pu utiliser ces spécificités pour l'étude de la construction de définitions chez de étudiants du début de l'université, en particulier :

- l'accessibilité des objets discrets et la neutralité de ceux-ci, ce qui permet d'instaurer un rapport à ces objets distant de celui que les étudiants ont habituellement avec les mathématiques : la plupart des objets discrets sont faciles d'accès et neutres car non encore présents dans les programmes (ou, lorsqu'ils le sont, comme les graphes, il s'agit d'un cadre très particulier, voir Cartier (sous presse)) ;
- les objets discrets possèdent différentes définitions, de différentes natures ;
- le lien avec la preuve est lui aussi spécifique : certaines situations discrètes permettent d'aborder différentes visions sur la preuve.

Ces spécificités seront complétées ci-après. En particulier, un état des différentes motivations concernant l'introduction des mathématiques discrètes dans les *curricula*, en France et à l'étranger, sera présenté. J'analyserai ensuite une situation mettant en scène des objets discrets et dont l'un des objectifs est d'appréhender des concepts du continu. Il s'agit d'apporter des éléments de réponses aux questions suivantes : pourquoi utiliser les mathématiques discrètes ? Que peuvent apporter les mathématiques discrètes à la didactique ?

I Introduire les mathématiques discrètes dans les curricula : quelles motivations, quels objectifs ?

1. À l'étranger

Un numéro spécial de ZDM (2004) a été consacré aux mathématiques discrètes, plus précisément « Discrete Mathematics and Proof in the High School Education ». Dans ce volume est fortement soulignée l'accessibilité des objets discrets, notamment le fait que les structures discrètes sont parfois plus faciles à appréhender que les structures du continu (Weigand 2001). De plus, les mathématiques discrètes proposeraient une réelle ouverture pour les élèves en difficulté et un challenge pour les autres (DeBellis & Rosenstein 2004 ; Goldin 2004). Plusieurs questions sont posées dans ce numéro spécial de ZDM. Parmi celles-ci, nous trouvons :

- Comment les mathématiques discrètes contribuent-elles à la compréhension des structures mathématiques ?
- Les mathématiques discrètes peuvent-elles apporter une contribution spécifique pour l'apprentissage de l'argumentation et de la preuve en classe ?
- Se trouve-t-on face à un nouveau type de preuve avec l'utilisation des ordinateurs (exemple du théorème des 4 couleurs) ? La preuve a-t-elle un nouveau rôle, un nouveau statut ?

Mais aussi :

- Comment inférer le général à partir du particulier[1] ?
- Quels choix réaliser pour les *curricula*, et pour quels apprentissages ?

Ces questions concernent aussi bien les mathématiciens que les didacticiens, comme le souligne Schoenfeld (2000).

1 « *(we) should encourage students to learn to ask the generalizing question (...) The question, « What makes a problem example a good one for modeling the general on the particular? » leads to the notion of finding the most elementary, generic example; a sophisticated strategy of the research mathematical scientist* » (Goldin 2004, p. 59)

Étudions plus précisément les questions curriculaires. Lors de la conférence DIMACS (1992), il a été préconisé que les mathématiques discrètes devaient être introduites dans le curriculum pour elles-mêmes. Dans ce sens a été publié « Discrete Mathematics in the Schools » (1997) où le lecteur trouvera différentes activités réalisables en classe à différents niveaux. Une attention y est portée sur la gestion par l'enseignant, enseignant qui peut n'avoir jamais suivi d'enseignements de mathématiques discrètes en tant que telles, sauf cas particuliers. Le NCTM indique quelques années plus tard que :

> (...) combinatorics, iteration and recursion, and vertex-edge graphs "should be an integral part of the school mathematics curriculum." (NCTM, 2000, p. 31)

Cette volonté d'intégration des mathématiques discrètes dans les curricula est liée aux arguments suivants (cf. DIMACS, 1997) :

- La preuve et l'abstraction sont travaillées en mathématiques discrètes (par exemple *via* la théorie des nombres, l'induction etc.) ;
- Les mathématiques discrètes sont propices à un travail sur les algorithmes et sur la récursivité ;
- Elles permettent une introduction à la modélisation, mais aussi à l'optimisation et à la recherche opérationnelle, ainsi que des mathématiques « expérimentales » ;
- Les résultats de mathématiques discrètes peuvent être rapidement appliqués de manière concrète ;
- Les problèmes encore ouverts dans la recherche « facilitent » et légitiment en quelque sorte le travail en groupes.

Rosenstein, Franzblau & Roberts Eds (1997) préconisent les mathématiques discrètes dans l'enseignement pour « redynamiser les mathématiques à l'école ». Rosenstein indique en particulier que :

> (...) discrete mathematics offers a new start for students. For the student who has been unsuccessful with mathematics, it offers the possibility for success. For the talented student who has lost interest in mathematics, it offers the possibility of challenge. Discrete mathematics provides an opportunity to focus on how mathematics is taught, on giving teachers new ways of looking at mathematics and new ways of making it accessible to their students. From this perspective, teaching discrete mathematics in the schools is not an end in itself, but a tool for reforming mathematics education (...)

Mais aussi que les mathématiques discrètes sont :

> (...) a new start for teachers and a new start for students (...) a new way to think about traditional mathematical topics and a new strategy for engaging their students in the study of mathematics. (Rosenstein 1997)

Un *Leadership Program* en mathématiques discrètes (LP-DM) a été développé et est soutenu par the *National Science Foundation* (NSF), *DIMACS* et *the Rudgers Center for Mathematics, Sciences and Computer Education* (CMSCE) : il s'agit d'enseignements de mathématiques discrètes dans le cadre du *problem-solving* et de la preuve, y compris pour la formation des enseignants. Ces avancées indiquent clairement la nécessité de développer une didactique des mathématiques discrètes, et ce, selon deux optiques : l'enseignement des mathématiques discrètes pour elles-mêmes, d'une part, et un enseignement de certaines connaissances et compétences (telles que la preuve et la modélisation) via les mathématiques discrètes. Il ne « faudrait » pas que les mathématiques discrètes ne soient vues « que » dans le cadre de la résolution de problèmes...

2. En France

La récente introduction de la théorie des graphes en enseignement de spécialité ES en terminale représente une entrée officielle des mathématiques discrètes en tant que telles dans les classes. N'oublions pas cependant que l'arithmétique est également un champ des mathématiques discrètes. Je vais y revenir ci-après.

Cette ouverture en théorie des graphes est légitimée en terminale ES ainsi :

> Ce thème sensibilise naturellement à l'algorithmique, et, en montrant la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation, permet un autre regard mathématique sur diverses situations. (Programmes de terminale, réédition de 2005, p. 12)

Par ailleurs, les programmes insistent sur la cohérence de cette introduction avec l' « avant » et l' « après », que ce soit en gestion ou en informatique. Enfin, le fait que ce champ des mathématiques ne nécessite qu'un « vocabulaire minimum » est mis en avant dans les instructions officielles qui se concentrent fortement sur la résolution de problèmes.

Mais un nouveau rapport aux mathématiques est également escompté, et c'est là un point majeur :

> Pour de nombreux lycéens, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire : s'ouvrir sur la théorie des graphes, c'est s'ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est s'entraîner à avoir un autre regard mathématique et finalement, progresser. (Document d'accompagnement des programmes, 2002, p. 107)

Si l'on considère maintenant les instructions concernant l'arithmétique, qu'en est-il des objets de la théorie des nombres ? Leurs spécificités discrètes sont-elles mises en avant ?
C'est effectivement le cas :

> (...) avec peu d'outils théoriques, on y démontre des résultats non triviaux (…)
> (...) des conjectures et des théorèmes dont l'étude théorique est redoutable peuvent être facilement énoncés.
> (...) Des phases expérimentales, des conjectures, des démonstrations « originales » (en comparaison de celles de géométrie ou analyse)
>
> (Document d'accompagnement des programmes, 2002, p. 53)

Et un peu plus loin, l'arithmétique apparaît comme un champ des mathématiques que l'on peut aborder « *sans être pénalisé par d'éventuels échecs dans d'autres chapitres* ».

Ainsi, les points forts d'un enseignement de mathématiques discrètes sont :

- L'accessibilité des objets et des énoncés (ces derniers sont « faciles » à produire par les élèves ; leur preuve peut être questionnée mais ne sera pas nécessairement traitée) ;
- L'indépendance de l'arithmétique ou de la théorie des graphes par rapport aux autres chapitres (les élèves en difficulté peuvent bénéficier d'un nouveau départ) ;
- Un accès à des problématiques de modélisation et à des preuves « originales » (SIC) mais aussi à de nouveaux raisonnements ;
- Un autre regard sur les situations (mais aussi sur les objets) et une démarche expérimentale (conjectures etc.) avérés.

Se présentent à nous, à mon avis, et il faudrait s'y atteler, trois possibilités pour la recherche en didactique en mathématiques :

- Une étude didactique de l'enseignement des mathématiques discrètes comme champ mathématique (au même titre que la géométrie, l'analyse, l'algèbre par exemple) ;
- Une étude didactique de l'utilisation des mathématiques discrètes comme un champ d'expérimentation pour approcher des concepts transversaux (tels que la preuve, la modélisation, la construction de définitions, etc.) :

> Les liens entre les choses sont plus importants que les choses elles-mêmes. D'où l'importance qui sera accordée aux concepts transversaux. (Payan 1995, p. 111)

Ce genre d'étude est en cours depuis de nombreuses années, en particulier au sein de l'ERTé Maths à Modeler[2] ;

- Une étude épistémologique et didactique du comportement des objets discrets par rapport aux objets du continu : une opposition ? Il s'agit là plus particulièrement d'étudier comment les mathématiques discrètes peuvent contribuer à la compréhension d'autres champs des mathématiques.
  Je propose ci-après de présenter une situation issue des mathématiques discrètes qui a fait l'objet de différentes expérimentations, afin de soulever la question du comportement des objets discrets par rapport aux objets du continu.

II Présentation d'une situation « discrète » : des déplacements sur une grille discrète

1. Les objets en jeu

Il est ici question de déplacements sur une grille discrète.

Une grille discrète peut être à maillage carré ou triangulaire, par exemple. Un déplacement sur le maillage de cette grille pourra être modélisé par des vecteurs ou un couple de vecteurs horizontaux/verticaux ou encore par un couple de nombres entiers. Quant à un ensemble de déplacements, nous ne considérerons ici que les combinaisons entières **positives** de déplacements.

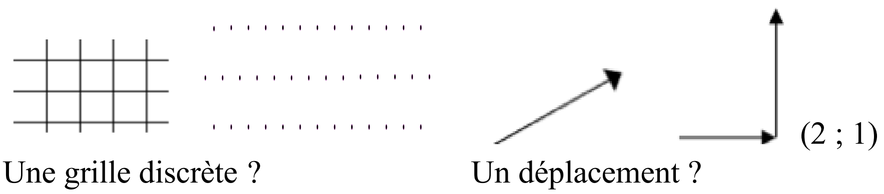


Tableau 1 – Les objets en jeu

Quels sont les questionnements possibles dans ce type de situations ? Il existe un fait expérimental : un ensemble de déplacements étant donné ainsi qu'un point de départ sur la grille, un point de la grille sera ou ne sera pas atteint. Peuvent alors émerger de nombreuses questions concernant l'aspect générateur et minimal de l'ensemble de déplacements initial, mais pas seulement. Avant d'entrer plus dans l'analyse de cette situation, considérons l'un problème des problèmes de la recherche en mathématiques discrètes qui lui est directement lié, en dimension 1 : le problème de Frobenius.

2 www.mathsamodeler.net

2. Le problème de Frobenius : une Situation-Recherche

1. Présentation du problème de Frobenius

Ce problème est aussi appelé « problème diophantien de Frobenius », en théorie des nombres. Il peut s'énoncer ainsi :

> Etant donné des entiers positifs $a_1, \dots, a_n$ premiers entre eux, trouver le plus grand entier qui n'est pas une combinaison linéaire de $a_1, \dots, a_n$ à coefficients entiers positifs.

Ce problème peut également être présenté dans le contexte de la monnaie[3]. Il est, d'un point de vue mathématique, NP-complet. Le lecteur pourra faire des essais en ligne à l'adresse suivante (avec au plus quatre entiers naturels premiers entre eux) :
http://www.math.uu.nl/people/beukers/frobenius/index.html.

Considérons ici le problème de Frobenius expérimentalement. Prenons quelques valeurs distinctes (deux ou trois) et regardons quelles sont les valeurs atteintes. Si nous ne prenons que des valeurs paires par exemple, la régularité des valeurs atteintes apparaît de manière quasi évidente. Il en va de même pour des cas particuliers impliquant des multiples. Considérons alors des cas non « triviaux », à savoir : des entiers premiers entre eux. Un phénomène (on peut parler de fait expérimental) se dégage rapidement : il existe des trous « au début » et à partir d'une certaine valeur, tous les entiers sont atteints. Mais ce qui est remarquable ici, c'est de s'interroger sur ces « trous ». Sont-ils caractérisables ? Répondent-ils à une régularité ? La réponse est non, et là réside toute la profondeur de ce problème. Cependant, le travail de conjectures sur des cas simples s'avère possible, tout comme l'élaboration de théorèmes locaux, et cela inscrit clairement ce problème dans le cadre des Situations-Recherche (voir le paragraphe suivant).

Ainsi, certains entiers ne sont pas atteints, mais à partir d'un certain rang, tous les entiers le sont (en excluant bien sûr des cas particuliers dans le choix des entiers $a_1, \dots, a_n$). On dit que ces entiers atteints sont *représentables*.

L'étude pour deux entiers a_1, a_2 premiers entre eux est très accessible. On peut démontrer que le plus grand entier non-représentable est $a_1a_2 - a_1 - a_2$. Mais aussi que la moitié des entiers compris entre 1 et $(a_1 - 1)(a_2 - 1)$ sont représentables (théorème de Sylvester). Il existe des preuves arithmétiques, ou utilisant des séries, ou encore dans le cadre de la géométrie discrète (le théorème de Pick y est central). Pour plus de renseignements, le lecteur pourra se référer à Ramirez Alfonsin (2006) : il y trouvera les résultats pour n = 2 et 3 et surtout pour n = 4 (ce qui constitue la majeure partie de l'ouvrage). Le problème est encore ouvert pour n > 4.

2. Une Situation-Recherche

Les Situations-Recherche, et plus précisément les SiRC (Situations-Recherche pour la Classe), ont été définies ainsi par Grenier et Payan :
1. Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle. Elle doit être proche de questions non résolues. Hypothèse : c'est déterminant pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.
2. La question initiale est facile d'accès. Il s'agit d'un problème posé « hors des mathématiques formalisées » : la situation « amène » l'élève à l'intérieur des mathématiques.
3. Des stratégies initiales existent. Les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.

3 Si les valeurs nominales des pièces en usage dans un système monétaire sont de $a_1, a_2, \dots, a_n$ quelles sommes sont payables exactement dans ce système ?

4. Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.
5. Une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question. Il n'y a que des critères de fin locaux. (Grenier-Payan 2003)

Ces situations mobilisent des heuristiques telles que : modéliser, prouver, définir, etc. Elles sont souvent issues des mathématiques discrètes et permettent effectivement différentes stratégies d'avancée dans le problème mais ouvrent également la porte à la pratique de raisonnements différents de par leur nature. Cela est particulièrement bien illustré avec une situation de pavage dans Grenier-Payan (1998).

Le problème de Frobenius s'inscrit dans le cadre des Situations-Recherche et a déjà été utilisé dans les classes (sous la forme de problèmes de monnaie, par exemple par l'équipe de Nice).

Prenons à titre d'illustration deux exemples et étudions les nombres représentables :
– Exemple 1 : les valeurs des pièces sont 5, 8 et 11.
Les nombres atteints sont : 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16. A partir de 18, tous les entiers sont atteints. Le dernier entier non-représentable est donc 17.
– Exemple 2 : les valeurs des pièces sont 9 et 11.
Les nombres atteints sont : 9, 11, 18, 20, 22, 27, 29, 31, 33, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 47, 49, 51, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78. A partir de 80, tous les entiers sont atteints. Le dernier entier non-représentable est ici 79.

Ces deux exemples illustrent bien la « variabilité » du phénomène et les questions qui découlent de l'observation des « trous ».

Venons-en au problème de déplacements sur la grille, qui pourrait être considéré comme une extension du problème de Frobenius.

3. *Le problème des déplacements sur la grille*

1. Analyse succincte de la situation

Le problème général qui nous intéresse ici se présente ainsi :

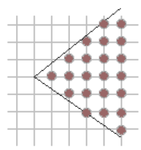
> Prenons une grille discrète ($\mathbb{Z}^2$). Un « point de la grille » est un point du maillage.
> Soit un ensemble E de k déplacements sur cette grille. A partir d'un point donné de la grille, quels sont les points atteignables en appliquant ces déplacements autant de fois que l'on veut ?

Il est possible de reformuler le problème en le type de tâches suivant :

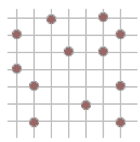
> Etant donné un ensemble E de k vecteurs à coordonnées entières, quels sont les points atteignables, à partir d'un point donné, par des combinaisons entières de ces vecteurs ?

On pourrait travailler en dimension 1, avec le problème de Frobenius. Mais restons plutôt en dimension 2. Si l'on se pose la question de savoir comment atteindre tous les points de la grille, deux propriétés apparaissent :

1) « **densément** » : sur tous les points d'une zone de la grille ce que nous appellerons "densément" ;



2) « **un peu partout** », proche de n'importe où, c'est-à-dire quelque soit un point P de la grille, il existe un point atteint A "proche" tel que la distance entre P et A soit bornée (indépendamment de P). Cette propriété sera dorénavant notée "**u.p-partout**" (pour "un peu partout") (NB : on pourrait aussi parler de



« couvrant »)

Lorsque les deux propriétés "u.p-partout" et "densément" sont vérifiées, il est alors possible d'atteindre tous les points de la grille. Ces deux propriétés ont une fonction opératoire pour définir "ensemble **générateur**". On peut donc choisir d'étudier des ensembles de déplacements générant tous les points de la grille, ou générant seulement un ensemble de points donné.

Si l'on se place en dimension 1, sur $\mathbb{Z}$, on a le théorème suivant :

> Théorème : quel que soit k entier, il existe un ensemble minimal générateur de k déplacements.

Voici deux exemples sur $\mathbb{Z}$:

- E = {1; -1}

Si on enlève 1, on perd la densité.

- F = {2 ; 3 ; -6}
  - Si on enlève 2 ou 3, on perd la densité
  - Si on enlève -6, on perd la propriété u.p-partout.

Le problème inverse implique, quant à lui, le concept de **minimalité**.

Une fois l'ensemble des points atteints déterminé, on peut en effet étudier la question suivante : est-il possible d'enlever un déplacement sans changer l'ensemble des points atteints ?

Cette question est celle de la minimalité de l'ensemble des déplacements donné. Un ensemble de déplacements est dit **minimal** lorsque la suppression de l'un de ces déplacements modifie l'ensemble des points atteints.

On peut se poser alors la question de la caractérisation d'un ensemble générateur du plan discret qui soit minimal, un tel ensemble est dit **générateur minimal**.

Enfin, il faut s'interroger sur le point suivant : les ensembles générateurs d'un secteur donné du plan discret (ou de tout le plan discret) et **minimaux** (au sens ci-dessus) sont-ils **minimums**, c'est-à-dire, ont-ils tous la même cardinalité ?

On peut montrer le théorème suivant (Ouvrier-Buffet 2003, p. 273)

> Théorème : il existe des ensembles de déplacements sur la grille générateurs minimaux à k éléments, k aussi grand que l'on veut.

Mais, k étant donné (aussi grand que l'on veut), nous ne savons pas construire tous les ensembles de k déplacements générateurs minimaux.

Se dessinent alors des concepts et des problématiques, dans le domaine discret, que l'on retrouve dans le continu, en algèbre linéaire.

Si l'on s'intéresse à la notion de base qui découle de la problématique « générateur », « minimalité » et « minimum », dans le cas discret, toutes les bases n'ont pas le même nombre d'éléments. Cela est très rarement étudié en algèbre, d'autant plus que ce qui est enseigné en algèbre linéaire lisse ce phénomène. Un système générateur minimal, un système libre maximal ne sont en général pas des bases. Par exemple, pour $\mathbb{Z}/(6)$, considéré comme $\mathbb{Z}$-module, il n'existe pas de système libre (non vide) et $\{2 ; 3\}$ est un système générateur minimal. Et dans $\mathbb{Q}$, considéré comme $\mathbb{Z}$-module, tout système réduit à un élément non nul est un système libre maximal et il n'existe pas de base (voir aussi Bourbaki 1962, chapitre 2, §1, ex.16 pour un exemple de A-modules libres de bases finies, de cardinaux différents).

La situation des déplacements sur la grille permet ainsi la mise en place d'une problématique de nature épistémologique autour de concepts transversaux tels que : générateur, minimalité, (in)dépendance etc., concepts que l'on retrouve en algèbre linéaire.

Mais pas seulement ... Si l'on tente maintenant de décrire les concepts présents dans cette situation, la liste peut être longue, dans la mesure où lorsque l'on touche un concept, ses « proches » apparaissent. L'énumération ci-après témoigne de la difficulté à cerner les concepts d'une situation issue de la recherche.

Couple	Régions, bords, opérations
Nombres entiers, équation, opérations (addition, multiplication)	Proximité, génération (« u-p. partout »)
Polynômes	Densité
Vecteurs	
Combinaisons linéaires	Dépendance/indépendance
Génération	
	Chasles
Matroïdes, diophantiennes, algèbre, anneau	

Tableau 2 – Concepts en jeu

Certains de ces termes évoquent effectivement l'algèbre linéaire, champ mathématique dans lequel les définitions et le formalisme unificateur font obstacles (voir Dorier & al, 1997). Mais l'algèbre linéaire n'est **pas** le modèle de la situation des déplacements. En revanche, la situation des déplacements sur la grille peut permettre une rencontre « décontextualisée » avec des concepts que l'on retrouve effectivement en algèbre linéaire. Et rappelons ici la proposition de Rogalski :

> Nous faisons l'hypothèse que c'est une problématique plus que des problèmes qu'il faudra transmettre à l'étudiant, au moment de l'introduction des concepts qu'on veut enseigner. Plus précisément, il faut mettre les étudiants en état de comprendre – et d'accepter – le rôle du détour théorique formel et généralisateur comme une réponse à tout un champ de problème et de questionnements qui « se ressemblent » … alors qu'ils ne le savent pas. (Rogalski, in Dorier & al., 1997, p. 160)

Parvenir à une telle problématique implique une décontextualisation des concepts mêmes de l'algèbre linéaire. L'étude des déplacements sur la grille offre une telle possibilité, même si cette situation s'avère plus difficile que le problème continu. Elle est en revanche plus abordable et plus riche : les difficultés sont moins masquées qu'en algèbre linéaire. Il est important de souligner ici qu'avec la situation des déplacements, il n'y a pas de savoir préconstruit, contrairement à un enseignement très « classique » où le savoir est préconstruit et partiellement visible seulement, où l'on assiste finalement à une pseudo-déconstruction.

2. Une Situation de Construction de Définitions

La situation des déplacements peut être étudiée sous l'angle de la construction de définitions. C'est là une approche qui va enrichir l'analyse de la situation.

Quels pourraient être les rôles des définitions dans la « résolution » de cette situation ? La première fonction des définitions est ici de différencier les propriétés (générateur, minimalité, indépendance, redondance, etc.). La deuxième fonction est de permettre la vérification de l'aspect générateur et minimal d'ensembles de déplacements. La troisième fonction est celle de construction d'ensembles de déplacements générateurs minimaux. Mais la construction de définitions est tributaire des questionnements mathématiques liés au problème. Il ne s'agit pas seulement de "constater" que deux déplacements ne permettent pas d'atteindre tous les points de la grille et qu'il est possible de trouver un ensemble de quatre déplacements "bien choisis" générateur et minimal (quatre déplacements unitaires, dans les directions cardinales). Des questionnements portant sur les équivalences entre les propriétés de certains ensembles de déplacements dépend la construction de définitions.

Dans la situation déplacements, il existe une forte problématique de détermination d'ensembles de déplacements permettant d'atteindre tous les points d'une grille discrète : les résultats de l'algèbre linéaire (notamment le théorème de la dimension par exemple) sont ici mis en défaut.

Il s'agit maintenant, dans la logique d'étude de la construction de définitions dans cette situation, de déterminer des *zéro-définitions* (définitions à l'origine du processus de recherche) et *proof-generated definitions* (définitions générées dans la preuve) (cf. Ouvrier-Buffet, 2003, 2006 et 2007).

Il est possible de voir émerger une *zéro-définition* de la notion de "chemins différents" du type suivant : deux chemins (pour se rendre d'un point de la grille à un autre) sont différents lorsque les coefficients dans la combinaison entière de déplacements sont différents. Cela peut évoluer vers l'énoncé : deux chemins sont différents lorsque les déplacements utilisés sont différents. Cette définition peut également apparaître dès le début de la situation. Il est possible d'analyser l'utilisation de la propriété (l'existence d'au moins deux chemins différents) pour questionner la dépendance et la minimalité.

On a par ailleurs trois concepts à définir : "générateur", "minimalité" et "dépendance". Intéressons-nous maintenant aux *zéro-définitions* d'ensemble générateur de déplacements, d'ensemble générateur minimal de déplacements, et à leur évolution possible, avec l'objectif de la génération de tous les points de la grille.

- *Zéro-définition* d'un ensemble "générateur" de déplacements : un ensemble de déplacements permettant d'atteindre tous les points de la grille.

C'est une *zéro-définition* naturelle, mais peu opératoire pour la construction de tels ensembles et surtout coûteuse pour la vérification de cette propriété. Elle est donc amenée à évoluer dès que le nombre de déplacements à étudier est strictement supérieur à 2, vers une définition opératoire décrivant les deux propriétés "u.p-partout" et "dense".

- *Zéro-définition* d'un ensemble générateur minimal de déplacements
  - *zéro-définition* 1 : un ensemble de déplacements générateur minimal est un ensemble de trois déplacements permettant d'atteindre tous les points de la grille.
  - *zéro-définition* 2 : un ensemble de déplacements générateur minimal est un ensemble de déplacements non liés.

La première *zéro-définition* est liée à la connaissance d'étudiants lambda sur les bases en géométrie analytique, voire en algèbre linéaire. La résolution d'une tâche impliquant un ensemble de quatre déplacements générateur et minimal permet d'invalider cette *zéro-définition*.

La seconde *zéro-définition* a une origine géométrique : pour des étudiants n'ayant pas encore suivi un cours universitaire d'algèbre linéaire, des connaissances sur la colinéarité de vecteurs dans le plan et la coplanarité dans l'espace peuvent intervenir.

Le statut de ces *zéro-définitions* devrait évoluer vers le statut de *proof-generated definitions* du fait des problématiques de preuve suivantes : la preuve de l'existence d'ensembles de déplacements générateurs minimaux, la construction de tels ensembles, la preuve nécessaire à l'établissement des propriétés "générateur" et "minimal" de certains ensembles de déplacements.

III Des expérimentations

1. La situation des déplacements vue comme une Situation-Recherche

Cette situation a été expérimentée en tant que Situation-Recherche dans le dispositif Maths.en.Jeans, au collège (niveau 4$^{\text{ème}}$), sous la forme suivante :

> Des personnes (ou, si vous préférez, des relais électroniques…) sont disposées sur un plan en formant un réseau à maille carrée. Chaque personne peut communiquer des informations à certaines autres personnes, à condition de respecter certaines règles ; ces règles sont les mêmes pour toutes les personnes. (Maths.en.Jeans, 1994)

Je ne développerais pas ici les spécificités du dispositif Maths.en.Jeans, mais cela resterait à étudier, afin de caractériser finement l'impact des différents modes de gestion possibles dans des SiRC.

Les élèves sont parvenus à des théorèmes et conjectures concernant la génération des points d'une droite d'une part, et la génération des points de la grille d'autre part. Leurs énoncés sont les suivants :

> Théorème : [avec une règle positive et une règle négative] si nous arrivons à allumer les points +1 ou –,1 alors nous arriverons à allumer tous les points de la droite.
> Conjecture : si a et b sont premiers entre eux, alors nous atteindrons les points 1 et –1.
> Théorème : si on arrive à atteindre les 4 voisins de 0 (1 au nord, 1 au sud, 1 à l'est, 1 à l'ouest), alors on est sûr de pouvoir atteindre tous les points de la grille.

La cardinalité des ensembles de déplacements et la minimalité de ceux-ci n'ont pas été abordées par les élèves.

Cette situation des déplacements sur la grille a également été expérimentée, en première année d'université. Les résultats sont résumés dans le paragraphe suivant.

2. Les déplacements sur la grille : une Situation de Construction de Définitions

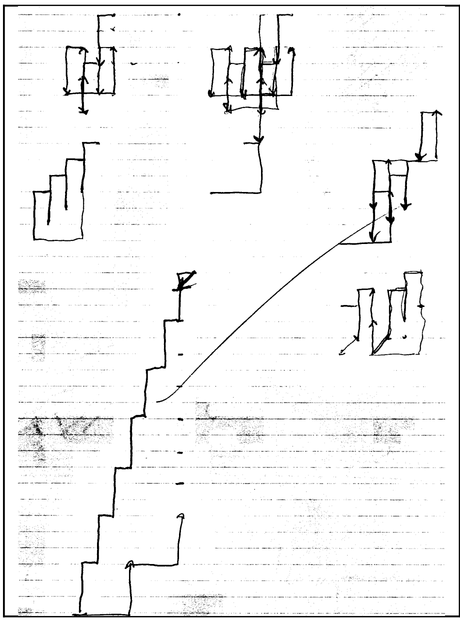
Les résultats reproduits ci-après concernent une expérimentation réalisée en première année d'université (Ouvrier-Buffet 2003).

Trois cas d'études avaient été posés aux étudiants, cas pour lesquels les questions suivantes devaient être abordées :

- Quels points de la grille peut-on atteindre (un point de « départ » étant donné) ?
- Deux points étant donnés, existe-t-il des chemins « différents » pour se rendre d'un point à un autre ?
- Peut-on supprimer un ou plusieurs déplacements ? Si oui, quelles en sont les conséquences?

L'ensemble des trois problèmes a permis de réaliser la dévolution de la situation de la façon suivante : un premier problème (à deux déplacements) a permis de négocier le fait que cette situation était différente de l'algèbre (linéaire) et que deux déplacements ne suffisent pas pour aller partout sur la grille. Un deuxième problème (à quatre déplacements avec dépendance) apporte la question de la preuve autour de la question suivante : peut-on supprimer un déplacement sans changer la propriété « génération » ? La question de l'aspect « dépendance » est ainsi posée. Mais à ce stade, on ne sait pas si tous les ensembles générateurs n'ont que trois éléments. Un troisième et dernier problème (à quatre déplacements indépendants c'est-à-dire générateur minimal) permet de « montrer » que trois déplacements ne sont pas toujours suffisants et que le théorème de la dimension est faux dans le cas discret.

Les étudiants ont utilisé différentes représentations (voir quelques exemples dans le tableau 3 ci-dessous ; les représentations algébriques avec systèmes n'ont pas été reproduites ici) et se sont placés dans le cadre de l'algèbre, utilisant les termes « générateurs, libres ou non » et des systèmes d'équations. Mais ils ont été aussi « en-dehors » de l'algèbre car ils ne questionnent pas le théorème de la dimension, pas plus que l'existence d'un ensemble de k déplacements générateur minimal pour $k > 4$. Plus étonnant, le fait que deux déplacements pourraient suffire est très persistant chez les étudiants, même après avoir démontré que deux déplacements ne suffisent pas lors du premier problème à deux déplacements.



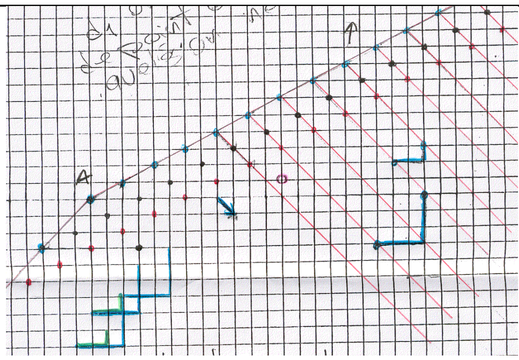


Tableau 3 – Représentations utilisées (graphiques seulement)

Qu'en est-il de la production de définitions ?

Des définitions concernant la génération et la minimalité furent approchées par les étudiants. Cela étant, il n'est pas possible d'attester de *zéro-définitions*. Il s'agit en fait de *définitions-en-acte*. Ces dernières, du côté du concept-outil, se sont acheminées vers des *zéro-définitions* (concept-objet). Au niveau des concepts, à la prédominance des quatre points cardinaux s'est ajoutée la prise en compte de la propriété « u.p-partout », mais pas de celle de « dense ». Trois *définitions-en-acte* de ce type sont apparues. Il s'agit de :

> Générateur : dès qu'il permet d'atteindre les 4 points cardinaux.
>
> Générateur minimal : lorsque tous les déplacements sont utilisés dans la recherche des déplacements "élémentaires".
>
> Ensemble non minimal de déplacements : lorsqu'un déplacement est combinaison entière des autres.

La première *définition-en-acte* est en fait une *proposition-en-acte*.

Les deux *définitions-en-acte* suivantes permettent à l'action des étudiants d'être opératoire. Ce sont des fonctions propositionnelles en relation avec la *proposition-en-acte* de générateur (quatre directions nécessaires).

Comment interpréter le fait que seules des *définitions-en-acte* soient apparues ? La situation fait travailler sur des objets (déplacement, chemin) et les concepts à définir sont des propriétés de ceux-ci (générateur, indépendance, minimalité, etc.). En fait, la difficulté de la tâche ici est la résolution du problème : les objets sur lesquels l'on travaille n'ont pas besoin, dans un premier temps, d'être explicitement définis. Ces caractéristiques de la situation expliquent en partie qu'aucune « vraie » activité de définition des propriétés des déplacements (générateur, etc.) n'ait eu lieu. Les *définitions-en-acte* montrent que les étudiants se détachent difficilement de l'action. De plus, ils se limitent aux cas proposés et ne prennent pas en charge une généralisation qui pourrait faire évoluer des *définitions-en-acte*. De plus, la distance entre manipulation et formalisation est trop rarement travaillée dans l'enseignement, ce qui explique que les étudiants n'ont pas pu prendre une distance suffisante par rapport aux objets manipulés.

3. Quelques remarques pour conclure

Au-delà de la seule situation de construction de définitions, il est intéressant de faire un parallèle entre les élèves de 4ème et les étudiants en ce qui concerne la nature de leurs résultats. Les élèves de 4ème sont sur des procédures arithmétiques alors que les étudiants sont sur des procédures clairement algébriques. On peut également noter que, dans une Situation-Recherche, que ce soit ou non une situation de construction de définitions, il y a une sensibilité aux conditions initiales et au contexte dans lequel est réalisée la situation. L'étude *via* la construction de définitions permet une analyse épistémologique sensiblement différente de celle basée sur le problème de Frobenius par exemple et ouvre également une porte quant à la gestion possible de cette situation des déplacements en classe.

En effet, si l'on considère cette situation sous l'angle des SiRC, la gestion qu'il sera possible d'en faire dans la classe s'avèrera spécifique. De même s'il est question de la regarder comme une situation de construction de définitions. Ces deux modes de gestion, très proches, ont en commun les points qui suivent. Dans les SiRC, où il est question de savoirs transversaux (tels que l'implication, la preuve, la modélisation, etc.), et non pas notionnels, l'enseignant est en double position de chercheur et de gestionnaire de la situation. Dans la gestion des SiRC, le contrôle par l'enseignant de l'activité de l'élève se fait d'abord en fonction de l'avancée dans la résolution du problème et aussi par rapport aux objectifs d'apprentissage, les savoirs transversaux. Les notions mathématiques susceptibles d'apparaître comme des **outils** de résolution peuvent être fournies par l'enseignant (Grenier-Payan 2003).

Des règles, dont celles du débat scientifique (Legrand 1993), apparaissent alors :

> Des règles moins « classiques » (...), telles que celle-ci « Si une conjecture s'avère fausse, peut-on la modifier pour en faire une autre conjecture ? ». Ces règles et propriétés du débat scientifique forment des connaissances de base pour l'activité mathématique et des éléments de rétroaction. Elles sont constitutives d'un milieu pour une SiRC (Grenier-Payan 2003).

Et justement, les leviers sur lesquels il est possible d'agir dans une situation de construction de définitions viennent s'enrichir par la gestion d'un processus définissant : celui-ci peut être appréhendé par les étudiants au travers des *zéro-définitions*. Si l'évolution de ces dernières n'émerge pas, le gestionnaire de la situation pourra contribuer à l'évolution des *zéro-définitions* en utilisant des leviers tels que ceux décrits dans Ouvrier-Buffet (2006, 2007).

IV Ouverture

La situation des déplacements sur la grille ouvre une voie en ce qui concerne l'utilisation des structures discrètes pour appréhender des concepts transversaux que l'on retrouve dans le domaine du discret et dans le domaine continu (tels que générateurs, minimalité, densité, base, etc.). Si l'on cherche à problématiser ces mêmes concepts dans des situations impliquant des objets matériels (pour des raisons évidentes, entre autres, de dévolution), on peut penser à : la couverture du plan par des fractales, la génération de certains types de graphes…

Il faut également s'interroger sur les invariants en mathématiques discrètes que l'on retrouve dans le continu, de manière spécifique : si le discret peut être plus facilement appréhendable que le continu, il ne faudrait pas penser que cela est toujours le cas. Et si l'on se réfère à l'argumentation de Thom, « *le continu précède ontologiquement le discret* » (Thom 1992, p. 137). De nouvelles perspectives de recherche se dessinent clairement.

Bibliographie

Bourbaki N. (1962), *Algèbre.* 3ème édition. Paris, Hermann.

Cartier L. (sous presse), *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*. Thèse Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

DIMACS (2001) Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: *Educational Program*. http://dimacs.rutgers.edu/Education

Dorier JL. & al. (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Goldin G.A. (2004), Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 56-60.

Grenier D., Payan C. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 18/1, 59-100.

Grenier D., Payan C. (2003), Situations de recherche en « classe » essai de caractérisation et proposition de modélisation, *Les cahiers de laboratoire Leibniz*, 92, http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/Cahiers2003.html.

Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM* n°10. Topiques Editions.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.) (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ouvrier-Buffet C. (2003), *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/fr/

Ouvrier-Buffet C. (2006), Exploring Mathematical Definition Construction Processes. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 63, n°3, 259-282.

Ouvrier-Buffet C. (2007), *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique*. Collection « Education et sciences ». Editions Fabert.

Payan C. (1995), La géométrie entre les lignes (aspects combinatoires sous-jacents). *Séminaire Didatech* n°168, Université Joseph Fourier, 111-125.

Ramirez Alfonsin JL. (2006) *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford University Press.

Rosenstein J.G, Franzblau D.S., Roberts F.S (Eds) (1997) *Discrete Mathematics in the Schools*. DIMACS Series in Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science Vol. 36. American Mathematical Society & NCTM.

DeBellis, V.A. & Rosenstein J.G (2004) Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 46-55.

Schoenfeld A.H. (2000), Purposes and methods of research in mathematics education. New Brunswick, NJ, 2-4 oct 1992. *DIMACS Series* Vol. 36. American Mathematical Society.

Thom R. (1992), L'antériorité ontologique du continu sur le discret. In Salanskis, JM & Sinaceur, H. (Eds) *Le labyrinthe du continu - Colloque de Cerisy*, 137-143. Springer-Verlag.

Weigand H.G. (2001), Diskrete Mathematik und Tabellenkalkulation: Zur Einführung. *Der Mathematikunterricht*, 47(3), 3.

Discrete mathematics and Proof in the High School (2004), *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 44-84 et Vol. 36 (3), 82-116.

Programmes de Mathématiques, classe terminale séries ES, L, S (juillet 2003, réédités en novembre 2005). CNDP.

Document d'accompagnement des programmes. Mathématiques, classe terminale série économique et sociale, série scientifique (juillet 2002). CNDP.