

Une méthode possible de recherche de contre-exemples

André Antibé

Laboratoire d'Etudes des Méthodes Modernes d'Enseignement
Université Paul Sabatier Toulouse

Introduction

De nombreux travaux ont été réalisés sur le contre-exemple en mathématique.

Dans sa thèse, E. LOCIA ([13]) donne les résultats d'enquêtes sur ce thème. Les points suivants apparaissent clairement :

- *dans les livres et les sujets d'examens ou de concours, très peu de questions sont consacrées à la recherche de contre-exemples.*
- *pour une très forte majorité d'enseignants et d'étudiants, la recherche de contre-exemples est difficile et aucune méthode explicite n'existe vraiment.*

L'objet de cet article est d'en proposer une. Il ne s'agit pas, bien sûr, d'une méthode algorithmique permettant de conclure dans tous les cas ! Il s'agit d'une méthode de recherche de contre-exemples qui est parfois utilisée inconsciemment par ceux qui ont la chance d'en trouver.

On peut espérer que l'explicitation de cette méthode pourra permettre au plus grand nombre d'élèves d'avoir une activité mathématique fructueuse, et de mieux comprendre comment la plupart des contre-exemples peuvent être trouvés.

A. Une méthode de recherche

Cette méthode est basée sur deux points forts :

- le rétrécissement d'ensemble
- l'utilisation de « célébrités »

Présentons-la sur un exemple classique (niveau Deug) :

On sait que, dans $\mathbb{R}$, toute série absolument convergente est convergente. On se propose d'étudier la réciproque de cette propriété :

Est-ce que toute série convergente est absolument convergente ?

Montrons que cette réciproque est fausse en exhibant un contre-exemple.

1. Bien repérer le référentiel

Il s'agit de trouver une suite (u_n) de réels telle que

$$\sum u_n \text{ converge et } \sum |u_n| \text{ diverge (1)}$$

On dit alors que le référentiel est l'ensemble des suites de réels. Notons-le S .

2. Rétrécissement d'ensemble

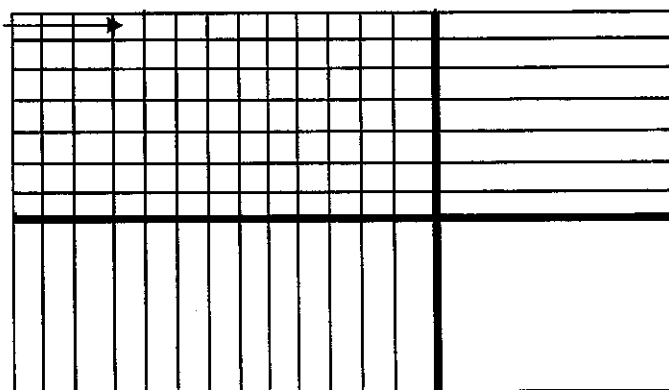
La propriété (1) permet de « rétrécir » l'ensemble S dans lequel on cherche un contre-exemple.

Plus précisément :

- la condition « $\sum u_n$ converge » implique que (u_n) tend vers 0. Notons S_0 l'ensemble des suites tendant vers 0.
- puisque $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ sont de nature différente, on est sûr que la suite (u_n) n'est pas de signe constant. D'autre part, on sait que la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes. On est donc sûr que :
on ne peut trouver aucun rang n_0 à partir duquel la suite (u_n) soit de signe constant (P).

Notons S_1 l'ensemble des suites vérifiant la propriété (P).

Ensemble $S_0 \cap S_1$



l'ensemble S_0 est hachuré horizontalement, l'ensemble S_1 verticalement

On doit donc chercher un contre-exemple dans l'ensemble des suites tendant vers 0 et vérifiant la propriété (P). Cet ensemble $S_0 \cap S_1$ est représenté en haut à gauche sur le schéma ci-dessus.

On a donc « rétréci » le référentiel initial de recherche S .

3. Utilisation de « célébrités »

En général, l'ensemble « rétréci » n'est pas égal à l'ensemble de tous les contre-exemples possibles. La recherche d'un contre-exemple peut alors se faire par tâtonnements. Mais ces tâtonnements peuvent être organisés et ne pas être le seul fruit du hasard ou d'une intuition qui peut paraître extraordinaire. Plus précisément, il est naturel de considérer, dans l'ensemble S_0 , des suites remarquables, des « célébrités » : les suites de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha > 0$).

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ se rencontrent d'ailleurs au lycée dès la classe de 1^{ère}.

De même, l'ensemble S_I doit faire penser à des suites alternées, et donc à des suites dont l'expression fait intervenir $(-1)^n$.

En définitive, des éléments remarquables de l'ensemble $S_0 \cap S_I$ sont des suites de la forme

$$\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right), \text{ avec } \alpha > 0.$$

4. Conclusion

On essaie donc de trouver une suite de la forme $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$, avec $\alpha > 0$ pouvant servir de contre-exemple. A ce stade de notre recherche, la réponse est simple : il suffit de choisir, par exemple, $\alpha = 1$, (et même, plus généralement, tout réel α de l'intervalle $]0;1[$). En effet, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, car il s'agit de la série harmonique alternée ; et $\sum u_n$ diverge, car il s'agit d'une série de Riemann divergente.

Commentaires

1. La méthode présentée ci-dessus suppose connues certaines propriétés concernant les séries, et, d'autre part, elle suppose une certaine culture mathématique : il faut penser aux « célébrités » $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$. Cependant, grâce à une telle méthode, la recherche d'un contre-exemple ne relève plus alors de la prestidigitation : on dispose d'une piste de recherche qui ne permet sans doute pas d'aller à coup sûr jusqu'au bout, mais grâce à laquelle l'activité de recherche d'un contre-exemple peut devenir enrichissante et fructueuse.
2. La méthode du rétrécissement d'ensemble et la recherche de célébrités dépendent bien sûr du niveau de l'élève. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, certains élèves familiarisés avec les séries, peuvent immédiatement penser à la célébrité $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ sans passer par la phase de rétrécissement.

B. Application de cette méthode à d'autres exemples

Nous allons à présent donner d'autres exemples d'application de cette méthode.

Exemple 1

On sait que,

$$\text{si } \sum u_n \text{ converge alors } u_n \text{ tend vers } 0.$$

On se propose d'étudier la réciproque de cette implication :

$$\text{Est-ce que, si } u_n \text{ tend vers } 0, \sum u_n \text{ converge ?}$$

Montrons que cette réciproque est fautive en exhibant un contre-exemple. On cherche donc une suite (u_n) telle que

$$\lim u_n = 0 \text{ et } \sum u_n \text{ diverge.}$$

Comme dans l'exemple précédent, le référentiel est l'ensemble S des suites.

1^{er} cas : les séries de type particulier sont connues lorsque ce problème est posé (série de Riemann, série géométrique).

Il est alors naturel de chercher un contre-exemple parmi ces célébrités. Aucune série géométrique ne permet de conclure. En effet $\sum z^n$ converge $\Leftrightarrow |z| < 1$ et d'autre par, $z^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z| < 1$.

D'où : $\sum z^n$ converge $\Leftrightarrow |z| < 1$.

On peut alors essayer de trouver un contre-exemple parmi les séries de Riemann : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Plus généralement, toute suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, avec $0 < \alpha \leq 1$, peut être utilisée comme contre-exemple.

2^{ème} cas : seule la définition de la convergence d'une série est connue lorsque ce problème est posé.

Dans ce cas, il est normal d'utiliser la définition puisque c'est le seul « outil » dont on dispose. En notant S_n la somme partielle de rang n , on est ramené au problème suivant (en remarquant que $u_n = S_n - S_{n-1}$) :

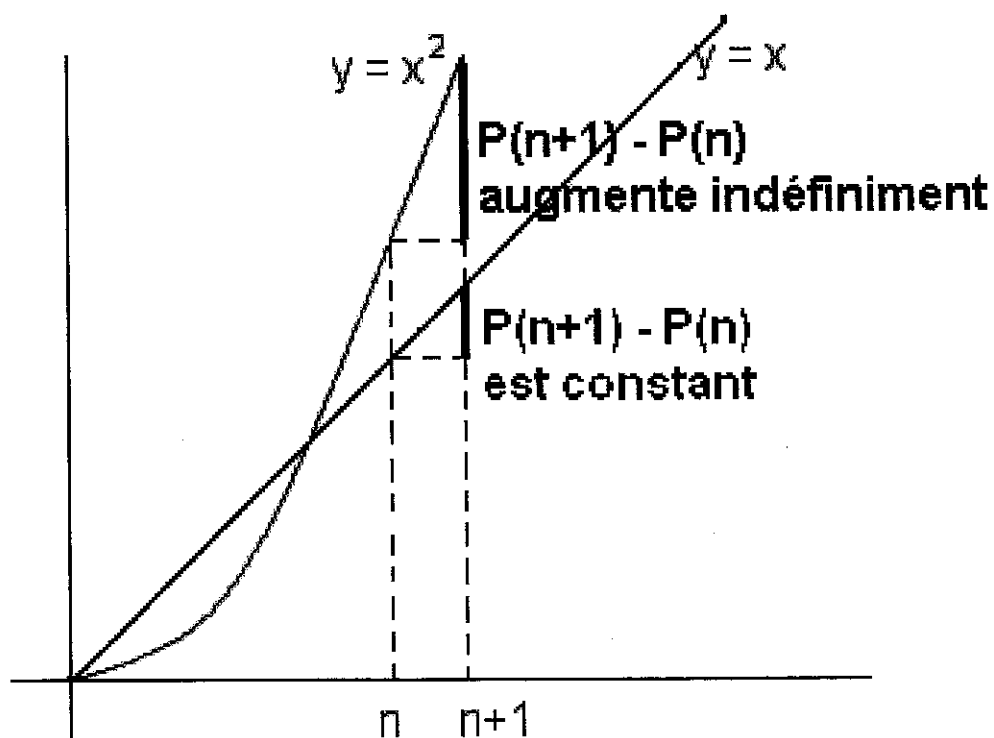
Trouver une suite (S_n) telle que :

$(S_n) \text{ diverge et } (S_n - S_{n-1}) \text{ tend vers } 0.$

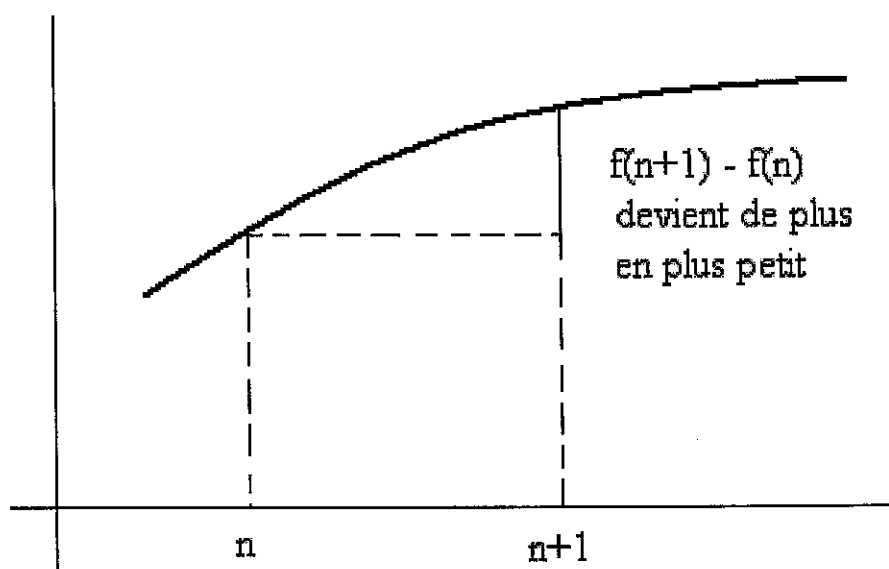
Dans l'ensemble des suites réelles divergentes, connaît-on des célébrités ? Il semble normal d'envisager des suites de limite infinie ou bien la suite $((-1)^n)$ (ou bien des suites alternées divergentes). Cette dernière ne convient pas car la condition « $S_n - S_{n-1}$ tend vers 0 » n'est pas satisfaite. Essayons donc de trouver un contre-exemple dans l'ensemble des suites de limite infinie, par exemple de limite égale à $+\infty$. Dans cet ensemble, les suites S_n telles que $S_n = P(n)$ où P est un polynôme de degré ≥ 1 peuvent être considérées comme des célébrités car les polynômes sont des fonctions faciles à manipuler.

On peut se rendre compte **graphiquement** qu'aucune suite de terme général $P(n)$ ne convient : en effet, si P est de degré 1, la différence $P(n+1) - P(n)$ est une constante non nulle, donc ne tend pas vers 0.

Si P est de degré ≥ 2 , cette différence semble tendre vers l'infini.



On peut alors penser à chercher S_n de la forme $S_n = f(n)$ où f est une fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$, mais dont la courbe a l'allure suivante au voisinage de $+\infty$.



Cette allure du graphe doit faire penser à des fonctions telles que $x \rightarrow \sqrt{x}$, ou $x \rightarrow \ln x$. On peut alors vérifier aisément que chacune de ces deux fonctions convient.

En effet,

- si $S_n = \ln n$, on a bien :

$\lim S_n = +\infty$ et $S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$

en effet $S_n - S_{n-1} = \ln n - \ln (n-1) = \ln \frac{n}{n-1}$

- si $S_n = \sqrt{n}$, on a bien :

$\lim S_n = +\infty$ et $S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$

en effet $S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ (en multipliant par la quantité conjuguée)

Commentaires

- Dans la solution proposée ci-dessus, on n'a pas besoin de « rétrécir » au sens strict le référentiel. L'utilisation de « célébrités » a suffi. Soulignons cependant que, dans la première étape, on a remplacé le problème par un problème équivalent, à savoir la recherche de (S_n) . On peut considérer qu'il s'agit là d'un rétrécissement au sens large.

- Dans les livres et les cours usuels, il est regrettable que, le plus souvent, on se contente d'exhiber un contre-exemple sans préciser comment il a été trouvé.

Exemple 2

Enoncé : L'image d'un ouvert par une fonction continue, est-elle un ouvert ?

Recherche d'un contre-exemple

Référentiel :

Dans ce cas, notre recherche concerne deux objets :

- Un ensemble E ouvert tel que $f(E)$ ne soit pas ouvert.
- Une fonction continue f .

Le référentiel est alors l'ensemble de couples (E, f) où E est un ensemble ouvert et f est une fonction continue définie sur E .

Utilisation de Célébrités

- Pour E

Les ensembles ouverts les plus usuels sont les intervalles ouverts.

- Pour f

Il est naturel de penser aux fonctions polynomiales.

Dans cet ensemble on peut commencer par une phase (systématique) de tâtonnements (par ordre de simplicité, par exemple) : polynômes de degré 0, de degré 1, etc.

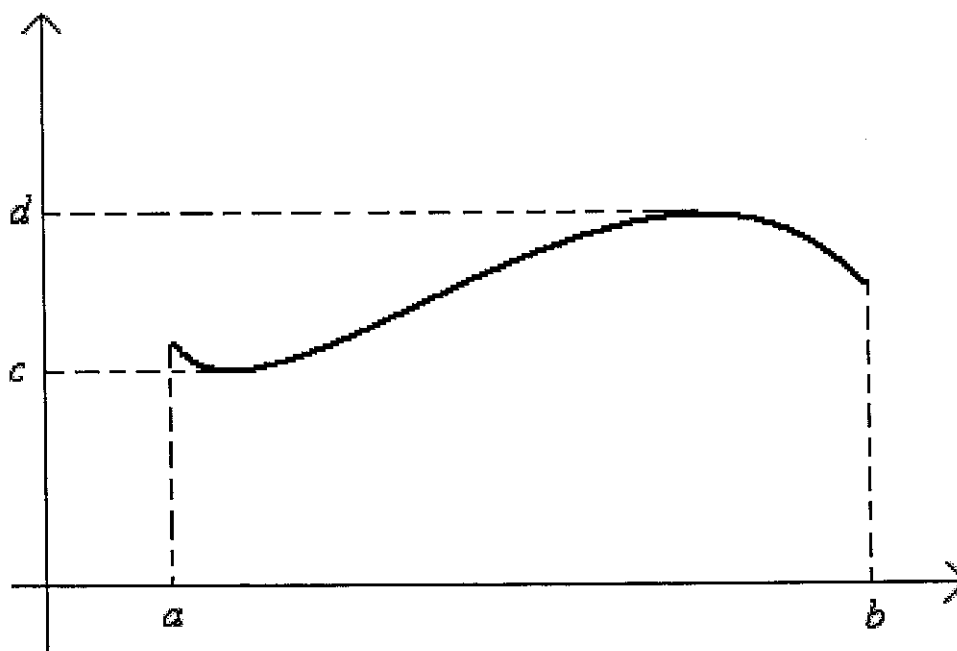
Rétrécissement : On sait que l'image continue d'un intervalle ouvert par une fonction strictement monotone est un intervalle ouvert. Donc si E est un intervalle ouvert, f ne doit pas être strictement monotone.

Un contre-exemple possible : Il suffit de prendre un polynôme de degré 0 (fonction constante) et n'importe quel intervalle ouvert.

En effet, l'image d'un intervalle par une fonction constante est un singleton, donc un ensemble fermé.

Commentaires

1. Pour trouver ce contre-exemple, le rétrécissement n'a pas vraiment été utile.
2. Il n'y a pas d'unicité dans la façon d'appliquer la méthode au même problème. Par exemple, au lieu de chercher, pour l'ensemble de départ E , un intervalle ouvert, on aurait pu considérer l'ensemble d'arrivée $f(E)$, en cherchant un ensemble non ouvert ; il semble alors naturel de penser aux ensembles fermés qui ne soient pas à la fois ouverts (on exclut de cette façon l'ensemble vide et $\mathbb{J}$ tout entier). Les plus simples de ce type sont les singletons. On pourrait alors prendre $f(E) = \{x_0\}$ et déterminer ensuite f et l'ensemble E . On peut arriver ainsi au même type de contre-exemple.
3. Par ce processus de recherche on ne trouve pas qu'un contre-exemple, mais une infinité.
4. **L'approche graphique.** Un outil très puissant dans beaucoup de cas, est l'approche graphique. Il faut, bien sûr, que l'interprétation graphique des notions qui interviennent dans la situation soient bien assimilées.
Il n'est pas difficile, par ce moyen, de penser à des fonctions ayant l'allure suivante :



où $f([a, b]) = [c, d]$

Il est alors aisé de trouver un contre-exemple explicite.

Dans le livre *Analyse Infinitésimale* de R. Lavendhome, le contre-exemple proposé est de ce type :

$$E =]-\pi, \pi[, \quad f(x) = \sin x \quad \text{alors} \quad f(E) = [-1, 1].$$

Ce contre-exemple est proposé sans expliquer comment il a pu être trouvé.

Exemple 3

Énoncé : Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $E \subset \mathbb{R}$. L'implication suivante est-elle vraie ? :

$$f \text{ et } g \text{ uniformément continues sur } E \Rightarrow fg \text{ uniformément continu sur } E ?$$

Recherche d'un contre-exemple

Au départ, le référentiel est l'ensemble de triplets $(E ; f ; g)$ où E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f et g des fonctions continues sur E .

Rétrécissement : Comme toujours, pour rétrécir, il faut connaître des résultats concernant les notions qui interviennent dans l'énoncé. Supposons connus les résultats classiques suivants :

$$f \text{ uniformément continue} \Rightarrow f \text{ continue} \quad (a)$$

$$f \text{ et } g \text{ continue} \Rightarrow fg \text{ continu} \quad (b)$$

$$f \text{ continue sur } K \text{ compact} \Rightarrow f \text{ uniformément continue sur } K \quad (c)$$

On remarque que si E est un ensemble compact et f et g uniformément continues sur E , alors le produit est uniformément continu.

En effet, d'après (a) f et g sont continues. D'après (b) fg est continu. D'après (c) fg est uniformément continu sur E (compact).

On exclut donc du champ de recherche, les sous-ensembles E compacts, c'est-à-dire fermés bornés.

Utilisation de célébrités :

- Pour E : Quels sont les sous-ensembles non compacts de $\mathbb{R}$ les plus célèbres ?
 $\mathbb{R}$ lui-même (car non borné) ; les intervalles bornés non fermés.
- Pour f et g (fonctions uniformément continues) :
Comme c'est souvent le cas lorsqu'il s'agit de fonctions, on pourrait prendre comme célébrités les fonctions polynomiales et faire dans cet ensemble la recherche. On la fait de façon systématique à partir des polynômes de degré 0, degré 1, etc.

Si on commence par les polynômes de degré 0, on s'aperçoit tout de suite qu'il est impossible de trouver ici un contre-exemple car le produit de deux fonctions constantes est aussi une fonction constante et donc uniformément continue.

Dans cet ordre d'idées on prend alors les polynômes de degré 1. Il n'est pas difficile de démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 1 est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, le produit d'une fonction de degré 1 par une fonction de degré 0 est uniformément continu.

Considérons alors deux fonctions de degré 1.

On peut prendre par exemple $f(x) = x$ (« sous-célébrité ») et $g(x) = f(x)$.

$$\text{Alors } (fg)(x) = x^2.$$

Cette fonction, est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Deux cas sont alors envisageables :

- La non continuité uniforme de la fonction $x \rightarrow x^2$ est une propriété connue (peu probable au niveau Deug).
Il suffit alors de s'appuyer sur cette propriété pour affirmer qu'un contre-exemple a été trouvé.
- Cette propriété n'est pas supposée connue. Il convient alors d'en donner une démonstration.

Commentaires :

1. Cette façon de chercher un contre-exemple peut s'avérer très riche. Elle peut donner lieu à d'autres recherches intéressantes. Par exemple, on a pris $\mathbb{R}$ comme « célébrité » d'ensemble non compact. On peut, par exemple, se poser la question suivante : Existe-t-il un contre-exemple dans le cas où f et g sont définies sur un intervalle borné, non fermé ?
2. Le rétrécissement d'ensemble peut se faire de façons différentes selon les résultats supposés connus.

Si on ne connaît pas de résultats permettant directement un rétrécissement, on peut fabriquer des « théorèmes » en cours de route permettant de rétrécir. Souvent cette recherche est très riche mais elle est plus délicate et n'est pas toujours facile.

Ainsi, on aurait pu rétrécir de la manière suivante :

On peut remarquer que dans le cas où les deux fonctions f et g sont bornées et uniformément continues sur le domaine commun E , leur produit est aussi uniformément continu.

En effet, si $|f(x)| < M_1$ et $|g(x)| < M_2$, $\forall x \in E$, soit $M = \sup(M_1, M_2)$.

Alors

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|)$$

On exclut alors de notre champ de recherche, les couples de fonctions bornées.

3. Le contre-exemple proposé dans le livre de R. GELBAUM et J. OLMSTED ([9]) est le suivant

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ et } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x, \text{ et } g(x) = \sin x.$$

Présenté de cette façon, on ne sait pas d'où sort ce contre-exemple. On se demande, par exemple, pourquoi l'auteur a choisi l'ensemble $\mathbb{R}$ comme domaine. En plus, le contre-exemple proposé semble peut-être répondre à une problématique différente de celle de l'énoncé d'origine, car, dans ce cas, l'une des fonctions est bornée.

Il est clair que l'absence de tout commentaire heuristique appauvrit considérablement cette situation de recherche.

Exemple 4

Énoncé :

La somme de deux fonctions monotones sur $\mathbb{R}$, est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?

Recherche d'un contre-exemple

Référentiel :

Pour démontrer la fausseté de l'énoncé, il suffit de trouver deux fonctions monotones dont la somme n'est pas monotone.

Donc l'ensemble de recherche (le référentiel) est l'ensemble des couples de fonctions monotones.

Rétrécissement d'ensemble : Il n'est pas difficile de se rendre compte que si deux fonctions f et g sont toutes les deux croissantes (respectivement décroissantes) leur somme est croissante (respectivement décroissante).

Donc nécessairement l'une des fonctions que l'on recherche doit être croissante et l'autre doit être décroissante.

D'autre part, il est clair qu'aucune des deux fonctions ne peut être constante.

Célébrités : Comme c'est souvent le cas lorsqu'il s'agit de fonctions, on peut considérer les fonctions polynomiales.

- On exclut les polynômes de degré 0 (fonctions constantes), d'après ce qui a été dit ci-dessus.
- On considère alors les polynômes du premier degré. On prend, par exemple, pour f , $f(x) = x$. Alors f est croissante.
Comme on l'a dit ci-dessus, g doit nécessairement être choisie décroissante et non constante. g doit donc être de la forme $g(x) = -ax$ où $a > 0$.

On remarque que si $a \neq 1$, $(f + g)(x) = (1 - a)x$ est monotone (croissante si $a < 1$ et décroissante si $a > 1$). Si $a = 1$, $f + g$ est constante.

On ne peut donc pas trouver un contre-exemple ainsi.

- On cherche alors g dans l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 2. On remarque tout de suite qu'aucune des fonctions qui appartiennent à cet ensemble n'est monotone sur $\mathbb{R}$. Donc, on exclut tous les polynômes de degré 2 de l'ensemble de recherche.
- On cherche alors g dans l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 3. On prend, par exemple, $g(x) = -x^3$. Dans ce cas g est une fonction décroissante et

$$(f + g)(x) = x - x^3$$

Il est immédiat de vérifier que $f + g$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. On a donc trouvé un contre-exemple.

Commentaire :

Voici une autre façon de procéder pour chercher un contre-exemple : on considère les dérivées des fonctions f et g (en supposant qu'elles existent). Dans ce cas, si les fonctions f et g sont monotones, leurs dérivées sont de signe constant (éventuellement 0 en certains points d'inflexion). On ramène donc la recherche, à la recherche de deux fonctions, l'une non négative et l'autre non positive, dont la somme n'est pas de signe constant.

Une approche graphique peut permettre aisément de trouver deux telles fonctions. Il suffit alors de considérer une primitive de chacune de ces fonctions.

Exemple 5

On sait que, dans $\mathbb{R}$,

Toute suite convergente a une seule valeur d'adhérence.

Enoncé : Dans $\mathbb{R}$, toute suite qui a une seule valeur d'adhérence, est-elle convergente ?

Recherche d'un contre-exemple

Référentiel : C'est l'ensemble des suites de réels.

Rétrécissement d'ensemble : L'ensemble où il faut chercher un contre-exemple est celui de toutes les suites qui ont une seule valeur d'adhérence. Supposons connu le résultat suivant :

Si une suite est bornée et a une seule valeur d'adhérence, alors elle est convergente.

Donc la suite que l'on cherche ne doit pas être bornée. On cherche alors une suite non bornée avec une seule valeur d'adhérence.

Célébrités :

- Comme sous-suite, on peut considérer la sous-suite définie par $\varphi(n) = 2n$ (ou $\varphi(n) = 2n + 1$).
- Comme suite convergente, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Comme suite non bornée, une suite dont une sous-suite tend vers $+\infty$.
Il suffit alors de prendre comme contre-exemple la suite (x_n) définie ainsi :

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est pair ; } x_n = n \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Références

- [1] A. Antibì. Mathématiques et prestidigitation. *Bulletin national APMEP*, (39), 1983.
- [2] A. Antibì. *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions*. Université Paul Sabatier, 1988. Thèse d'Etat.
- [3] A. Antibì, G. Brousseau. La dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(1), 2000.
- [4] A. Antibì, G. Brousseau. Vers l'ingénierie de la dé-transposition. *Les dossiers des sciences de l'éducation*, Presses Universitaires du Mirail (8), 2002.
- [5] G. Arsac. Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3) : 247-280, 1988.
- [6] J. Bair et al. *Formation mathématique pour la résolution de problèmes*. Pratiques pédagogiques, De Boeck Université, 2000.
- [7] N. Balacheff. *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège*. Université Joseph Fourier, Grenoble, 1988. Thèse d'Etat.

- [8] V. Durand-Guerrier. Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul de prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. In *Séminaires 1996*, Didactech, pp. 119-148, Grenoble, 1996. Institut IMAG, Université Joseph Fourier.
- [9] R. Gelbaum and J. Olmsted. *Counterexamples in analysis*. HOLDEN DAV, INC, San Francisco, 1964.
- [10] B. Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, Paris, 1993.
- [11] I. Lakatos. *Preuves et Réfutations : essais sur la logique de la découverte mathématique*. Herman, Paris, 1976.
- [12] M. Legrand. Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, (10) : 123-159, Janvier 1993.
- [13] E. Locia Espinoza. *Les contre-exemples dans l'enseignement des mathématiques*. Université Paul Sabatier, 2000. Thèse d'Etat.
- [14] G. Polya. *Comment poser et résoudre un problème*. DUNOD, Paris, 1965.