

Situations de recherche en « classe »

Essai de caractérisation et proposition de modélisation

Denise Grenier

Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble

Charles Payan,

Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble

- À ton avis, ceci est-il un problème de math ?
 - Non !
 - Et pourquoi ?
 - Parce qu'il faut réfléchir !
- (Réponse à un questionnaire proposé en CM2¹)

Introduction

Alors que le point de vue constructiviste sur l'apprentissage semble assez partagé², paradoxalement, la plupart des acteurs du système éducatif - élèves, enseignants, inspecteurs, conseillers pédagogiques, mais aussi chercheurs en éducation ou en didactique - ne sont qu'exceptionnellement, pour ne pas dire jamais, en position de construction de savoir. Nous parlons ici du savoir disciplinaire qu'ils sont censés apprendre, transmettre ou dont ils étudient les conditions de l'apprentissage.

Le savoir scientifique se construit dans le domaine de la recherche, en particulier par la résolution de questions. Ceci nous a conduit à étudier les possibilités d'existence et de fonctionnement d'**organisations didactiques** autour de situations de recherche. Mais la question des organisations didactiques est liée à celle des organisations mathématiques, ou tout au moins, celle des savoirs à transmettre, au sens large : quelles mathématiques est-il pertinent et possible d'enseigner dans des « situations de recherche en classe » ?

Une autre question vient alors, celle des **savoirs « durables »**, c'est-à-dire qui perdurent au delà de la scolarité chez les non professionnels des sciences. Pour anecdote, lors d'une conférence destinée à un public varié intéressé par une réflexion sur l'enseignement, nous avons présenté les termes suivants (extraits d'index de manuels de Première et Terminale) :

Asymptote, Binôme de Newton, Conjugué d'un nombre complexe, Cosinus hyperbolique, Écart type, Équation différentielle, Fonction affine, Fonction exponentielle, Homothétie, Hyperbole, Interpolation linéaire, Irrationnel, Logarithme népérien, Polynôme, Sinus, Variance

¹ Expérimentation menée par Karine Godot dans le cadre de son travail de thèse, sous notre direction, laboratoire Leibniz.

² Même si actuellement, les réticences et les mises en garde deviennent de plus en plus nombreuses.

Les réactions de l'assistance, prévisibles, confirment qu'il ne reste que très peu de connaissances sur ces notions enseignées au lycée. Ce constat n'est pas surprenant, puisque les notions citées ne sont utilisées que par un très faible pourcentage de la population.

Or, l'enseignement de ces notions est parfois justifié par l'apprentissage *dans le même temps* de savoirs que nous appelons « transversaux », c'est-à-dire ceux intervenant dans de nombreux domaines mathématiques et concernant des termes tels que expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, définition, preuve, implication, structuration, décomposition/recomposition, induction... Mais nous serons sûrement d'accord sur le fait que ces savoirs « transversaux » ne sont guère plus disponibles que les savoirs notionnels, même au niveau de l'université.

Des préoccupations analogues se retrouvent dans les discours plus généraux concernant la **politique éducative** : on entend parler de manière récurrente de la « désaffection scientifique croissante » et, plus récemment, de « l'ennui à l'école ». Ceci rejoint des motivations plus profondes liées à des préoccupations sociales ou politiques. En effet, l'intérêt que nous portons à l'enseignement et à son devenir ne se réduit pas pour la plupart d'entre nous à un simple jeu intellectuel. Il induit évidemment une position non neutre par rapport aux programmes scolaires³ et à la formation des enseignants.

Or, nous avons constaté que, d'une part, l'apprentissage de ces savoirs transversaux, en particulier l'argumentation et la preuve, sont des objectifs constants déclarés « essentiels » depuis plusieurs réformes de programmes dans l'enseignement secondaire et que, d'autre part, les propositions des manuels et les pratiques enseignantes usuelles sont très en retrait par rapport à ces objectifs (quelques éléments sont joints en annexe). Si l'on essaie de dépasser les seuls arguments de contraintes institutionnelles (le temps, surtout), on peut faire l'hypothèse qu'il y a une difficulté intrinsèque à réaliser ces objectifs en classe.

Le type de situations que nous analysons ici fonctionne depuis vingt ans dans les ateliers MATH en JEANS (Audin et Duchet, 1992) et sont étudiées d'un point de vue théorique depuis deux ans dans le groupe SIRC constitué de chercheurs de différents laboratoires et d'enseignants du secondaire.⁴

1. Hypothèses et questions de la recherche

En situation de recherche, le chercheur peut, et doit, pour faire évoluer sa question, choisir lui-même le cadre de résolution, modifier les règles ou en changer, s'autoriser à redéfinir les objets ou à modifier la question posée. Il peut momentanément s'attaquer à une autre question si cela lui semble nécessaire. C'est à ce type de pratique (praxis pour la résolution d'une question) que nous souhaitons confronter l'élève. Il nous semble que cette pratique non seulement n'est pas usuelle en classe, mais plutôt interdite à l'élève la plupart du temps. Pour cela, nous avons été tenté de donner pour titre à ce séminaire : *Situations de Recherche et apprentissage de la désobéissance*⁵.

³ Position étonnamment assez peu partagée.

⁴ Michel Bridenne, Denis Gardes (professeurs lycée à Dijon), Viviane Durand-Guerrier, Gilles Germain et Claude Tisseron (Université Claude Bernard, Lyon), Pierre Duchet (université Paris VI), Denise Grenier et Charles Payan (Université Joseph Fourier)

⁵ Dans des situations historiques critiques, on a vu que seul le refus d'obéissance pouvait permettre d'échapper à la barbarie. Plus près de nous, on interprète souvent les actes d'incivilité par le non respect des règles sociales et l'on

Aucune activité mathématique n'est possible sans expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, preuve. Même lorsqu'il s'agit de construire (en géométrie, par exemple) ou de calculer, il n'y a activité scientifique que si ces constructions ou ces calculs sont validés du point de vue scientifique. Or cette activité scientifique est pour nous constitutive de la construction des connaissances mathématiques.

Dans quelles mesures les organisations didactiques actuelles (programmes et manuels scolaires) et les propositions de la recherche en didactique existantes (problème ouvert, situation de débat scientifique, problème long) – sous-tendues par les théories didactiques – permettent-elles cette activité scientifique ? Notre étude de manuels nous amène à conclure que les situations didactiques classiques, quelles qu'elles soient, ne remplissent pas les conditions pour les apprentissages transversaux. En revanche, certaines propositions didactiques sont proches de nos « situations de recherche en classe⁶ » (SRC), mais n'en présentent pas toutes les caractéristiques (§3).

Se pose alors la question des *conditions pour faire fonctionner, dans les institutions didactiques, une activité mathématique de type « situation de recherche en classe*», susceptible de permettre l'apprentissage de ces savoirs transversaux. Nous étudierons si les modèles *de situation adidactique, contrat et milieu* sont pertinents ou non pour décrire ce type de situation.

Cette recherche est en cours, nous ne proposons ici que des réponses partielles à ces questions.

2. Un modèle SRC

Nous allons donner ici quelques critères spécifiques du modèle SRC, que nous illustrerons sur un exemple, avant de préciser un peu plus le modèle : connaissances et apprentissages en jeu, milieu nécessaire pour une telle situation, positions des acteurs (élève et enseignant). Nous situerons brièvement la SRC par rapport à quelques dispositifs issus de travaux didactiques tels le « problème ouvert » (Arsac et al., 1988), le « problème long » étudié par D. Gardes dans sa thèse (en cours), et la « situation de débat scientifique » (Legrand, 1993).

2.1. Critères de caractérisation d'une SRC

1. *Une SRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle.* Elle doit être proche de questions non résolues. Nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues – non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs – va être déterminante pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.

2. *La question initiale est facile d'accès :* la question est « facile » à comprendre. Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit « amener » l'élève à l'intérieur des mathématiques.

oublie que ces actes sont aussi rendu possibles par le manque de courage qui serait nécessaire pour ne pas se plier aux lois du clan, de la bande, ...

⁶ le terme « classe » désigne en fait tout groupe d'élève partageant à un moment donné la même activité.

3. *Des stratégies initiales* existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques. De préférence, les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.

4. *Plusieurs stratégies d'avancée* dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques.

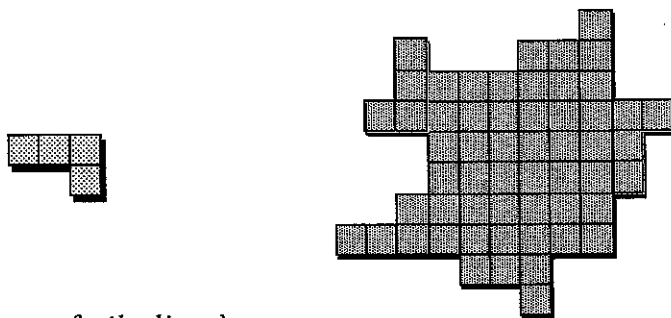
5. *Une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question.* La situation n'a pas de « fin ». Il n'y a que des critères de fin locaux.

2.2. Illustration de ce modèle sur une situation particulière

Cette situation, décrite brièvement dans Grenier & Payan (1998) a été expérimentée depuis plusieurs années, du CM1 à l'Université (DEA). Elle est maintenant intégrée comme situation classique dans un module optionnel de DEUG 1^{ère} année à l'université. Nous la reprenons ici pour l'analyser du point de vue du processus de recherche qu'elle induit de manière fiable. D'autres situations sont décrites, en particulier sous le point de vue des savoirs en jeu, dans Grenier (1995) et Grenier & Payan (1998).

1. *Inscription dans une problématique de recherche professionnelle.*

Le pavage (recouvrement sans « chevauchement » ni « débordement », d'un certain ensemble de cases) représente une classe très vaste de problèmes. Le problème de savoir si un polymino donné est pavable par des copies d'un même polymino plus petit est une question ouverte⁷ qui, posée de manière aussi générale, n'a aucune chance de pouvoir être résolue. On doit donc se restreindre par exemple à des « pavés » de petite taille ou de forme très particulière comme des rectangles ou même simplement des barres $1 \times n$. Par exemple, la caractérisation⁸ des polyminos pavables par des dominos reste un problème non résolu. Les chercheurs s'intéressent à des questions particulières, comme le pavage de structures très régulières telles que les grilles planes ou les morceaux de grilles, à maille carrée, triangulaire ou hexagonale. On cherche par exemple à paver des sous-ensembles de la grille carrée par des polyminos plus petits.



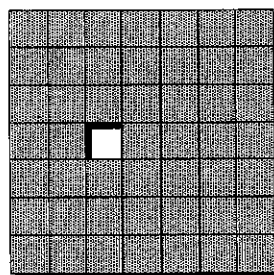
2. *La question est facile d'accès.*

Elle n'est pas a priori - pour l'élève et souvent pour l'enseignant - un problème mathématique (il n'y a pas de nombres, pas de calcul, pas de géométrie familière). On se met alors d'accord sur un point de départ de la recherche : *quels sont les pavés les plus « simples » ?* — le carré formé d'une seule case, mais alors le problème devient évident, puis ensuite, les dominos. On doit

⁷ au sens du problème ouvert pour le chercheur : c'est-à-dire non résolu.

⁸ il conviendrait bien sûr de préciser ce que l'on entend par caractérisation.

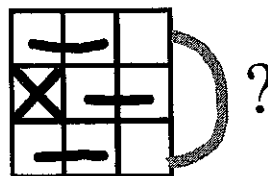
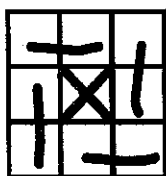
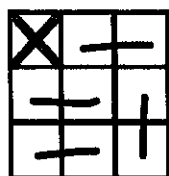
encore, au moins pour commencer, simplifier le domaine à paver : carré, rectangle ; le problème est alors assez rapidement résolu. Pour complexifier un peu, on peut enlever une case au carré. On peut démarrer ainsi la recherche par la question : peut-on paver, à l'aide de dominos, un carré privé d'une case (la case pouvant être choisie n'importe où) ? Le problème est présenté sur un exemple.



3. Des stratégies initiales existent.

Il suffit d'avoir une perception de l'espace qui permette d'identifier un ensemble de cases et de comprendre ce qu'est un pavage, compétences développées à la maternelle. Les notions d'aire et de parité, en tant qu'invariants, interviennent fortement, mais elles ne sont pas des pré-requis indispensables, la situation est aussi un moyen de les faire émerger ou de les approfondir.

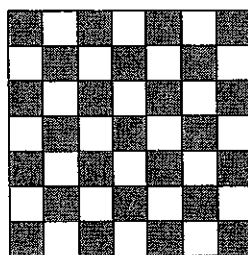
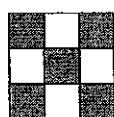
La dévolution du problème est immédiate : des essais de pavage sur l'exemple de départ (ici le carré 7x7). Suivant la stratégie adoptée et la case enlevée, on arrive ou non à paver. Ensuite si l'on veut avancer dans le problème, il est nécessaire de changer la consigne : on va travailler sur d'autres carrés plus petits (carrés 3x3 ou 5x5). Lorsqu'on ne parvient pas à paver, on peut remarquer que pour recouvrir certaines cases on n'a pas le choix ; on obtient ainsi des preuves d'impossibilité, par « forçage ».



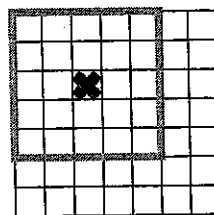
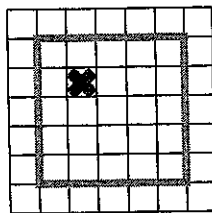
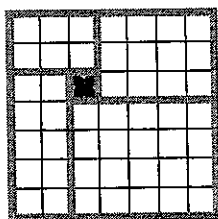
On a constaté que pour représenter de manière simple un domino sur le carré, les élèves vont créer leurs propres ostensifs. Les modes de représentation choisis permettent de visualiser la relation d'adjacence entre cases, qui va jouer un rôle important dans la situation.

4. Il existe diverses stratégies d'avancée dans la recherche.

Le repérage, sur le carré 3x3 et éventuellement 5x5, des cases dont la suppression de l'une quelconque d'entre elles permet de paver (représentées en gris sur la figure), induit une conjecture plus générale.



Des preuves sur la possibilité de paver sont données par divers découpages, dont des découpages inductifs. Par exemple :

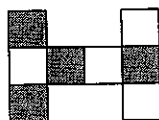


La généralisation aux rectangles est induite dans le cas de la stratégie S1 ci-dessus (on change à nouveau la règle). Les preuves deviennent plus simples dans les cas ci-dessus. D'autres types de preuves sont quelquefois envisagées (preuves par cheminement liées au jeu de Taquin).

Les **preuves d'impossibilité** sont obtenues par structuration de l'objet, en jouant sur la forme colorée par les «bonnes» cases : puisqu'un domino couvre une case «noire» et une case «blanche», un polymino pavable est nécessairement «équilibré» (il contient autant de cases noires que de cases blanches dans une bi-coloration «en damier»).

5. La situation n'est pas «finie».

Ainsi, la phase de résolution du problème de départ (pavage de carrés privés d'une case) a soulevé «naturellement» d'autres questions. Par exemple, on a établi au passage qu'un polymino pavable par des dominos est nécessairement équilibré, et que cette condition est suffisante dans le cas de pavage de carrés avec ou sans «trou». L'est-elle toujours ? Sinon, dans quels cas ? On peut ainsi repartir à la recherche de preuves ou de contre-exemples. Par exemple, ce contre-exemple apparaît très souvent.

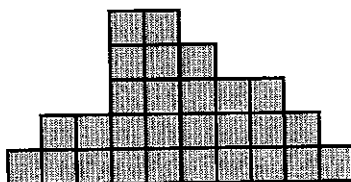


et induit une question qui passionne facilement : est-ce le plus petit contre-exemple ? En voici un peu plus petit ; mais peut-on prouver que c'est le plus petit ?



Dans ces contre-exemples, l'impossibilité de paver est due à des *contraintes locales*. Existe-t-il des contre-exemples sans de telles contraintes ?

A partir de cette question, d'autres formes à paver peuvent être envisagées, par exemple, les polyminos «en trapèze».



Notons, que ce problème qui a aussi été proposé par des étudiants de DEUG a fait l'objet d'un article de recherche (L. Bougé, M. Cosnard, 1992)⁹. D'autres problèmes de pavage, par d'autres pavés de base (deux cases en papillon, triminos longs, triminos en L...etc) surgissent comme prolongements de cette situation.

2.3. Les connaissances en jeu et le milieu pour une SRC

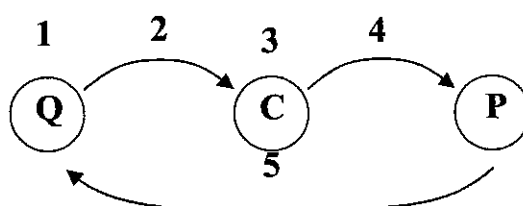
Reprenons l'étude du modèle SRC, en particulier sous les points de vue des connaissances en jeu et de la position des acteurs.

L'objectif premier d'une SRC est de produire des réponses à des questions. Les concepts mathématiques qui sont en jeu pour résoudre la question ne sont pas désignés à l'avance et ne sont pas restreints a priori, ils sont au service du problème et de sa résolution

De fait, notre recherche expérimentale le confirme, il y a des apprentissages en jeu, et ce sont ceux qui sont constitutifs de toute activité de recherche mathématique : l'argumentation, l'activité de conjecturer, celle de structurer (un objet), la preuve, la modélisation, tous plus ou moins présents selon le type de SRC choisi. C'est ce qui donne une légitimité institutionnelle à ces situations : il y a bien des apprentissages et ils font partie de ceux prévus par les programmes. Il y a aussi des savoirs notionnels qui sont en jeu : nos analyses didactiques (analyses a priori de SRC que nous pratiquons depuis plusieurs années) montrent qu'on peut rattacher chacune d'elles à un ensemble de notions mathématiques. Elles vont constituer des « points d'ancrage notionnels » pour l'enseignant.

Cependant, le modèle adidactique semble difficile d'utilisation relativement à ces concepts ou notions mathématiques, car ceux-ci sont issus de la progression dans la résolution du problème. En effet, pour que la situation soit une situation de recherche, aucune stratégie, aucune connaissance ne doit être a priori exclue.

En revanche, si l'on considère, par exemple, comme un savoir, le triplet (*question, conjecture, preuve*), on peut se poser la question de l'existence d'une situation fondamentale (Brousseau, TSD, p. 59) pour ce savoir et donc, l'existence de situations adidactiques associées¹⁰. Les éléments du triplet (Question, Conjecture, Preuve) sont les *invariants* de la SRC.



Invariants et caractéristiques (de 1 à 5 : § 2.1) d'une SRC

Les *variables didactiques* associées sont des **variables « de recherche »**, au sens où elles déterminent la compréhension et l'intérêt de la question, son ouverture à de nouvelles questions, l'élargissement des stratégies de recherche, les possibilités de transformation du problème (modélisation). On ne va pas jouer sur des valeurs de variables didactiques pour bloquer ou

⁹ une généralisation en dimension quelconque est actuellement l'objet d'un article soumis à publication.

¹⁰ La recherche de situations adidactiques pour les apprentissages transversaux est en cours, en relation avec notre travail sur les SRC.

induire une stratégie particulière ou (dé)favoriser l'utilisation d'une connaissance donnée. Par ailleurs, « l'ouverture » n'est pas une qualité en soi, elle doit être contrôlée par rapport à la dévolution et à la progression de la recherche.

Le critère de réussite pour l'élève n'est pas, comme dans les exercices usuels, la résolution de la question (que la solution soit juste ou fausse). Dans les SRC, la résolution du problème est souvent partielle (résolution de cas particuliers, conjectures, preuves partielles), et la question résolue renvoie (éventuellement) à une autre question de recherche. Il peut y avoir alors élaboration d'une nouvelle stratégie si celle adoptée dans le cas particulier n'est pas généralisable (voir l'exemple du pavage de polymino traité ici). Le problème n'est pas « fini » et on peut le prolonger de façon naturelle, il reste des conjectures à faire ou d'autres cas à étudier et de nouvelles questions. Un critère de réussite « provisoire » peut être que l'on a émis une conjecture forte, ou qu'on a simplement résolu un cas particulier.

Le critère de réussite pour l'enseignant est la reconnaissance d'apprentissages liés au savoir (question, conjecture, preuve).

2.4. Position des acteurs dans la situation didactique comportant une SRC

Dans une SRC, les acteurs (élèves et enseignants) sont dans des positions différentes de celles qu'ils ont l'habitude d'occuper dans une situation didactique classique.

•• *L'élève est en position de chercheur* car il est dans une tâche de production de quelque chose de « nouveau » qui n'est pas seulement nouveau pour lui. Les résultats de son activité de recherche sont des conjectures, résolution de cas particuliers, des contre-exemples, des questions nouvelles, etc... Nos données expérimentales montrent que, pour l'élève, le fait de savoir qu'il cherche à résoudre un problème non résolu ou partiellement résolu, modifie le rapport qu'il a avec son activité. Elles montrent aussi qu'on peut obtenir des productions presque publiables. On a déjà cité l'exemple du pavage de pyramides avec des dominos, issu du problème de pavage décrit ci-dessus, et pour lequel des étudiants de DEUG ont trouvé une solution « constructive » originale. On peut encore citer l'exemple d'une solution, construite tout au long de l'année 2001 par des élèves du CLEPT¹¹, au problème de caractérisation des rectangles pleins et rectangles avec un trou pavables par des triminos en L. Signalons que le problème général (caractériser les polyminos qui sont pavables avec des triminos) est un problème « ouvert » de la recherche.

•• *L'enseignant est en double position de chercheur et de gestionnaire de la situation.*

Pour le pôle recherche, sa position est plus proche de celle de l'élève que dans une situation classique, car il n'est pas nécessairement détenteur des solutions du problème. *Mais il est (censé être) détenteur des savoirs transversaux* et avoir des critères d'évaluation sur leur validité. C'est une position qui se révèle difficile, parce qu'il n'est pas d'usage pour un enseignant d'avoir une activité de recherche.

Dans la gestion des SRC, le contrôle par l'enseignant de l'activité de l'élève se fait d'abord en fonction de l'avancée dans la résolution du problème et aussi par rapport *aux objectifs d'apprentissage, les savoirs transversaux*. Les notions mathématiques susceptibles d'apparaître comme des outils de résolution peuvent être fournies par l'enseignant.

¹¹ Collège Elitaire Pour Tous de Grenoble, destiné à des élèves qui ont quitté le système scolaire.

Le « jeu d'obligations » entre l'élève et l'enseignant porte bien sur ces savoirs transversaux. Les règles de base associées sont celles habituelles du débat scientifique (Legrand, 1993) : une affirmation doit être argumentée, un contre-exemple est suffisant pour annuler une conjecture, des exemples ne suffisent pas à prouver, etc... Des règles moins « classiques » sont aussi en jeu, telles que celle-ci « Si une conjecture s'avère fausse, peut-on la modifier pour en faire une autre conjecture ? ». Ces *règles et propriétés du débat scientifique* forment des connaissances de base pour l'activité mathématique et des éléments de rétroaction. Elles sont constitutives d'un milieu pour une situation SRC.

Nous ne développerons pas ici la nécessité d'une organisation didactique adéquate autour des SRC, comprenant, en plus des éléments ci-dessus, des dispositifs de travail précis pour l'élève (travail individuel et de groupe, rapport de recherche à la fin de la séance ou quand une question est considérée comme résolue par le groupe d'élèves) et un dispositif d'institutionnalisation.

2.5. Les problèmes classiques ne sont pas des SRC

Alors que les programmes les évoquent clairement, trois aspects fondamentaux des SRC sont absents dans les manuels et les pratiques de classe.¹²

- *L'« enjeu de vérité »*. En classe, ce qui est à prouver est la plupart du temps annoncé comme vrai (« démontrer que »), il n'y a plus d'enjeu de vérité, sauf si l'énoncé a un caractère très paradoxal (ce qui est très rare !) . Lorsque la question de la vérité d'une affirmation est posée, cette vérité n'est un enjeu que pour l'élève (le professeur sait), ce qui enlève une part d'intérêt à la découverte. L'enjeu est alors pour lui d'apprendre, non de produire une connaissance.

- *L'aspect « social » de l'activité*. Dans une SRC, il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique, même s'il est local (groupe + professeur + chercheur). Ceci est absent dans une situation didactique usuelle : seul l'élève est en situation de recherche, ce n'est pas l'ensemble du groupe qui ne sait pas et, du coup, le seul intérêt pour lui est de montrer qu'il est « capable » de retrouver la solution

- *L'aspect « recherche »*. Dans les manuels et les pratiques enseignantes, il est explicitement déclaré que, pour résoudre un problème et aussi pour prouver, « on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée ». Cette consigne, qui induit une épistémologie particulière – contestable – de la preuve, est contradictoire avec l'activité du chercheur et avec la démarche scientifique : le chercheur utilise des résultats locaux (trouvés en cours de la recherche) ou même des propriétés encore à l'état de conjectures (qui devront être prouvées ou infirmées ensuite), parce qu'elles permettent d'avancer.

2.6. Choix d'une SRC et savoirs du curriculum

La question ici est celle de l'adéquation des SRC avec les savoirs scolaires : lors du choix d'une SRC pour une classe, dans quelle mesure les notions au programme sont-elles un critère ?

- Une première réponse possible (extrême) est la suivante : les SRC proposées dans une classe donnée ne sont pas choisies en relation avec le programme et les connaissances de ce niveau, les seuls apprentissages visés explicitement sont les savoirs transversaux. La dévolution est assurée par la question : l'énoncé est compréhensible, on peut avancer dans le problème avec les connaissances des niveaux précédents (concepts au sens strict, ou proto-mathématiques ou transversaux). Ceci impose la négociation d'un contrat très particulier : aucune connaissance

¹² voir en annexe quelques éléments sur la place des savoirs transversaux dans des programmes et dans des manuels.

n'est a priori interdite, ni obligatoire ; une stratégie qui s'avère être une impasse doit être gérée sans autorité précoce.

- Une deuxième réponse possible est de choisir la SRC en relation avec les savoirs du curriculum. Elle donne du sens à ces savoirs et permet d'en construire les bases. On est plus proche alors du « problème long » (D. Gardes, thèse en cours), qui expérimente depuis quelques années une situation de longue durée en classe de terminale scientifique).

- Une troisième réponse possible est de considérer les savoirs du curriculum comme outils de résolution de la SRC, mais la question qui se pose alors est celle du maintien du caractère « recherche » d'une telle situation : ce choix va à l'encontre de notre définition d'une SRC.

3. Les SRC et les autres modèles didactiques

3.1. Le « problème ouvert »

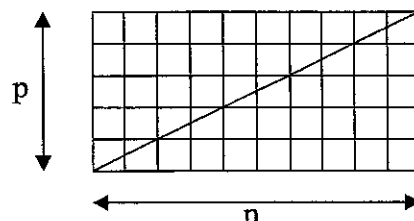
G. Arsac (RDM 9.3), à propos de la démonstration et des phénomènes de validation, fait une remarque générale dans sa conclusion reprenant deux idées fondamentales de Lakatos (1976) : les preuves évoluent en fonction des réfutations qu'elles rencontrent et il y a un lien fondamental entre le remaniement des preuves et l'élaboration de concepts (« proof generated concept », traduit par « concept éprouvette »). C'est en accord avec cela qu'il définit le « problème ouvert » comme un problème qui possède les caractéristiques suivantes : l'énoncé est court ; l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que ») ; la solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours ; le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. L'objectif est que les élèves puissent facilement s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

G. Arsac distingue les problèmes ouverts des problèmes de découverte et des problèmes de modélisation, parce que, pour lui, qu'aucun de ces types de problèmes « ne permet véritablement aux élèves de mettre en route ce que nous appelons une démarche scientifique, c'est-à-dire : faire des essais, conjecturer, tester, prouver ». Déjà, en 1988, comme le signale l'auteur, le problème ouvert s'inscrivait parfaitement dans les programmes scolaires, en particulier de la classe de seconde. Pendant la phase de recherche du problème ouvert, l'enseignant doit « aller au rebours de son comportement habituel et aussi de ce qu'attendent les élèves ». Arsac reconnaît comme difficiles les tâches de gestion telles que : ne pas fermer le problème, maintenir l'activité de recherche, valoriser les tâtonnements et les résultats partiels et enfin, ne pas faire preuve d'autorité pour valider ou invalider un résultat.

Nous reprenons à notre compte toutes ces hypothèses et ces objectifs comme des éléments de la SRC. Cependant, il nous semble que certains critères – fondamentaux pour les SRC – ne sont vérifiés par le « problème ouvert ». Pour préciser, étudions rapidement les six premiers exemples de problèmes ouverts donnés dans Arsac et al. (1988).¹³

¹³ Ces six problèmes occupent dans l'ouvrage une place particulière que nous interprétons comme significative de leur exemplarité.

1. Toto part de A, prend de l'eau et va en B. Peux-tu lui tracer le chemin le plus court ?
2. Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que $1 = 1/a + 1/b$?
Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a , b et c tels que $1 = 1/a + 1/b + 1/c$?
Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a , b , c et d tels que $1 = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d$? Continue.
3. Etudier la chaîne : $n \rightarrow n/2$ si n est pair,
 $3n+1$ si n est impair n entier naturel
4. Comment tracer la droite passant par A et par l'intersection de d et d' ?
Malheureusement, le point d'intersection de ces deux droites se situe à l'extérieur de la feuille.
5. Peux-tu déterminer en fonction de n et p , le nombre de carrés que traverse la diagonale ? Combien de carrés traversés pour $n = 78$ et $p = 75$?



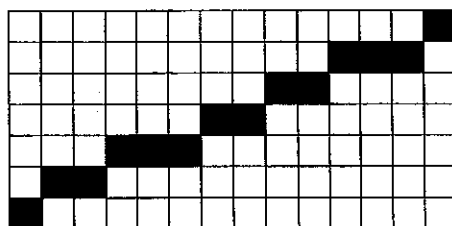
6. Etant donnés trois nombres positifs est-il toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres ? Si ce n'est pas toujours possible, quelle(s) condition(s) doivent vérifier ces nombres pour que ce soit possible ?

Reprenons nos critères de caractérisation de la SRC (§2). Les problèmes 1 et 6 sont les seuls qui contiennent une question explicite (de type oui - non). Tous ces problèmes sauf le problème 3 sont résolus pour la recherche mathématique, certains depuis longtemps, ils ont une solution bien identifiée et les notions en jeu pour les résoudre (sauf le problème 5) sont des savoirs institutionnellement installés.

Dans le problème 1, si l'on remplace Toto par « un oiseau », la situation, placée dans l'espace, est plus ouverte.

Dans le problème 5, les concepts en jeu ne sont pas désignés de manière immédiate pour un enseignant de mathématique (et c'est justement ce problème dont une analyse expérimentale est développée par les auteurs). Ce problème nous semble en effet remplir certaines conditions pour la mise en place d'une activité de recherche. En effet, si le problème est résolu, il peut cependant être plongé dans une problématique de recherche située dans un autre cadre, par exemple sous l'énoncé suivant :

« On s'intéresse aux petits carrés qui sont traversés par une droite : cela peut être une définition possible pour une droite discrète, mais il peut y en avoir d'autres : quand est-ce qu'on dira qu'un ensemble de petits carrés est une droite ? ».



Le nombre de carrés traversés peut « mesurer » l'épaisseur de la droite qu'ils forment. La question des variations de l'épaisseur des droites selon leur inclinaison semble plus motivante que celle de « trouver un nombre ». Elle peut induire la question du calcul du nombre de carrés traversés ou aboutir à la conjecture que l'épaisseur varie peu relativement aux inclinaisons.

Signalons que cette question n'est pas résolue pour le cercle.¹⁴

Revenons sur le problème 3 : Etudier la chaîne :
$$n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad n \text{ entier naturel}$$

Les suites obtenues dépendent des valeurs initiales choisies. La conjecture intéressante est que « quel que soit la valeur initiale, la chaîne se termine par 1 ». C'est un problème de la recherche actuelle (c'est en fait la « conjecture de Collatz »), qui se situe clairement en mathématique, avec des stratégies expérimentales accessibles et pouvant faire « deviner » cette conjecture. Cependant, les sous-problèmes sont forcément très mathématiques (étudier les contre-exemples minimaux, ...) et il y a très peu de résultats intermédiaires. Enfin, il n'y a pas de « fin », mais l'activité ne renvoie pas à de nouvelles questions sans outils puissants pour continuer.

3.2. La « situation de débat scientifique »

Elle consiste à instaurer dans un cours (magistral) une pratique de débat scientifique, c'est-à-dire à « faire en sorte que pour l'étudiant, les savoirs fondamentaux soient d'abord problématisés avant d'être énoncés par le professeur » (Legrand, 1993). Les apprentissages transversaux sont nécessairement concernés, puisqu'ils fondent la situation : ce que nous retrouvons dans la SRC. Cependant, la situation de débat scientifique et la SRC n'ont pas tout à fait les mêmes objectifs et correspondent à des organisations didactiques différentes. En effet, le fonctionnement de la situation de débat scientifique est plus de l'ordre du didactique : il s'agit d'un débat en groupes et le professeur est « dans » la situation (ce qui n'exclut pas des phases adidactiques). Par exemple, dans l'activité « Circuit », l'objet principal du débat est de constater les désaccords, puis de se mettre d'accord sur des axiomes, un des objectifs étant de questionner le Vrai et le Faux et de montrer que tout Vrai est relatif (à une communauté).

La SRC est construite pour être adidactique et peut être proposée à un seul élève (même si ce n'est pas le plus approprié) ; elle a pour objectif premier de répondre à une question mathématique plus ou moins « ouverte » ; en revanche, le débat scientifique est nécessaire dans l'organisation didactique autour de la SRC.

3.3. Le « problème long »

Le travail sur le « problème long » qui s'effectue depuis plusieurs années à Lyon est la suite du « problème ouvert ». D. Gardes étudie la possibilité de faire vivre une situation sur un très grand nombre de séances dans une classe de terminale S. Contrairement aux SRC, le problème long est soumis à une contrainte institutionnelle forte : travailler, tout au long des séances, sur les notions au programme dans cette classe. Les notions mathématiques sont donc désignées à l'avance ainsi que leur progression et, plus encore, elles doivent être au centre de la construction des sous-problèmes qui constituent le « problème long ».

¹⁴ De situations concernant la définition d'objets géométriques discrets (ceux construits par des pixels sur des écrans) est en cours d'étude dans le cadre de la thèse de Cécile Ouvrier-Buffet, sous notre direction, laboratoire Leibniz.

Ces trois exemples (non exhaustifs) montrent les analogies et différences entre la situation SRC et des dispositifs étudiés depuis de nombreuses années en didactique. Ils montrent aussi que l'apprentissage des savoirs que nous avons appelés « transversaux » est une préoccupation constante dans notre communauté.

Conclusions et questions

Notre recherche nous amène aux constats suivants.

- Les SRC modifient le rapport des élèves et des étudiants à l'activité mathématique et à la démarche scientifique ; elles sont sources d'apprentissages repérables concernant les savoirs transversaux. Nous analysons actuellement plus finement ces apprentissages.
- Les SRC nécessitent que la personne qui gère la situation ait une pratique de recherche et qu'elle soit formée à la gestion de ce type de situation. Il serait souhaitable qu'un dispositif permettant cette formation existe pour les enseignants.¹⁵

Une difficulté méthodologique que nous avons rencontrée est la suivante : les savoirs transversaux ont leurs fondements en dehors de l'institution scolaire (ils ne sont pas enseignés à l'école), comment étudier de plus près leur « vie » en classe ; d'autre part, une approche anthropologique des SRC est difficile, parce qu'elle devrait se fonder sur une analyse de pratiques dans des institutions auxquelles nous n'avons pas accès.

D'autres questions se posent dans le cadre de cette recherche. Par exemple, est-il possible de construire une situation sur le modèle adidactique pour le triplet (question, conjecture, preuve) ? Il nous semble que la question de la rétroaction et de la validation dans une « situation adidactique pour la preuve » n'est pas réglée : comment un élève qui produit un discours qui pour lui est une preuve (mais n'en n'est pas une), peut-il avoir un retour de la situation sur sa production ? Les nombreux travaux en didactique sur la preuve ne répondent pas, nous semble-t-il, à cette question.

Références

Arsac G., Germain G., Mante M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*. Ed. IREM de Lyon.

Arsac G. (1990) Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9/3 pp.247-280, ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

Audin P., Duchet P. (1992) La recherche à l'école : Math.en.Jeans, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. n°121, pp. 107-131, Grenoble 1.

Bougé L., Cosnard M. (1992) Recouvrement d'une pièce trapézoïdale par des dominos, *note au C.R.A.S.* Paris, t. 315, Série I, p. 221-226.

¹⁵ Nous avons nous-même commencé ce type de formation à l'occasion de stages de formation continue du rectorat de Grenoble.

Grenier D., Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18.2, pp. 59 -100, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Grenier D. (1995). Savoirs en jeu dans des problèmes de combinatoire in *Différents types de savoirs et leur articulation.*, pp.235-251, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Lakatos I. (1976). *Preuves et réfutations*. Paris : Hermann Ed., 1985.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères IREM n°10*, pp.123-159. Topics editions

Annexe. Les savoirs « transversaux » dans des programmes et des manuels.

Il est clair, depuis longtemps dans les programmes, que l'argumentation, l'activité de conjectures, la preuve, la modélisation sont des objectifs d'apprentissage essentiels. Nous avons décrits le statut et le rôle de la preuve et de la modélisation dans Grenier-Payan (1998). Nous donnons ici quelques éléments concernant plus spécifiquement l'activité de « recherche ».

• dans les commentaires des programmes de Seconde (BO n°20 de mai 90), §5 formation scientifique

« Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : *formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples*, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique. »

• dans le programme 2000 pour le même niveau

Les activités de calcul, de géométrie, les problèmes sur les fonctions sont TOUS présentés comme étant des « occasions » pour raisonner, argumenter, prouver ; de plus, le développement de l'argumentation fait partie des « exigences » de ce programme.

Si on interprète cela à la lettre, les titres de chapitres des manuels ne devraient être seulement des notions de géométrie ou d'algèbre, mais des thèmes comme argumentation, conjecture et preuve - la géométrie, le calcul et l'algèbre étant des occasions pour cela.

• On retrouve ces mêmes objectifs dans les programmes de 1^e ES enseignement obligatoire

Dans les généralités sur la formation scientifique en 1^{ère} et en terminale S

« Le noyau central du schéma résume, en quatre composantes essentielles, la spécificité de toute pratique mathématique : observation, abstraction, expérimentation, démonstration. Ces quatre composantes entretiennent entre elles des rapports dialectiques, l'une appelant l'autre ou s'appuyant sur elle, au gré du travail mathématique réalisé. »

et dans les manuels ? Dans notre article (Grenier, Payan, 1998) nous concluons ainsi sur une analyse de manuels du secondaire des années 90 (du collège et lycée). La preuve semble vivre essentiellement dans le domaine de la géométrie et sous deux formes, le raisonnement déductif simple (à un petit nombre de pas), basé sur l'utilisation des propriétés ou théorèmes du cours et la rédaction de démonstration, où l'attention est portée sur le langage et la syntaxe plus que sur la logique et la sémantique. Il s'agit pour l'élève d'apprendre à passer d'hypothèses qui sont données et reconnues comme vraies à une conclusion qui est donnée, ou donnée à voir comme évidente. Il semble que la place de l'argumentation et de la preuve est aussi inexistante dans les manuels de lycée. Il n'y a pas de place officielle pour l'enjeu de vérité, ni pour les conjectures (*il est explicitement dit que l'on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée*).

D'autre part, alors que les programmes mentionnent son importance, l'activité de modélisation est relativement absente des manuels et, dans les pratiques, les seules modélisations abordées peuvent être caractérisées ainsi : à une situation donnée correspond en général un modèle unique, désigné. La situation est vue comme un exercice d'application, le but est de faire fonctionner correctement le modèle auquel elle est associée. Le plus souvent d'ailleurs, on se place d'emblée dans le modèle, ou alors le problème a été « habillé » sous forme de situation concrète.

De plus, l'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux, traite de connaissances et de savoirs mathématiques qui sont clos dans les institutions savantes et pour l'enseignant lui-même (il faut attendre le DEA). Le découpage de l'activité se fait selon les notions mathématiques au sens strict (les titres des chapitres des manuels et programmes parlent d'eux-mêmes).