

La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique pour analyser les énoncés et les raisonnements mathématiques : *aspects logiques, perspectives didactiques et aperçus linguistiques*

Viviane DURAND-GUERRIER,

IUFM de Lyon & LIRDHIST Université Lyon 1

I. Introduction

Dans de nombreux travaux, nous avons mis en lumière la pertinence de la logique des prédicats comme outil d'analyse des raisonnements mathématiques dans une perspective didactique. En particulier, nous avons montré l'intérêt des notions de phrase ouverte, de satisfaction d'une phrase ouverte par un objet et d'énoncé contingent pour un sujet donné dans une situation donnée. La lecture des textes fondateurs de Tarski sur la *théorie sémantique de la vérité* et sur la notion de *conséquence logique* puis sur la *méthodologie des sciences déductive* devenue *Théorie des modèles* nous a convaincu de l'intérêt de relire nos propres travaux à la lumière de cette référence épistémologique. Tout naturellement, ce travail nous a conduit à nous intéresser aux travaux développés en sémantique formelle, dans la filiation des travaux de Montague visant à appliquer aux langues naturelles le projet de Tarski. L'objet de cette présentation est de donner quelques clés de ce travail, sans entrer dans le détail des exemples illustrant notre propos. Nous renverrons pour cela le lecteur aux publications où ces exemples sont traités.

Dans la première partie de ce texte, nous nous proposons de présenter les éléments de théorie des modèles qui nous servent d'appui dans notre travail sur le raisonnement mathématique dans une perspective didactique en essayant de mettre en lumière les résonances entre le projet de Tarski et nos préoccupations de recherche. Les deux autres parties seront consacrées à une réflexion sur les outils logiques et linguistiques susceptibles de contribuer à approfondir la question de l'interprétation des énoncés dans la classe de mathématiques.

II. Théorie élémentaire des modèles (*aspects logiques*)

Préliminaire : Pour présenter les éléments de cette théorie, nous nous appuyons sur la version française de trois articles de Tarski publiés en 1972 dans un recueil en deux volumes intitulé : *Logique, sémantique, métamathématique*, sous la direction de Gilles Gaston Granger, qui

souligne le caractère fondamentalement novateur des orientations apportées par l'œuvre de Tarski en ce qui concerne la sémantique et la métamathématique. Le premier, « Le concept de vérité dans les langages formalisés » (Tarski 1936a), est l'article fondateur de la théorie ; c'est le chapitre VIII ; le deuxième (Tarski 1944) est l'article intitulé « La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique » ; il s'agit du chapitre XXI. Moins technique que le premier, il revient sur les intentions du projet, énonce les résultats établis et répond à un certain nombre d'objections. Le troisième (Tarski 1936b), est l'article intitulé « Sur le concept de conséquence logique » ; il s'agit du chapitre XVI. Les pages indiquées sont celles de Tarski 1972 pour lesquelles nous précisons VIII, XXI ou XVI.

II.1 Le problème de la définition de la vérité

Dès les premiers lignes de l'article de 1936a, Tarski énonce son projet en ces termes :

« Le présent travail est presque exclusivement consacré à un seul problème, *au problème de la définition de la vérité*. Il s'agit en effet – compte tenu de tel ou tel langage – de construire une définition de l'expression « proposition vraie », définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte. (...) dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « *classique* » de la vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle « vraiment » signifie la même chose que « conformément à la réalité ». (par opposition à la conception « *utilitariste* » d'après laquelle « vrai » signifie utile sous tel ou tel rapport). » (VIII, pp.159-160).

Mathématicien et logicien, Tarski s'attaque ici à un problème philosophique difficile (il défendra à plusieurs reprises l'intérêt de son travail pour la philosophie) ainsi qu'il le dit lui-même :

« La solution de ce problème, l'un des problèmes classiques de la philosophie, rencontre des difficultés particulières : bien que la signification courante [« donnée au départ »] de l'expression en question paraisse nette et transparente, toutes les tentatives pour la préciser se sont soldées jusqu'ici par un échec et maintes recherches, où cette expression figure fondée sur des prémisses apparemment intuitives [évidentes], ont abouti à des paradoxes ou antinomies (qu'on réussissait du reste à résoudre de manière plus ou moins satisfaisante). » (VIII, p.159).

Tarski s'inscrit ainsi dans l'héritage aristotélécien comme il le dira explicitement dans l'article de 1944 dans lequel il revient sur ce qu'il faut entendre par la notion de proposition vraie dans son travail :

« La vérité d'une proposition consiste en son accord (ou sa correspondance) avec la réalité, ou encore « une proposition est vraie si elle désigne un état de choses existant ». (XXI, pp.270-271).

Cette définition fait également écho à Wittgenstein (1921, 1961) qui écrit :

"La proposition montre ce qu'il en est, *quand* elle est vraie. Et elle *dit* qu'il en est ainsi"(4.022).

"La proposition est la description d'un état de choses" (4.023).

Dès le début, Tarski considère que ce qu'il propose ne s'applique pas au langage quotidien

« (...) la possibilité même d'employer avec cohérence et en accord tant avec les principes de la logique qu'avec l'esprit du langage quotidien l'expression « proposition vraie », et partant la possibilité de construire une définition correcte de cette expression semble fortement mise en question. » (VIII, p.171).

Ceci est une conséquence de la nécessité, dans l'élaboration d'une théorie sémantique de la vérité, de disposer d'un langage objet et d'un métalangage avec lequel peut se construire la définition de la vérité sur ce langage objet. En effet, selon Tarski, les langages sémantiquement clos (i.e. qui contiennent leurs expressions, le nom de leurs expressions ainsi que les termes sémantiques comme « vrai ») sont nécessairement inconsistants (contiennent des propositions contradictoires du type « *s* » est vraie si et seulement si « *s* » n'est pas vraie, ceci en lien avec l'antinomie du menteur) (XXI, p.277).

Tarski va donc s'intéresser exclusivement aux langages formalisés pour lesquels il élabore une construction récursive de la vérité s'appuyant sur la notion de satisfaction d'une fonction propositionnelle par un élément de l'univers du discours.

« Aussi ne voit-on pas de méthode permettant, dans ce contexte, de définir le concept examiné directement par la voie récursive. Il se révèle, par contre, possible d'introduire un concept de nature plus générale, concept applicable à des fonctions propositionnelles quelconques et qui se laisse définir récursivement. Appliqué aux propositions, il conduit indirectement au concept de vérité ; c'est le concept de satisfaction d'une fonction propositionnelle par tels et tels objets (...) » (VIII, p.193).

Ainsi on dira que :

Pour tout a, a satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc » si et seulement si a est blanc.

D'où il vient la formule célèbre :

La proposition "La neige est blanche" est vraie si et seulement si la neige est blanche.

où il faut entendre l'expression entre guillemets comme une entité linguistique tandis que la deuxième occurrence est une description d'un état du monde. Seules les entités linguistiques portent le vrai et le faux. Les jugements de vérité et de fausseté sur les entités linguistiques se font dans le métalangage. Avec ce point de vue, on peut dire de manière non paradoxale :

« Cette phrase est fausse ». En effet, d'après ce qui précède,

la proposition « Cette phrase est fausse » est vraie si et seulement si cette phrase est fausse.

où le prédicat vrai ne s'applique pas à la phrase dont il est question, mais à l'entité linguistique écrite entre guillemets.

Une conséquence immédiate et essentielle de cette définition, c'est que :

« En fait, la définition sémantique de la vérité n'implique rien concernant les conditions sous lesquelles une proposition telle que (1) :

(1) *La neige est blanche*

peut-être affirmée. Elle implique seulement que lorsque nous admettons ou rejetons cette proposition, nous devons être prêts à affirmer ou à rejeter la proposition corrélatrice (2) :

(2) *La proposition « la neige est blanche » est vraie.*

Aussi pouvons-nous accepter la conception sémantique de la vérité sans abandonner nos positions épistémologiques quelles qu'elles soient. Nous pouvons demeurer naïfs, réalistes critiques ou idéalistes, empiristes ou métaphysiciens ; comme nous l'étions avant. La conception sémantique de la vérité est entièrement neutre par rapport à toutes ces attitudes. » (XXI, p.295).

Il faut noter que dans une perspective didactique, le fait d'avoir une conception de la vérité neutre sur le plan épistémologique, sans pour autant ouvrir sur un relativisme incompatible avec la construction de connaissances scientifiques est un atout considérable qui, selon nous, ne devrait pas être négligé car la variété des arrière-plans épistémologiques, tant chez les chercheurs que chez les enseignants, tend à brouiller les positions des uns et des autres.

II.2 Deux notions essentielles en théorie des modèles

Les deux notions centrales dans la construction élaborée par Tarski sont celles de *modèle d'une formule* et celle de *conséquence logique* qui toutes deux réfèrent à la notion d'interprétation des formules d'un langage formalisé dans une structure donnée.

II.2.1 Modèle d'une formule du langage formalisé

On appelle structure interprétative d'un langage donné, un domaine d'objets, et autant de propriétés (*respectivement* de relations) que de prédicats à une place (*respectivement* plusieurs places). Lorsque une formule close (sans variable libre) Ψ est vraie dans une structure interprétative donnée, on dit que cette structure est un modèle de Ψ .

Soit, par exemple, Ψ la formule « $\forall x (x^2 + 1 \neq 0)$ ». L'ensemble R des nombres réels, muni des opérations habituelles, est un modèle de Ψ , tandis que l'ensemble C des nombres complexes, muni également des opérations habituelles, n'est pas un modèle de Ψ .

De cette définition, va découler la notion de validité universelle d'une formule d'un langage formalisé donné. Une formule Ψ est universellement valide si toute structure interprétative de Ψ est un modèle de Ψ , ou encore si Ψ est vraie pour toute interprétation de ses lettres dans tout univers non vide. Cette définition prolonge la notion de tautologie introduite par Wittgenstein (1921) : une tautologie est une formule du calcul des propositions vraie pour toute distribution de valeurs de vérité sur les propositions élémentaires qui la compose, et par conséquent vrai pour toute interprétation dans tout univers non vide. Cependant, on ne dispose pas ici d'une procédure de décision aussi confortable que les tables de vérité.

II.2.2 Le concept de conséquence logique dans un langage formalisé donné

On dira qu'une formule Φ est conséquence logique d'une formule Ψ si et seulement si le conditionnel dont Φ est l'antécédent et Ψ le conséquent est universellement valide. Autrement dit, une formule Φ est conséquence logique d'une formule Ψ si tout modèle de Φ est un modèle de Ψ .

En accord avec Wittgenstein (1921) et Quine (1950), on peut dire que la notion de conséquence logique se traduit structurellement par le fait que l'implication entre antécédent et conséquent est une tautologie, ce que la structure logique montre, comme, par exemple, dans la formule : " $P(x) \wedge \forall t (P(t) \Rightarrow Q(t)) \Rightarrow Q(x)$ ".

Cependant, dès que les formules se compliquent avec en particulier l'augmentation du nombre de quantificateurs, il se peut que l'on ne soit plus capable de voir cette propriété structurelle. Pour établir qu'un conditionnel donné est universellement valide ou non, on dispose de

procédures syntaxiques et sémantiques qu'il convient de marier selon les cas; les procédures sémantiques étant particulièrement adaptées lorsque l'on veut prouver qu'une formule donnée n'est pas conséquence logique d'une autre formule, comme le savait déjà Aristote.

Dans l'activité mathématique, une question que l'on est amené à se poser, particulièrement dans les activités de modélisation, est celle de savoir si un énoncé donné suit logiquement des axiomes d'une théorie donnée. C'est à cette question que la théorie des modèles, anciennement appelé "méthode déductive" se propose de répondre.

II.3 La méthode déductive

Dans son ouvrage *Introduction à la Logique* (Tarski, 1936, 1960 pour la traduction française), Tarski présente la *méthode déductive* qui deviendra ensuite la *théorie des modèles*. Il écrit dans la préface de l'édition polonaise :

«J'ai voulu montrer que les concepts logiques pénètrent l'ensemble des mathématiques, qu'ils admettent tous les concepts mathématiques comme cas particuliers et que les lois logiques sont - consciemment ou pas - toujours appliquées dans les raisonnements mathématiques. Enfin, j'ai essayé de présenter les principes les plus importants dans la construction des théories mathématiques, principes qui constituent la matière d'une autre discipline, la méthodologie des sciences mathématiques, et de montrer comment on utilise ces principes dans la pratique. » (Tarski, 1960, p.IX).

Ce que l'on trouve en effet dans cet ouvrage, c'est une véritable initiation à cette méthode des sciences déductives, présentée à partir de l'exemple de la congruence des segments. La méthode consiste à associer à une théorie déductive donnée (dont les constituants fondamentaux sont les termes primitifs, les termes définis, les axiomes et les théorèmes) un système axiomatique formel, sans aucune référence à des objets, de sorte que la théorie déductive dont on est partie soit un modèle de ce système formel (i.e. chacune des formules de ce système axiomatique est interprétée par un énoncé vrai dans cette théorie). Pour obtenir ce système axiomatique, on remplace dans les axiomes les termes par des variables, les propriétés et les relations par des lettres de prédicats. On peut alors considérer des réalisations ou modèles, c'est-à-dire des domaines d'objets dans lesquels les interprétations des axiomes sont vraies. Un premier modèle est naturellement constitué par les objets dénotés par les termes primitifs de la première théorie. Cependant, une fois le système axiomatique construit, le modèle de la théorie initiale ne joue aucun rôle particulier ; ce n'est qu'un modèle parmi d'autres. On obtient alors le théorème de la déduction :

« Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie ; et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre » (Tarski, 1960, p.112).

Une conséquence immédiate de ce théorème est que : « Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (ibid. p.112). Le théorème de la déduction est le fondement de toutes les méthodes de preuve par construction d'un modèle appelées aussi preuves par interprétation : pour prouver qu'un énoncé donné de la théorie n'est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle

du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la fonction propositionnelle associée à cet énoncé. Notons que si l'on excepte les cas où la négation de l'énoncé considéré est conséquence logique des axiomes, il existe aussi des modèles dans lesquels cet énoncé est vrai.

Tarski remarque que dans son travail, il ne s'intéresse pas aux systèmes axiomatiques qui n'auraient aucun modèle, ce qui n'est jamais le cas si le système axiomatique provient d'une théorie déductive « concrète ». On peut aussi cependant proposer d'abord un système axiomatique, en d'autres termes une théorie axiomatique, et chercher à savoir si elle admet ou non des modèles. Une telle théorie est *consistante* si elle admet au moins un modèle, autrement dit, si « de deux énoncés contradictoires, l'un au moins ne peut pas être prouvé » ; elle est *complète* si « de deux énoncés contradictoires, l'un au moins peut être prouvé ». Deux modèles quelconques d'une théorie consistante et complète sont élémentairement équivalents (c'est-à-dire vérifient les mêmes formules closes du calcul des prédicats du premier ordre). Les preuves par interprétation prennent tout leur sens dans des théories consistantes mais incomplètes. Tarski n'est pas le seul à s'être intéressé à cette question des différents modèles pour une théorie axiomatique donnée, que l'on pense seulement à Hilbert. Selon Sinaceur (1991a), l'originalité du travail de Tarski réside dans l'importance accordée aux procédures sémantiques :

« Ainsi contrairement à la *Beweistheorie* de Hilbert, la théorie des modèles donne une grande importance à l'interprétation sémantique des ensembles d'énoncés, c'est-à-dire aux structures mathématiques où les énoncés formels reçoivent un sens concret. L'étude structurale se fait au niveau des modèles autant qu'à celui des axiomes. Par là, elle noue des liens étroits avec le travail mathématique ordinaire et reprend à son compte, en lui donnant une réponse exacte, l'une des questions épistémologiques de Hilbert : celle relative aux rapports en mathématiques, de la forme et du contenu. » (Sinaceur, 1991a, p.313)

Cette citation met en évidence le fait que l'analyse logique assume ainsi un rôle épistémologique ; ce que l'auteur explicite par ailleurs dans un texte en hommage à Desanti :

« La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie.(...) Une part essentielle de l'analyse épistémologique est ainsi ouvertement prise en charge par l'analyse logique ; (...) En même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir. » (Sinaceur 1991b)

II.4 Conséquences pour la didactique

Une telle conclusion ne saurait laisser indifférent le didacticien des mathématiques, puisque nombre de ses objets d'étude sont confrontés à cette problématique. Il est tout à fait clair que les objets et théorie mathématiques visés par Hourya Sinaceur sont au-delà des théories mathématiques avec lesquelles travaillent, en général, les didacticiens des mathématiques. Cependant, notre propre travail témoigne de la pertinence de cette analyse logique pour

l'analyse didactique du raisonnement mathématique. Nous avons montré (en particulier dans Durand-Guerrier, 2005a, à paraître) comment cette méthode pouvait être utilisée pour repenser les relations entre vérité, nécessité et certitude à propos d'une récréation mathématique relevée dans le kangourou des mathématiques 1994. D'autres exemples, comme la situation *du Labyrinthe*, analysée dans Durand-Guerrier (1995, 1999), ressortent de ce type d'analyse, et d'une manière générale, toutes les situations pour lesquelles se pose la question de savoir si un énoncé donné est conséquence logique d'une théorie donnée, autrement dit s'il est vrai (ou faux) accidentellement, ou nécessairement. Plus généralement, ce type d'analyse permet de traiter les situations dans lesquelles le mode de raisonnement utilisé laisse planer un doute sur la validité du raisonnement. En effet, une fois que l'on s'est débarrassé des références aux objets, on peut examiner dans le système formel si l'on peut prouver qu'il y a ou non conséquence logique, soit par des méthode de preuve syntaxique¹, soit par construction d'un modèle, que l'on peut en général choisir plus simple et même souvent fini, soit en mariant les deux procédures comme dans les systèmes de déduction naturelle².

III. L'interprétation des énoncés mathématiques (1)

Il est habituel de considérer que les énoncés mathématiques sont atemporels, que leur vérité est indépendante des conditions d'énonciation et que, par suite, il importe peu de savoir dans quel contexte ils sont émis. Nous avons déjà vu avec la théorie élémentaire des modèles que cette affirmation doit être relativisée dans la mesure où l'interprétation d'un même énoncé d'une théorie axiomatique peut être vraie dans certains modèles, et fausse dans d'autres, ce que la découverte des géométries non euclidiennes avait mis en évidence. Ce que montrent, plus modestement, les quelques exemples que nous avons étudiés depuis plusieurs années, c'est que, même pour des énoncés très élémentaires, dans la classe de mathématiques, des divergences d'interprétation peuvent apparaître, qui ne sont pas toujours réductibles à l'ignorance des élèves. Nous avons alors indiqué à plusieurs reprises³ que certaines des réponses proposées par les enseignants ne pouvaient être comprises que comme relevant de considérations *pragmatiques*. Nous nous proposons dans ce qui suit de préciser ce que nous entendons par ce terme de *pragmatique*, en relation avec la *syntaxe* et la *sémantique*, puis d'illustrer brièvement l'usage que nous en faisons à partir de deux exemples. Le premier sera pris en dehors du champ des mathématiques ; le deuxième est une relecture à travers cette grille d'une situation mathématique présentée dans Arsac et al. (1992) et déjà analysée dans notre thèse. Nous l'avons choisie pour son caractère tout à fait exemplaire pour illustrer l'usage didactique de cette catégorisation.

III.1 Syntaxe, sémantique et pragmatique

On pourrait s'étonner de voir apparaître, dans un travail consacré à l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique, une référence à la pragmatique. Cependant, bien que, seules, la syntaxe et la sémantique appartiennent stricto sensu à la logique, nous reconnaissons avec Gardies (1994) que :

« l'analyse de la connaissance ne s'épuise pas dans les considérations syntaxiques ou sémantiques où se confine essentiellement la logique, mais

¹ Un exemple traité dans Arsac & Durand-Guerrier 2000 illustre ce point de vue, même si il n'y a pas de référence à la théorie des modèles : il s'agit de l'analyse d'une preuve de l'existence et de l'unicité du barycentre à partir de la fonction de Leibniz.

² Pour un exemple de tels systèmes, voir Durand-Guerrier & Arsac 2003.

³ En particulier pour les deux exemples du *losange* et du *labyrinthe*

accordons à Frege que la porte ne se trouve pas pour autant ouverte à des conditions proprement psychologiques mais plutôt à ce que nous proposerons d'appeler une pragmatique » (opus cité. p.186)

Il ajoute plus loin qu'il se réfère à Morris (1938), qu'il est conscient que le terme de pragmatique est utilisé dans un sens différent par certains auteurs, et qu'il choisit de continuer à désigner par sémantique toutes les extensions possibles de référence au contexte pour :

« (...) laisser le terme de pragmatique disponible pour désigner par exemple la manière ou les manières mêmes dont la vérité peut accéder à la conscience du sujet connaissant (...) » (ibid. p.188).

Cette difficulté à délimiter le sens du terme *pragmatique* est indéniable. Il nous faut par conséquent essayer d'indiquer le plus précisément possible ce que nous entendons par ce terme, que nous utilisons en un sens beaucoup plus restreint que, par exemple, Reboul & Moeschler (1998), et toujours dans son articulation avec la *syntaxe* et la *sémantique*. Le point de vue que nous adoptons ici remonte à Morris (1938, 1946) pour qui la *sémiotique* ou *science du langage* se divise en *syntaxe*, *sémantique* et *pragmatique* (Da Costa, 1997, p.40). Eco (1980) présente cette distinction, en indiquant « qu'elle a été largement reçue dans le monde scientifique » et en donne les définitions suivantes :

« *sémantique* : le signe est ici conçu dans sa relation à ce qu'il signifie ;
 syntactique : le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaisons ; (...)
 pragmatique : le signe est ici perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur les destinataires, les usages que ceux-ci en font, etc... » (p.41)

Jacques (1990), quant à lui, écrit que

« (...) la dimension pragmatique concerne la production du sens dans les systèmes de signes. Elle ne regarde la rationalité que pour autant que celle-ci dépend du discours en contexte. Elle déborde donc ses racines pragmatistes. » (p.856)

Da Costa (1997) reprend cette distinction entre *pragmatique* et *pragmatiste* : « (...) nous emploierons l'adjectif « pragmatique » seulement selon sa signification sémiotique. Le peu de fois où nous nous référerons à la doctrine de W. James et de ses continuateurs, nous utiliserons l'adjectif « pragmatiste⁴ ».

C'est en ce sens que nous utiliserons le terme *pragmatique*, et nous nous attacherons précisément à montrer la pertinence didactique de ce point de vue pour aborder la question de la rationalité des élèves. On ne s'étonnera pas que nous choissions comme définitions pour les dimensions *syntactique* et *sémantique* celles issues de la théorie des modèles de Tarski que nous avons présentée dans la partie II, suivant en cela Jacques (1990) qui écrit que :

« Morris (1938) voyait dans la pragmatique la science universelle de l'usage. Son intuition allait être directement corroborée par l'école polonaise qui introduisit la construction des métalangages. Ce devrait être,

⁴ Da Costa 1997 p.43n

après la syntaxe et la sémantique la troisième forme d'étude métalogue. Elle étudie les relations entre les systèmes formels et leurs utilisateurs. De quelque langage qu'il s'agisse (formel aussi bien) toute expression possède telle propriété syntaxique (est bien ou mal formée) ou sémantique (est vraie ou fausse) uniquement pour les locuteurs virtuels ou actuels de ce langage. » (p.857)

Cette longue citation montre que l'auteur inscrit clairement la pragmatique dans une filiation logique, et ceci quoi que naturellement, la pragmatique ne fasse pas partie de la logique. Le point de vue adopté est ce que l'auteur appelle le *contexte référentiel* « où les signes prennent sens par rapport à leurs référents : le monde des objets et des états de choses. » et où « l'on passe de la sémantique à la pragmatique dès lors que les agents concrets de la communication et leur localisation spatio-temporelle sont tenus pour des indices du contexte existentiel » (p.858). De la même manière, Da Costa (1997) fait référence à Tarski et à Carnap pour définir la dimension sémantique d'un langage *L*, composé de symboles écrits, dans laquelle « on s'intéresse aux interrelations existant entre les langages et les objets et les situations auxquels ils se réfèrent. » ; il ajoute que « l'investigation sémantique de *L* présuppose son étude syntaxique » (p.40) ; puis se réclame de Morris pour affirmer la nécessité de la prise en compte de la dimension pragmatique, « qui prend en compte l'usage des signes dans la totalité de leur usage » (p.40). Da Costa distingue entre *sémiotique pure*, qui a pour finalité l'étude des langages idéaux, construits axiomatiquement, et *sémiotique appliquée* dans laquelle on considère les langages ordinaires, et il ajoute que contrairement à ce qu'« il pourrait sembler à un lecteur non averti », il pense que « les trois niveaux – syntaxique, sémantique et pragmatique – sont essentiels pour la compréhension parfaite de l'état actuel des disciplines logico-mathématiques » (p.42).

Dans notre travail, nous nous employons à défendre la thèse suivante :

Dans l'analyse des raisonnements, la prise en compte de la dimension sémantique dans l'analyse des énoncés fait émerger des interprétations possibles qui doivent être examinées sous l'angle pragmatique, en référence au contexte, à la situation d'énonciation et aux connaissances du sujet.

Dans une perspective didactique, ceci permet d'une part d'enrichir l'analyse a priori des situations proposées, d'autre part d'interpréter de manière plus fine les productions langagières des élèves et de prendre en compte de manière rigoureuse leurs connaissances.

III.2 Deux exemples illustrant cette thèse

Les deux exemples que nous présentons brièvement ici sont développés de manière plus substantielle dans Durand-Guerrier (2005b, à paraître). Le premier exemple, emprunté à Agatha Christie, permet d'illustrer cette classification tandis que le second montre quel usage didactique on peut en faire.

III.2.1 La résolution géniale d'une contradiction

On trouve dans le roman d'Agatha Christie, traduit en français sous le titre *Meurtre au champagne* une illustration particulièrement claire de la distinction et de l'articulation entre les trois catégories syntaxe, sémantique, et pragmatique.

A ce moment du roman, un des personnages, Georges, a été assassiné. Tony, qui était présent le jour du meurtre, expose à Iris, elle aussi présente le jour du meurtre, sa solution au problème insoluble a priori qui s'est posé suite à l'assassinat de Georges, solution qu'il qualifie de

géniale. En effet, il apparaît que *Georges n'a pas pu être empoisonné*, et pourtant *Georges a été empoisonné*. On a donc un énoncé de la forme « p et il est impossible que p », d'où dérive l'énoncé : « $p \wedge \neg p$ ». La conjonction des deux phrases est une phrase fausse en raison de sa structure, indépendamment de la signification de chacune des phrases ; il s'agit d'un argument de nature *syntactique*. En considérant l'implicite suivant lequel on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de Georges sans l'avoir touché, un autre énoncé contradictoire est relevé par Tony : *Personne n'a touché à la coupe de Georges et Quelqu'un a mis du poison dans la coupe de Georges*. Le paradoxe que Tony doit résoudre provient du fait que cet énoncé contradictoire, qui a priori ne décrit aucun état de choses (Wittgenstein, 1921, 1961, 4.462), décrit bel et bien un état du monde (au sein de la fiction).

Tony propose alors de se placer sur le niveau *sémantique* en considérant les différents degrés d'appartenance selon les objets considérés : *l'oreille de Georges / la montre de Georges / la coupe de Georges*. Bien que les structures soient analogues, la « force » de relation d'appartenance dépend des objets dont on parle. La reconnaissance de la faiblesse de la relation concernant la coupe laisse entrevoir une possibilité de résolution : on pourrait imaginer qu'il y ait eu un changement dans les coupes. Mais, à ce stade, rien ne permet de l'affirmer.

La fin de l'argumentation concerne le niveau *pragmatique* : ce qui s'est réellement passé ce jour-là, dans cette situation et dans ce lieu, et qui permet que ce qui était possible (niveau *sémantique*) s'est effectivement réalisé : *Georges a bu dans une coupe qui n'était pas la sienne*.

III.2.2 Comment lever un soupçon d'incohérence

La question de savoir si les élèves sont illogiques (rationnels) ou non, même si elle ne se pose en général pas de manière si brutale, est sous-jacente à de nombreuses réflexions sur l'enseignement des mathématiques. Dans *Le mot et la chose*, Quine (1960, 1977 & 1999 pour la traduction française) énonce *le principe de charité*, qui accorde au sujet une présomption de rationalité : l'interprétation de ses réponses doit préserver les lois de la logique classique et

« La vérité de bon sens qu'il y a derrière cette maxime, c'est que la stupidité de notre interlocuteur, au-delà d'un certain point, est moins probable qu'une mauvaise traduction – ou dans le cas domestique, qu'une divergence linguistique » (Quine, 1999, p.101)

En écho à Quine, Engel, dans la *Norme du Vrai*, écrit « En un sens faible, un sujet accepte une règle de logique si son comportement peut se décrire en conformité avec cette règle » (Engel, 1989, p.196). Autrement dit, un sujet est rationnel si son comportement peut se décrire en conformité avec les règles de la logique. Engel en tire la conséquence que l'on ne peut pas éviter d'attribuer aux sujets dont on étudie les raisonnements déductifs une compétence logique générale (ibid. p.197). La question qui se pose alors est celle des outils dont nous disposons pour aller au-delà des apparences lorsqu'un sujet (un élève) semble produire des raisonnements contradictoires. Nous allons montrer sur un exemple que la sémantique logique ouvre des perspectives en ce sens⁵.

L'exemple que nous analysons brièvement est tiré de Arsac et al. (1992) ; nos analyses illustrent la thèse selon laquelle le point de vue sémantique sur la vérité permet de reconsidérer les réponses de certains élèves pour ouvrir la possibilité de leur cohérence, permettant de les créditer d'un comportement rationnel.

⁵ Pour une étude philosophique de ces questions voir Héraud & Errera (2005, à paraître).

Dans cette situation, les élèves qui travaillent en groupe doivent répondre à la question suivante : « Dans l'expression $N^2 - N + 11$, si on remplace N par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ? ». A l'issue du travail de groupe, les élèves discutent sur une affiche sur laquelle les auteurs ont répondu OUI. Des objections sont apparues car certains élèves ont trouvé le contre-exemple 11. Une des élèves, G., dit : « *c'est pas entièrement juste, mais c'est pas entièrement faux non plus* ». Le professeur dit alors : « *G croit qu'une phrase peut être à la fois vraie et fausse.* »

Peut-on conclure de ce que dit G. qu'elle assume un énoncé de la forme « $p \wedge \neg p$ » ? Ce qui voudrait dire qu'elle ne *suivrait* pas les règles de la logique et donc n'aurait pas un comportement rationnel ? Ou bien peut-on trouver une interprétation de ses propos qui restituerait sa cohérence ? Le niveau sémantique permet d'ouvrir cette possibilité ; en effet, l'énoncé a des exemples et des contre-exemples. On peut donc écrire, dans cette situation : « $(\exists a F(a)) \wedge (\exists b \neg F(b))$ », certains éléments satisfont la phrase ouverte, d'autres ne la satisfont pas. Comme G. a d'abord trouvé des exemples, et ensuite seulement reconnu l'existence de contre-exemples, cette interprétation est plausible (niveau pragmatique), cependant, il n'y a pas dans ce cas de certitude, comme c'est souvent le cas en situation scolaire. Il faut noter que ce type d'analyse, non seulement ouvre la possibilité de restituer la cohérence des propos de G., mais montre également que seule l'explicitation de la présence de la quantification universelle permet de déclarer l'énoncé faux. On peut en effet faire l'hypothèse que, bien que l'énoncé proposé soit universellement quantifié, comme le travail fait par les élèves concerne l'énoncé ouvert (celui avec lequel il font des essais), c'est ce dernier qui sert de référence pour les réponses de certains élèves. Nous venons de voir que ce pourrait être le cas de G. Une autre élève, M., pourrait également être dans ce cas. En effet, celle-ci intervient à plusieurs reprises pour réfuter les contre-exemples produits par ses camarades.

« *on n'a pas pensé à 11, mais s'il y en a d'autres, on serait d'accord avec ce qu'il dit.* »
 « *Oui, mais 22, c'est le double de 11, on peut peut-être essayer avec 33, à mon avis ce sera aussi une exception.* »
 « *ça devient plus des exceptions car 22, 33, c'est tous des multiples.* »
 « *Je crois qu'ils ont gagné car il y a aussi 25 comme exception.* »
 « *A mon avis pour qu'il n'y ait pas d'exception, le résultat ne devrait pas être supérieur à 100.* »

Le discours de M. se déploie avec dans un premier temps un refus de renoncer à l'énoncé ; elle rend les armes lorsque le contre-exemple 25 apparaît. La dernière remarque peut laisser penser qu'elle cherche à sauver l'énoncé : en d'autres termes, on pourrait dire qu'elle cherche un modèle de l'énoncé, un domaine numérique dans lequel l'énoncé est vrai.

Du point de vue pragmatique, la posture de M. est tout à fait pertinente ; si les seuls contre-exemples étaient les multiples de 11, on aurait intérêt à énoncer le théorème correspondant (ceci renvoie aux travaux de Lakatos, 1976), plutôt qu'à le déclarer faux.

Dans cet exemple, il apparaît clairement que la prise en compte des possibilités offertes par une analyse sémantique nous renvoie sur les aspects pragmatiques de la situation. Et finalement, G. et M. qui pourraient sembler ne pas participer au jeu mathématique se révèlent avoir des postures qui non seulement sont tout à fait cohérentes, mais qui pourrait en outre être un moteur éventuel de progrès pour la classe tout entière dans le cadre du débat, sous réserve que ces potentialités soient reconnues.⁶

⁶ Plusieurs exemples en mathématiques ; en physique ; en sciences de la vie et de la terre et en français sont décrits dans Durand-Guerrier, Héraud & Tisseron (eds.), 2005, à paraître.

IV. L'interprétation des énoncés (2) : aperçus linguistiques

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment une analyse logique articulée sur le point de vue de la sémantique logique permettait d'ouvrir le champ des possibles dans deux situations, dont l'une en mathématiques. Nous avons rappelé l'importance de la prise en compte explicite de la quantification déjà illustrée dans la plupart de nos travaux, où nous avons montré en particulier l'importance de la prise en compte de la portée des quantificateurs vis à vis des connecteurs propositionnels (en particulier implication⁷ et négation⁸). Dans l'exemple emprunté à Agatha Christie, notre attention a été attirée sur la distinction entre l'article défini "le" et l'article indéfini "un"⁹. Un examen attentif des textes mathématiques montre que l'usage en mathématiques des articles et des pronoms joue un rôle important sans que, le plus souvent, ceci ne soit explicité. Ces questions se posent clairement lorsque l'on veut formaliser un énoncé dans la logique des prédicats et ceci nous renvoie sur la nécessité d'une analyse des énoncés de type linguistique de manière concomitante au travail de formalisation lui-même. Or dans la plupart des travaux de didactique des sciences s'intéressant aux échanges langagiers dans la classe, l'unité d'analyse est la phrase, ce qui conduit à évacuer les questions relatives à la quantification, à l'anaphore, et aux ambiguïtés référentielles, toutes dimensions dont selon nous la prise en compte est cruciale dans l'analyse du discours en contexte scolaire. Ceci nous a conduit à nous intéresser aux travaux développés en sémantique formelle dans la tradition initiée par Montague qui s'est proposé d'étendre aux langage quotidien les outils de la théorie des modèles élaborée par Tarski. A ce stade de notre travail, nous faisons en effet l'hypothèse qu'une analyse dynamique du discours avec les outils de la linguistique formelle croisés avec les outils didactiques d'analyse du milieu et d'analyse logique, devrait nous permettre d'introduire une plus grande rigueur conceptuelle dans les interprétations que nous proposons. Dans ce qui suit, nous présentons, modestement et de manière non technique, quelques aperçus sur l'émergence de la sémantique formelle en indiquant en quoi ce champ théorique rencontre nos propres préoccupations de recherche.

IV.1 Une sémantique récursive pour les langues naturelles

Comme nous l'avons vu plus haut, Tarski pensait que la théorie sémantique de la vérité qu'il avait construite ne s'appliquait pas aux langues naturelles. La question qui se pose alors est celle de savoir ce que serait une sémantique pour les langues naturelles en relation avec deux interrogations principales : comment une théorie de la vérité permet-elle d'accéder à une théorie de la signification ? et en quoi une définition de la vérité contribue-t-elle à l'étude de la compétence sémantique ? Davidson d'une part, Montague d'autre part essayent de répondre à ces deux questions.

IV.1.1 Une sémantique pour les langues naturelles (Davidson, 1970)

Dans l'ouvrage traduit en français par Pascal Engel sous le titre "Enquêtes sur la vérité et l'interprétation", (Davidson, 1984, 1993 pour la traduction française), on trouve une reprise d'un essai publié en 1970 dans la revue *Synthèse* (Davidson, 1970) dans lequel l'auteur indique clairement qu'il se situe dans la filiation de la théorie de la vérité due à Tarski.

⁷ Voir Durand-Guerrier, 1996, 2003.

⁸ Voir Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004.

⁹ Dans Seymat, Durand-Guerrier & Claraz (à paraître en 2005), nous rapportons l'exemple d'élèves qui insistent sur la différence entre "un contraire" et "le contraire".

« (...) On ne saurait tenir pour adéquate une théorie sémantique d'une langue naturelle si elle ne rend aucunement compte du concept de vérité pour ce langage dans la veine inaugurée par Tarski. » (p.93)

Il se propose cependant de relever le défi auquel Tarski avait apporté une réponse négative, en précisant certaines conditions dues à la spécificité des langues naturelles :

« Une théorie de la vérité pour une langue naturelle doit tenir compte du fait que de nombreuses phrases varient en valeur de vérité selon le temps où elles sont émises, le locuteur, et même peut-être le public auquel elles s'adressent. On peut accueillir ce phénomène, soit en déclarant que ce sont des énonciations ou des actes de paroles particuliers et non des phrases, soit en faisant de la vérité une relation qui vaut entre une phrase, un locuteur et un temps. » (p.97)

Son projet est de montrer d'une part qu'il n'y a « (...) aucun obstacle décisif qui empêche la production d'une théorie formelle de la vérité pour une langue naturelle (...). » (p.99) et d'autre part que « (...) il n'y a aucun moyen de donner les conditions de vérité de toutes les phrases sans montrer que certaines d'entre elles sont les conséquences logiques d'autres phrases. » (p.101) et finalement son but est de « (...) justifier la thèse selon laquelle une théorie [de la vérité] montre comment "la signification de chaque phrase dépend de la signification des mots" » (p. 101). En conclusion de ce texte, il laisse ouverte la possibilité que la structure profonde des phrases soit la structure logique. En d'autres termes, on pourrait dire que l'analyse logique au moyen d'une théorie sémantique de la vérité des phrases pourrait mettre à jour des différences de structures restées inaperçues par une analyse de type syntaxique. Nous avons donné dans Durand-Guerrier (1996) un exemple pouvant illustrer ce point de vue concernant la tâche de sélection de Wason, en soulignant que ce n'est pas la même chose de dire que "si une enveloppe est cachetée, alors elle doit porter un timbre à 50 centimes" et de dire que "si une carte porte une voyelle sur une face, alors il y a un chiffre impair sur l'autre face". En effet, si la première se formalise par un énoncé de la forme " $\forall x (C(x) \Rightarrow T(x))$ " ou C s'interprète par "être cachetée" et T par "être timbrée", ces deux propriétés s'appliquant aux enveloppes, la seconde se formalise par un énoncé de la forme " $\forall x (V(x) \Rightarrow I(f(x)))$ ", où f s'interprète par la fonction "est l'autre face", V et I s'interprétant respectivement par les propriétés "porter une voyelle" et "porter un nombre impair" qui s'appliquent aux faces (et non pas aux cartes). Une conséquence de cette différence de structure profonde étant que pour résoudre la tâche, il est nécessaire de retourner mentalement la carte pour pouvoir répondre. Les deux exemples présentés au paragraphe III illustrent également ce point de vue.

IV.1.2. Universal Grammar (Montague 1970)

Selon Tamba-Mecz (1998), « L'année 1970 marque un tournant capital avec les travaux de Montague qui met en place une représentation sémantique logique fondée sur la théorie des modèles. » Dans une perspective proche de celle de Davidson, Montague défend la possibilité et la nécessité d'une théorie "mathématiquement précise" de la vérité :

« There is in my opinion no important theoretical difference between natural languages and the artificial languages of logicians ; indeed, I consider it is possible to comprehend the syntax and semantics of both kind of languages

within a single natural and mathematically precise theory" (cité in Chambreuil 1989, p.13)

Pour cela, il explicite les rôles respectifs entre syntaxe et sémantique, la sémantique étant clairement pour lui la notion fondamentale :

"The basic aims of semantics is to characterize the notions of a true sentence (under a given interpretation) and of entailment while that of syntax is to characterize the various syntactical categories, especially the set of declarative sentences, (...) and I fail to see any great interest in syntax except as a preliminary to semantics." (ibid, pp.16-17)

En préface à la traduction qu'il donne en 1989 de Universal Grammar, Chambreuil écrit :

" La grammaire de Montague constitue un champ conceptuel suffisamment riche pour qu'il soit difficile de l'ignorer. En effet, un des faits marquant de la grammaire de Montague est qu'elle repose sur l'explicitation d'au moins trois objets. L'un conduit à associer aux énoncés d'une langue naturelle des structures, spécifiques de la grammaire de Montague ; un autre permet de traduire ces structures sur une logique où il est possible d'effectuer des calculs, en particulier d'inférence logique ; le troisième propose des éléments de structuration d'un univers extralinguistique constitué d'entités mises en correspondance avec les énoncés d'une langue naturelle et des constituants de ces énoncés. « Extralinguistique » doit être entendu en opposition à la matérialité des entités linguistiques au sens de l'opposition système formel/interprétation des logiciens (...). » (Chambreuil 1989, p.12)

Nous trouvons dans cette citation l'écho des préoccupations que nous rencontrons lorsque nous nous interrogeons sur les outils nécessaires pour analyser les énoncés, les raisonnements ou d'une manière plus générale les discours qui se déploient dans la classe de mathématiques. Cependant, malgré sa proximité avec les mathématiques, la grammaire de Montague a peu diffusé semble-t-il auprès des chercheurs en didactique des mathématiques qui pourtant s'interrogent depuis les premiers travaux sur les questions langagières ; elle semble en particulier beaucoup moins connue que la grammaire générative (transformationnelle) de Chomski (1957, 1979 pour la traduction française), à laquelle elle offre une alternative par la mise en place d'une sémantique récursive (Gochet, 1982).

IV.2 La sémantique formelle dans la filiation de la théorie des modèles

IV.2.1 Pourquoi la sémantique formelle ?

Le travail de Montague inaugure la tradition de la sémantique formelle dans la filiation de Tarski pour les aspects logiques et celle de Morris pour les aspects sémiotiques.

« Les sémanticiens rejoignent ainsi les logiciens, à qui ils empruntent, en même temps qu'un système de *notation métalinguistique* (le calcul des prédicats), une conception proprement logique du sens (en termes de *valeurs de vérité* et de *contenu descriptif*) et de la *sémantique*, dont l'objet d'étude consiste dans la relation des *signes* à leur *denotata* et se distingue de celui de la *syntaxe* (rapports des signes entre eux) et de la *pragmatique* (rapports des signes à leurs utilisateurs), selon la tradition de C.Morris (Foundations

of the theory of signs, 1938), popularisé par les travaux des logiciens de Carnap à Tarski (Tamba-Mecz (1998) p.29).

De ce fait, les objets d'étude de la sémantique formelle vont rejoindre ceux qui nous intéressent dans nos propres travaux d'analyse du raisonnement mathématique dans une perspective didactique :

«La sémantique formelle [s'intéresse aux] rapports entre les propriétés *logico-sémantiques des langues et des langages formels*. De là dépendent, en dernière analyse, la validité de ses « modèles » et la pertinence de ses objets d'étude (référence, quantification, inférence, équivalence, contradiction etc.), tous issus d'une optique véri-conditionnelle du sens. » (ibid. pp.29-31)

A la question " A quelle théorie du langage se référer dans les travaux de didactique des sciences ?" que se posent de nombreux chercheurs¹⁰, nous sommes tentée de répondre que, pour nos propres travaux, la continuité entre une référence épistémologique fondamentale dans notre travail, la théorie des modèles de Tarski, et une théorie linguistique qui s'y réfère explicitement devrait nous permettre de construire un cadre cohérent permettant d'aborder ce qui, dans le discours, ne ressort pas de la seule analyse logique telle que nous la conduisons dans nos travaux depuis une quinzaine d'années. Nous souhaitons, en particulier, pouvoir examiner comment l'étude de la dynamique du discours peut nous renseigner sur des évolutions potentielles du milieu au sens de Brousseau (1986) permettant en particulier d'affiner nos analyses des raisonnements des élèves.

IV.2.2 La DRT, une théorie des représentations discursives

Dans le développement des travaux en sémantique formelle, il apparaît assez rapidement que

« La prise en compte de phénomènes de plus en plus fins et complexes amène à élargir le cadre d'analyse et à modifier les procédures de description et de formalisation.

Ainsi Kamp développe entre 1979 et 1993 *une théorie des représentations discursives* (DRT) pour traiter de phénomènes interphrastiques comme l'anaphore et le temps (Kamp 1981 ; Kamp et Reyle, 1993). Il remplace les descriptions sémantiques statiques par des représentations dynamiques qui intègrent des données pragmatiques contextuelles et situationnelles. » (Tamba-Mecz, p.32)

On trouve en français (Corblin, 2002) une présentation de la DRT qui permet au lecteur non spécialiste de se familiariser avec ce domaine. Par rapport au schéma classique hérité de Tarski, dans la DRT, un niveau de représentation intermédiaire entre la phrase et le modèle où on l'interprète est introduit, c'est :

« (...) la *représentation du discours*, qui encode des éléments de signification non captés en termes de conditions de vérité et cruciaux pour la contribution du discours à son contexte d'interprétation.

¹⁰ Comme le montrent les nombreux colloques sur ce thème depuis quelques années (Grenoble, Bordeaux 2003, Arras 2004).

En substance, selon la formule attribuée à Frege, la signification d'une phrase nous dit comment est le monde si la phrase est acceptée pour vraie. La DRT, et à sa suite les approches dites dynamiques, sans nier qu'une part de la signification soit ainsi exprimable, insiste sur le fait que cette approche ne dit rien du potentiel du changement d'information d'une phrase, lequel se révèle cependant crucial en contexte. » (Corblin, 2002, p.4)

Pour illustrer ce qui précède, Corblin donne l'exemple suivant :

- (1) Sur dix billes que j'avais dans la main, neuf sont tombées.
- (2) Une des dix billes que j'avais dans la main n'est pas tombée.

D'un point de vue strictement véri-conditionnel, ces deux phrases décrivent le même « état de choses » ; toute situation rendant l'une vraie, rend l'autre également vraie. Elles ne sont donc pas distinguables du point de vue de la signification (entendue comme conditions de vérité). Cependant, dans le discours :

- (3) Une des dix billes que j'avais dans la main n'est pas tombée. Elle est restée coincée entre le majeur et l'index

On ne peut pas substituer (1) à (2) sans obtenir un effet d'étrangeté :

- (4) Sur dix billes que j'avais dans la main, neuf sont tombées. Elle est restée coincée entre le majeur et l'index.

En effet, comme l'écrit Corblin,

« Ce qui n'est pas capté par cette définition [véri-conditionnelle] c'est le fait que le pronom singulier *elle* ne peut pas être utilisé dans une phrase postérieure à (1) pour référer à la bille qui n'est pas tombée, laquelle n'a pas été *introduite* en (1). » (p.5).

Il est facile de trouver des exemples de même nature en mathématiques. Nous en proposons deux. Le premier est calqué exactement sur celui que nous venons de présenter. Le second est un exemple que nous avons analysé dans notre thèse (Durand-Guerrier 1996);

Premier exemple :

- (1) Sur les dix nombres que j'ai testés, neuf exactement sont des exemples de la propriété étudiée.
- (2) *Un* seul des dix nombres que j'ai testés est un contre-exemple à la propriété étudiée.
- (3) *Un* seul des dix nombres que j'ai testés est un contre-exemple à la propriété étudiée. *Il* est plus grand que 10.
- (4) Sur dix nombres que j'ai testés, neuf exactement sont des exemples de la propriété étudiée. *Il* est plus grand que 10.

(1) permet d'inférer l'existence d'un contre-exemple, mais n'introduit pas un tel contre-exemple, tandis que (2) désigne explicitement un contre-exemple. Seul (2) permet une reprise par le pronom *il*. Ceci renvoie à une pratique mathématique courante qui consiste à ne pas distinguer entre l'affirmation d'un énoncé existentiel et l'introduction d'un élément, ce qui correspond en logique à la règle d'*instantiation existentielle*

- (5) « Il existe x tel que $f(x) = x$; x est positif »
- (6) « Il existe x tel que $f(x) = x$; *il* est positif »
- (7) « Il existe x tel que $f(x) = x$; soit a un tel élément ; *il* est positif »

En toute rigueur, parmi ces trois formulations, seule la formulation (7) est correcte. En effet, dans (5), on ne distingue pas entre une lettre de variable liée et un nom d'objet, et dans (6), la reprise par le pronom "*il*" laisse supposer que l'énoncé existentiel a introduit un élément et que de plus l'existence entraîne l'unicité. Nous avons montré (Durand-Guerrier & Arsac, 2003) que cette pratique mathématique, largement répandue, est une source d'erreur, principalement lorsqu'on manipule des énoncés de la forme "*Pour tout x , il existe y tel que...*".

Deuxième exemple :

Dans Arsac & al. (1992), on trouve énoncées plusieurs règles du débat mathématique, dont celle-ci : "*Plusieurs éléments qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai*", dont l'apprentissage vise à éviter les généralisations hâtives suite à la vérification d'une propriété sur quelques éléments. Cette règle permet de légitimer le discours suivant :

- (8) *Plusieurs éléments vérifient cet énoncé. Cependant, il est faux.*

Les règles de la grammaire française nécessitent que le pronom "*il*" réfère à l'instance du terme "énoncé" de la première phrase. Si l'on substitue "rendre vrai" à "vérifier" dans (8), on obtient :

- (9) *Plusieurs éléments rendent vrai cet énoncé. Cependant, il est faux.*

On se trouve en présence d'un énoncé paradoxal qui semble dire d'un énoncé qu'il est à la fois vrai et faux. En fait, on est ici à nouveau en présence d'un phénomène d'anaphore. Le pronom "*il*" devrait en effet référer à "l'énoncé" mentionné dans la première phrase : or ce dernier est un énoncé ouvert qui est susceptible d'avoir des exemples qui le rendent vrai et des contre-exemples qui le rendent faux, mais qui n'a pas en soi de valeur de vérité. En fait, dans ce cas, le pronom "*il*" réfère à l'énoncé universellement quantifié correspondant à cet énoncé ouvert. Or, cet énoncé clos n'a pas été introduit, il ne peut donc pas être repris par un pronom. Nous avons montré sur l'exemple présenté au paragraphe III.2.2 que certains élèves peuvent considérer un tel énoncé ouvert, et déclarer qu'il est à la fois vrai et faux au motif qu'il a des exemples et des contre-exemples, tandis que le professeur et d'autres élèves se réfèrent à l'énoncé clos, qu'ils déclarent faux puisqu'il a un contre-exemple.

Ce que ces deux exemples illustrent, c'est que le discours mathématique comporte des raccourcis qui sont susceptibles d'occulter certaines étapes dans l'interprétation des phrases et de rendre ainsi la référence opaque. Or, justement :

« L'idée centrale des théories dynamiques est que l'interprétation d'un discours est un processus incrémental : l'interprétation de chaque phrase met à jour un état d'information préalable sur le monde, pour aboutir à un nouvel état d'information. Un état d'information se conçoit comme la conjonction de deux contraintes au moins :

- 1/ Une contrainte sur la classe de Modèles où cet état d'information peut-être dit vérifié ou satisfait. Un état d'information sur le monde nous dit comment est le monde conforme aux informations qu'il contient.

2/ Une contrainte sur l'accessibilité de cet état d'information à des mises à jour ultérieures.

L'objectif des théories dynamiques de l'interprétation est de donner une sémantique du discours d'où puissent se déduire *à la fois* ces deux aspects de la signification, et qui permette de décrire l'interprétation d'une phrase comme une fonction partielle d'un état d'information dans un autre état d'information. » (Corblin, 2002, p.6)

Si l'on voulait reformuler le règle de l'instantiation existentielle en ces termes, on pourrait dire que, d'une certaine manière, affirmer un énoncé existentiel dans un modèle donné (au sens de Tarski) permet de faire une mise à jour en introduisant un objet satisfaisant la propriété considérée. Ne pas faire *la mise à jour* peut conduire à fournir un état d'information non pertinent (par exemple, l'information selon laquelle il y a un unique élément satisfaisant une propriété donnée alors que tel n'est pas le cas).

V. Conclusion et perspectives

Dans la première partie de ce texte, nous sommes revenue sur le projet de Tarski afin de mettre en lumière sa pertinence par rapport aux questions didactiques posées par l'analyse du raisonnement mathématique. Plus précisément, nous avons essayé de montrer que l'analyse sémantique des énoncés et des raisonnements mathématiques est riche de potentialités pour les analyses didactiques qui nous intéressent. La relecture de l'ensemble de nos travaux à la lumière de cette référence épistémologique fait l'objet de notre projet d'habilitation à diriger des recherches (en cours). La dernière partie est plus prospective. La contribution de la sémantique formelle à l'analyse du discours dans la classe de mathématiques est aujourd'hui pour nous une hypothèse de travail que nous commençons seulement à explorer. Les aperçus que nous avons présentés au paragraphe IV soutiennent nos motivations à nous engager dans ce travail.

Références

- ARSAC, G. & al. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon; I.R.E.M. de Lyon
- ARSAC, G. & DURAND-GUERRIER, V. (2000) Démonstration et quantification existentielle. Atelier, Houlgate, Août 1999. *Actes de la X^e Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques. ARDM et IUFM de Caen*. 55-83
- BROUSSEAU, G. (1986), Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2) 33-115.
- CHAMBREUIL, M. (1989) *Grammaire de Montague*, ADOSA.
- CHOMSKY, N. (1957) *Syntactic Structures*, Mouton & Co, La Haye, *Structures syntaxiques*, Le Seuil; 1969 pour la traduction française.
- CHRISTIE, A. (1995) Meurtre au Champagne in *Intégrale : Les années 1945-1949*. Librairie des Champs Elysées.
- CORBLIN, J. (2002) *Représentation du discours et sémantique formelle*. PUF
- DA COSTA, N.C.A. (1997), *Logiques classiques et non classiques : essai sur les fondements de la logique*. Paris : Masson.
- DAVIDSON, D. (1970) Sémantique pour les langues naturelles in Davidson (D) 1984 *Inquiries into Truth and Interpretation*, Oxford University Press, New-York, *Enquêtes sur la vérité et l'interprétation*, Editions Jacqueline Chambon, 1993, pour la traduction française.
- DELPLA, I. (2001) *Quine, Davidson Le principe de charité*. Paris : Presses Universitaires de France.

- DURAND-GUERRIER, V. (1995) Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien, *Différents types de savoirs et leurs articulations*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- DURAND-GUERRIER, V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université Lyon1.
- DURAND-GUERRIER, V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe, in *Petit X 50*, 57-79. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier Grenoble1.
- DURAND-GUERRIER, V. (2003) Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective in *Educational Studies in Mathematics*, 53 5-34
- DURAND-GUERRIER, V. Théorie des modèles et certitude. A propos d'une récréation mathématique, à paraître en 2005 dans les *Actes du colloque ARDéCO, Les processus de conceptualisation en débat, Hommage à Gérard Vergnaud*, 28 -31 janvier 2004. (2005a).
- DURAND-GUERRIER, V. La résolution des contradictions : l'apport de la sémantique logique, à paraître en 2005 in Durand-Guerrier & al. (eds) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe*, PUL. (2005b).
- DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23/3 295-342
- DURAND-GUERRIER, V. & BEN KILANI, I. (2004) Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire tunisien. in *Les Cahiers du Français Contemporain* n° 9, 29-55.
- DURAND-GUERRIER & al. (eds) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe*, à paraître en 2005 aux Presses Universitaires de Lyon (2005b).
- ECO, U. (1980) *Segno*. Milan : A. Mondadori. *Le signe*, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Editions Labor.
- ENGEL, P. (1989) *La norme du vrai. Philosophie de la logique*, Gallimard
- FREGE, G. (1970) *Ecrits logiques et philosophiques*, Editions du Seuil
- GARDIES, J.L. (1994) *Les fondements sémantiques du discours naturel*. Vrin : Paris.
- GOCHET, P. (1982) La sémantique récursive de Davidson et de Montague, in Loi & al., *Penser les mathématiques, Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure*, Le Seuil.
- GRANGER, G-G. (1994) *Formes, opérations, objets*, Vrin
- HERAUD, J.L. & ERRERA, J.P. Sémantique et didactique des jeux de langages in Durand-Guerrier & al., *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe*, à paraître aux Presses Universitaires de Lyon en mai 2005).
- JACQUES, F. (1990) Article Pragmatique, in *Encyclopedia Universalis*, vol. 18, pp.856-860.
- KAMP, H. (1981) A theory and truth and semantuc representations, in Groenondijk & al. (eds) *Formal methods in the study of langage*, Amsterdam, Mathematical Centre Tracks 135, pp.13&-175.
- KAMP, H. & REYLE, U. (1993) *From discourse to logic*, Kluwer.
- LAKATOS, I. (1976) *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte scientifique*. Hermann (1984) pour la traduction française
- MONTAGUE, R. (1970) Universal grammar (UG). *Theoria* 36, 373--398.
- MONTAGUE, R. (1974) *Selected papers of Richard Montague*, R.Thomason editor, Yale University Press, cité in CORBLIN 2002.
- MORRIS, C.W. (1938), *Foundations of the theory of signs*, Chicago : Chicago University Press, cité in Hottois G. (1997), *De la renaissance à la post-modernité* (p.258). Bruxelles : De Boeck Université.
- QUINE, W.V.O. (1950) *Methods of logic*, Holt, Rinehart & Winston; Traduction française Armand Colin, 1972
- QUINE, W.V.O. (1960) *Word and Object*. MIT press. Traduction française Flammarion 1978, champs Flammarion 1999.
- REBOUL, A. & MOESCHLER, J. (1998) *La pragmatique aujourd'hui*. Points Seuil.
- SEYMAT, M. & al. « Le contraire du carré rose ». Parler en arts plastiques au collège en 6^{ème}, in Durand-Guerrier & al. (eds) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe*, à paraître en 2005 aux Presses Universitaires de Lyon.
- SINACEUR, H. (1991a) *Corps et Modèles*. Paris : Vrin
- SINACEUR, H. (1991b) Logique : Mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? in *Hommage à Jean-Toussaint Dessanti*. T.E.R.
- TAMBA-MECZ, I. (1998) *La sémantique* PUF, Que sais-je n° 655
- TARSKI, A. 1936a. Le concept de vérité dans les langages formalisés in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 157-269. Armand Colin, 1972.
- TARSKI, A. 1936b. Sur le concept de conséquence in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 141-152. Armand Colin, 1972.

TARSKI, A. 1944. La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique in *Logique, sémantique et métamathématique*, volume 2 : 265-305. Armand Colin, 1972.
TARSKI, A. (1960) *Introduction à la logique*, Gauthier-Villars, Paris-Louvain
TARSKI, A. (1972) *Logique, sémantique et métamathématique*. Armand Colin.
WITTGENSTEIN, L.(1921) *Tractatus logico-philosophicus*. Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction française, Gallimard, 1961.