

A. Pour situer le travail de notre groupe de recherche

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

IUFM Nord - Pas-de-Calais et équipe DIDIREM Université Paris 7

Dans cette première partie, je présenterai quelques caractéristiques générales de notre recherche, notamment la problématique, les méthodes de travail, les hypothèses et les cadres théoriques mobilisés.

1. Points de départ de la recherche

La recherche part d'un certain nombre de constats et d'une première analyse des difficultés constatées.

1. Des difficultés résistantes concernant l'usage des figures dans la résolution des problèmes de géométrie ont été repérées depuis longtemps chez les élèves du collège, aussi bien dans la construction de figures que dans la démonstration de propriétés de figures géométriques. D'une part les élèves se fient à ce qu'ils voient sur le dessin au lieu de travailler sur la figure géométrique portant sur des objets théoriques définis par des propriétés. D'autre part ils ne voient pas ce qu'il faudrait voir : par exemple, ils ne peuvent pas isoler les sous figures pertinentes pour utiliser les théorèmes, ils ne pensent pas à prolonger les droites pour faire apparaître des alignements ou des intersections intéressants...

2. L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire se réduit souvent à l'apprentissage d'un vocabulaire culturel concernant quelques objets de l'espace, quelques surfaces planes et quelques objets ou relations géométriques de base (point, droite, segment, parallèle, perpendiculaire), et à la manipulation des instruments usuels. Il est souvent considéré comme secondaire par rapport à celui des nombres. Il est peu problématisé. L'importance de la résolution de problèmes pour donner sens aux concepts mathématiques est bien reconnue dans le domaine numérique et de nombreux documents sont à la disposition des maîtres et des formateurs dans ce domaine. Dans le domaine de la géométrie, même si les programmes récents vont dans le sens d'une problématisation, l'enseignement se fait le plus souvent par ostension : on montre les objets, on les fait reconnaître, mais ils interviennent rarement pour apporter des réponses à des problèmes.

3. Malgré les efforts des programmes pour assurer une continuité, il y a une rupture du contrat didactique entre l'école et le collège en ce qui concerne la géométrie. On peut trouver dans les

manuels du CM2 et de 6^{ème} des tâches qui sont voisines, mais avec des attentes et des implicites assez différents, notamment en ce qui concerne la reproduction de figures. De plus, des tâches apparemment voisines donnent des résultats assez différents dans les évaluations de 6^{ème}, ce qui montre que les difficultés ne se limitent pas aux notions mathématiques elles-mêmes.

4. On peut avancer plusieurs raisons expliquant ces difficultés de l'enseignement de la géométrie à l'école et la relative rupture entre l'école et le collège :

- les spécificités du savoir lui-même : l'opposition entre un savoir pratique lié à la maîtrise de l'espace, à des activités manuelles de tracé, de déplacement, à la perception visuelle, et une théorie axiomatique, terrain par excellence d'exercice du raisonnement déductif, qui devient prépondérante au collège. Il n'y a pas vraiment de consensus sur le contenu de la géométrie à l'école, sur la façon de négocier avec les élèves les rapports entre ce qu'on peut appeler la géométrie pratique et la géométrie théorique ;
- la formation des enseignants : relativement peu d'enseignants du primaire ont une formation générale scientifique, ils ont souvent eux-mêmes rencontré des difficultés en géométrie dans leurs études secondaires et se sentent peu sûrs dans ce domaine. Or, il est avéré que l'enseignement par résolution de problèmes accroît l'insécurité de l'enseignant : en laissant plus d'initiative aux élèves, il ouvre la porte à des procédures et des raisonnements imprévus qu'il lui faudra gérer, ce qui demande une bien plus grande maîtrise des savoirs ;
- les recherches sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire sont encore assez peu nombreuses, bien qu'elles se soient développées depuis quelques années, mais le plus souvent il s'agit de la liaison entre le cycle 3 et le collège, peu de travaux s'intéressent au cycle 2 qui nous paraît pourtant très important pour initier le rapport à la géométrie et aux figures en particulier.

2. Problématique et Hypothèses

En même temps que nous présenterons la problématique, nous essayerons de préciser les hypothèses qui la fondent. Ces hypothèses ne sont pas vraiment des hypothèses que nous cherchons à valider ou à falsifier, ce sont plutôt des hypothèses de travail qui s'appuient sur

les constats précédents et sur les travaux existants. Nous avancerons donc parallèlement les deux aspects : problématique et hypothèses.

Problématique 0

La première question qui se pose ici, c'est de savoir **ce qu'on appelle géométrie**. Nous dirons que l'on fait de la géométrie dès qu'on raisonne sur des dessins qui pourraient être tracés avec des instruments, c'est-à-dire qui présentent des propriétés qui donnent accès à la déduction, sur des objets plats qui pourraient se représenter par de tels dessins, que l'on traite par le raisonnement des problèmes liés à l'espace, à des objets de l'espace, à des positions ou changements de position dans l'espace. Nous nous intéressons plus spécialement à la géométrie plane et à l'évolution du rapport à la géométrie plane qui est à construire de la maternelle à la fin du primaire.

Il nous semble qu'il y a **deux grandes catégories de problèmes** pour aborder la géométrie plane à l'école primaire : d'une part la modélisation de problèmes qui se posent dans l'espace sensible prenant en compte des rapports à l'espace lié à la taille de l'espace (cf. travaux de Brousseau, 1982, Berthelot et Salin, 1992, Gobert, 2001...), d'autre part le dessin géométrique dans le microespace de la feuille de papier : production et reproduction de figures.

Les recherches ont surtout exploré la problématique de modélisation, rapport à l'espace etc. ; nous nous plaçons plutôt dans la problématique de production ou reproduction de figures. Il y a moins de travaux concernant cette problématique. Citons cependant ceux de Fregona (1995) et Argaud (1998) qui se situent au cycle 3 ou au début du secondaire. Il y a aussi Favrat (1991-92) qui s'est intéressé au repérage d'alignements et aux tracés à la règle et dont certaines préoccupations sont proches des nôtres.

Hypothèse 0 : Le rapport aux figures est un point clé dans le rapport des élèves à la géométrie.

Entre la maternelle et la sixième les élèves doivent passer d'une vision des figures en termes de surfaces à manipuler sous forme de gabarits, à découper, colorier à une vision en termes de points et lignes qui permettent de caractériser la figure pour une construction à l'aide d'instruments qui sont eux-mêmes porteurs de connaissances géométriques. Les travaux se sont surtout intéressés au passage du contrôle des propriétés par la perception et les instruments au contrôle par des définitions, des propriétés et des déductions.

Nous pensons qu'il y a un pas aussi grand à franchir pour passer de la perception et la comparaison directe d'objets par la vue à la production de tracés et au contrôle de ces tracés par les instruments géométriques. Ce passage nous semble un point aveugle de l'enseignement de la géométrie plane à l'école.

Problématique 1

L'enjeu qui nous intéresse est d'amener les élèves à un *changement de regard progressif sur les figures* (dessins)¹ et sur les formes (objets matériels) géométriques les conduisant, au bout du compte, à concevoir les objets géométriques, et ce, en choisissant des situations qui « forcent » ce changement de regard et amènent la *vision* de propriétés géométriques. Ce changement de regard se fait conjointement avec un début de construction d'objets géométriques théoriques (définis par leurs propriétés) et du vocabulaire pertinent.

Nous sommes toujours dans le domaine de la perception et du visuel mais la *perception visuelle progressivement instrumentée*. En même temps que l'usage des instruments, il s'agit de concevoir les propriétés géométriques que ces instruments permettent de représenter sur le papier et de contrôler.

Hypothèse fondamentale (hypothèse 1)

Nous considérons que deux éléments sont particulièrement significatifs de cette évolution du changement de regard :

- le passage de la vision de la figure comme surface (via le gabarit) à une vision en termes de lignes (prolongeant le bord du gabarit) ;
- le passage de la vision de la surface en termes de lignes à une vision en termes de points caractéristiques, nécessaire dans une situation où la reproduction de la figure nécessite le repérage d'alignements et d'intersections de lignes qui ne sont pas forcément tracées.

Cette hypothèse est à relier d'une part sur le plan cognitif aux travaux de Duval sur l'importance des changements de dimension dans la lecture des figures, d'autre part, sur le plan épistémologique, aux diverses acceptions du terme « figure ». Les différentes visions de la figure sont largement illustrées dans l'exposé de Marc Godin.

¹ Nous reviendrons plus loin sur l'utilisation du mot "figure" dans ce texte.

Autres hypothèses concernant le rapport aux figures

Hypothèse 2. Un autre élément significatif, pour procéder à ce changement de regard, c'est la capacité pour l'élève à dissocier l'objet géométrique de l'outil avec lequel il a appris à le produire (cercle / compas ; perpendiculaire, angle droit / équerre ; droite / règle...) et de la procédure d'utilisation de cet outil.

Hypothèse 3 : les éléments à prendre en compte dépendent des objets géométriques considérés, par exemple le carré et le cercle ne peuvent pas se traiter de la même manière dans tous les types de situations, notamment en tant que lignes. En effet, pour les lignes droites, on a un gabarit universel : la règle permet de prolonger n'importe quel segment donné. Pour un cercle, on n'a pas de gabarit universel : un gabarit ne donne qu'un cercle de rayon fixé et, pour utiliser le compas, il faut le centre. On peut dire que, pour le carré, en passant de la dimension 2 (la surface) à la dimension 1 (les droites portant le bord), on obtient un procédé de construction avec les instruments (règle graduée et équerre). Pour le cercle, le passage à la dimension 1 (le bord) ne donne pas de procédé de construction avec les instruments usuels, il faut passer à la dimension 0 et identifier un point particulier : le centre, par exemple comme intersection de deux diamètres (qui peuvent être vus comme axes de symétrie).

Hypothèse 4. L'évolution souhaitée du regard s'accompagne d'une évolution du langage dans un processus dialectique : d'une part, le langage participe à l'évolution du regard ; d'autre part, le langage évolue avec l'évolution du regard.

Problématique 2

Un autre point essentiel de notre problématique, c'est que nous voulons nous intéresser à l'enseignement dans des classes ordinaires en espérant pouvoir le faire évoluer. Pour cela, il nous faut :

- tenir compte des pratiques effectives des maîtres,
- produire des situations gérables dans l'enseignement ordinaire qui amènent à produire un changement de regard sur les figures : du dessin ordinaire au dessin géométrique.

Pour avoir une idée plus précise des pratiques des maîtres, nous avons fait passer un questionnaire dans les circonscriptions des conseillers pédagogiques qui travaillent avec nous. L'analyse n'est pas terminée, mais le dépouillement nous a déjà montré que la place accordée à la géométrie était assez faible, surtout au cycle 2 et que ce sont surtout les figures usuelles qui sont considérées, celles auxquelles on peut donner un nom.

Cette problématique suppose donc une dernière hypothèse :

Hypothèse de faisabilité

Bien sûr, nous supposons aussi qu'on peut construire une progression visant l'apprentissage de lecture et production de figures géométriques en jouant sur le choix des figures et le choix des outils, instruments usuels mais aussi outils non standardisés, qui plus est une progression ou au moins un ensemble de situations ayant une certaine cohérence et utilisable dans l'enseignement ordinaire.

3. Cadres théoriques

Comme l'ensemble des trois exposés le montrera, notre recherche s'appuie sur l'articulation de plusieurs cadres théoriques et la considération de travaux antérieurs.

Travaux antérieurs

Les recherches antérieures dans la didactique française portent surtout sur la liaison école collège et la modélisation de l'espace. Les cadres théoriques développés dans ces travaux nous paraissent adaptés à ces problématiques mais pas totalement à celle du dessin géométrique telle que nous l'envisageons.

Connaissances spatiales / connaissances géométriques

Salin et Berthelot (1992) ont utilisé la distinction entre connaissances spatiales et connaissances géométriques, entre problématique spatiale et problématique géométrique non seulement dans le cas de modélisation de problèmes de l'espace sensible mais aussi pour analyser des rapports à des figures du micro-espace comme dans la question du triangle aplati. Cette analyse nous paraît tout à fait intéressante et pertinente, et nous sommes attentifs aux différentes dimensions repérées. Cependant la distinction des diverses problématiques, très intéressante relativement à l'approche de la géométrie comme théorie permettant de modéliser l'espace physique, nous paraît un cadre théorique trop pauvre et insuffisant pour analyser le rapport aux figures dans le micro-espace de la feuille de papier.

Figure / dessin

Les distinctions entre dessin et figure faites par de nombreux chercheurs, par exemple Parzysz (1989), Laborde et Capponi (1994) nous paraissent surtout adaptées aux études qui

s'intéressent à la géométrie au collège, à la transition école / collège, ou à la formation des maîtres du primaire pour distinguer de la trace matérielle l'objet géométrique ou la représentation que s'en fait un individu. En ce qui nous concerne, nous nous plaçons en amont, ce qui fait que garderons le terme figure pour l'objet matériel, le dessin, dans la mesure où les dessins qui nous intéressent ne sont pas n'importe quels dessins et que c'est justement à la spécificité de ces dessins que nous nous intéressons. Peut-être faudrait-il dire dessin géométrique, mais cela désigne plutôt l'activité que le produit. Figure est le terme habituellement utilisé à l'école primaire, et il ne présente pas d'ambiguïté ici puisque nous restons dans le cadre du dessin matériel sur la feuille de papier. Une figure est pour nous un dessin qui a des propriétés qu'on pourrait préciser dans le cadre de la géométrie théorique en le considérant comme une représentation d'une figure géométrique ; ces propriétés se traduisent par des propriétés visuelles contrôlables avec des instruments. C'est dans l'exercice de ce contrôle que vont intervenir les propriétés géométriques proprement dites.

Distinction de paradigmes géométrie 1 / géométrie 2

Houdement et Kuzniak (1999, 2000) ont distingué différents paradigmes de la géométrie mais cette distinction, produite pour des recherches sur la formation des maîtres et utilisée dans le secondaire, est surtout adaptée à ces niveaux d'enseignement. Ainsi, ils mettent toute la géométrie du primaire dans la géométrie 1 alors que nos travaux se situent dans la mise en place de cette géométrie 1 et dans l'étude de son fonctionnement. Parzysz (2001) a proposé de considérer aussi la géométrie 0, géométrie sur des objets, qu'il distingue de la géométrie G1 spatio-graphique. Si l'on reprend ces distinctions, on pourrait considérer que nos travaux se situent dans le passage de G0 à G1. Cependant ces auteurs mettent la mesure dans G1, alors que nous nous intéressons à une géométrie dans l'espace physique mais sans mesure : nous distinguons celle-ci du report de longueur qui a une place importante dans la reproduction de figure pour fixer la taille.

On peut aussi se reporter à l'exposé que j'ai fait au colloque de la COPIRELEM en 2003 (Perrin-Glorian, 2004) pour une présentation un peu plus détaillée des travaux antérieurs et de leur relation avec notre problématique.

Cadres théoriques mobilisés

Notre propre recherche s'appuie essentiellement sur l'articulation de trois points de vue théoriques :

- un point de vue cognitif sur la figure développé dans l'exposé de Raymond Duval,
- un point de vue épistémologique sur la figure, en particulier sur le passage du dessin ordinaire ou des objets déplaçables de l'espace à la figure au sens de dessin géométrique pouvant être construit (ou dont les propriétés peuvent être contrôlées) avec des instruments (aboutissant sur le long terme à la géométrie euclidienne de la règle et du compas). Ce point de vue est développé dans l'exposé de Marc Godin,
- un point de vue didactique fondé sur la théorie des situations didactiques : identification de variables didactiques et construction de milieux, gérables par les enseignants, et qui amènent les élèves à changer leur regard sur les figures. Il nous faut identifier les variables et les moyens de fabriquer les situations, non pour qu'elles soient produites par les enseignants, mais pour qu'elles soient utilisables et modifiables par eux. Je ne le développe pas mais je l'utiliserai pour présenter les exemples.

4. Méthodes de travail

Notre problématique demande d'une part d'affiner nos constats et notre prise d'information sur l'état actuel de l'enseignement, d'autre part de construire des situations que des enseignants ordinaires pourront reprendre à leur compte. Sur le premier point, dont nous ne parlerons pas ici, nous avons travaillé autour des résultats des évaluations de début de 6^{ème} et de l'interprétation de leurs résultats : nous avons en particulier proposé à des élèves de fin de CM2 quelques-unes des épreuves dans un dispositif qui nous permettait d'observer leurs procédures et les questions qu'ils se posaient à propos des items. Nous avons aussi récolté une centaine de réponses à un questionnaire sur les pratiques en géométrie des enseignants de cycle 2 et 3 de trois circonscriptions du Pas-de-Calais.

Sur le deuxième point, nous avons utilisé un mode de fonctionnement à deux étages dans notre équipe de recherche : un groupe restreint consacré à la recherche proprement dite (élaborations théoriques, élaboration et analyses des situations, des données, rédaction d'articles). Un groupe large, constitué du groupe restreint et des conseillers pédagogiques, qui procédait aussi à l'élaboration et l'analyse des situations, des déroulements, des outils de la recherche, mais plutôt dans l'objectif d'élaborer des documents pour les maîtres et des actions de formation. Ce groupe a travaillé sur un type de situations au cycle 2.

Je passe maintenant la parole à Raymond Duval puis à Marc Godin pour préciser certains des aspects théoriques de ce travail.