

# Le rôle médiateur de la verbalisation entre les aspects figuraux et théoriques dans un problème de géométrie plane

*Elisabetta Robotti*

Istituto per le Tecnologie Didattiche-CNR de Genova

## Introduction

Le sujet de cette recherche porte sur l'analyse des processus en jeu dans la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane lors d'une situation scolaire très classique comme celle de la résolution d'un problème. La situation est très classique car les élèves, surtout les élèves des premières années du lycée<sup>1</sup> et du collège, sont souvent confrontés à ce type de problème.

L'idée est d'analyser la démonstration dans un point de vue relativement nouveau par rapport à la didactique des mathématiques, c'est-à-dire analyser le rôle joué par le langage naturel, notamment par la verbalisation produite par les élèves, dans l'avancement de la démonstration. En effet, le langage naturel est sans doute un élément constitutif fondamental de la démonstration, c'est pourquoi nous aimerons mettre en évidence si et, dans le cas, comment le langage naturel peut aider l'avancement du processus de résolution.

En fin, nous avons choisi la démonstration comme sujet de recherche car elle est un élément très important de l'enseignement dont la recherche en didactiques des mathématiques s'est occupée beaucoup mais qui possède encore des pistes d'analyse ouvertes. En outre, nous avons choisi d'analyser la démonstration dans le domaine de la géométrie euclidienne car en Italie et en France aussi<sup>2</sup>, la démonstration est introduite dans ce domaine.

Cet article démarra sur les objectifs et les hypothèses de la recherche, en suite on mettra en évidence le double rôle que le langage naturel joue dans notre recherche et puis les sources théoriques sur la base desquelles nous sommes appuyés pour développer ce double rôle du langage.

On abordera en suite la description de la situation expérimentale et la description des modèles d'analyse des protocoles que nous avons construits

On présentera en suite les fonctions du langage que nous avons dégagées lors de notre recherche et en fin, les conclusions de l'analyse des protocoles et des conclusions plus générales concernant la recherche.

## Domaine de recherche

La situation que prenons en charge est, comme on vient de le dire, celle de résolution d'un problème de géométrie plane. La résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane c'est un phénomène complexe où interviennent à la fois la langue naturelle, des figures de géométrie, des connaissances des élèves... Notre objectif c'est d'arriver à disséquer de façon fine les processus qui prennent place tout au long de la résolution d'un problème de démonstration géométrique. C'est pourquoi, l'objectif de notre étude concerne d'une part

---

<sup>1</sup> Les expérimentations menées au cours de ma recherche ont engagé des élèves des premières deux années du lycée.

<sup>2</sup> Notre recherche porte sur un travail de thèse mené en co-tutelle entre Italie et France.

l'analyse des interactions entre les aspects figuraux et conceptuels mis en jeu lors d'un processus de résolution, d'autre part le rôle de la verbalisation sur le processus de résolution et en particulier lors de ces interactions.

Nous chercherons donc à mettre en évidence la dialectique entre le domaine graphique et le domaine théorique auxquels on fait en permanence appel lors du processus de démonstration. De façon particulière nous analyserons les allers et retours entre l'appréhension opératoire et perceptive<sup>3</sup> du dessin et le référent théorique. Pour référent théorique nous retenons les théorèmes, les axiomes et les propriétés d'une certaine théorie, par exemple la théorie euclidienne ; nous retenons la définition d'appréhension opératoire et perceptive du dessin issue de la théorie de Duval. L'appréhension perceptive est l'appréhension immédiate et automatique d'un figure celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet. L'appréhension opératoire du dessin est centrée sur ses modifications possibles telles l'ajoute d'un trait, la différent position du dessin sur la feuille, l'agrandissement, la diminution ou la déformation du dessin ou bien le fait d'isoler une sous-configuration dans le dessin.

La perspective adoptée pour cette analyse est donc celle d'analyser le rôle joué par le langage naturel lors de ces relations. En d'autres termes, nous sommes intéressées à une analyse fonctionnelle du langage lors du processus de démonstration. L'analyse fonctionnelle du langage naturel vise donc examiner comment et sous quelles conditions le langage peut aider les allers et retours entre le domaine graphique et le domaine théorique lors de la résolution d'un problème en géométrie plane.

## Hypothèses et questions de recherche

Dans notre recherche, le langage est susceptible de jouer un double rôle : il est à la fois un outil pour le chercher, afin de mettre en évidence les processus cognitifs des élèves, et il est un outil pour les élèves pour l'avancement du processus de démonstration.

Or, à partir de cette considération nous avons dégagé nos premières deux hypothèses de recherche :

---

<sup>3</sup> Duval (1994) a montré qu'une même figure peut donner lieu à des appréhensions de nature différente. Il distingue trois types d'appréhensions d'une figure : *l'appréhension perceptive*, *l'appréhension opératoire* et *l'appréhension discursive*. L'appréhension perceptive est l'appréhension immédiate et automatique de la figure « celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet, soit dans un plan, soit dans l'espace » (p.123). L'appréhension opératoire est déterminée par la centration sur des modifications possibles de la figure (traitements de la figure) et sur les réorganisations perceptives qui en résultent « elle est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures. [Duval distingue] trois grands types de modifications : les modifications méreologiques consistant dans le partage d'une figure en parties pour les recombinaison en une autre figure, les modifications optiques consistant dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure, et les modifications positionnelles consistant soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle » (p. 126).

Enfin, l'appréhension discursive d'une figure « correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive ». Duval ajoute que le traitement cognitif correspondant à cette appréhension est le raisonnement déductif « pour expliciter des autres propriétés à partir des propriétés données, on utilise des définitions, des axiomes, des théorèmes » (pp. 124-125).

Précisons que, sur la base des définitions présentées, nous adopterons le terme « appréhension du dessin » à la place d'appréhension de la figure adoptée par Duval. Pour nous la figure est conçue comme l'ensemble des couples constitués de l'objet théorique et d'un de ses dessins, et en cela elle ne peut être manipulée et recomposée en une nouvelle figure.

- D'une part le langage naturel est révélateur de la démarche de démonstration des élèves. En ce sens, le langage est aperçu comme outil pour le chercheur ;
- D'autre part le langage naturel est outil pour la construction et la maîtrise de la pensée. En ce sens, le langage est aperçu comme outil pour l'avancement de la résolution menée par les élèves.

Or, si le langage naturel recouvre le rôle de révélateur pour le chercheur, Quels sont les outils linguistiques qui permettent de mettre en évidence la façon dont les échanges verbaux entre élèves aident à l'avancement de la résolution ?

Encore, si le langage est retenu comme outil pour l'élève lors de l'avancement du processus de démonstration, en quoi la verbalisation aide-t-elle à passer des simples constatations sur le dessin à la structuration d'un raisonnement déductif, et vice-versa ?

Pour répondre à ces questions de recherche nous nous sommes appuyés sur des moyens théoriques qui seront abordés dans le paragraphe suivant.

## Sources Théoriques

Les sources théoriques dont nous disposons pour aborder dans notre recherche le double rôle du langage font appelle à la fois au domaine de la psycholinguistique et au domaine de la didactique cognitive. Ce dernière domaine, supportant l'hypothèse du langage comme outil pour l'avancement de la démonstration, fait appel aux théories de Duval, Vygotsky et Bakhtine, selon lesquelles le langage ne rempli pas seulement une fonction de communication, mais aussi une fonction de construction et maîtrise de la pensée.

### Le rôle du langage naturel comme outil pour la construction et la maîtrise de la pensée

Pour Vygotsky, **le langage exerce le rôle d'aider l'enfant** à s'orienter mentalement, à prendre conscience, à surmonter les difficultés et les obstacles, **à réfléchir et à penser**. Par rapport à la fonction de construction sociale de la pensée, Bakhtine signale que :

« L'idée ne vit pas seulement dans la conscience individuelle et isolée de l'être humain [...] **L'idée commence à vivre**, c'est-à-dire à se former, se développer, à trouver et à rénover son expression verbale, à générer des idées nouvelles, **seulement en entrant en rapport avec les idées d'autrui lors du dialogue. La pensée humaine ne devient véritable pensée, c'est-à-dire idée, qu'en contact avec une autre pensée [...] c'est-à-dire dans la conscience d'autrui exprimée par la parole. [...] L'idée est un fait vivant qui se crée au point de croisement de deux ou plus consciences lors du dialogue**»

(Bakhtine M. 1968, *Dostoevskij : poetica e stilistica*, Piccola Biblioteca Einaudi p. 115-116. La citation extraite est traduite par nos soins)

Pour Bakhtine, la « véritable pensée » de l'être humain, qu'il appelle idée, se développe seulement en lien avec d'autres pensées lors d'un dialogue. L'idée prend sa forme et elle peut se développer par l'expression verbale et c'est justement par cette verbalisation que se réalisent les conditions de contact avec les autres idées. L'idée que la pensée humaine se développe par confrontation est une des notions les plus importantes de la théorie de Bakhtine. En fin, Duval même affirme que « [le langage] est un moyen d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, pour les rendre visibles ou

accessibles à autrui, mais [aussi] parce qu'il est essentiel pour l'activité cognitive de la pensée » (Duval, 1993, p.39)

En résumé, des théories présentées ci-dessus à propos du langage naturel, nous retenons les idées suivantes :

- le langage est un outil pour l'avancement et la maîtrise de la pensée. Sur la base de cette idée, nous supportons notre première hypothèse selon laquelle le langage naturel peut jouer le rôle d'outil pour l'avancement du processus de résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.

- la confrontation de plusieurs voix, en tant que situation de communication à autrui ou d'échange verbal entre deux personnes, permet la production et l'échange des idées et donc, l'avancement de la pensée. Nous adopterons cette idée pour mettre en place une expérimentation où des binômes d'élèves sont engagés dans la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. Les échanges verbaux entre les élèves permettront d'une part de rendre explicites leurs processus de pensée (ils fournissent des observables) et d'autre part de progresser dans la résolution (hypothèse avancée au point précédent)

Pour ce qui concerne le domaine psycholinguiste supportant l'hypothèse selon laquelle le langage est révélateur de l'avancement de la démonstration, nous faisons appel à la théorie de Bronckart et à certaines des aspects de la théorie de Duval, comme on verra en suite.

Tel est le cadre général dans lequel s'inscrit notre travail.

### **Le rôle du langage comme révélateur des processus cognitifs de la pensée**

Afin de définir certains outils linguistiques qui nous utiliserons en tant qu'outils de recherche pour mettre en évidence les processus cognitifs des élèves (langage révélateur), nous nous appuyons sur la théorie des fonctions discursives de Duval (1995) et sur l'idée des unités linguistiques issue de la théorie du psycholinguiste Bronckart (1985).

#### *La théorie des fonctions discursives de Duval*

Duval définit différentes fonctions cognitives que le langage doit remplir pour construire un discours. C'est pourquoi Duval nomme ces fonctions « fonctions discursives ».

Parmi les fonctions discursives, Duval définit la *fonction référentielle*, la *fonction apophantique* et la *fonction d'expansion discursive* (Duval, 1995, p. 91).

*La fonction référentielle* sert à « désigner des objets ». Cette fonction peut mobiliser l'emploi des termes tels « ça, ceci... » conjointement à des gestes qui permettent d'indiquer les objets désignés (par exemple, « ça est égal à ça » en indiquant deux côtés d'un triangle isocèle); ou bien, désigner l'objet en indiquant la classe « typique » à laquelle il appartient (par exemple, « Soit I le milieu du segment AB »); ou encore désigner l'objet en croisant plusieurs classes typiques d'appartenance (par exemple, « Soit I le point d'intersection des hauteurs d'un triangle »).

*La fonction apophantique* sert à « dire quelque chose des objets que l'on désigne sous forme d'une proposition énoncée », par exemple, en reliant l'expression d'une propriété ou d'une relation à une expression désignant des objets. Cette fonction sert pour construire une proposition à propos de l'objet désigné. C'est en ce sens qu'elle permet de lier l'expression d'une propriété ou d'une relation à l'expression de l'objet désigné.

*La fonction d'expansion discursive* sert à « relier la proposition énoncée à d'autres propositions (description, inférence...) ». Donc elle sert pour construire la progression du discours en reliant une proposition à l'autre.

Ces fonctions ont été reconnues tout au cours de l'analyse du discours produit par les élèves, mais la fonction la plus intéressante pour notre recherche a été la fonction d'expansion discursive car nous a fournis un dispositif très utile pour mettre en évidence l'évolution du discours et, en particulier, l'avancement du processus de démonstration.

Selon Duval la progression du discours se fait par deux différents « modes d'expansion discursive », c'est à dire deux modes pour relier entre eux les propositions énoncées : l'Accumulation et la Substitution.

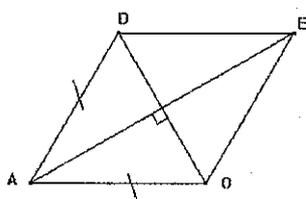
L'Accumulation est un mode « Caractérisé comme naturel qui se fait par accumulation d'informations nouvelles » (Duval, p. 123).

De cette idée, nous retenons que l'accumulation concerne la progression du discours faite par une juxtaposition de propositions indépendantes qui portent sur des informations qui, dans notre cas, sont de nature géométrique.

Lorsque l'expansion discursive se fait pas accumulation, le passage d'une proposition à l'autre dépend de leur contenu respectif : on a l'ajoute d'une proposition à l'autre sans que soit respecté aucune règle d'ordre sinon celle d'être liées les unes aux autres par leur contenu.

Mais, qu'est ce que ça veut dire « propositions indépendantes » ?

Nous essayerons de répondre à la question par l'exemple suivant.



La proposition « les côtés [AO] et [AD] sont égaux » et la proposition « les diagonales [AE] et [OD] sont perpendiculaires » sont deux propositions indépendantes jusqu'au moment que l'une n'est pas conséquence de l'autre.

Fig. 1

Comme on vient de le dire, les propositions énoncées portent sur des informations de nature géométrique. Or, la question qu'on peut se poser maintenant à ce propos est la suivante :

Comment les informations sont obtenues par les élèves?

L'analyse des protocoles montre bien que les élèves tirent les informations par :

- interprétation du dessin, au moyen de l'appréhension opératoire ou perceptive du dessin ;
- des pas de déduction de portée locale. La déduction de portée locale ne participe pas d'un enchaînement de pas de déduction; la conclusion d'un pas de déduction de portée locale est une proposition simplement ajoutée à la liste des propositions qui participent de l'accumulation. Par exemple, « si les deux côtés [AO] et [AD] sont égaux alors le triangle DAO est isocèle » est un pas de déduction qui permet d'ajouter l'information «DAO triangle isocèle » à la liste d'informations. Il se peut que même l'information « les côtés [AO] et [AD] sont égaux » soit ajoutée à la liste d'informations recueillies sans pour autant qu'elle participe d'un enchaînement de pas de déduction.

Venons maintenant à la définition de Substitution fournit par Duval.

La *Substitution* est un mode de progression du discours « Caractérisé comme logique qui fonctionne par inférences » (Duval, p. 123)

De cette idée, nous retenons que la Substitution concerne la progression du discours faite par un Ordre non modifiable des propositions : la conclusion d'un pas de déduction est substituée à la prémisse du pas suivant. Par exemple : « Si les côtés [AO] et [AD] sont égaux alors le triangle DAO est isocèle » ; « Si le triangle DAO est isocèle alors la hauteur [AH] est médiane » ; « Si la hauteur est médiane alors elle coupe la base en son milieu »...

Lorsque l'expansion discursive se fait pas substitution, le passage d'un énoncé à l'autre ne dépend pas du contenu des énoncés, mais des leurs statuts respectifs. Le **statut** d'une proposition correspond au rôle qu'elle remplit vis-à-vis d'un autre proposition dans l'organisation globale d'un discours : le rôle d'hypothèse, de donnée, de prémisse, de

conclusion intermédiaire ou de conclusion cible. Pour certains propositions le statut est préalablement fixé au départ en fonction du cadre théorique et des hypothèses lesquelles forment les propositions énoncées de départ. Pour les autres propositions le statut est déterminé par la place où ils apparaissent dans le développement du discours.

En outre, Duval affirme que la progression du discours dépende aussi par les sens des propositions énoncées. Le sens des propositions relève à la fois du contenu de la proposition, ce qui est vraisemblable, mais aussi de leur valeur épistémique sémantique et logique.

La *valeur épistémique sémantique* est, selon Duval, « le degré de fiabilité que possède ce qui est énoncé dans la proposition. Dans l'instant même de son appréhension, le contenu d'une proposition apparaît évident ou certain ou seulement vraisemblable, ou plausible, ou simplement possible, ou impossible ou encore absurde... » (Duval, 1995, p.219). Selon Duval, donc, la valeur épistémique d'une proposition est strictement liée au système de connaissances du locuteur ou de l'interlocuteur et au milieu socio-culturel auquel il appartient. La *valeur logique* des propositions « est le fait que la proposition énoncée est soit vraie soit fausse. A la différence de la valeur épistémique, la valeur logique d'une proposition ne dépend pas de la seule compréhension de son contenu mais elle résulte de procédures spécifiques de vérification ou preuve » (Duval 1995, p.220). En outre, Duval souligne qu'il y a beaucoup de propositions dont on ne peut pas déterminer la valeur vraie ou fausse bien qu'elles puissent apparaître évidentes, plausibles, peu vraisemblables ou invraisemblables. Pour cette raison Duval prend aussi en charge une troisième valeur de vérité, « Indéterminé ». En outre, Duval souligne que la valeur logique dépende du statut des propositions dans la phrase : les propositions sont prémisses, hypothèses ou conclusions.

L'analyse du discours produits par les élèves nous a permis de mettre en évidence que les propositions appartenant à une progression du discours de type Accumulation relèvent pour la plus part d'une valeur épistémique sémantique, tandis que les propositions appartenant à une mode de progression du discours de type Substitution relèvent pour la plus part d'une valeur de type logique. La différente valeur des propositions énoncées sera retenue comme un des critères pour reconnaître les différents mode de progression du discours lors de l'analyse des verbalisations produites par les élèves.

#### *L'idée d'unités linguistiques issue de la théorie de Bronckart.*

Afin de reconnaître l'avancement des modes de progression du discours produit par les élèves lors de la résolution du problème, nous nous sommes appuyés aussi sur l'idée du psycholinguiste Bronckart (1985) qui utilise les occurrences des certaines unités linguistiques dans les textes pour définir un certain type de discours concernant ce texte. Bronckart définit donc une relation biunivoque entre certaines unités linguistiques et un certain type de discours.

Pour Bronckart les unités linguistiques sont les pronoms, les temps verbaux, certains auxiliaires (tels aller ou les auxiliaires de mode vouloir, devoir, falloir, pouvoir), les adverbes... (Bronckart, p. 157)

Il définit trois type de discours : le discours théorique, le discours en situation et la narration, mais pour notre travail nous retenons que les seules définitions de discours en situation et de discours théorique.

Le *discours en situation DS*, est « produit en relation directe avec le contexte, en particulier avec des interlocuteurs identifiables, un moment et un lieu d'énonciation précis, et qui s'organise par référence permanente au contexte ; Dans sa forme extrême, le DS est un dialogue à propos d'états ou d'évènements présents dans le contexte d'énonciation » (Bronckart, p.63).

Le *discours théorique DT* est « produit lui aussi avec une référence au contexte, mais résultant d'un effort d'*abstraction* par rapport à ce dernier, ce discours se caractérise par son *indépendance* à l'égard d'une situation d'énonciation particulière. [...] Dans sa forme extrême, il se présente sous la forme d'un discours scientifique, vrai partout et toujours, pour n'importe quel interlocuteur ». (Bronckart, p. 63)

Les textes qui ont été l'objet de l'analyse de Bronckart, s'appuient pour la plupart sur : pièces de théâtre, interviews, reportages radiophoniques, dialogues tirés d'un récit, romans divers. Les textes considérés comme théoriques étaient extraits d'ouvrages scientifiques. Or, la situation que nous analyserons prend en compte des dialogues entre pairs, à propos d'un contenu particulier : les mathématiques. De façon spécifique, la situation concernera la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane réalisée par un binôme d'élèves. La situation ne rendra pas compte d'une situation d'enseignement – apprentissage. Nous analyserons la transcription des dialogues des élèves qui nous appellerons dans ce qui suit « protocoles ».

Il semble être évident qu'un tel type de situation ne rentre pas ni strictement dans la définition de DS ni dans la définition de DT, tandis qu'elle peut être considérée comme concernant un *discours théorique en situation*. Un discours théorique, puisqu'il est demandé aux élèves de fournir une preuve écrite du processus de démonstration qui doit être conduite sur la base d'une théorie (dans le cas spécifique la théorie de la géométrie euclidienne). Il est aussi un discours en situation par les caractéristiques mêmes de l'acte de production : il est produit en relation directe avec l'interlocuteur, dans un moment et un lieu précis (l'expérimentation a lieu dans une salle du bâtiment scolaire des élèves), et il est organisé en référence permanente avec l'espace d'interaction sociale (le binôme d'élèves, l'observateur et le but de l'expérimentation) et de la notion (le référent, le signifiant ou le signifié selon le cas).

Notre situation relèvera donc des caractéristiques d'un discours en situation et, en même temps, d'un discours théorique au sens de Bronckart, mais nous ne retiendrons pas les seules occurrences des unités linguistiques pour définir l'avancement du discours produit par les élèves. Alors que l'objectif de Bronckart est de distinguer parmi différentes typologies de textes au moyen des unités, le nôtre est de considérer le discours théorique en situation et son avancement dans les modes d'expansion discursive. Pour autant, nous ne postulons pas une relation biunivoque entre la présence de certaines unités linguistiques et les différents modes de progression du discours, dans certains cas, nous pourrions même associer une même unité linguistique à différents modes d'expansion du discours. Nous chercherons plutôt à caractériser un mode d'expansion discursive par l'usage des unités linguistiques qui y est fait.

L'analyse des discours produits par les élèves nous a permis d'identifier différents unités linguistiques et différents leurs usages. Nous avons en suite associé aux différents usages de ces unités linguistiques les différents modes de progression du discours. Donc, nous avons retenu les différents usages des unités linguistiques comme critères pour identifier dans le discours le mode d'expansion discursive Accumulation ou bien le mode Substitution.

### Usages des unités linguistiques

Comme dit plus haut, nous avons pris en charge un « discours théorique en situation ». Nous supposons que les unités linguistiques participant du discours, sont à la fois celles qui caractérisent le discours en situation et celles qui caractérisent le discours théorique issues de la théorie de Bronckart. À la liste d'unités linguistiques fournie par Bronckart (pp. 74, 75), nous ajoutons d'autres unités linguistiques participant habituellement du discours de résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.

Nous avons établi les usages de certaines unités linguistiques caractérisant le mode d'accumulation et les usages de certaines unités linguistiques caractérisant le mode substitution.

Voyons des exemples.

On considère d'abord l'accumulation comme mode d'expansion du discours.

Dans l'accumulation l'unité linguistique « *si...alors* » est utilisée en sens conversationnel. Par exemple : « si tu fais ceci alors... »

Dans l'accumulation on reconnaît des *termes utilisés en sens déictique* tels « *ça, ceci...* » souvent accompagnés par des gestes : « ça est parallèle à ça » qui remplacent la dénomination des objets désignés (par exemple, les côtés AD et OE du parallélogramme OADE Fig 1).

Dans l'accumulation on relève aussi des *termes mathématiques* tel « *parallélogramme* » qui renvoient au dessin et non à un objet théorique (par exemple, ce terme ne participe pas de la verbalisation d'un théorème).

Pour ce qui concerne le mode de progression du discours Substitution nous y avons identifié encore l'unité linguistique « *si...alors* ». Dans ce cas, l'unité linguistique « *si...alors* » est utilisé pour des pas de déduction.

Dans la Substitution on reconnaît des *termes utilisés en anaphore* tels « *ça, ceci...* », usés pour condenser plusieurs données en revoyant à ce qui a été déjà dit à l'avance. Par exemple : « si ça c'est vrai lors... », où le terme « ça » renvoie, par exemple, à une propriété qu'o n a déjà démontrée.

Dans la Substitution on relève aussi des *termes mathématiques* renvoyant à un objet théorique et non pas au dessin. Par exemple, lorsqu'ils participent de l'énoncé d'un théorème.

Or, reconnaître les différents usages des unités linguistiques dans les discours produit par les élèves, a constitué le critère au moyen duquel nous avons reconnu une progression du discours du type « accumulation » au type « substitution ». En ce sens donc l'usages des unités linguistiques relève du rôle de « langage révélateur » pour notre recherche.

Le tableau suivant résume les exemples présentés ci-dessus.

Unités linguistiques dans l'ACCUMULATION	Usage des unités linguistiques
- « si...alors » - Mots utilisés en déictique « ça, ceci... » - Termes mathématiques ...	- Conversationnel - Remplacent dénomination - Renvoient au dessin
Unités linguistiques dans la SUBSTITUTION	Usage des unités linguistiques
- « si...alors » - Mots utilisés en anaphore « si ça c'est vrai alors... » - Termes mathématiques ...	- Déduction - Condensent plusieurs données en revoyant à ce qui a été déjà dit - Renvoient à l'objet théorique

**Tableau 1.**

En résumant, il y a deux critères adoptés dans notre recherche pour l'analyse de la progression du discours : d'un coté, sur la base des définitions d'Accumulation et de Substitution, on a identifié dans le discours des élèves l'avancement du processus de démonstration ; la valeur des propositions énoncées nous a permit aussi de reconnaître si la proposition a été énoncée dans la progression du discours de type accumulation ou dans la progression du discours de type substitution. D'autre coté, nous avons considéré les différents usages des unités linguistiques dont nous avons relevé les occurrences dans le discours produit par les élèves, en les associant au mode de progression du discours de type accumulation ou de type substitution.

Ces critères seront utilisés comme langage révélateur pour mettre en évidence l'avancement du processus de démonstration dans le discours produit par les élèves.

### **Troisième Hypothèse de recherche**

A partir de l'idée que la progression du discours se fait par le mode accumulation et le mode substitution et que les propositions énoncées relèvent d'une valeur épistémique sémantique ou d'une valeur logique, nous avons tiré notre troisième hypothèse de recherche :

L'avancement du processus de démonstration passe par la progression des modes d'expansion discursif : de la juxtapositions de propositions indépendantes qui participent de l'accumulation, à une structuration de ces propositions dans un enchaînement déductif qui participe de la substitution. En outre, l'avancement du processus de démonstration dépend du changement de la valeur des propositions : d'une valeur épistémique sémantique (vraisemblable, certain...) liée au contenu, qui relève du mode « accumulation », à la valeur logique de vérité (vrai, faux ou non déterminé) liée au statut des propositions, qui relève du mode « substitution »

En fonction de cette hypothèse, nous nous sommes posés les questions suivantes :

Quels sont les processus de changement de la valeur des propositions ?

Quelles sont les fonctions du langage qui favorisent le changement de la valeur des propositions ?

Afin de répondre à ces questions et, en général, aux questions de recherche posées au paragraphe 1, nous aborderons l'analyse du rôle du langage naturel lors du processus de résolution d'un problème de géométrie plane issu des binômes d'élèves.

## **Analyse du rôle du langage naturel**

Dans ce paragraphe nous aborderons l'analyse de la fonction du langage naturel lors du processus de démonstration d'un problème en géométrie plane. Il s'agit donc d'analyser le rôle joué par le langage naturel lors du processus de démonstration en considérant qu'il a lieu dans un contexte de type interpersonnel.

### **Méthodologie**

Afin de décrire la méthodologie adoptée dans notre recherche, nous présentons tout d'abord les choix sur la base desquelles on a construite l'expérimentation et les modèles d'analyse des protocoles. Ces modèles ont été conçus pour répondre à la question central de notre recherche, c'est-à-dire mettre en évidence le rôle joué par le langage naturel lors de l'avancement de la démonstration.

#### *Le choix de la méthode : une situation d'observation de la résolution de problème*

La méthode choisie pour répondre aux questions de recherche consiste à observer un processus de résolution de problème de démonstration en géométrie plane produit par des élèves.

L'observation sera centrée sur l'activité de communication (principalement verbale) entre les élèves pendant le processus de résolution. Afin de favoriser l'activité de communication, l'expérimentation prévoit que les élèves travaillent par binôme. La situation analysée ne met pas en place une ingénierie didactique, car la situation ne consiste pas en une situation d'enseignement – apprentissage, mais simplement de l'observation d'une situation classique de classe.

Les problèmes choisis pour l'expérimentation sont différentes versions d'un même problème, obtenues en jouant sur les valeurs de certaines variables, par exemple les définitions des quadrilatères concernés, certaines propriétés du même quadrilatère ou la forme du problème (énoncé ou liste de données accompagnées d'un dessin). Dans cet ouvrage, nous présenterons qu'une de ces versions.

L'expérimentation a été conduite à la fois en Italie et en France Afin de mettre en évidence l'influence du système de connaissances sur le rôle du langage naturel lors du processus de résolution. Nous avons en effet prouvé que le rôle joué par le langage lors de la démonstration dépende des systèmes de connaissances des élèves, donc des institutions qui définissent les programme scolaires.

### Dispositif expérimental et modèles élaborés pour l'analyses des protocoles

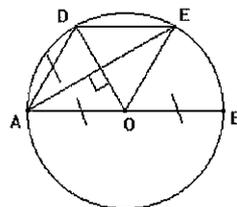
Nous pensons qu'un élément clé susceptible d'influer sur les processus de résolution est la forme dans laquelle les problèmes seront proposés, c'est pourquoi les problèmes proposés lors de notre expérimentation ont été présentés en deux versions différentes : dans un cas, seul l'énoncé du problème a été présenté, tandis que dans l'autre cas, une liste de données accompagnée d'un dessin codé a été fournie. Un problème de géométrie met le plus souvent en jeu deux registres sémiotiques, le registre langagier, et le registre figuratif. La donnée d'un problème de géométrie plane ne relève pas nécessairement des deux registres, cela signifie qu'un problème, par exemple, peut être donné par la seule paire « énoncé et questions », sans forcément être associé à une représentation figurative (dessin).

Or, pour brièveté, nous présenterons ici une seule des versions des problèmes appartenant à notre dispositif expérimental, car cela suffira pour aborder les objectifs visés dans cet ouvrage.

*Problème soumis aux élèves*

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB], D un point de ce cercle tel que  $AD = AO$ . La perpendiculaire à (OD) passant par A recoupe le cercle (C) au point E.

Démontrer que OADE est un losange



Des groupes de deux élèves (binômes d'élèves producteur-coproduit), travaillent ensemble à la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane proposé et à la rédaction de sa solution. La situation expérimentale est mise en place en Italie et en France : en Italie, avec des élèves appartenant aux classes correspondantes aux deux premières années du lycée (14/15 ans), tandis qu'en France, avec des élèves appartenant à seule classe de Seconde. Le temps de travail des binômes est suffisamment long (environ une heure) pour permettre une intense activité langagière de verbalisation. Pour l'analyse du discours relatif à l'échange communicatif que les élèves mènent lors de l'activité de résolution, nous avons besoin d'observables, c'est pourquoi le discours est enregistré à l'aide de magnétophones et ensuite, il est transcrit pour être analysé.

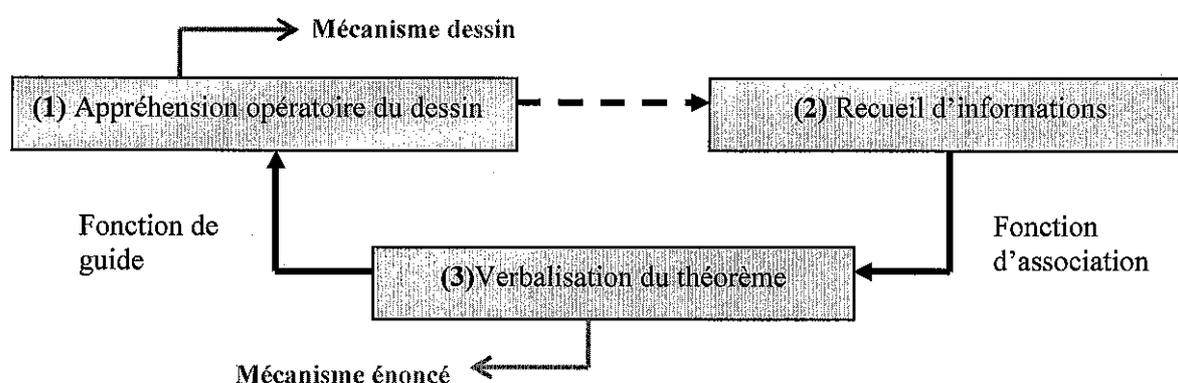
Nous disposerons donc des notes d'observation du travail des binômes, de la rédaction écrite de la résolution des problèmes pour chaque binôme et de la transcription des échanges oraux, issus des enregistrements.

L'activité de chaque binôme se déroule de façon indépendante. Pour la résolution du problème les élèves ont le droit d'utiliser des instruments de construction de dessin tels la règle, l'équerre et le compas.

### *Modèles d'analyse des protocoles*

Lors de notre recherche, nous avons élaboré essentiellement deux modèles d'analyse des protocoles mais nous ne présenterons ici que le modèle permettant d'analyser entièrement le processus de résolution. Le but de ce modèle est de reconnaître et identifier les fonctions jouées par le langage lors de l'avancement du processus de résolution. Ce modèle s'articule en deux mécanismes : le *mécanisme dessin* et le *mécanisme énoncé*.

Ces deux mécanismes se distinguent en raison du démarrage du processus de résolution : dans le mécanisme dessin, le processus de résolution démarre par l'appréhension opératoire et perceptive du dessin, tandis que dans le mécanisme énoncé, le processus de résolution démarre en revenant sur l'énoncé du problème et, en particulier, sur la question du problème. Nous présenterons ci-dessous une description des mécanismes sous forme d'un schéma, en suite, nous détaillerons à la fois les critères sur la base desquels nous nous sommes appuyés pour construire ces mécanismes et la démarche du fonctionnement de chacun des deux mécanismes.



Les mécanismes décrivent le processus de résolution du problème en forme cyclique (1→2→3→1). Ce cycle doit être parcouru plusieurs fois pour décrire entièrement le processus.

Les critères que nous avons adoptés pour élaborer ce modèle ont été de mettre en évidence à la fois les relations entre le domaine graphique et le domaine théorique, de façon particulière les allers et retours entre appréhension du dessin et référent théorique, et le rôle joué par le langage en ces allers et retours. Or, comme ce modèle vise à décrire l'avancement du processus de résolution, ce modèle permettra de mettre en évidence les différents modes de progression du discours (accumulation et substitution) et les différents usages des occurrences des unités linguistiques.

### Description du modèle

Le processus de résolution peut être abordé par l'appréhension opératoire du dessin (1) : la perception immédiate du dessin amènera en suite à ses différentes modifications (méréologique, optique, positionnelle). L'appréhension opératoire du dessin permettra d'isoler certaines unités figurales ou certaines sous-configurations du dessin. Dans cette phase les unités figurales du dessin seront décrites en termes spatio-graphiques en utilisant mots déictiques (par exemple, « ça, ceci, ... ») qui remplacent la dénomination des objets désignés, et qui souvent sont accompagnés par des gestes.

Le but de l'appréhension opératoire du dessin est de construire une sorte de « milieu de travail » en rajoutant des informations à la liste (2)<sup>4</sup>. La finalité de cette liste d'informations est de « recherche » car c'est justement sur la base de cette liste d'informations que les élèves cherchent à démarrer un processus déductif.

Dans cette phase (2), les unités figurales sont composées en sous-configurations qui sont décrites en termes géométriques car elles sont reconnues en tant qu'objets mathématiques (par exemple, en référence à la Fig. 2, les segments [AE] et [OD] sont nommés et ils identifiés en tant que *diagonales* du quadrilatère OADE). Les propositions énoncées dans cette phase n'ont pas un statut de prémisse ou de conclusion car elles sont simplement propositions juxtaposées. Par contre, elles relèvent d'une valeur épistémique sémantique liée exclusivement à leur contenu qui est ressenti comme vraisemblable, certain, probable etc.

Pour ce qu'on vient de dire, nous pouvons raisonnablement identifier dans cette première phase du modèle, le mode de progression du discours de type accumulation.

La liste d'informations permettra aux élèves d'*associer* et en suite de verbaliser (3) un des théorèmes utiles pour de la résolution du problème.

La verbalisation de l'énoncé du théorème (3) permettra d'associer aux propositions composantes l'énoncé même le statut de prémisse ou de conclusion. Or, justement parce que ces propositions relèvent d'un statut dans la phrase, les propositions composantes la liste d'informations relèveront eux aussi d'un statut : le statut de *prémises potentielles*. Ce fait permettra de comparer l'ensemble des prémisses potentielles avec l'ensemble des prémisses du théorème dont l'énoncé a été verbalisé, car elles relèvent toutes du même statut de prémisse. Le comparaison permettra d'identifier les prémisses du théorème qui doivent être encore prouvées. Pour cela, les élèves peuvent revenir encore sur l'appréhension opératoire du dessin (1) mais cette fois ci pour chercher d'identifier les relations géométriques requises dans les prémisses à prouver et seulement celles là. C'est pour quoi, nous retenons cette nouvelle appréhension opératoire du dessin comme *guidée* par la verbalisation du théorème. La finalité de cette liste d'informations guidée par la verbalisation du théorème est définie de « vérification » car les élèves cherchent à vérifier les prémisses manquantes du théorème et seulement celle là. On souligne comment la liste d'informations peut relever de deux finalités différents par rapport à sa construction dans le processus de démonstration. La valeur des propositions énoncées dans cette phase reste « non déterminée » jusqu'au moment qu'elles ne sont pas vérifiées. Dans cette phase nous pouvons relever le mode de progression du discours de type substitution car les propositions peuvent être liées les unes aux autres par des pas de déduction.

Or, si le processus de résolution démarre par l'appréhension opératoire du dessin, nous avons défini notre modèle en tant que *Mécanisme dessin*. Par contre, si le processus de résolution démarre par la verbalisation d'un théorème utile à fin de la résolution du problème ou par la question du problème, alors nous avons défini notre modèle en tant que *Mécanisme énoncé* (souvent les élèves, après une relecture de la question du problème, démarrent leur processus de résolution par une phrase du type « pour un losange, il faut dire que... »).

---

<sup>4</sup> Comment les élèves tirent les informations (référents théoriques, relations géométriques, propriétés,...) pour composer leur liste d'informations ? Notre recherche montre que les informations peuvent être recueillies par l'interprétation du dessin, au moyen de l'appréhension opératoire et perceptive du dessin, ou bien, par des inférences de portée locale. Ces inférences sont de portée locale car elles ne sont pas liées les unes aux autres par des pas de déduction : la conclusion d'un pas est simplement une nouvelle information à ajouter à la liste mais elle n'est pas la prémisse du pas déductif suivant (on n'a pas un enchaînement de pas de déduction)

Dans le paragraphe suivant nous présenterons l'analyse d'un protocole menée en utilisant le Mécanisme dessin en tant que modèle d'analyse. Le Mécanisme dessin nous permettra donc d'analyser le protocole par rapport à notre objectif de recherche : identifier les allers et retour entre domaine graphique et domaine théorique et, au même temps, mettre en évidence le rôle joué par le langage naturel dans ces allers et retours.

*Exemple d'analyse d'un extrait d'un protocole au moyen du Mécanisme dessin.*

Comme dit plus haute, le Mécanisme dessin nous permet de décrire le processus de résolution qui démarre à partir de l'appréhension opératoire du dessin. Dans ce qui suit, nous présenterons l'analyse d'un extrait d'un protocole au moyen du schéma du Mécanisme dessin en suivant les passages : (1)→(2)→(3)→(1')→(2').

Extrait du protocole :

E. : déjà il y a les diagonales qui sont perpendiculaires

....

A. : AE est perpendiculaire à OD, AO=AD. ...AO est un rayon du cercle, OD est un rayon du cercle, OE est rayon du cercle donc on a AO=DO=OE, AD=AO donnée, donc **le losange...**

**est un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent en leurs milieu et perpendiculairement**

....

E. : AO, OE et OD sont rayons du cercle, et ils sont égaux... ah oui, OD il sert à rien !

A. : pour quoi ça sert pas ?

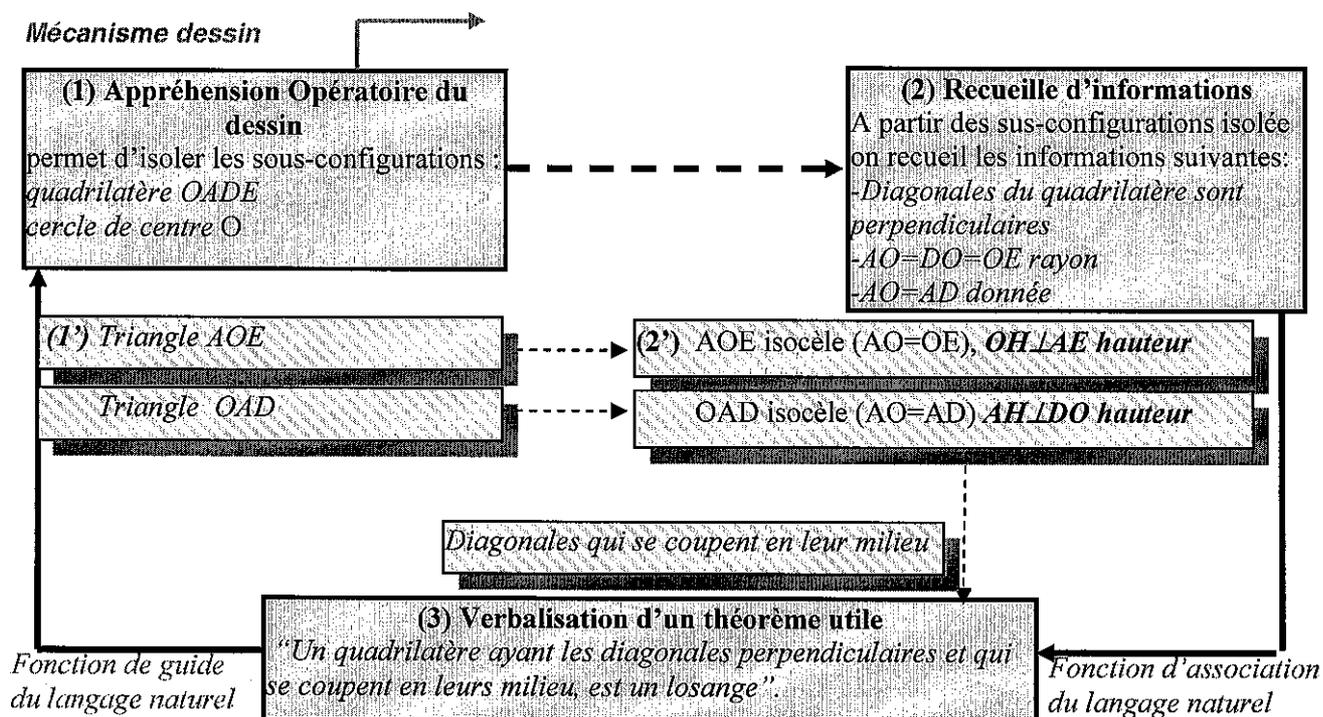
E. : parce qu'il est une diagonale...AO est égal à OE, le triangle AOE est isocèle car il y a deux côtés égaux, puis...AHO est un triangle rectangle et OH est perpendiculaire à AE donc OH est la hauteur du triangle AOE

A. : ... puis AD est égal AO...AHO est un triangle rectangle, AO et AD donc AOD est un triangle isocèle, mais c'est mieux, il est équilatéral. Donc le triangle AHO est un triangle particulier ayant les angles de 30, 60 et 90°. En tout cas, AH est la hauteur du triangle AOD AH coupe la base DO du triangle en son milieu

Mais alors.... OH aussi coupe sa base AE en son milieu

....

Schéma d'analyse de l'extrait au moyen du Mécanisme dessin :



- (1) L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler dans le dessin la sous configuration du quadrilatère OADE, ce qui est vraisemblable car le quadrilatère est nommé dans l'énoncé du problème. L'appréhension opératoire du dessin permettra aussi d'isoler la sous-configuration du cercle qui est sans doute une sous-configuration dominante dans le dessin.
- (2) A partir de la sous-configuration du quadrilatère OADE on tire l'information que les diagonales AE et OD sont perpendiculaires, car les unités figurales AE et OD sont nommées dans l'énoncé du problème et elles sont visualisées dans la sous configuration du quadrilatère en tant que diagonales.  
En outre, à partir de la sous-configuration du cercle on tire l'information  $AO=OD=OE$  car les segments AO, OD et OE sont rayons du cercle. On prend en charge aussi le donnée du problème  $AO=AD$ .

La liste d'informations ainsi recueillies permettra d'évoquer, et en suite de verbaliser, un théorème utile à la démonstration. Cela signifie que certaines informations de la liste sont **associées** par les élèves à un théorème utile à fin de résoudre le problème (une description plus détaillée de la fonction d'association sera fournie dans les paragraphes suivants)

- (3) La verbalisation du théorème : "*Un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leurs milieu, est un losange*", permettra aux élèves d'associer aux propositions composantes son énoncé un statut opératoire : le statut de prémisses (« diagonales qui se coupent en leur milieu » et « diagonales qui se coupent perpendiculairement » constituant l'hypothèse du théorème ), ou alors le statut de conclusion (« le quadrilatère est un losange »). Comme ces propositions relèvent d'un statut dans la phrase, même les propositions concernant les informations recueillies dans la liste, assumeront un statut dans le discours, le statut de *prémisse potentielle*. Ce sera à ce point que l'ensemble des prémisses du théorème et l'ensemble des prémisses potentielle pourront être comparées afin d'isoler les prémisses du théorème qu'il faut encore prouver. Dans notre cas, donc, il faut encore prouver que « les diagonales se coupent en leur milieu ».

Or, dès que la prémisse encore à prouver est identifiée, on revient sur l'appréhension opératoire du dessin avec l'objectif de prouver les seules relations géométriques requises dans la prémisse. C'est pour quoi nous envisageons une fonction de **guide** exercée par la verbalisation du théorème sur l'appréhension opératoire du dessin (une description plus détaillée de la fonction de guide sera fournie dans les paragraphes suivants).

- (1') Par l'appréhension opératoire du dessin on cherchera d'isoler sur le dessin une sous-configuration dont les unités figurales AE et OD sont diagonales, à fin prouver en suite que ces diagonales « se coupent en leurs milieu ».
- (2') En isolant la sous-configuration du triangle AOE et en prenant en charge l'information que  $AO=OE$  car ils sont des rayons du cercle, on parvient à l'information que le triangle AOE est un triangle isocèle. De là, on tire l'information que OH est perpendiculaire à AE. OH est alors la hauteur du triangle AOE, donc OH est une des hauteurs de ce triangle. De là, OH coupe la base AE en son milieu. De même, le triangle DAO est isocèle, donc la hauteur AH coupe la base DO en son milieu.

Les élèves reviennent sur l'énoncé du théorème et ils vérifient que la prémisse manquante a été prouvée.

Dans ce paragraphe nous avons introduite l'idée de fonction d'association et de fonction de guide du langage. Or, les questions qu'on peut se poser maintenant sont les suivantes : Comment se réalise l'association entre un ensemble d'informations et le théorème utile pour le processus démonstratif ? Comment la verbalisation de l'énoncé d'un théorème guide l'appréhension opératoire du dessin ? en d'autres termes, comment s'exercent les fonctions de guide et d'association du langage naturel lors du processus de résolution du problème ?

Dans les paragraphes suivants nous chercherons à répondre à ces questions.

### Certains résultats de la recherche : les fonctions du langage naturel.

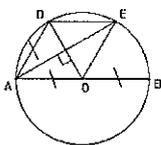
Les résultats de notre recherche confirment l'idée que le langage joue un double rôle dans notre recherche : le langage est outil pour l'avancement de la résolution du problème (en effet, nous avons identifié des fonctions du langage qui favorisent l'avancement du processus démonstratif : la fonction de guide, la fonction d'association, la fonction de planification et la fonction de contrôle) ; le langage est aussi outil révélateur de l'avancement du processus de résolution (par exemple, en identifiant dans le discours l'avancement des modes de progression du discours ou les différents usages de certaines unités linguistiques).

Ce que nous présenterons dans cet ouvrage seront les seuls résultats relatifs au langage en tant qu'outil pour l'avancement du processus de résolution. Nous ne présenterons pas ici les résultats relatifs au langage en tant que révélateur. Dans le paragraphe suivant on abordera alors la description détaillée des seules **fonctions de guide et d'association** du langage naturel.

#### La fonction de guide du langage naturel

Le but de ce paragraphe est de décrire la *fonction de guide* du langage et les conditions de son fonctionnement. C'est pourquoi nous présenterons tout d'abord un extrait d'un protocole qui permet d'illustrer comment s'exerce cette fonction du langage. Ensuite, nous en proposerons une description, ce qui permettra aussi d'introduire les conditions nécessaires pour son fonctionnement.

Extrait du protocole Camille / Gaëlle<sup>5</sup>



8. C: "AE est perpendiculaire à OD" "AO est...."

9. G: ça est égal ça (en indiquant AO et AD) ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD donc ça fait un parallélogramme [appréhension perceptive du dessin]

10 C: mais un parallélogramme c'est pas les cotés de la même longueur, c'est les cotés opposés qui sont....

11 G: ouais, ouais, tu as raison ...c'est un losange

12 C: ouais, mais ouais, **pour un losange il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires** [verbalisation de l'énoncé du théorème]

13 C: le losange... les diagonales se coupent dans leur milieu

14 G: et perpendiculaires

15 C: Attends, perpendiculaires c'est bon là, [vérification immédiate d'une des prémisses du théorème. On revient sur les données du problème] en fait il faut dire que....

16 G: En fait ce côté c'est le même que celui là (*AD et OE*), hein, il faut dire qu'elles sont parallèles aussi ...t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans les cercles ? Je ne sais plus (*elle trace le segment BE*)

17 C: ouais, mais.... enfin ...**ce n'est pas la peine de dire qu'elles sont parallèles à partir du moment qu'on sait que c'est un quadrilatère où les diagonales se coupent dans leur milieu et perpendiculairement, dans ce cas là c'est évident qu'elles sont parallèles, non?**

...

22 G: et comment tu peux savoir qu'y se coupent dans leur milieu?

23 C: ben justement, c'est ce qu'on veut démontrer, non? [prémisses qu'il faut encore prouver]

<sup>5</sup> Pour des raisons de brièveté, nous adopterons dans ce qui suit la marque C/G pour indiquer le protocole du binôme Camille et Gaëlle.

...

26 G: regarde ce qu'on peut dire: que AEB c'est rectangle

36 G: peut être on peut démontrer,...tien regarde ça c'est symétrique par rapport à ça (AO et DE) donc en fait c'est le même

37 C: et alors?

38 G: et après il faut qu'on puisse démontrer qu'il est parallèle à celui là....

42 C: Attend, AO égal AD (elle revient aux données codées sur le dessin) ..... et si on prouve que le triangle DAO est isocèle,... parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça (DO)

43 G: oue, parce que c'est la hauteur

44 C: oue, c'est la hauteur

45 G: oue, c'est aussi la médiane .....AH OUIIIII

46 C: ça veut dire, comme ça c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc..... on peut donner un lettre? (ou point du milieu, H)

Camille verbalise l'énoncé du théorème utile pour la résolution du problème à l'intervention [12], c'est-à-dire presque au début du processus de résolution. Les propositions composantes l'énoncé du théorème relèvent du statut de prémisses ou de conclusions; cela permettra à Camille d'identifier la prémisses de l'hypothèse du théorème qui sont encore à identifier [15] en comparant l'ensemble des prémisses du théorème avec l'ensemble des données du problème. La prémisses qu'il faut encore prouver est « les diagonales se coupent en leur milieu ». Camille revient sur le dessin pour isoler des sous-configurations ayant OD et AE comme unités figurales et tels qui puissent prouver la relation requise « se coupent en leur milieu » [42+46]. Camille isole en d'abord la sous-configuration du triangle isocèle DAO en prouvant que AH est médiane de DO et, en suite, elle isole la sous-configuration du triangle isocèle AOE pour montrer que OH est médiane de AE. Remarquons que la liste d'informations obtenue par cette appréhension opératoire relève d'une finalité de vérification. Nous pouvons remarquer comment les interventions de Gaëlle ne sont pas du tout guidées par la verbalisation du théorème. En effet, Gaëlle cherche simplement de recueillir des informations du dessin [26, 36] par l'appréhension opératoire du dessin et par l'interprétation du dessin sans être guidée par un objectif de recherche. La liste d'informations recueillies par Gaëlle relève donc d'une finalité de recherche.

#### Description de la fonction guide du langage

**La fonction de guide du langage** s'exerce lorsque la verbalisation de l'énoncé d'un théorème (ou plus en général d'un référent théorique mathématique), en imposant un statut opératoire aux propositions composant l'énoncé, guide l'action du sujet lors du processus de résolution afin de vérifier toutes les prémisses de l'hypothèse du théorème et seulement celles-là.

Le rôle de la fonction de guide du langage consiste principalement à guider l'appréhension opératoire du dessin

L'analyse de la fonction de guide permet alors de répondre à la question de recherche concernant les raisons pour lesquelles la verbalisation du référent théorique guide les actions du sujet lors du processus de résolution.

#### Conditions pour que la fonction de guide s'exerce

Nous avons plusieurs fois souligné qu'une des conditions pour que la fonction de guide du langage naturel s'exerce est la verbalisation du théorème (ou, plus en général, d'un référent théorique). Or, la verbalisations ne semble pas être une condition suffisante pour que la fonction de guide s'exerce. En effet, l'analyse des protocoles permet d'identifier des autres

conditions : il faut une sorte de masse critique d'informations supportant la verbalisation du théorème, il faut aussi une re-verbalisation des prémisses du théorème tout au cours du processus de résolution du problème. En ce dernier point on revient sur l'idée du double rôle joué par le langage dans notre recherche. En effet, si reconnaître les re-verbalisations des prémisses du théorème tout au cours du processus permet au chercheur de dire que la fonction de guide potentiellement est en train de s'exercer, d'autre côté la re-verbalisation des prémisses pourra exercer une fonction de guide pour l'avancement du processus de démonstration.

L'analyse des protocoles a mis aussi en évidence que la fonction de guide semble être s'exercer toujours de la même façon. Ces différents façons semblent être dépendantes non de différents facteurs tels la difficulté du problème, le « coût » d'application d'un théorème (dépendante des connaissances du sujet, de ses habitudes et non seulement du problème) et aussi du profil du binôme. Ce dernier point s'est présenté particulièrement intéressant.

L'analyse des protocoles a mis en évidence deux situations possibles :

1) Une positions d'équilibre entre les élèves. Cela signifie que les élèves ont la même capacité de mobiliser leurs connaissances et de les verbaliser, dans notre cas, de verbaliser le théorème utile. Dans ce situation, chaque élève peut verbaliser l'énoncé d'un théorème, et cette verbalisation peut agit comme guide pour l'autre élève2) Une positions de déséquilibre entre les élèves. Cela signifie que la capacité de verbalisation d'un des deux élèves peut fonctionner comme guide pour l'autre élève :

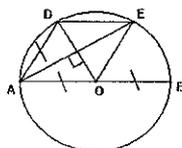
- l'élève qui verbalise le théorème utilise cette verbalisation pour guider son camarade ;
- l'élève qui n'a pas verbalisé l'énoncé du théorème utilise la verbalisation faite par son camarade comme guide pour lui-même.

En général, la fonction de guide du langage ne semble pas être mis en acte par l'élève qui verbalise l'énoncé du théorème, sauf le cas où cela constitue un aide pour le camarade. Il paraît alors que la re-verbalisation des prémisses du théorème soit une sorte d'aide pour l'élève qui n'arrive pas à développer un processus de résolution sur la base d'un référent théorique. Il se peut que l'action de guide (re-verbalisation des prémisses du théorème) soit exercée par l'élève qui n'a pas verbalisé l'énoncé du théorème en utilisant la verbalisation faite par son camarade. Le cas d'équilibre entre les élèves est particulièrement intéressant car les deux élèves ont proposé la verbalisation de l'énoncé d'un théorème également utile pour l'avancement du processus de résolution. Dans ce cas, la fonction de guide est exercée par chacun des deux élèves mais la re-verbalisation des prémisses du théorème n'a pas ici le rôle de guider le camarade à ne perdre pas le fil du processus, plutôt elle a le rôle de convaincre le camarade de la bonne choix du théorème.

#### *La fonction d'association du langage naturel*

Le but de ce paragraphe est de décrire la *fonction d'association* du langage et les conditions de son fonctionnement. C'est pourquoi nous présenterons tout d'abord quelques extraits de protocoles qui permettent d'illustrer comment s'exerce cette fonction du langage et d'introduire les conditions nécessaires pour son fonctionnement.

Extrait du protocole de Elena / Alessandra . L'analyse de cet extrait permet de mettre en évidence comment à partir de l'ensemble d'informations recueillies (par l'appréhension opératoire du dessin ou par inférences locales) la fonction d'association du langage permettra d'évoquer un théorème utile afin de résoudre le problème. On montrera que cela passe par l'action conjointe d'un mot et d'une configuration particuliers



41. E : ...et tous les triangles sont égaux par la propriété de transitivité parce que AD est égal à OA, donnée de l'énoncé, puis AO est égal à OE parce

qu'ils sont des rayons et ED est égal aux rayons parce que... parce que l'on vient de le démontrer. Et puis, tous les triangles sont triangles rectangles

42. A : et puis parce que DH et HO sont égaux et tous les triangles ont cette base

43. E : et donc, ils sont tous isométriques. Et donc, donc quoi... ?

44. A : alors même tous ces petits angles sont égaux, disons en A et en E (DEH, OEH; DAH, OAH)

E : puis... ils sont égaux AH et HE aussi, et DH et HO sont égaux aussi. Et donc,... on n'avait pas un théorème sur... qui disait que les diagonales d'un parallélogramme... que dans un parallélogramme les diagonales se coupent dans leur milieu

L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler la sous-configuration "en croix" des segments DH, HO et AH, HE. Dès que ces segments ont été isolés et leur description en termes de diagonales a été faite, le théorème a été évoqué. L'évocation du théorème semble passer à la fois par le fait d'avoir "vu" la configuration prototypique des diagonales du parallélogramme et par le fait d'avoir prononcé le mot « diagonales ».

Le mot « diagonales » et la configuration "en croix" des diagonales semblent donc fonctionner respectivement comme **mot et configuration étiquette**<sup>6</sup> car ils permettent d'évoquer immédiatement le concept<sup>7</sup> de losange en passant par le référent théorique constitué par le théorème. Dans ce cas, la fonction d'association du langage se réalise grâce à l'action conjointe du mot étiquette « diagonales » et par la configuration étiquette des diagonales "en croix".

Extrait du protocole de Elena / Alessandra. L'analyse de cet extrait permet de mettre en évidence comment à partir l'appréhension opératoire du dessin, la fonction d'association du langage permettra d'évoquer certaines propriétés utiles afin de résoudre le problème. On montrera que cela passe par l'action d'un mot particulier.

*L'élève vient de considérer le triangle AHO par une appréhension opératoire du dessin (H point d'intersection des diagonales AE et OD)*

16.E: ... Mais AO et AD, c'est-à-dire le triangle AOD est isocèle. Pour mieux dire, il est **équilatéral**. Donc le triangle AHO est un triangle particulier : le triangle 30, 60 et 90 degrés.

Le mot "équilatéral" semble fonctionner comme un **mot étiquette** car il renvoie immédiatement aux propriétés : « tous les angles du triangle équilatéral AOD sont de 60° » et « le triangle est composé des deux triangles rectangles ayants les angles de 90°, 60° et 30° » qu'en Italie on appelle « triangles rectangles particuliers ». Donc, le mot "équilatéral" semble évoquer le concept de triangle équilatéral en passant par les référents théoriques et l'appréhension opératoire du triangle OAD (il est décomposé de deux triangles rectangles particuliers). L'action du langage est d'associer au mot étiquette le/les référents théoriques, c'est pourquoi nous relevons ici une **fonction d'association** du langage.

<sup>6</sup> Les définition de « mot étiquette » et de « configuration étiquette » seront développées largement dans le paragraphe suivant.

<sup>7</sup> Nous adoptons ici le « Concept » au sens de Vergnaud. Comme on verra dans le paragraphe suivant, Vergnaud définit le concept en tant qu'un triplet constituée de trois éléments : l'ensemble des situations, l'ensemble des invariants et l'ensemble des représentations du concept même.

### Description de la fonction d'association du langage

La **fonction d'association** du langage est jouée par certains mots que nous qualifions de « mots étiquette ». Ils permettent d'associer à une représentation langagière d'un concept, certains référents théoriques et les propriétés qui leur sont associées dans la théorie.

Nous soulignons encore que la fonction d'association du langage est activée par l'effet de mots étiquette, mais, dans certains cas, par l'effet conjoint de configurations étiquette. La fonction d'association se réalise alors par la formulation ou la lecture d'un mot et par la reconnaissance visuelle d'une configuration particulière. Pour la suite, nous présenterons la définition détaillée de ces deux aspects : mot et configuration étiquettes.

### Conditions pour que la fonction d'association s'exerce

L'analyse des protocoles nous a permis d'identifier les principales conditions à vérifier pour que la fonction d'association du langage puisse s'exercer. Nous avons déjà souligné que cela passe par l'action conjointe d'un mot et d'une configuration étiquette (dont les définitions seront fournies au paragraphe suivant), mais l'action de la fonction d'association semble être dépendante aussi par le coût d'application d'un théorème. Le coût d'application d'un théorème dépend des connaissances de l'élève et de leurs habitudes. Par exemple, nous avons remarqué que le théorème « un quadrilatère ayant quatre cotés égaux est un losange » il n'a jamais été utilisé en France même s'il a été verbalisé, car le coût d'application de ce théorème sur la base de la théorie des transformations peut être trop élevé par rapport au coût d'application du même théorème dans sur la base de la théorie euclidienne. Ce théorème a été utilisé beaucoup par les binômes italiens tandis que les binômes italiens n'ont jamais utilisé le théorème de la somme des vecteurs (utilisé par certains des binômes français) car il ne rentre pas dans le programme scolaire des mathématiques des premiers années du lycée en Italie.

Venons maintenant à la définition de mot étiquette et de configuration étiquette

### Mots étiquette

Un mot joue le rôle « d'étiquette », s'il permet d'évoquer un concept appartenant au système de connaissances du sujet. Nous adopterons la notion de concept au sens de Vergnaud (1990). Vergnaud définit le concept en tant qu' « un triplet de trois ensembles :

$C = (S, I, \mathfrak{S})$

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)

$\mathfrak{S}$  : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) » (Vergnaud, 1990, p.145)

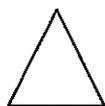
Le concept évoqué par le « mot étiquette » est alors un triplet constitué par le problème ou la situation proposée aux élèves, les invariants, c'est-à-dire les propriétés géométriques en jeu, le signifiant, c'est-à-dire les représentations langagières et graphiques du concept, par exemple le dessin relié au concept par le sujet qui résout.

Cette notion de concept nous permet d'aborder une question centrale : « Quelle est la différence entre un mot et un mot étiquette ? ».

La différence entre un *mot* et un *mot étiquette* est identifiable par le fait qu'un mot étiquette entraîne l'évocation de théorèmes et propriétés géométriques appartenant au système de connaissances du sujet et en cela constituants du signifié. Le théorème ou les propriétés évoquées seront fonctionnels à la résolution du problème ou à l'avancement de la résolution du problème

Ainsi, si l'on considère le mot « triangle », il peut déclencher une association avec un signifiant graphique, tel le dessin de la Fig. 1, mais cette association risque de s'arrêter au niveau figuratif dans la résolution du problème (problème 1) parce que ce problème ne fait pas appelle à des théorèmes généraux sur les triangles. C'est pourquoi nous ne considérons

Fig. 1



pas que le mot « triangle » a joué dans ce cas le rôle de mot étiquette. Par contre, si on considère le mot « triangle isocèle » il est possible qu'il évoque la représentation graphique de la Fig.1 en tant que signifiant, et qu'ensuite s'établisse un lien entre ce signifiant et les invariants, c'est-à-dire les propriétés relatives au triangle isocèle. Par exemple, le théorème : « la hauteur du triangle est aussi médiane et médiatrice » ou la définition d'un triangle isocèle « un triangle ayant deux côtés égaux est isocèle ». C'est pourquoi nous envisageons a priori un rôle d'étiquette au mot « triangle isocèle » plutôt qu'au seul mot « triangle ».

Nous avons remarqué qu'un mot étiquette peut à la fois renvoyer au théorème pilote et à des autres mots. Par exemple, le mot « milieu » peut évoquer à la fois les mots « médiane » et « médiatrice » ainsi que le théorème sur la hauteur d'un triangle isocèle. Or, si l'évocation des mots « médiane » et « médiatrice », en tant que représentations langagières du concept (par exemple, du concept du *triangle isocèle*), permettent l'évocation d'un théorème pilote, alors nous considérons que le mot « milieu » fonctionne comme un mot étiquette. Par contre, si le mot « milieu » permet la seule évocation des mots « médiatrice » et « médiane » sans les relier à aucun théorème, alors sa verbalisation fonctionne juste comme association de mots (du concept, sera évoqué juste les représentations langagières et non langagières mais pas des invariants).

Maintenant, nous souhaitons répondre à une deuxième question qui nous apparaît centrale pour une analyse plus fine du rôle des mots étiquette :

Quelles sont les relations entre les éléments constituant le concept évoqué par un mot étiquette?

On peut imaginer d'avoir des mots étiquette qui entraîneront, à l'intérieur du concept, des allers et retours entre invariants et signifiants : les propriétés géométriques prises en charge gèrent l'appréhension opératoire du dessin et la prise en charge de certaines configurations ou sous-configurations conduit ensuite à l'évocation de certains théorèmes. Mais, on peut aussi imaginer que les invariants de ce concept seront, à leur tour, reliés à un autre concept, dans le cas du triangle isocèle, par exemple, le concept de bissectrice. De même que pour le registre langagier, dans le registre figuratif certaines « configurations étiquette » permettent d'évoquer un concept. Dès que le concept vient évoqué il pourra être explicité éventuellement en termes d'invariants par les propriétés reliées au signifiant et au problème.

#### Conditions du fonctionnement de mots et configurations étiquette

Le fait qu'un mot ou une configuration soient étiquette est dépendant de plusieurs facteurs qui relèvent de la situation, du contexte, des acteurs (locuteur et interlocuteur)...

L'analyse des protocoles a mis discerné trois facteurs principales par rapport auxquels certaines mots et certaines configurations jouent le rôle d'étiquette : le sujet, le processus de résolution et les institutions.

Pour ce qui concerne le sujet, la question qu'on peut se poser est la suivante :

Pourquoi configurations et mots jouent le rôle d'étiquette pour certains mais pas pour d'autre ?

Nous proposons de rechercher une des raisons de ce lien "faible" lors de l'apprentissage du concept. Si l'apprentissage du concept n'est pas structuré en tant que lien bidirectionnel entre l'aspect figural et les invariants théoriques, alors l'évocation du concept par une configuration

étiquette sera susceptible d'être faible. Evidemment, si l'apprentissage du concept se structure grâce au lien bidirectionnel entre aspect figural et aspect théorique, l'évocation du concept par une configuration étiquette sera susceptible d'être "forte".

À cette étape, il nous semble possible de relier le concept de mot et configuration étiquette fortes ou faibles à l'idée de connaissances disponibles ou mobilisables issues de la théorie de Robert (1998). Nous pourrions dire qu'une connaissance peut ne pas être *disponible*<sup>8</sup> aux élèves lorsqu'elle reste *mobilisable* au niveau du signifiant mais non au niveau des invariants.

Comme dit plus haute, le processus de résolution est un des facteurs par rapport auquel certaines mots et certaines configurations jouent le rôle d'étiquette.

Les mots qui ont joué le rôle d'étiquette ne remplissent pas toujours cette fonction. En effet, l'analyse des protocoles a mis en évidence qu'un mot peut jouer le rôle d'étiquette en dépendance du fait qu'il appartient à une liste d'informations dont certaines pourront assumer le statut de prémisse d'un théorème.

Les conditions du fonctionnement de mot et de configurations en tant qu'étiquettes dépende aussi des institutions scolaires. Rappelons que notre expérimentation a été conduite à la fois en Italie et en France, donc les deux institutions de référence sont celle italienne et celle française. L'analyse des protocoles a mis en évidence qu'en général, les mots jouant le rôle d'étiquette dans le contexte italien, le jouent aussi pour le contexte français mais souvent ces mots déclenchent des théorèmes différents. Par exemple, dans la plupart des cas, le mot « équilatéral » a permis d'évoquer, en Italie, les théorèmes : « un triangle équilatéral a tous les angles de  $60^\circ$  » et « dans un triangle équilatéral on peut isoler deux triangles rectangles ayant les angles de  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $90^\circ$  ». Le même mot « équilatéral », a plus de chances en France d'évoquer le théorème « dans un triangle équilatéral la hauteur est aussi médiane et médiatrice ». Cela est dépendante du programme scolaire des deux pays. En effet, comme dit plus haute, le programme scolaire pour l'enseignement de la géométrie en France, à l'époque de l'expérimentation, concernait la théorie des transformations, tandis qu'en Italie il concernait la géométrie euclidienne.

L'analyse des protocoles a aussi mit en évidence que les configurations peuvent être étiquette dans un seul des deux pays et cela signifie que les configurations ne relèvent pas d'une signification intrinsèque.

## Conclusions

De l'analyse des protocoles nous avons tiré un certain nombre de résultats principalement sur les conditions à mettre en place pour que les fonction du langage s'exercent.

L'analyse des modes de progression du discours dans la résolution a mis en évidence certaines régularités dans les comportements verbaux des élèves (entre binômes), régularités que nous avons qualifiées « modèles d'actions ». On a ainsi distingué trois modèles d'action : le modèle liste, le modèle final et le modèle Hypothético-déductif dont nous n'avaons pas

---

<sup>8</sup> Précisons les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves, relativement à un niveau scolaire donné ( Robert, 1988, pp. 165-168).

*Le niveau technique* : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance dans des contextualisations simples, locales, sans travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptations. C'est le niveau des applications immédiates.

*Le niveau mobilisable* : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance par un début de juxtaposition de savoirs. Ce sont des applications où il faut adapter ses connaissances au contexte particulier. Par exemple par un changement de point de vue ou de cadre mais avec indications (soit données par l'enseignant soit par l'énoncé)

*Le niveau des connaissances disponibles* : ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, d'aller chercher soi-même dans ce connaissances ce qui peut intervenir

parlé en cet ouvrage. Nous avons pu repérer qu'est rattaché à chaque modèle un mode d'expansion discursive spécifique : en prévalence l'accumulation pour la Liste et la substitution pour le modèle final. Ainsi nous avons pu vérifier la validité de l'hypothèse de recherche 3 avancée lors de la problématique de recherche (cf. « Troisième hypothèse de recherche »)

À partir de ces résultats, surtout à partir des résultats concernant les conditions pour que les fonctions du langage naturel soient mis en place, nous avons tiré des implications didactiques. Nous avons montré que les fonctions du langage naturel décrites dans notre recherche sont privilégiées par certaines conditions. Par exemple, on a remarqué que la mise par binôme favorise la fonction de guide ou que le mot jouent le rôle d'étiquette suivant les institution où l'élève est en train de travailler.

Or, nous pouvons reconnaître ici un retombé sur l'enseignement car l'enseignant peut choisir de mettre en place un certain nombre de conditions pour que tel ou tel autre fonctions s'exercent.

Plus en général, nous pouvons tirer des conclusions de la recherche.

Les résultats obtenus concernent à la fois du langage comme révélateur et du langage comme outil pour la construction et la maîtrise de la pensée.

Pour ce qui concerne le langage comme révélateur, nous avons défini des Modèles d'analyse des protocoles (Mécanisme dessin et Mécanisme énoncé) et des Outils linguistiques (par exemple, les différents usages des unités linguistiques) qui constituent utiles instruments pour l'analyse de l'avancement du processus de résolution des problèmes de géométrie plane.

Pour ce qui concerne le langage en tant que outil pour la construction et la maîtrise de la pensée, nous avons défini différents Fonctions du langage naturel qui favorisent l'avancement du processus de démonstration sous l'action de certaines conditions.

En fin, notre travail fournit un nouvel exemple à la théorie vygotksyenne selon laquelle le langage naturel n'est pas simplement une expression du système de connaissances de l'élève, mais il y a une dialectique fondamentale entre la pensée et la parole en termes de ressources mutuelles (voir les fonctions décrites plus haut).

## Références

Beaudichon J. (1999) *La communicatin., Processus, formes et applications*. Paris : Armand Colin/HER

Bronckart J.P. (1985) *Le fonctionnement des discours*. Paris : Delachaux et Niestlé

Duval R (1994) « Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique », In *Repères – IREM*, 17, pp. 121-137.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Paris : Peter Lang S.A.

Robotti E. (2002) "Verbalization as a mediator between figural and theoretical aspects", In *Proceeding of the 25<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4; 105+112. Utrecht University. Ed Marja van den Heuvel-Panhuizen.