

Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence dans des situations à dimension a-didactique ?

Isabelle Bloch

IUFM d'Aquitaine et DAEST, Université Bordeaux 2

Introduction

Depuis une quinzaine d'années, est posée de façon cruciale la question des rapports que peuvent entretenir la didactique des mathématiques et la formation des professeurs de mathématiques. Les outils de la didactique se sont imposés par leur efficacité pour l'analyse des situations et leur pertinence à détecter les apprentissages ou leurs manques, mais ils ne sont pas aisés à communiquer aux futurs professeurs ; de plus, non seulement les modalités, mais la nécessité elle-même de cette transmission sont encore objets de discussion.

Préalablement à la question des outils didactiques, les questions qui se posent en formation sont tout à fait décisives dans la perspective d'une évolution des pratiques d'enseignement des mathématiques, qui sont restées relativement stables depuis une trentaine d'années¹ :

- Peut-on amener les (futurs) professeurs à prendre conscience de la façon dont les connaissances mathématiques se manifestent dans l'enseignement / apprentissage ?
- Comment introduire la dimension de résolution de problèmes en formation de façon à ce que les professeurs puissent la réinvestir dans leurs classes ?
- Peut-on aider les professeurs novices à comprendre l'articulation entre les mathématiques académiques apprises à l'Université et les mathématiques du secondaire qu'ils ont à enseigner ?
- De quelles connaissances didactiques les professeurs ont-ils besoin ? Sous quelle forme ?

•

¹ Et ceci malgré les propositions souvent très intéressantes faites notamment dans les IREM.

Un essai de classification des différentes composantes du savoir professionnel des enseignants conduit à identifier trois domaines principaux d'interventions, suivant en cela certaines des catégories pointées par Shulman (1986) :

- Le domaine des compétences mathématiques ;
- Un domaine que nous pouvons appeler *didactique pratique* ou *pratique de la didactique* (correspondant plus ou moins au Pedagogical Content Knowledge de Shulman) ;
- Le domaine pédagogique des régulations dans la classe.

La première composante est travaillée dans les études universitaires puis, de façon plus circonscrite relativement aux mathématiques du secondaire, dans la préparation au CAPES (voir Henry et Cornu, 2001 ; Comiti et Ball, 1996) ; la troisième donne lieu à formation transversale dans les IUFM, analyses de pratiques professionnelles, régulations par les tuteurs et les visiteurs dans les classes des stagiaires.

La deuxième de ces composantes peut être définie comme l'aptitude à organiser et gérer l'activité des élèves dans la classe de façon à ce que ceux-ci rencontrent effectivement des éléments d'un savoir mathématique visé. Il s'agit donc d'un domaine qui ne peut se décrire dans sa généralité : il s'expose à chaque fois par référence au savoir précis en jeu et aux situations ou aux tâches qui peuvent être proposées aux élèves. Cette composante est l'objet de publications sur l'enseignement des mathématiques et sur la formation des professeurs, sur des thèmes mathématiques variés (enseignement de l'algèbre, de la géométrie, de la proportionnalité ...) : ainsi de nombreux articles de revues (Petit x, Repères-IREM, Bulletin de l'APMEP) s'attachent à fournir aux professeurs les moyens didactiques d'enseignement de telle ou telle notion. Un exemple en est l'article de Berté et al. (2004) dont le titre est explicite : "Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique. Un exemple : enseigner le cosinus en Quatrième". (Petit x, 65, 9-35)

Dans cette deuxième composante, le suivi de professeurs en formation nous a amenée à identifier une aptitude particulière que les enseignants manifestent (ou non) dans leur activité professionnelle : la capacité à réagir de façon mathématiquement pertinente lors d'interactions avec des élèves effectuant une tâche en classe. Cette aptitude est liée à leur propre savoir mathématique, mais elle a surtout à voir avec les moyens utilisés par les professeurs pour diriger l'activité mathématique des élèves, tout particulièrement dans les phases de validation et de preuve. Cette capacité dépend donc fortement de la situation qui est mise en jeu et des propriétés du milieu disponible, même dans des situations de classe

ordinaire, comme nous le montrerons ; elle est aussi liée aux connaissances mathématiques et didactiques du professeur, et au contrat didactique qu'il réussit à faire vivre dans la classe. Cette aptitude aux réactions mathématiques appropriées est au cœur de cet article : nous espérons à la fois présenter quelques-uns des éléments qui la composent, et montrer comment la travailler en formation.

Dans la suite,

I. Nous pointons quelques conceptions repérées chez les professeurs en formation, et essayons de caractériser le contrat didactique du professeur novice ; nous examinons le travail didactique nécessaire pour assurer la transition de la position d'étudiant à la position de professeur.

II. Nous donnons ensuite un exemple de ce que nous entendons par pertinence mathématique du professeur ; nous exposons des éléments repérés de cette pertinence.

III. Dans la troisième partie nous montrons comment la Théorie des Situations Didactiques permet d'envisager la construction de situations spécifiques de formation concernant quelques concepts de l'enseignement secondaire, situations qui permettent de soutenir la pertinence mathématique des interventions en classe grâce à un milieu adapté.

IV. En conclusion nous donnons des éléments sur la mise en œuvre des situations par les professeurs débutants et pointons quelques pistes pour la suite de ce travail.

I. Le contrat didactique de l'étudiant *versus* le contrat du professeur : Evolution de l'épistémologie des professeurs

Les professeurs français ayant réussi le CAPES de mathématiques sont affectés en formation et se voient parallèlement confier une classe de collège ou lycée (6h). Presque tous rencontrent d'importantes difficultés dans leurs premières tentatives d'enseignement : ils héritent de leurs études universitaires une conception très formelle des mathématiques, qui leur interdit d'envisager des "mises en scène" du savoir mathématique, ainsi que de comprendre les procédures d'élèves rencontrées dans leurs classes.

La formation tente de leur fournir les premiers éléments pour évoluer dans leur classe avec un minimum de réussite ; elle essaye aussi de faire évoluer leurs conceptions de ce que peut être l'activité mathématique, et de les munir de connaissances de didactique afin qu'ils puissent anticiper et analyser leur pratique.

I.1. Conceptions des jeunes professeurs sur les mathématiques et leur enseignement

a) Les mathématiques

Les étudiants acquièrent à l'Université une conception très formelle des mathématiques : le savoir déclaré est supposé transparent, mais non fonctionnel : ils sont peu habitués à résoudre des problèmes avec les mathématiques qu'ils connaissent. Pour eux, un théorème a une preuve, mais pas de justification en termes de résolution de problèmes car la théorie mathématique est sa propre justification. Leur culture des problèmes pouvant être résolus avec les outils mathématiques vus à l'Université est d'ailleurs pauvre, et de nombreux auteurs ont pointé l'inefficacité de leurs savoirs mathématiques.²

b) L'enseignement des mathématiques

Pour les étudiants sortant de l'Université, un bon cours de mathématiques est un cours frontal, de type cours dialogué, où le professeur dit "la loi mathématique". Ils n'imaginent pas que cette loi puisse être contestée ou ne pas être comprise, surtout à un niveau comme le secondaire où n'interviennent que des mathématiques élémentaires. D'ailleurs le formalisme leur semble évident, au point que les phénomènes de perte de sens qui lui sont parfois attachés les déstabilisent fortement : ainsi une jeune professeur, ayant donné à ses élèves de 14 ans, un exercice sur la trigonométrie dans un triangle rectangle ABC : calculer la somme des carrés des cosinus des angles aigus, n'osait pas reconnaître que les élèves avaient calculé : $\cos^2 \widehat{ABC} + \cos^2 \widehat{ACB} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{A^2B^2}{B^2C^2} + \frac{A^2C^2}{B^2C^2}$ puis avaient "simplifié" par B^2 et C^2 .

Cette double incompréhension nous conduit à penser qu'il est nécessaire, si l'on veut faire évoluer les jeunes professeurs, de leur proposer d'analyser des curriculums et des pratiques, et de les mettre en mesure de faire l'expérience de situations mathématiques comprenant une dimension de résolution de problème, afin qu'ils puissent questionner les modalités de l'enseignement qu'ils ont reçu et envisager des alternatives. Il s'agit d'introduire dans la formation des professeurs, par le biais des situations, une dimension de

• _____

² Voir Robert, 2001.

questionnement épistémologique de façon à contribuer à l'évolution de leur conception des mathématiques.

I.2. Le contrat didactique : versant étudiant et versant professeur

A l'Université, les étudiants ne sont pas responsables des mathématiques qui leur sont enseignées, ni du point de vue de la validité ni de l'organisation temporelle. Lorsqu'ils sont devant une classe, ils deviennent responsables du vrai et du faux, ainsi que de l'organisation de l'année scolaire, sans avoir acquis réellement les moyens de se forger un point de vue réflexif sur les savoirs de l'enseignement secondaire. Cela les rend excessivement dépendants de la transposition didactique institutionnelle, telle qu'elle se manifeste dans les manuels ou les discours professionnels. Or l'enseignement secondaire actuel privilégie parfois l'ostension de quelques "emblèmes" des notions mathématiques, comme supposés porteurs du sens des notions, et ne travaille que peu la dimension de résolution de problème, pas plus que ne le faisait l'Université pour ses savoirs plus ambitieux³. On peut dire que l'enseignement universitaire privilégie la dimension formelle, alors que l'enseignement secondaire s'appuie sur la manipulation de quelques ostensifs et se contente parfois de contrôler la restitution correcte, par les élèves, de tâches relatives à ces ostensifs.

De ce fait les jeunes professeurs ne peuvent que difficilement imaginer des problèmes relatifs aux savoirs du secondaire, et accessibles aux élèves. Certes des éléments de situations pertinentes pour les savoirs du secondaire existent dans les revues professionnelles ou les productions des IREM, mais même les professeurs plus experts n'y ont pas systématiquement recours.

Ainsi le contrat didactique du professeur débutant se caractérise par :

- l'illusion que la manipulation d'ostensifs est porteuse du sens des objets mathématiques ;
- un manque de connaissances sur les problèmes susceptibles d'être l'objet de l'activité mathématique dans l'enseignement secondaire ;
- une absence de moyens pour prendre la responsabilité de l'organisation de l'enseignement sur le long terme par l'organisation de situations d'introduction de notions nouvelles, articulées à des périodes de travail de techniques.

•

³ Sur les fonctions par exemple, voir Bloch 2003.

Ce contrat se manifeste parfois, en début de formation, par le refus de rédiger complètement une solution d'exercice, ou la difficulté à prévoir une série d'exercices sur un thème donné, et à anticiper des procédures d'élèves. Il se manifeste aussi par une grande intolérance aux formulations des élèves, vues comme scandaleusement non conformes à l'écriture mathématique "correcte", et non identifiées comme pouvant être des productions dans l'action, ou des réponses à des consignes inadaptées. On observe aussi chez les jeunes professeurs une conviction profonde de ce qu'une preuve formelle est la visée ultime des mathématiques ; l'ignorance de ce que peut être une preuve pragmatique (Cf. Arsac et al.) ; et, lorsqu'ils en prennent conscience, la certitude qu'une preuve formelle entraîne une preuve pragmatique, même si les mathématiques elles-mêmes montrent à l'évidence que tel n'est pas le cas.

Le nouveau contrat doit les rendre capables :

- d'organiser le temps didactique ;
- de définir le corpus des situations et des exercices à donner aux élèves, de façon à étudier une notion et atteindre un objectif ;
- de donner des consignes permettant une activité adéquate des élèves ;
- de relier enseignement et apprentissage et se donner des moyens d'appréciation et d'évaluation, y compris des productions non conformes à ce qui était attendu ;
- d'organiser l'activité mathématique des élèves durant le temps de la classe et d'interagir sur des arguments mathématiques pertinents ;
- de mettre en œuvre des preuves pragmatiques et non seulement des preuves formelles, suivant le niveau requis (si le savoir savant dépasse le niveau auquel les élèves peuvent accéder, par exemple ; mais aussi pour illustrer un théorème) ;
- de laisser aux élèves une réelle responsabilité mathématique et de tolérer des formulations provisoires.

I.3. Les situations comme moyens pour faire évoluer l'épistémologie des professeurs

En formation, nous souhaitons développer la capacité des professeurs à questionner le savoir mathématique et à le "mettre en scène" pour les élèves. Les IO (Instructions Officielles) insistent d'ailleurs depuis une dizaine d'années sur la nécessité d'organiser pour les élèves une "véritable activité mathématique" :

"identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié" (Programme de Sixième, 2005, p.15)

Cette façon d'enseigner ne fait en général pas partie de l'expérience des jeunes professeurs, ni en tant qu'élèves ni en tant qu'étudiants. Il y a donc conjonction de deux obstacles à l'entrée dans cette modalité d'enseignement :

- les professeurs n'envisagent spontanément que le mode transmissif et n'imaginent pas qu'il puisse échouer ;
- ils n'ont pas d'expérience du mode "résolution de problème" et même lorsqu'ils sont informés des requis de l'institution, ils sont réticents à penser que ce mode puisse réussir.

Durant leur formation nous visons donc à leur faire découvrir des situations sur des savoirs particulièrement cruciaux de l'enseignement secondaire (la transition arithmétique/algèbre, les fonctions, les vecteurs, les angles...) ; nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de travailler également des savoirs pour gérer les situations en classe, et même quelques éléments de savoir didactique sur le mode de construction et la gestion des situations, afin que les professeurs puissent envisager de leur propre initiative l'aménagement de situations dans leur classe, situations obtenues par transformation d'activités trouvées dans des manuels, ou même créées par les professeurs.

I.4. La gestion des situations par le professeur

La gestion, en classe, de situations relativement ouvertes est une question problématique même dans la théorie des situations ; cependant de nombreux travaux ont fait évoluer les connaissances sur la question. Nous ne détaillerons pas ici leurs résultats, et renvoyons le lecteur à la bibliographie : Arsac et al. (1992), Bloch (1999), Berthelot et Bloch (2001), Margolinas (2002), Colomb, Douaire et al. (2003), Bloch (2003).

Les difficultés de gestion viennent de ce que, dans la phase de débat et de formulation, le professeur doit agir seulement comme "président de séance" et mémoire didactique de la classe. Il a été dit que les situations a-didactiques provoquent une entropie phénoménologique – une augmentation de la production de signes et de formulations – et que le travail du professeur doit conduire ce dernier à utiliser puis à refermer cette production sur le savoir visé et ses signes mathématiques usuels, ce qui n'a rien d'évident.

Ces situations provoquent aussi la formulation par les élèves de preuves non canoniques. Il y a donc nécessité pour le professeur de gérer :

- des écritures non usuelles en mathématiques, écritures provisoires ou écritures qui sont des descriptions de l'action ; à un jeune professeur imbu de formalisme, ces écritures apparaissent comme des productions erronées de la part des élèves, à rectifier sans délai ;
- des preuves non canoniques, des argumentations en terme de vraisemblance...

Parmi ces dernières productions, une catégorie très intéressante pour le débat sur la vérité mathématique est la production de *preuves pragmatiques* au sens de Hana et Jahnke : alors que l'exposé scolastique de mathématiques académiques privilégie les preuves formelles, pour comprendre les concepts tout utilisateur de mathématiques essaie de mettre en connexion les concepts de façon pragmatique afin de voir comment ils interagissent entre eux et avec les concepts déjà connus de lui. Ainsi le mathématicien pragmatique fera par exemple un essai en instanciant les valeurs données par un théorème, pour se convaincre que cela fonctionne bien.

Ainsi que le disent Hana et Jahnke :

"In school mathematics as well most of the concepts are first defined by formal properties, while their meaning becomes clear only when they are applied. ... A proof may be in the position, in fact, of deducing a new theorem from a proposition which itself may have little credibility, and which will acquire credibility and meaning only in the future, when the system of which it is a part becomes more fully developed and capable of wider applications". (Hana & Jahnke, 1993, p. 427).

Et page 432, elles ajoutent :

"These considerations imply a fundamental difference between scholarly mathematics and school teaching. (...) Teachers must take into consideration the contribution which a given proof makes to our understanding of reality. (...) This implies a high level of epistemological complexity for the relevant processes of teaching and learning. The teacher cannot avoid these perplexing issues by simply communicating to the students Hilbert's view of modern axiomatics."

Un enjeu important des situations de recherche (situations a-didactiques, problèmes de recherche...) est que la signification d'un savoir y est à l'œuvre avant que la définition et

une preuve formelle ne soient données. Il en résulte que dans les phases de validation ce sont surtout des preuves pragmatiques qui sont produites par les élèves, discutées, justifiées. Cela rend évidemment plus grande la complexité du rôle du professeur, lequel doit tenir compte de ce type de preuves alors que, nous l'avons dit, sa culture propre est surtout faite de preuves formelles.

Cependant, évoluer de la position formelle à la position pragmatique peut se révéler aussi particulièrement difficile dans une situation classique de transmission du savoir, car alors l'enseignant(e) a tendance à réagir avec ses propres routines d'ancien(ne) élève ou d'étudiant(e). Les situations plus ouvertes peuvent alors être vues par les formateurs comme des opportunités pour faire évoluer le professeur : la nature de la situation le contraint à changer son mode de réaction, c'est une variable didactique de formation.

I.5. Quels effets attendre de l'expérimentation des situations en formation ?

Les situations que nous expérimentons en formation doivent être soigneusement choisies.

1. Elles doivent porter sur des sujets importants de l'enseignement secondaire, pour lesquels les professeurs eux-mêmes éprouvent une certaine impuissance à trouver de "bons" problèmes, de sorte qu'une alternative pertinente apparaisse aussi comme une aide venant de la formation.
2. Elles doivent pouvoir à la fois, être jouées en formation (valeurs des variables didactiques pouvant être fixées comme suffisamment complexes pour que les professeurs ne décodent pas immédiatement le savoir) et implantées dans une classe (autres valeurs possibles, plus simples, des variables didactiques).
3. Sous la deuxième condition, elles doivent donc pouvoir permettre aux professeurs de produire *eux-mêmes* des formulations dans l'action (non nécessairement mathématiquement conformes) ; ainsi ils pourront se rendre compte de ce que a) ces formulations ne bloquent pas l'accès au savoir, b) elles peuvent être dépassées et n'empêchent pas une formulation plus canonique, mais c) elles permettent au professeur d'interagir avec les élèves sur une base de connaissances mathématiques et d'argumentation.

I.6. Méthodologie et critères d'analyse

I.6.1. Une analyse de la pertinence des interventions du professeur

Nous avons entrepris une étude centrée sur quelques cas, ainsi que le préconisent de nombreux auteurs dans le domaine de la formation des professeurs (cf. Malara et Zan, 2002, p. 559 ; Lenfant, 2001). Nous avons analysé le corpus constitué de séances filmées ou observées. Dans la deuxième partie nous rendons compte d'une de ces observations et montrons des éléments de pertinence mathématique d'un professeur dans sa classe, afin de relier la nature de ses interventions à la situation qu'il propose.

I.6.2. Critères de pertinence

Il nous a paru nécessaire de déterminer des critères relatifs à la pertinence que nous souhaitons identifier, en particulier lorsque le professeur a organisé une activité mathématique en classe. Nous sommes actuellement en mesure de reconnaître trois critères relatifs à la pertinence en classe ; les deux premiers concernent les séances 'ordinaires' comme les situations de recherche ; le troisième est relatif à la mise en œuvre des situations complexes (comportant une dimension a-didactique)⁴.

- C_1 est la capacité à interagir avec les élèves sur des éléments mathématiques de la situation et à encourager l'activité des élèves par des interventions et des retours sur leur production mathématique.
- C_2 est la tolérance aux formulations provisoires et approximatives, aux expressions dans l'action, et la capacité à reconnaître les idées mathématiques qui sont incluses dans des ostensifs non canoniques.
- C_3 est l'aptitude à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation ; ceci inclut la capacité à sélectionner des formulations et à en laisser d'autres de côté, et à gérer la chronologie du débat sans le tuer par l'énoncé immédiat des meilleures productions ou du savoir visé.

• _____

⁴ Ces critères ne doivent pas être très nombreux, afin qu'il soit possible de les identifier à l'œuvre dans les classes durant l'activité du professeur.

I.6.3. Mise en œuvre de situations en formation

Nous mettons les professeurs en situation eux-mêmes, sur des situations dont nous détaillerons deux exemples ci-dessous ; nous complétons l'observation des professeurs au travail dans la situation par une analyse a posteriori où il leur est demandé de dire :

- quel est le savoir mathématique en jeu ; quelles en sont les composantes reconnaissables dans la situation ;
- quelles sont les variables didactiques activées et avec quelles valeurs ; pourrait-on en choisir d'autres ;
- sur quels éléments des productions d'élèves un débat pourra être organisé ;
- quelle institutionnalisation le professeur peut-il prévoir de faire ;
- quelles sont les alternatives pour enseigner ce savoir et quelles raisons ergonomiques peuvent conduire à choisir plutôt la situation a-didactique ou plutôt les alternatives.

Petit à petit, les professeurs en formation se montrent capables d'anticiper les questions et de poser leurs propres questions sur les situations. Nous donnerons quelques éléments de retour sur les réactions des professeurs lorsqu'ils jouent les situations en formation.

I.6.4. Mise en œuvre des situations de formation dans les classes des stagiaires

Pour avoir un retour sur la façon dont les professeurs débutants réussissent à mettre en œuvre dans leur classe les situations vues en formation, nous regarderons comment deux jeunes professeurs rendent compte de cette expérience dans leur mémoire professionnel.

II. La pertinence mathématique du professeur dans sa classe

L'adjectif "pertinent" est défini par le dictionnaire Robert comme :

"Qui convient exactement à l'objet en question. Est pertinent ce qui est apte à rendre compte de la structure et des fonctionnalités d'un objet".

Nous pouvons donc dire qu'une intervention mathématique est pertinente si elle rend compte dans une certaine mesure de la fonctionnalité de l'objet mathématique visé ; ou, s'agissant d'enseignement, si elle permet au moins de progresser dans l'appréhension de cette fonctionnalité, avec des énoncés de propriétés mathématiques contextualisées ou non,

des arguments appropriés sur la validité de procédures ou sur la nature des objets mathématiques. Les effets de cette intervention enseignante peuvent être ensuite évalués dans une certaine mesure par les actions ou formulations nouvelles des élèves qu'a permis l'intervention.

L'identification de la pertinence peut tout d'abord passer par la mise à jour de son contraire : ainsi l'analyse d'une séance conduite par un professeur stagiaire nous met en mesure de mieux identifier les effets d'un manque de pertinence sur les échanges en classe.

Analyse d'une séance sur la résolution d'équations en Quatrième

La séance porte sur l'introduction des équations du premier degré. Le professeur est un enseignant débutant mais âgé d'environ 40 ans et ayant eu une expérience professionnelle antérieure – comme ingénieur et enseignant vacataire en IUT – ce qui le rend certain de l'efficacité des mathématiques et très confiant dans la possibilité de transmettre quasi directement cette certitude.

Il donne d'abord aux élèves des équations de type arithmétique :

- Egalités - Inégalités - Equations - 1^{ère} partie (Egalités)

ACTIVITÉ 1

a) Indiquer la distance x de Madrid à Saragosse :	
---	--

- b) Si la température maximale aujourd'hui à Athènes est de 16° , et qu'elle a monté de 4° depuis hier, quelle était la température maximale hier à Athènes ?
- c) Si la température maximale aujourd'hui à Moscou est de 3° , et qu'elle a monté de 10° depuis hier, quelle était la température maximale hier à Moscou ?
- d) Trouver x dans chacun des cas suivants :

$x + 200 = 500$	donc $x = \dots\dots\dots$	Remarques : x est ici $\dots\dots\dots$
$x + 4 = 16$	donc $x = \dots\dots\dots$	x est ici $\dots\dots\dots$
$x + 10 = 3$	donc $x = \dots\dots\dots$	x est ici $\dots\dots\dots$
$12 - x = 4$	donc $x = \dots\dots\dots$	

Remarque : Qu'attend le professeur dans la deuxième colonne : x est ici ? ?

Les élèves ont résolu la première équation directement sur le dessin, d'où l'échange suivant :

1. P : regardez les chiffres qu'on obtient ici – et là
2. Es : c'est pareil
3. P : pour la distance Pau - Madrid, vous avez trouvé Saragosse - Madrid avec le dessin, et si j'avais écrit $x + 200 = 500$
4. E : c'est une équation
5. P : c'est quoi une équation ?
6. E : c'est une égalité à trou
7. P : c'est la même chose. A priori, le dessin est plus sympathique ; mais quand ça se complique, ça devient ingérable à prouver
Donc si $x + 200 = 500$, a priori c'est plus facile si on connaît les règles de calcul.
8. E : puisque $8 + 4 = 12...$

Le professeur annonce donc que pour lui, une équation est "la même chose" qu'une "égalité à trous", et qu'il faut regarder "les chiffres" (sic). Il propose ensuite ce qui constitue pour lui une activité introductrice de la résolution algébrique :

ACTIVITÉ 2

	1) La balance est équilibrée, donc
	2) La balance est-elle équilibrée ? donc =
	3) La balance est équilibrée. Compléter : = donc $x =$
	4) La balance est équilibrée. Combien vaut x ? <i>Détail du calcul (à rédiger avec le professeur) :</i>

L'équilibre d'une balance est supposé rendre compte des règles algébriques de résolution des équations. Le professeur indique aux élèves qu'ils doivent rayer des deux côtés les mêmes éléments, mais ceci n'a pas de sens pour le premier et le troisième schéma. De plus, pour le troisième schéma, les élèves trouvent $x + x = 6$ et non $2x = 6$ comme prévu par le professeur ; pour certains élèves surgit en outre une difficulté dans la reconnaissance des écritures algébriques et de ce qu'elles désignent, donc le professeur fait une mise au point :

9. P : 1) $a = b$; 2) $a + c = b + c$; 3) $x + x$ ça fait $2x$ et pas x^2 et x^2 c'est pas $2x$, or $x.x = x^2$

L'équation du 3 donne finalement $2x = 6$. Pour cette équation 3, le professeur indique qu'il faut "diviser l'équilibre par deux". Quelle est la signification mathématique de cette

expression ? Les élèves trouvent l'équation du 4 sous la forme suivante (10) et non sous la même forme que la précédente :

10. Es : 4) $3x + 5 = x + 11$

Les élèves se lancent dans la recherche de la valeur de 'x'. Cette équation devrait donner alors $3x - x = 6$ et non $2x = 6$, ce qui peut poser problème à certains élèves – vues les difficultés rencontrées auparavant. De plus, le dialogue suivant prouve que les élèves n'appliquent pas les règles algébriques, ils sont encore dans la logique de "l'égalité à trous" et du tâtonnement :

11. E : $x = 3$, ça marche

12. P : comment vous avez fait pour trouver ?

13. P : A gauche combien il y a ?

14. E : $3x + 5$

15. P : tout le monde marque ça

16. P : ceux qui ont trouvé, comment ont-ils fait ? ils ont certainement enlevé du poids de chaque côté, ou alors ils ont tâtonné.

17. P : maintenant, (écrit au tableau et explique son travail), ce que je veux c'est regarder au niveau des x ; $3x + 5 = x + 11$, on enlève 5 de chaque côté ; ça donne $3x = x + 6$; puis on enlève un x de chaque côté ; ça donne $2x = 6$; je divise par 2 de chaque côté.

18. P : le truc, l'astuce, c'est que la balance, vous ne l'aurez pas déséquilibrée. Donc il va falloir procéder de cette façon. On enlève 5 de chaque côté, donc on peut enlever de chaque côté d'une égalité.

19. P : est ce qu'on peut ajouter ?

20. E : NON

21. P : ben si on peut ajouter aussi de chaque côté d'une égalité ; eh si

22. P : on va essayer de généraliser,

23. P (écrit) : Propriétés des égalités,

On peut ajouter ou soustraire (...)

On peut multiplier ou diviser par un même facteur non nul (...)

24. Es : Mm ..., on peut dire par un même nombre et puis voilà

25. P : si $a = b$; $a \times c = b \times c$; $a : c = b : c$

Le professeur énonce ensuite les règles auxquelles il voulait aboutir. Il utilise de façon variable le vocabulaire relatif aux nombres : 'chiffres', 'facteurs'... Si bien que la remarque 24 venant des élèves semble pertinente : "on peut dire par un même nombre et puis voilà".

"Facteur" se comprenait par rapport au statut des coefficients dans les équations, mais c'est bien ce statut que le professeur ne réussit pas à dégager.

Le professeur pose ensuite une activité d'application :

APPLICATION 1

a) si $x + 5 = 6$ alors :

$5x + 7 = \dots$	$5x + 5 + \dots = 4x + 12$	$x + 5 = \dots$
$3(5x + 5) = \dots$	$\frac{1}{2}(5x+5) = \dots$	$x = \dots$

L'équation de départ est arithmétique et non algébrique. Sa solution (autre variable didactique) est choisie de telle sorte que les élèves remplacent x par 1 et remplissent le tableau sans utiliser les règles sur les transformations d'expressions algébriques, qui étaient un but déclaré de l'activité. Lors de la discussion, le professeur déclare qu'ainsi, même les élèves qui n'ont pas compris peuvent quand même effectuer la tâche, c'est en quelque sorte la preuve qu'il sait faire "tourner" la classe quoiqu'il arrive.

Le professeur ne voit tout simplement pas que :

- les élèves n'ont pas une activité mathématique relative à la résolution d'équations dans un champ numérique assez étendu, mais simplement de calcul numérique sur des nombres entiers (appelés de plus 'chiffres' par le professeur) ;
- les interventions du professeur sont relatives à une sorte de métaphore des équations – les équilibres – qui ne fonctionne pas pour les élèves (voir interventions 18-20 : la réponse des élèves, au 20, est un essai – malheureux – pour deviner les attentes du professeur) ;
- les formulations du professeur ne sont pas relatives à des règles de calcul numérique ou au statut des nombres ou des écritures en jeu : inconnue x , égalité à vérifier, valeurs possibles de l'inconnue, statut des coefficients etc... ne font pas partie des formulations, non plus que les raisons mathématiques qu'il peut y avoir de faire ce travail algébrique, ou la logique des transformations algébriques. Cette logique pourrait apparaître – et paradoxalement, de façon plutôt ambitieuse – lors de l'activité "d'application" : mais le

choix de l'équation arithmétique $x + 5 = 6$ de solution 1 anéantit toute chance d'obtenir des élèves un travail algébrique.

Notre hypothèse est que l'inadéquation de la situation proposée aux élèves est en partie responsable de la pauvreté du travail mathématique produit en classe, l'épistémologie du professeur ne lui permettant pas de se rendre compte de cette inadéquation : dans ce cas particulier, la conviction que les mathématiques sont transparentes comme outils ne peut que renforcer sa certitude commune aux stagiaires que les règles mathématiques se comprennent d'elles-mêmes.

On peut constater de ce fait un manque de pertinence – et même un glissement métacognitif – des interventions du professeur, par exemple : *"le truc, l'astuce, c'est que la balance, vous ne l'aurez pas déséquilibrée"* : celles-ci ne portent pas sur des propriétés mathématiques, elles ne permettent pas aux élèves d'entrer dans le calcul des expressions algébriques ni d'appuyer sur des arguments mathématiques l'équivalence lorsqu'elle est présente, ainsi de $3x + 5 = x + 11$ et $2x = 6$. De plus le choix de variables didactiques de la dernière activité – activité par ailleurs intéressante et pertinente quant au contenu de la séance, même si on peut trouver son objectif légèrement décalé par rapport à la résolution d'équations qui était le but déclaré – ruine la dernière occasion de faire entrer les élèves dans le calcul algébrique.

Le choix d'une activité non adéquate peut avoir plusieurs raisons (cf. Rousset-Bert, 2001), qui tiennent elles-mêmes à l'épistémologie du professeur. Il y a sans aucun doute une certaine difficulté, pour un professeur débutant, à analyser a priori les activités proposées dans les manuels et à se rendre compte de leurs qualités didactiques, de leur ergonomie de fonctionnement en classe, et des interactions professeur /élèves qu'elles peuvent permettre.

Par ailleurs les professeurs ont été eux-mêmes confrontés, comme élèves, à des enseignants qui trop souvent, ne faisaient pas vivre dans leur classe une activité mathématique suffisamment riche. Nous faisons l'hypothèse qu'il leur est donc difficile d'imaginer ce que peut être un tel travail, et qu'ils peuvent se satisfaire d'un simulacre "d'activité introductive" pour être en conformité avec les instructions officielles. C'est la raison pour laquelle nous pensons nécessaire l'introduction, dans la formation, de situations dont les professeurs font eux-mêmes l'expérience.

III. La TSD et la construction de situations de formation

III.1. Principes de l'expérimentation de situations en formation

La Théorie des Situations Didactiques (TSD) a proposé de nombreuses situations pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, mais beaucoup moins pour les niveaux supérieurs⁵. Pour des savoirs plus complexes, la question n'est plus de construire *une* bonne situation, mais d'organiser des réseaux de problèmes et d'activités à proposer aux élèves, afin d'explorer les sens fondamentaux que prend un concept dans ses relations avec d'autres à l'intérieur d'une théorie. Le gain espéré pour les élèves est d'élargir leur rôle dans la recherche et l'argumentation et ainsi de les faire accéder à une meilleure compréhension du "jeu mathématique".⁶

Nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de faire travailler les professeurs stagiaires sur des situations de ce type. Les situations présentées aux professeurs stagiaires sont construites sous deux contraintes :

- questionner les enseignants sur leur savoir mathématique, par confrontation aux situations, ce qui implique qu'elles ne soient pas immédiatement décodables ;
- posséder des caractéristiques qui les rendent transférables dans une classe, même pilotées par un enseignant novice.

Les objectifs de ce travail en formation peuvent être énoncés comme suit :

1. les munir de situations qu'ils pourront ensuite réinvestir dans leurs classes ;
2. faire évoluer leurs connaissances mathématiques et leurs conceptions des mathématiques et de leur enseignement : en particulier, faire comprendre en action qu'une preuve formelle n'implique pas une preuve pragmatique ;
3. leur faire découvrir de nouveaux modes d'interactions professeur/élèves, basées sur des productions de ces derniers dans leur interaction avec une question mathématique ;
4. leur faire jouer eux-mêmes les situations afin de leur donner confiance dans le fait que ces situations, bien que produisant une certaine entropie phénoménologique,

• —————
⁵ Voir Brousseau, 1998 ; pour des situations dans l'enseignement secondaire, voir Bloch, 2000, 2003.

⁶ Voir par exemple Legrand, 1996.

débouchent sur le savoir visé de façon certes non automatique, mais suffisamment contrainte cependant.

Le deuxième volet de l'objectif 1. nous paraît, de tous, le plus difficile à contrôler : nous pouvons certes les munir de situations, mais rien ne nous assure que les professeurs les utiliseront avec leurs élèves. Dans la partie IV de ce texte nous reviendrons sur l'évaluation du dispositif.

Pour construire de telles situations, nous faisons appel à la TSD :

- identifier un "jeu" où le concept visé est pertinent ;
- faire apparaître les principales variables didactiques et choisir leurs valeurs ;
- organiser le jeu en deux phases : l'une directe, l'autre retournée, la dernière étant celle qui conduit le joueur à confronter son action à un milieu de référence où la connaissance visée est nécessaire.⁷

III.2. Le " rallye du plan " : produit de vecteurs par des réels

Une situation pour introduire la fonctionnalité de la notion de base du plan vectoriel, a été construite par A.Berté et expérimentée avec des professeurs stagiaires.⁸

Le jeu direct – plus classique – est introduit en premier lieu : il consiste à mettre en œuvre la multiplication des vecteurs par des réels et à leur associer les points convenables ; c'est le jeu qui est proposé d'habitude dans les classes du secondaire. On peut remarquer que les variables de ce jeu sont choisies usuellement dans un champ numérique très pauvre : ainsi on demandera aux élèves de trouver le point B tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, ou C tel que :

$\overrightarrow{AC} = -3. \overrightarrow{u}$, voire D tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{u}$, mais jamais des coefficients tels que 1,66 ou $\sqrt{3}$, ou un rationnel plus complexe comme $\frac{15}{22}$

Le jeu direct institue un milieu objectif – milieu heuristique – où les élèves peuvent acquérir la technique et la stratégie de base : en multipliant un vecteur par un nombre on peut partir d'un point et atteindre un autre point. Cependant, la recherche en didactique a largement pointé la difficulté des élèves à relier nombres réels et droites du plan ; cette

• _____

⁷ Voir Bloch 2005, Bloch 2002.

⁸ Voir schéma en annexe.

difficulté est accentuée, à notre avis, par l'usage restreint des variables numériques (cf. Pressiat, 1999).

Le "rallye du plan" est le jeu retourné⁹ : il s'agit d'atteindre les points entourés, en donnant le bon message n'utilisant que des combinaisons linéaires de vecteurs connus. La validation matérielle se fait par transparence (grille sur transparent appliquée sur la réponse) ; la validation théorique est un débat sur la façon d'écrire et d'interpréter les messages, et la possibilité de le faire dans tous les cas.

Une variable didactique est le nombre de vecteurs : un vecteur, certains points seulement sont atteints ; deux vecteurs, tous les points sont atteints d'une seule façon ; trois vecteurs, tous les points sont atteints de plusieurs façons.

La nature des coefficients est une variable didactique particulièrement importante : elle joue non seulement dans la difficulté de la tâche, mais aussi dans la relation de la situation au concept de base. Cette situation retournée est en effet la situation fondamentale du concept de base d'un espace vectoriel, ici dans sa composante d'espace affine associé : atteindre tous les points du plan par combinaison linéaire de deux vecteurs en partant d'une origine. Or les paramètres habituels des tâches proposées aux élèves ne leur permettent pas de se convaincre par l'action de la généralité de cette règle. Certes il n'est pas possible effectivement d'atteindre *tous* les points ; seuls les points constructibles peuvent être atteints. Mais restreindre à des coefficients entiers ou rationnels très simples, et de plus dans le jeu direct, ne peut suffire à montrer l'efficacité du concept. En ce sens la situation fait fréquenter aux élèves des mathématiques constructives : ils construisent une preuve pragmatique de ce que certains points non triviaux sont atteignables.

Cette situation est particulièrement intéressante à jouer avec de jeunes professeurs, car ils ont un point de vue très formel sur l'algèbre linéaire. L'expérience prouve que cette situation les déstabilise, ceci pour deux raisons.

- Dans un premier temps ils ne décryptent pas l'intention et la difficulté du jeu retourné : pour eux le simple fait de multiplier un vecteur par un réel suffit à instaurer la fonctionnalité de la notion d'espace vectoriel, même si, dans l'énoncé donné ensuite en classe, c'est bien le théorème de décomposition qui est visé.

• _____

⁹ Voir Bloch, 2005.

- L'évidence théorique leur semble entraîner l'évidence pragmatique. C'est donc une découverte qu'il soit si peu évident de trouver les bons coefficients, pour le premier jeu où $OM = \sqrt{2} (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u})$, et surtout le deuxième où : $OM = \frac{15}{4} (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u})$. Dans la recherche ils produisent des écritures peu conformes, ce qui peut (doit) les alerter sur leurs propres réactions aux productions écrites approximatives des élèves.

C'est un réel travail pour eux, que de voir l'adéquation de cette situation à la notion de base, et de trouver les variables didactiques. Cette situation se prête très bien à une analyse dans la TSD : dans la phase d'action le savoir visé apparaît comme un outil ; la validation matérielle par superposition dit simplement si l'élève a réussi ou échoué mais pas la méthode qui fait que l'on sait décomposer, il y a donc besoin d'un milieu pour une validation théorique.

Après un temps de recherche les professeurs proposent d'utiliser le théorème de Thalès ou la longueur de la diagonale du carré. Très peu proposent de se référer seulement au théorème de décomposition dans une base ; et de fait, ce théorème assure l'existence théorique des coefficients mais ne permet pas une réussite pragmatique. Ainsi les professeurs entreprennent eux-mêmes un travail heuristique avec recherche de rotations, construction de traits auxiliaires... ils produisent eux-mêmes, dans cette situation, des écritures non canoniques qu'ils sont donc enclins à interpréter comme des règles d'action ; ils constatent qu'à partir de ces ostensifs de l'action on peut arriver à des formulations mathématiques correctes.

Cette production d'écritures est un événement significatif dans l'expérience de la situation : elle conduit les stagiaires à constater qu'en dépit de l'incertitude de la phase heuristique et de l'impropriété des formulations, la situation conduit bien au savoir visé. Cette confiance dans la situation est un des événements majeurs de la formation. Douaire, dans Colomb, Douaire et al. (2003) a étudié la mise en œuvre, par de jeunes professeurs dans des classes d'école primaire, de situations à dimension a-didactique : les enseignants témoignaient de ce qu'ils ne pouvaient se sentir suffisamment confiants pour essayer ces situations s'ils n'avaient pu les tester auparavant. L'entropie phénoménologique des situations à dimension a-didactique est une manifestation que redoutent les jeunes (ou moins jeunes) professeurs : il est important qu'ils trouvent une assurance de ce que cette

entropie pourra être refermée correctement sur le savoir et qu'elle n'entravera pas la synthèse par le professeur et l'institutionnalisation.

III.3. Les suites de Fibonacci

Cette situation est due à B.Véron.¹⁰ Elle introduit le travail algébrique sur la mise en équations et la notion de variable, à partir d'un travail de recherche sur les suites de Fibonacci vérifiant certaines contraintes. Elle a pour objectif d'introduire l'algèbre non comme une collection de règles, mais comme moyen de résolution de problèmes de type algébrique, tels qu'ils ont été définis, entre autres, par Broin (2002) et Gascon (1994).

Première phase : constitution du milieu objectif

Trouver une suite de Fibonacci telle que :

2	5	7	12						212
---	---	---	----	--	--	--	--	--	-----

Le milieu objectif est ici simplement un milieu de constitution des règles : comprendre ce qu'est une telle suite et en fabriquer. La condition classique sur la nature entière des termes de la suite n'a pas à être respectée durant toute la situation : c'est une variable parmi d'autres. On peut remarquer que, si l'on vise l'entrée dans l'algèbre, cette condition est à écarter ; par contre, elle est évidemment pertinente pour un travail en arithmétique.

Deuxième phase : retournement de situation et constitution du milieu de référence pour l'algèbre

7									45
---	--	--	--	--	--	--	--	--	----

9							241
---	--	--	--	--	--	--	-----

Ceci conduit à nommer x le second terme, et les équations en x se trouvent avoir des solutions positives ou négatives, suivant les valeurs prises par le premier et le n -ième terme.

• _____

¹⁰ Voir Véron, 2001.

Cette phase conduit à identifier des stratégies de base sur la construction de telles suites, elle continue donc la mise en place du milieu objectif tout en introduisant au milieu de référence : la connaissance visée – la mise en équation – est nécessaire, sauf à des acrobaties calculatoires vite hors de portée si le nombre de termes manquant est trop grand. Ceci initialise l'idée d'un procédé algorithmique de construction de telles suites.

Troisième phase : généralisation et apparition de la structure

Trouver des suites de Fibonacci telle que :

									178
--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----

									51
--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

									301
--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----

Cette phase peut conduire à essayer des stratégies 'à rebours', qui s'avèrent complexes. Le passage en dimension 2 est la stratégie optimale, elle conduit au :

Calcul "une fois pour toutes" :

a	b	a + b	a + 2b	2a + 3b	3a + 5b	5a + 8b	...
---	---	-------	--------	---------	---------	---------	-----

Questions possibles : y a-t-il une formule pour le n-ième terme ? Combien peut-on trouver de suites de Fibonacci avec des termes entiers positifs, de 10^{ème} terme donné ? Quel théorème d'arithmétique permet d'affirmer que l'équation $21a + 34b = 178$ a des solutions ?

Les questions posées sont de niveau mathématique variable, on peut donc ajuster le travail au niveau de la classe considérée. En Quatrième de collège français (7^{ème} Secondaire) cette situation permet de traiter :

- le calcul sur les nombres relatifs ;
- le calcul sur les écritures fractionnaires ;
- le calcul littéral, et le statut des lettres : distinction entre inconnue et variable ;
- la mise en équation d'un problème, sa résolution ;
- les systèmes d'équations à deux inconnues.

Cette situation est moins déconcertante pour les stagiaires que la situation du Rallye du plan ; cependant elle les amène à réfléchir sur leur conception du calcul algébrique élémentaire comme catalogue de règles, et à concevoir comment l'algèbre peut être travaillée en classe en relation avec des problèmes. Du point de vue des situations, un élément positif est que ses variables didactiques sont plus aisées à manipuler que celles du Rallye du plan ; cette situation peut donc aider les professeurs novices à progresser dans la compréhension de la structure des situations.

IV. Impact des situations : l'expérience en formation et les mémoires professionnels

IV.1. Les situations en formation

Il est toujours difficile d'évaluer l'impact d'une formation de professeurs : même si une situation est bien construite, de nombreux facteurs, comme l'inexpérience dans la conduite de la classe, peuvent empêcher la réussite. Cependant plusieurs professeurs ont essayé dans leur classe les situations vues en formation¹¹, avec un succès plus que raisonnable. Par ailleurs, dans le questionnaire qu'ils ont rempli à l'issue de leur formation, ils mentionnent que ce travail les a amenés à découvrir des dimensions des mathématiques qu'ils ignoraient à l'Université. Ces deux résultats montrent que l'influence de ce travail est réel sur les conceptions des professeurs en formation.

Parmi les stagiaires ayant essayé le transfert de situations dans leur classe, deux professeurs, Justine et Séverine, ont rendu compte de ce travail dans leur mémoire professionnel.

IV.2. Les situations dans les mémoires professionnels

IV.2.1. Le mémoire de Justine

Le titre du mémoire est : "Réflexion sur l'enseignement des mathématiques, une transmission de connaissances, un apprentissage de la vie". Elle mêle, d'une façon très

• _____
¹¹ D'autres situations ont été proposées en formation et essayées dans des classes, par exemple sur les fonctions (voir Bloch 2003) ou la numération (voir Bloch 2005).

personnelle, des réflexions humoristiques sur le fonctionnement de la classe, et des connaissances réflexives sur la façon d'atteindre ses objectifs. Ainsi, citant les IO (Instructions Officielles) :

" Chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, ... sont quelques uns des aspects de la diversité de l'action mathématique. Il faut que chaque élève, à son niveau, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction." (IO, classe de Seconde)

Très altruiste mais est-ce vraiment concevable lorsque vous avez 33 êtres complexes, en pleine adolescence et tous différents ? (...) Le professeur est donc amené à réfléchir aux liens qui existent entre :

- les groupements d'élèves (homogènes, hétérogènes) ;
- les objectifs visés (connaissances, savoir-faire, soutien, approfondissement) ;
- les traitements didactiques (organisation pédagogique, supports, outils didactiques)" (p.3)

Dès le début de son mémoire elle relève des traits intéressants de la nature du travail mathématique dans l'enseignement : nécessité d'organiser du travail en petits groupes pour rendre les élèves plus autonomes et leur déléguer une réelle responsabilité mathématique ("Le professeur n'est plus le seul détenteur du savoir"), nécessité pour le professeur de chercher à reconnaître des connaissances derrière les erreurs des élèves... Elle est disposée à organiser des situations d'apprentissage visant ces fonctionnalités :

"Les situations d'apprentissage mises en place doivent répondre à deux exigences: pertinence du savoir enseigné, porteuses de valeurs et de plaisir." (p.11)

La troisième partie du mémoire est particulièrement intéressante, lorsqu'elle pointe le rôle du professeur : donner la consigne, anticiper leurs erreurs, leurs conceptions ; garder certaines informations et en expliciter d'autres, réguler le travail des élèves :

"Le professeur ne doit pas oublier que le travail est à la charge des élèves ; il doit veiller à ne pas orienter trop les recherches, voire induire les réponses, ce qui priverait cette phase de tout intérêt et parasiterait la suivante". (p.20)

Elle pense qu'après une phase de recherche, le professeur doit organiser une phase de débat :

"Les élèves doivent confronter leurs solutions, les discuter, les débattre, les valider..." (p.21)

Justine est remarquablement consciente du travail que constitue, pour le professeur, l'organisation d'une telle construction artificielle, qui cache un savoir qu'il lui serait si facile d'exposer directement :

"Le 'débat' proposé n'est en rien naturel. Il ne peut être que la conséquence d'une construction artificielle, minutieuse, contraignante, qui crée un cadre où la discussion apparaît – fictivement – comme libérée ; mais l'hypothèse est que cette 'aire de liberté' suffise à permettre une interaction sociale apte à favoriser l'apprentissage." (p. 6)

Justine identifie parfaitement les objectifs de la situation (travail sur les coefficients, utilisation des connaissances sur les configurations et théorèmes antérieurs, nécessité de la constitution d'une base par deux vecteurs, unicité d'un représentant d'un vecteur connaissant l'origine...) et les conditions de dévolution du problème : nature de la consigne, enjeu pour l'émetteur et le récepteur, instruments de mesure non acceptés, du moins dans la phase de validation théorique.

Elle propose une analyse des erreurs prévisibles, et confronte le fonctionnement effectif (confection et interprétation des messages) à cette analyse a priori. Elle analyse aussi le processus de validation, distinguant validation matérielle par superposition, dont elle signale bien qu'elle ne permet pas de repérer la cause des erreurs, et validation théorique par l'argumentation. Elle observe que, pour la plupart des élèves, la question n'est plus : "Est-ce que le professeur permet de faire ceci ?", mais : "Est-ce que la transformation que je compte faire me permettra de résoudre le problème ou non ?" C'est-à-dire qu'ils ne se mettent plus en position de donner une réponse par effet de contrat didactique mais parce qu'ils se posent une question sur la validité mathématique de leur procédure. C'est une forte indication de ce que la gestion du professeur inclut C_1 .

Dans une partie de synthèse, intitulée "Comment penser le rôle du professeur ?", elle reprend les phases de dévolution, la définition de la consigne, la régulation du travail des élèves dans les phases de recherche et les mises en commun, le rôle fondamental du professeur dans la phase de synthèse, dont il est dit :

"Cette étape doit permettre aux élèves d'avoir une vision claire de ce qui s'est fait ou dit pendant la séance : c'est aussi une phase d'institutionnalisation (...) qui ne remet pas en cause le processus de dévolution : c'est un mouvement inverse mais complémentaire".

Sur le déroulement de la situation dans la classe, elle pointe les aspects positifs et négatifs.

Du côté positif : la dévolution a bien lieu, tous les élèves se mettent à chercher, les connaissances anciennes sont mobilisées et rappelées (comme la relation de Chasles, la non

unicité de la décomposition d'un vecteur dans l'écriture d'une égalité vectorielle, le théorème de Thalès pour calculer des longueurs) ;

Du côté négatif : dans les groupes trop hétérogènes, il y a peu de discussion sur la validité du résultat ; dans les groupes faibles le professeur doit aider les élèves à trouver les points les plus difficiles. Le rôle d'émetteur est plus difficile que celui de récepteur, et donc comme le fait Séverine, elle aménage la situation en créant une autre grille de façon à ce que les élèves jouent les deux rôles.

Elle constate que la validation est un processus, qui ne peut être ponctuel et exige de nombreux allers-retours dans le milieu de la situation de recherche (cf. Bloch 1999). Nous ne pourrions imaginer une telle maîtrise de la situation si le professeur ne l'avait pas auparavant jouée elle-même en formation. Son savoir-faire inclut de façon indiscutable le critère C_3 .

L'analyse de ce qui s'est passé dans le déroulement de la situation semble vraiment complète ; néanmoins elle régule l'activité des élèves de façon parfois trop fermée, en les incitant fortement aux procédures de calcul. Elle maîtrise donc C_2 mais se montre quelque peu anxieuse à propos des formulations provisoires. Il y a là cependant un élément de contrat didactique dans les classes de ce niveau : les élèves savent bien que la situation est organisée pour leur faire rencontrer un savoir mathématique et non seulement pour "jouer au jeu du rallye du plan". Les pressions du professeur pour faire effectuer des calculs et des validations théoriques sont donc vues comme naturelles.

IV.2.2 . Le mémoire de Séverine

Séverine enseigne à des élèves d'une classe technologique de Seconde (16 ans). Cherchant à donner du sens aux mathématiques pour ces élèves convaincus qu'elles ne servent à rien, elle explore plusieurs pistes dont la visite d'une soufflerie et la mise en équation des phénomènes observés. Le titre de son mémoire est : "Comment donner du sens aux mathématiques pour intéresser les élèves d'une classe de Seconde technologique à cette discipline d'enseignement général ?". Pour elle, les mathématiques sont donc une 'discipline d'enseignement général', elle est peu consciente de leur dimension d'application ; il est vrai que dans l'enseignement secondaire, cette dimension est peu évidente. Dans l'introduction elle déclare :

"L'enseignement des mathématiques dans une classe technologique pose le problème de la pertinence des savoirs à enseigner par rapport aux besoins des élèves, et à leur projet

professionnel. Ce mémoire se donne pour objectif d'explorer les quelques moyens, à disposition du professeur, d'arriver à concilier le programme de mathématiques avec l'intérêt que portent les élèves à l'enseignement de cette discipline ; ceci en organisant des situations qui soient, à la fois pertinentes pour le savoir et attrayantes pour les élèves. De ce fait, lors de ces situations, le professeur aura à gérer plusieurs éléments dans sa classe, tels que la communication, ou les phases de recherche ; son rôle apparaîtra alors plus complexe. Ces situations 'mettent en scène' le savoir mathématique ; nous nous intéresserons au fait de savoir comment l'enseignant les pense, comment il les construit, les met en œuvre en classe et finalement ce que cela apporte aux élèves, mais aussi les difficultés qu'elles engendrent." (p. 5)

Séverine analyse très bien les principes qui sont à la base de la construction d'une situation :

"Dans un premier temps, une situation se construit par rapport à un savoir visé. Une notion mathématique est un savoir construit par rapport à un certain besoin (interne aux mathématiques) ; elle devient fonctionnelle lorsque, par exemple, elle est utilisée comme un outil nécessaire pour effectuer un certain travail. Dans une situation adidactique, d'abord, la connaissance fonctionne comme outil pour résoudre le problème ; le professeur n'intervient pas pour dire à l'élève ce qu'il doit trouver, l'élève doit le déduire des conditions du travail qui lui sont données."

Elle fait une analyse, appuyée sur Berté 1993, des facteurs de la motivation, internes ou externes aux mathématiques. Et pour ce qui est des facteurs internes, elle se montre très convaincue de ce que les situations retournées¹² sont particulièrement adéquates pour intéresser les élèves en leur posant un "vrai problème" qui les intrigue. Séverine analyse aussi les phases de la situation : dévolution, régulation de la recherche des élèves, institutionnalisation. Les variables didactiques sont pointées comme les *contraintes* de la situation, sur lesquelles le professeur peut jouer.

Séverine choisit trois situations à implémenter dans sa classe : le Rallye du plan, la situation du Jean qui sèche sur la somme vectorielle (Legrand 1997) et une visite dans une chaufferie, qui ne pourra finalement pas avoir lieu.

L'analyse du travail des élèves est détaillée par l'examen des brouillons, ainsi une élève écrit "longueur $\overrightarrow{KV} = \overrightarrow{KL} + 45^\circ$ " ; Séverine interprète ceci comme une succession d'actions, et donc elle se montre capable de maîtriser C₂, capacité à tolérer des formulations provisoires. Ces formulations provisoires lui semblent utiles en particulier comme supports

¹² Cf. Bloch 2005.

des échanges entre le professeur et les élèves. Elle a remarqué que le rôle d'émetteur était plus difficile que celui de récepteur et elle tente des modifications – faire jouer en même temps les deux rôles, ou bien donner des valeurs plus simples aux coefficients – pour aménager la situation. Elle mène à bien la situation y compris une phase de synthèse – ce que nous avons retenu comme critère C_3 .

L'introduction de ces situations a permis à Séverine de gérer pragmatiquement, comme de penser, l'articulation dans sa classe des mathématiques avec la dominante technologique des élèves. De ce fait, Séverine évalue très positivement cet apport. Elle termine son mémoire par une question très pertinente : "Quels sont les savoirs fondamentaux dans l'enseignement secondaire, pour lesquels de telles situations seraient nécessaires ?"

IV.3. Problèmes posés par l'introduction de situations à dimension a-didactique

IV.3.1. Les situations a-didactiques et l'avancée du temps didactique dans la classe

La TSD a expérimenté des situations a-didactiques dans les classes du primaire en se pliant aux avancées des élèves, et en calquant le plus possible la gestion du temps sur les possibilités de ceux-ci et leurs formulations du moment. Il en résulte des situations qui peuvent s'étirer sur vingt séances ou plus (cf. Brousseau N. et G., 1988). Ce qui est possible dans l'enseignement primaire ne l'est pas dans l'enseignement secondaire, pour des raisons de découpage de la journée comme d'avancée du temps didactique par rapport au curriculum de la classe ; il y a donc un problème d'insertion de ces situations dans le cours 'ordinaire' des leçons.

C'est pour cette raison que les situations que nous proposons en formation des professeurs de collège et lycée sont plus courtes, et plus insérables dans le cours habituel du curriculum. La situation du Rallye du plan, par exemple, se fait en deux ou trois séances d'une heure ; par ailleurs, une fois cette situation conclue, et la synthèse faite, il est facile de reprendre le cours des exercices proposés par les manuels sur les vecteurs. De même, la situation des suites de Fibonacci reste d'un coût ergonomique raisonnable au regard du travail qu'elle permet de poursuivre, *sans rupture de problématique*.

Ces conditions nous paraissent essentielles pour que les enseignants, novices ou chevronnés, osent s'engager dans ce mode d'enseignement :

- compatibilité avec le temps didactique 'ordinaire' ;
- non rupture de problématique (insertion aisée dans un chapitre ou une série de séances).

Les autres situations que nous avons proposées – sur les fonctions, les limites¹³ – sont un peu plus lourdes à implanter dans des classes 'normales' mais il est possible, presque à tout moment, de reprendre le cours d'un enseignement plus classique. Cette plasticité des situations nous paraît essentielle dans l'enseignement secondaire.

Par ailleurs, même si le savoir mathématique n'y est pas non plus transmissible tel quel, le contrat didactique de l'enseignement secondaire est moins assujéti au temps propre des élèves, et nous pensons que c'est légitime (jusqu'à un certain point) : la construction des situations doit en tenir compte. De fait, nous avons vu dans Bloch (2000) que des élèves de Première scientifique, confrontés à une situation de jeu sur les limites, demandaient très vite à mettre en œuvre "le cas général". On ne "joue" pas à dix-sept ans comme à huit ou dix ; et on sait bien, quand on est élève du secondaire, que le professeur de mathématiques vise un savoir institutionnalisé.

IV.3.2. L'hétérogénéité et la gestion des situations

Certes dans une classe hétérogène tous les élèves ne sont pas en mesure de s'investir de la même façon dans la recherche des problèmes mathématiques posés dans les situations. Mais les enseignants, pourtant novices, qui ont essayé ces situations, témoignent que tous les élèves se sont engagés dans la recherche, même si certains ont dû être aidés. Il nous semble alors possible de penser l'implantation de situations à dimension a-didactique en prenant en compte la notion *d'étayage* allant jusqu'à *des effets Topaze* à dépasser : ces notions étaient déjà présentes dans les propositions que nous faisons pour la gestion des situations dans les classes d'élèves en grande difficulté (cf. Bloch et Salin, 2004).

¹³ Cf. Bloch 2003.

Conclusion

En proposant ce travail sur les situations nous annonçons plusieurs objectifs.

- Faire évoluer les connaissances mathématiques des stagiaires et leurs conceptions des mathématiques et de leur enseignement : en particulier, faire comprendre en action qu'une preuve formelle n'implique pas une preuve pragmatique. Cet objectif nous paraît raisonnablement atteint, et nous pouvons en juger par les retours des professeurs en formation et leur évolution quant à leurs attentes vis-à-vis des élèves.

- Leur faire découvrir de nouveaux modes d'interactions professeur/élèves, basées sur des productions de ces derniers dans leur interaction avec une question mathématique : les situations vues en formation – mais aussi la réalité de la classe durant une année scolaire – permettent effectivement aux professeurs d'élargir leurs conceptions de ce que peuvent être les interactions entre élèves et professeur.

- Munir les stagiaires de situations qu'ils pourront ensuite réinvestir dans leurs classes ; leur faire jouer eux-mêmes les situations afin de leur donner confiance dans le fait que ces situations, bien que produisant une certaine entropie phénoménologique, débouchent sur le savoir visé de façon certes non automatique, mais suffisamment contrainte : selon ce que nous pouvons voir, les stagiaires sont pratiquement tous plutôt bien engagés dans les situations jouées en formation. Par contre sur le réinvestissement dans leur classe, le bilan est contrasté : manifestement certains stagiaires – environ un sur quatre – n'hésitent pas à essayer ces situations avec leurs élèves, et certains en témoignent dans leur mémoire professionnel ; ils peuvent atteindre un niveau de maîtrise dans la gestion et l'analyse des situations que nous n'osions espérer, comme le prouvent les mémoires de Justine et Séverine. Par contre, d'autres n'osent pas faire ce pas, ou cela ne les intéresse pas, par exemple parce que c'est peu compatible avec leur épistémologie des mathématiques et de leur enseignement. Au risque de surprendre le lecteur, nous avançons que la proportion d'environ 25% de professeurs suffisamment convaincus pour essayer les situations en classe nous paraît un résultat loin d'être décevant, si on le mesure au temps, forcément long, d'une évolution significative des pratiques enseignantes.

En conclusion, je voudrais souligner que, de toutes façons, ce dispositif nécessite de se donner *le temps* de faire vivre les situations aux stagiaires ; le temps de les laisser expérimenter dans leurs classes, sans pression d'évaluation de ces essais ; et de prévoir un

retour sur l'expérience qui les munisse de quelques concepts didactiques pour penser l'organisation de telles situations.

En retour, non seulement certains des professeurs ont appris à installer, dans leurs classes, des situations porteuses de vraies questions mathématiques pour les élèves, mais ils ont appris eux-mêmes à mieux concevoir les savoirs mathématiques qu'ils utilisent. En ce sens, cette analyse rejoint ce que disait déjà Brousseau (1998, p.49) :

"Le travail du professeur est dans une certaine mesure inverse du travail du chercheur, il doit produire une *recontextualisation* et une *repersonnalisation* des connaissances. Elles vont devenir les connaissances d'un élève, c'est-à-dire une réponse assez naturelle à des conditions relativement particulières, conditions indispensables pour qu'elles aient un sens pour lui. Chaque connaissance doit naître de l'adaptation à une situation spécifique, car on ne crée pas les probabilités dans le même genre de contexte et de rapports avec le milieu que ceux dans lesquels on invente ou utilise l'arithmétique ou l'algèbre.

Le professeur doit donc simuler dans sa classe une micro-société scientifique s'il veut que les connaissances soient des moyens économiques pour poser de bonnes questions et trancher des débats, s'il veut que les langages soient des moyens de maîtriser des situations de formulation et que les démonstrations soient des preuves.

Mais il doit aussi donner les moyens à ses élèves de retrouver dans cette histoire particulière qu'il leur a fait vivre, ce qu'est le savoir culturel et communicable qu'on a voulu leur enseigner."

Références

- ARSAC G., BALACHEFF N., MANTE M. (1992) Teacher's role and reproducibility of didactical situations, *ESM* 23, 5-29. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
- ASSUDE T. (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-Géomètre à l'école primaire., *ESM* 50, 259-287. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands
- BERTÉ A. (1993a) *Mathématique dynamique*. Paris : Nathan pédagogie, collection Perspectives didactiques.
- BERTÉ A. (1993b) *Mathématiques du collège au lycée*. Paris : Nathan Pédagogie.
- BERTHELOT R. BLOCH I. (2001) Le rôle du professeur dans la gestion des situations : consigne et dévolution, mises en commun, clôture des séances du point de vue cognitif, *Actes du XXVIIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques*, 181-204 Grenoble : Université Joseph Fourier.
- BLOCH I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*. Bordeaux : Université Bordeaux1.
- BLOCH I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, Dorier, éditeur : *Actes de la XIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première Scientifique. *RDM* 19/2, 135-194. La Pensée Sauvage, Grenoble .
- BLOCH I. (2002) Transposition of mathematical knowledge: The case of mathematics teachers' education, *ICTM 2 (International Congress on Teaching Mathematics at undergraduate level)*, Hersonissos, Crete.
- BLOCH I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *ESM* 52, 3-28. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
- BLOCH I. (2005) Dimension adidactique et connaissance nécessaire: un exemple de 'retournement' de situation. *Sur la théorie des situations didactiques*, 143-152, P.Clanché et A.Rouchier eds, Université Bordeaux 2.
- BLOCH I. & SALIN M.H. (2004) Contrats, milieux, représentations : étude des particularités de l'adaptation et intégration scolaire. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*. Paris : Université Paris 7.
- BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

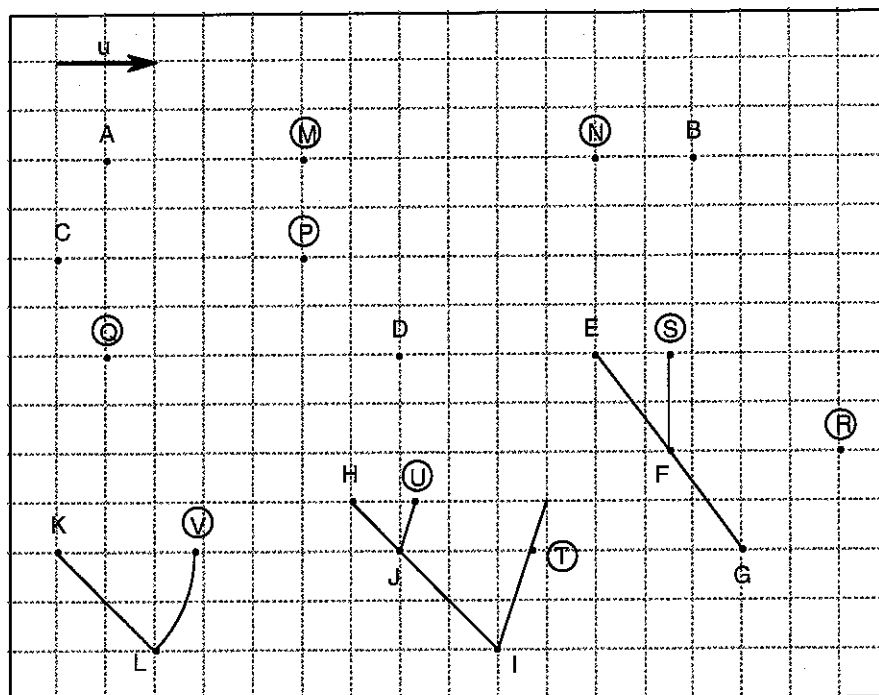
- CASTELA C. ET EBERHARD M. (1999) Quels types de modifications du rapport aux mathématiques en vue de la possibilité de quels gestes professionnels? *Actes de la Xème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, 164-172. Houlgate : ARDM.
- CHARNAY R. (1989) Les enseignants de mathématiques et les erreurs de leurs élèves. *Grand N*, **45**, 31-41.
- COLOMB J., DOUAIRE J., NOIRFALISE R. (2003) *Faire des maths en classe? Didactique et analyse des pratiques enseignantes*. Paris : INRP
- COMITI C., BALL N. (1996) Preparing teachers to teach mathematics: A comparative perspective. Bishop & al. (eds), *Handbook of Research in Mathematics Education*, 1123-1154, Dordrecht: Kluwer A P.
- GASCON J. (1994) Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *Petit x* **37**, 43-63. Grenoble : Université Joseph Fourier.
- HANA G., JAHNKE N. (1993) Proof and application. *ESM* **24**, 421-438. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
- HENRY M., CORNU B. (2001) Mathematics teachers' education in France: from academic training to professionalization, Derek Holton & al. (eds), *The Teaching and learning of Mathematics at University Level: an ICMI study*, 481-499, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- JAWORSKI B. (2003) Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnership, *ESM* **54** 2-3, 249-282. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
- LEGRAND M. (1996) La problématique des situations fondamentales, *RDM* **16-2**, 221-280. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- LEGRAND M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques, *Repères IREM* **10**, 123-159.
- LEGRAND M. (1997) La problématique des situations fondamentales, *Repères IREM* **27**, 81-125.
- LENFANT A. (2001) From a student institutional position to a teacher one: what changes in the relationship to algebra? *Proceedings of the 25th Conference of PME*, 297-304. Netherlands: University of Utrecht.
- LIEURY A., FENOUILLET F. (1997) *Motivation et réussite scolaire*. Paris: Dunod.
- MALARA N., ZAN R. (2002) The problematic relationship between theory and practice. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 553-580, Lyn English ed., LEA.
- MARGOLINAS C. (2002) Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur, *Actes de la 11^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 141-156. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- PRESSIAT A. (1999) *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison points/vecteurs*, Paris : Université Paris 7.

- ROBERT A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes du métier d'enseignant. *RD M* **21-1/2**, 57-80. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- ROUSSET-BERT S. (2001) Les activités, un thème à retravailler, *Petit x* **56**, 61-79.
- SACKUR C. (2000) Experiencing the necessity of the mathematical statements, *Proceedings of PME XXIV*, Hiroshima, Japan, IV 105-112.
- SALIN M.H. (1999) Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique, *Le cognitif en didactique des mathématique*, 327-352, Lemoyne et Conne (Eds), Presses de l'Université de Montréal.
- SIERPINSKA A., LERMANN S. (1996) Epistemologies of mathematics and mathematics education, Bishop & al. (eds), *Handbook of Research in Mathematics Education*, 827-876, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- SHULMAN (1986) Those who understand. Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, **15**, 4-14.
- VAN DOOREN W., VERSCHAFFEL L., ONGHENA P. (2001) The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems, *JRME*, Vol. **33-5**, 319-351.
- VÉRON B. (2001) Calcul littéral, équations, inéquations, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques*, **435**, 440-444. Paris : APMEP.

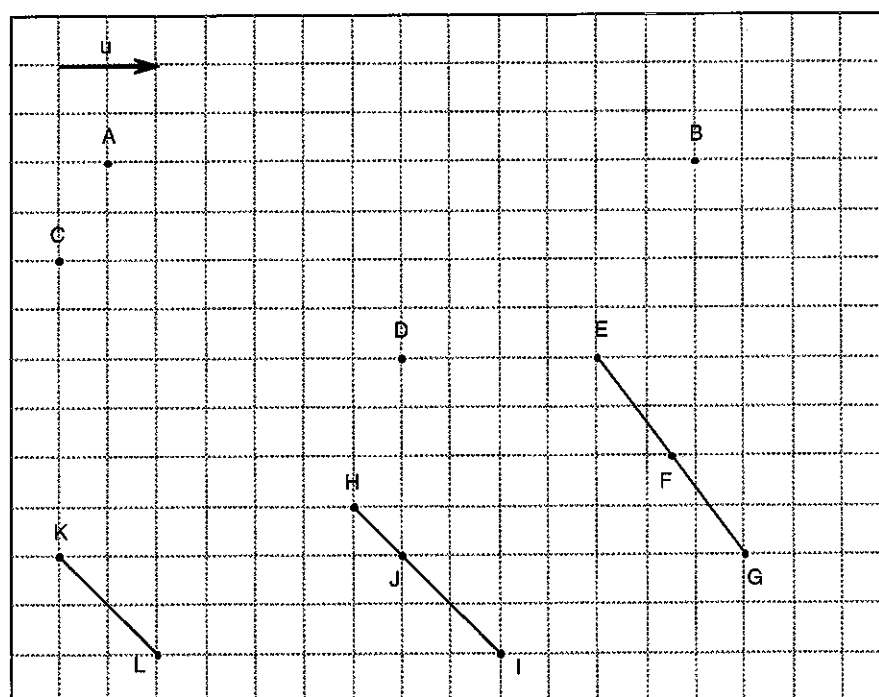
ANNEXE : LE RALLYE DU PLAN

Phase 1 : dimension 1. Un vecteur $\vec{u}$ et certains points sont donnés, par exemple A, et on doit envoyer un message pour placer B (par exemple tel que $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \vec{u}$)

Grille pour les émetteurs :



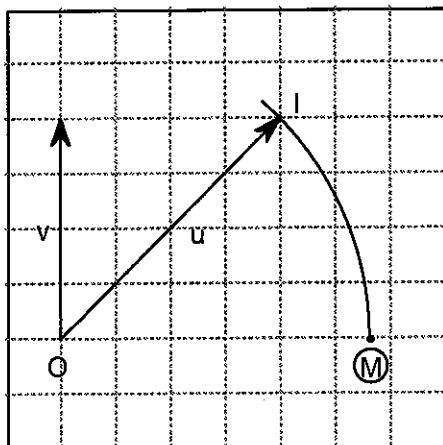
Grille pour les récepteurs :



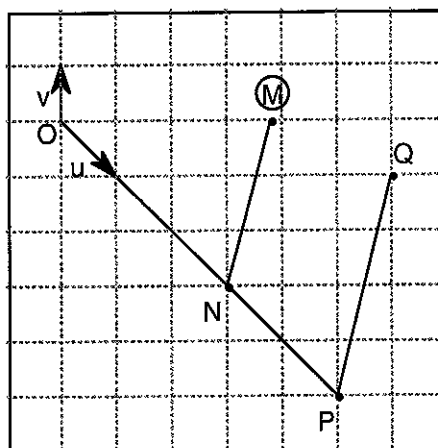
Consigne : envoyer des messages pour placer les points entourés, que le récepteur n'a pas. Quand un point a l'air d'être sur un nœud du quadrillage, il y est vraiment. Les messages ne doivent comporter que des nombres et des vecteurs, il est interdit de nommer des droites ou des cercles ou des nœuds du quadrillage.

Phase 2 : dimension 2. Deux vecteurs u et v sont donnés :

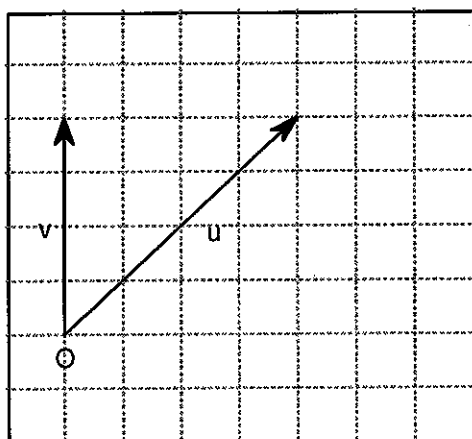
Jeu 1 : Grille pour les émetteurs



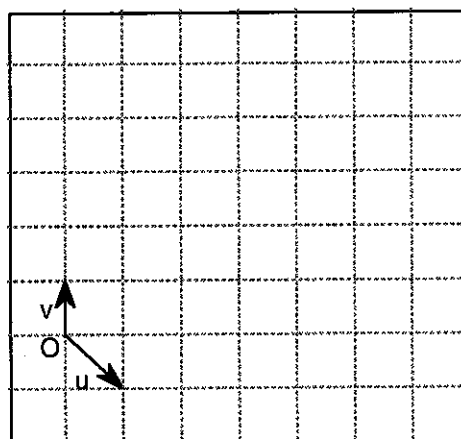
Jeu 2 : Grille pour les émetteurs



Jeu 1 : Grille pour les récepteurs



Jeu 2 : Grille pour les récepteurs



Indication pour la position de M dans le Jeu 2 : si l'on prolongeait $[NM]$ on aboutirait dans le coin supérieur droit du carreau situé au dessus de M .