Introduire les élèves à une théorie : La médiation du logiciel Cabri

M.Alessandra Mariotti
Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Introduction

L'étude dont j'aimerais parler s'inscrit dans un plan de recherche expérimentale qu'on appelle d'habitude "Recherche Innovation". Il s'agit d'un type de recherche très commun en Italie caractérisée par la présence d'un groupe de travail continu qui comprend des enseignants de l'école et des chercheurs en didactique des mathématiques. La collaboration est étroite et continue ; chaque projet a une longue durée et a pour objectif à la fois de réaliser des innovations dans la pratique de classe et de tirer des résultats sur le plan de la recherche.
Selon les mots de Bartolini Bussi, nous avons développé un projet du type "research for innovation", « in which action in the classroom is both a means and a result of the evolution of research analysis » (Bartolini Bussi, 1996 p.1).
L'expérimentation a concerné des classes des deux premières années de l'école secondaire supérieure (Lycée Scientifique, Lycée Classique et Institut Professionnel). Toutes les activités proposées s'inscrivent dans les activités scolaires normales. Le projet, qui était conçu pour durer deux ans, est encore en cours, bien que les objectifs de recherche aient évolué, ~~suivant~~ en fonction des nouvelles questions émergeantes.
En particulier, la construction du cadre théorique a été en transformation continue et l'expérimentation dans les classes a été reconstruite elle-même en permanence.

Les éléments clé du cadre de référence

Le projet élaboré avait pour objectif d'affronter le problème éducatif crucial : initier les étudiants à l'idée de démonstration et a introduit deux innovations fondamentales dans la pratique scolaire: le contexte d'un environnement logiciel (Cabri-géomètre) et la culture de la "Discussion Mathématique" (Bartolini Bussi, 1991, 1998).
Ces innovations se réfèrent, en général, à une perspective vygotskienne et ont à la base les éléments fondamentaux suivants, qui constituent le coeur de notre cadre de référence théorique :
Les activités de classe sont organisées dans un Champ d'Expérience[1], centré sur l'utilisation des outils fournis par l'environnement logiciel Cabri.
L'évolution du Champ d'Expérience est réalisée dans les activités sociales de la classe, qui sont finalisées par la construction sociale de connaissances relatives au Savoir Mathématique.
La Discussion Mathématique est au cœur des activités de classe, dans lesquelles l'évolution des signifiés personnels des élèves vers le signifié mathématique, constitue l'objectif fondamental.

[1] La notion de Champ d'Expérience est utilisé selon la defintion suivante:
"The system of three evolutive components (external context; student internal context; teacher internal context), referred to a sector of human culture which the teacher and students can recognise and consider as unitary and homogeneous" (Boero et al. 1995)

La médiation sémiotique

L'hypothèse éducative sous-jacente est centrée sur l'idée que le savoir est ~~le~~ un produit culturel et que la construction des connaissances est un processus ~~au même temps~~ à la fois individuel et social.
À la base il y a le processus d'internalisation, tel qu'il est défini par Vygotskij comme la transformation d'un processus interpersonnel dans un processus intra- personnel: "... the internal reconstruction of an external operation ..." (Vygotskij, 1978).
Une approche historico-culturelle met en évidence le fait que les fonctions psychiques supérieures de l'être humain se développent dans l'histoire culturelle et sociale, et que ce processus s'accomplit par le moyen des formes "qui structurent et médiatisent nos rapports aux situations et aux savoir et ont ainsi une influence qui peut être considérable" (Rabardel, 1999, p. 204). Ce processus accompli par la médiation des outils et des signes est référé en général par Vygotskij comme le processus de **médiation sémiotique.**
"The internalization of cultural forms of behaviour involves **the reconstruction of psychological activity** on the basis of **signs operations**". (Vygotskij, 1978)
En particulier, Vygotskij décrit le lien entre outils et signes, pas seulement en termes d'analogie de fonctionnement, mais aussi par rapport aux activité intellectuelles et d'une manière générale à l'évolution des fonctions supérieures de la pensée.
Les outils ou les systèmes des signes ont en commun des caractéristiques fondamentales
Ils sont le produit raffiné d'une activité humaine
Ils incorporent des éléments importants du savoir
Ils n'agissent pas seulement à l'extérieur, mais ils ont des effets sur les moyens de penser.
Mais on peut observer également un lien plus étroit qui dérive du fait que certains signes ont leur origine dans des outils et dans leur usage. L'exemple discuté par Vygotskij concerne le cas historique du boulier et l'écriture positionnelle des nombres, mais, dans une certaine mesure, il peut être généralisé. Souvent, on peut reconnaître dans l'évolution du savoir mathématique un processus dialectique entre pratique et théorie, dans laquelle les artefacts[2] jouent en rôle clef. L'exemple de la Géométrie est, peut être, le plus connu (Bartolini Bussi & Mariotti, 1999).
Dans ce passage (de l'outil aux signes qui en dérivent) des aspects de l'outil sont maintenus mais, en même temps, les signes acquièrent l'autonomie nécessaire pour être utilisés dans des activités différentes de celles où se trouve leur origine. En bref, ils peuvent devenir de véritables "moyens de penser" et contribuer à la construction de signifiés relatifs au savoir mathématique (Bartolini Bussi et al. 1999).
La notion de médiation sémiotique, telle qu'elle est décrite par Vygotsky, semble fournir un moyen très convenable et très puissant pour interpréter le processus cognitif relatif au lien entre l'usage des outils et la construction de signifiés.

Le point de vue didactique
Depuis une vingtaine d'années, on a vu le développement des logiciels, de plus en plus complexes et élaborés~~,~~ dont la cible est l'enseignement des mathématiques. En particulier, on a construit des logiciels qui sont caractérisés
"...par l'imbrication forte dans leur constitution et fonctionnement des connaissances mathématiques. Ce sont des logiciels qui embarquent et gèrent des connaissances mathématiques ..." (Laborde, 1999, p. 236)

---

[2] Artefacts conceived to be used according to specific schemes in order to accomplish a specific work are usually referred to as technical artefact; they refer to a thoretical knowledge which assures the correct functioning of the artefact. Technology is the discipline concerning the productive relation between theory and practice.

La présence de ces outils nouveaux a soulevé un problème didactique important: comment les outils influencent le processus d'enseignement et d'apprentissage. Ce problème ne peut pas être limité au cas des nouvelle technologies ; il semble donc raisonnable de repenser dans une perspective plus générale le rôle des outils quelconques (Bartolini Bussi et al, 1999; Bartolini Bussi et al. (à paraître).
Les outils, en tant que tels, sont construits pour accomplir des tâches, mais ils peuvent aussi être conçus avec une intention didactique relative au lien entre l'outil et le savoir embarqué. Du point de vue didactique, quand on considère l'introduction d'un outil (quel qu'il soit) dans la pratique de la classe, le problème consiste à dépasser l 'usage de l'outil limité à accomplir une tâche, pour accéder au savoir (mathématique) auquel l'outil renvoie.
Le passage (rapport) des signifiés relatifs à la pratique aux signifiés relatifs aux mathématiques qui constituent l'objectif didactique n 'est pas simple ni garanti : comme il a été souvent souligné, les outils ne sont pas transparents et le savoir qu'ils évoquent n'est pas immédiatement accessible aux élèves.
Le problème alors devient un problème didactique qui peut être décrit de la manière suivante : comment articuler les deux aspects – pratique et didactique - de l'utilisation des outils? Comment **planifier** et **gérer** une activité avec des outils, qui soit efficace pour rendre accessible aux élèves le savoir évoqué par ces outils et leur usage ?
Une réponse se trouve dans une analyse précise du point de vue épistémologique, cognitif et didactique des pratiques culturelles et des interactions sociales produites ou productibles dans la classe et intégrées par l'usage des outils.
Certainement, une analyse épistémologique préalable de l'outil est nécessaire pour identifier les connaissances auxquelles cet outil renvoie. Cette analyse peut devenir de plus en plus raffinée et profonde, au fur et à mesure que les informations concernant l'usage effectif d'un certain outil deviennent disponibles par l'observation d'activités de classe.
En particulier, en suivant le travail de Rabardel (Rabardel,1995, 1999, p. 203) on peut développer une "approche instrumentale" et accomplir une analyse cognitive de l'utilisation de **l'artefact**, centrées sur les processus **d'instrumentalisation** et d'**instrumentation** prévues, en relation avec les situations problèmes qui peuvent être proposées aux élèves et leur solution. Cette analyse peut fournir une description, de plus en plus complexe et raffinée, des processus de genèses instrumentales, dans lesquelles les sujets élaborent leur "instruments". La distinction entre artefact et instrument est très efficace pour rendre compte de la pluralité des résultats possibles, comme Rabardel nous le dit :
"Les instruments issus des genèses instrumentales ne sont jamais les seuls qui auraient pu être développés par le sujet. " (Rabardel, 1999)
Ces deux types d'analyse (épistémologique et cognitive) ne sont pas indépendantes et l'une va diriger l'autre dans un processus dialectique qui détermine l'évolution d'un cadre générale de références entre un artefact, ses éléments constitutifs, et son usage d'une part et un système des connaissances d'autre part.
Bien que la discussion précédente soit centrée sur le sujet, on ne peut pas oublier la composante sociale et donc l'importance d'une analyse des interactions sociales, centrés sur l'utilisation d'un artefact particulier.
L'introduction de la dimension sociale ouvre à différentes questions, particulièrement importantes dans une perspective éducative.
Non seulement les genèses instrumentales doivent être considérées dans leur dimension soit privée soit sociale (ibd. p. 209), mais elles doivent aussi être considérées en rapport avec le savoir mathématique qui représente l'objectif d'enseignement. Comme nous l'avons déjà souligné, certains outils / artefact et en particulier des "logiciels didactiques" sont en rapport avec un savoir (mathématique, dans le cas que nous intéresse), on peut donc les considérer

comme se référant à ce savoir, et par ce fait on peut les considérés comme des signes potentiels, qui s'offrent aux enseignants pour accomplir leur objectifs éducatifs.
En conclusion, en prenant une perspective vigotskienne on peut avancer l'hypothèse didactique suivante : on peut penser les outils/artefacts comme des signes qui évoquent des signifiés, et comme tels ils peuvent devenir des "éléments de médiation sémiotique[3]": l'enseignant peut les utiliser dans les activités de classe avec le but d'introduire les élèves à des signifiés, consistants avec ses objectifs éducatifs.
Á travers l'action de l'enseignant, le savoir peut émerger et franchir l'opacité de la représentation donnée par l'artefact. En particulier, l'émergence arrive par un processus d'explicitation, qui passe par l'usage de signes dérivés de l'outil/artefact, signes comme les mots du langage naturel, les gestes ou des formes différentes de représentation[4]. C'est par l'usage de ces signes que le savoir peut être internalisé par l'élève.
Cette description très rapide donne, je l'espère, une idée générale du point de départ de notre projet, et met en évidence la complexité du processus de médiation sémiotique[5]. C'est pour cela que l'un des objectifs principaux de notre projet a été immédiatement de développer le cadre théorique, nécessaire pour décrire le processus de médiation sémiotique, tel que nous l'avons envisagé dans les activités scolaires. Dans ce qui suit, à partir du problème didactique abordé, je vais décrire des exemples pour clarifier le cadre théorique qui a été simultanément inspirateur et produit de l'expérimentation didactique.

Le projet

Le problème didactique: comment initier les étudiants à l'idée de Théorème

Lorsque les étudiants achèvent le collège et qu'ils passent au lycée, ils ont acquis un certain bagage de connaissances en géométrie. Ils connaissent les noms des figures géométriques principales et certaines propriétés qui les caractérisent. On a essayé de leur faire acquérir des connaissances géométriques de base au niveau des règles opératoires qu'ils ont découvertes, selon une approche "intuitive", comme résultats avec un degré élevé d'évidence et qui, une fois acquises, prennent un caractère de vérité absolue. On exige seulement que ces faits soient rappelés le cas échéant.
Les connaissances géométriques, en tant que faits intuitifs, ramènent à une idée très vague d'une justification possible et, de toute façon, cette idée reste liée à l'objectif de convaincre quelqu'un de leur évidence.
L'idée de la géométrie comme un système de relations entre propriétés géométriques des figures (c'est-à-dire une mise en place théorique de la géométrie selon une approche déductive se basant sur des axiomes et sur des théorèmes en dérivant) est donc assez éloignée.
Un problème didactique fondamental se présente au début du lycée:
comment traiter la relation délicate entre la base des connaissances géométriques intuitives des élèves et une nouvelle approche des connaissances selon une perspective théorique.
Lorsque l'on souhaite traiter un système déductif, il y a deux aspects liés entre eux: d'un côté, l'idée de **démonstration** et de l'autre, l'idée de **théorie** (en entendant par ce terme un caractère global ou local d'un système théorique quelconque). La démonstration prend du sens à partir de la théorie vice-versa. Donc une approche déductive présente deux types de

[3] Dans la littérature anglophone, on utilise le terme "tool of semiotic mediation" ; Ceci nous pose des problémes dans la traduction à cause de l'évidente ambiguïté du terme "tool" dans ce contexte.

[4] Dans la même perspective Radford, 2003.

[5] D'autre part la lecture même des ouvrages de Vygotskij n'est pas du tout facile et claire, bien que elle fournisse des suggestions très fascinantes.

problèmes de sens liés entre eux : le sens de la démonstration et le sens de la théorie (Mariotti et al.,1997, Mariotti, 2001).

Le Champ d'Expérience des constructions géométriques dans Cabri

Le Champ d'Expérience choisi est centré sur la problématique des constructions géométriques, en tant que dessins réalisés dans l'environnement Cabri-géomètre.
Le problème de la construction, tel qu'il est posé et résolu en environnement Cabri prend une signification nouvelle par rapport à ce qui apparaît spontanément (Mariotti, 1996, 1999). En particulier, l'idée de figure acceptable comme solution s'enrichit de la propriété d'invariabilité par déplacement (dragging) et est reliée au procédé qui la détermine; donc la solution doit être considérée comme correcte si la séquence des outils de Cabri décrit les relations géométriques qui lient les éléments de la figure.
En accord et en parallèle avec l'émergence de ce signifié de construction valide à l'intérieur de l'environnement Cabri on va construire la signification de Théorème de géométrie, valide dans l'environnement de la Géométrie.

Evolution du Champ d'Expérience.

Comme nous l'avons déjà souligné plusieurs fois (Mariotti et al, 1997 ; Mariotti, 2001a) il y a deux aspects cruciaux qui entrent en jeu pour comprendre ce que veut dire démontrer: la nécessité de fournir une preuve pour un certain énoncé et le fait que cette preuve doit être construite à l'intérieur d'un système théorique particulier. L'évolution doit donc partir d'une nécessité générale de donner une preuve, pour arriver à l'intention de donner une validation à l'intérieur d'un système théorique.
Les observations et l'analyse lors de notre expérimentation ont mis en évidence le développement de cette signification qui s'articule selon les phases suivantes:

a) Description de la solution

Dès le début, les élèves sont invités à verbaliser le raisonnement suivi pour donner la solution. Le premier objectif qui pousse les élèves dans ce sens est donc celui de communiquer à l'enseignant et aux camarades leur raisonnement et, conformément à cet objectif, les devoirs devront être compréhensibles.

b) Preuve comme Justification de la solution

Les solutions fournies dans les copies seront ensuite discutées d'une façon collective. Après les premières discussions, un nouvel objectif apparaît: celui de rendre acceptable sa propre construction. Cela signifie qu'il ne suffira plus de fournir une description compréhensible (claire, complète et précise) mais la solution donnée devra être soutenue lors de la discussion collective.
Au moment où les élèves acceptent le critère de validation par déplacement, ils acceptent aussi le fait qu'il faut donner une justification au procédé suivi.

c) Justification sur la base de règles établies

Le problème central dans la discussion collective devient celui de défendre sa propre construction, laquelle, pour être acceptée doit montrer qu'elle respecte les règles établies. Il est alors nécessaire d'établir les règles, en d'autres termes, on doit parvenir à un accord quant aux opérations acceptées par la classe entière. Cela constituera le point de référence pour évaluer la solution fournie par chaque élève .

La construction parallèle du Micromonde et de la Théorie

Il est facilement compréhensible que le fait d'établir les règles est aussi important que le fait de les suivre. Voyons comment on a procédé pour définir les règles de validation.

Il y a deux niveaux de difficulté à aborder, chacun desquels étant caractérisé par des problèmes différents mais étroitement liés. D'un côté, une nouvelle idée de la validation qui ne se base plus sur l'acceptation immédiate et intuitive d'un fait mais qui tient compte d'un système de règles, de l'autre le fait que ce système de règles doit être établi, accepté et partagé par la communauté de la classe.
L'idée générale a été d'utiliser différents éléments de l'environnement Cabri et d'introduire graduellement les étudiants à une géométrie déductive en construisant une correspondance entre la logique du logiciel et la théorie géométrique,
Cette correspondance est fondée génériquement sur le fait que le logiciel Cabri et son fonctionnement embarquent des connaissances géométriques; une analyse plus fine de cette correspondance montre la possibilité de relier chaque outil de Cabri à une propriété acceptable dans la théorie, mais aussi la possibilité de relier les outils de Cabri à l'idée même de Théorème d'une théorie.
À partir d'un menu vide on discute du choix des outils à introduire et des assertions spécifiques choisies comme faits de base dont on doit partir dans la théorie. Ça constitue la base de laquelle l'évolution parallèle des deux mondes va démarrer: d'une part le monde de Cabri, définit par les différents outils disponibles pour accomplir des constructions, de l'autre le monde de la géométrie, défini par les axiomes établis et dans lequel on peut démontrer des théorèmes . Au fur et à mesure que de nouvelles constructions ont été réalisées et acceptées en correspondance avec de nouveaux théorèmes démontrés, l'introduction des outils correspondants a été discutée et négociée avec les élèves . De cette façon, les élèves construisent un lien de signification entre les éléments de deux mondes, du fait que chaque outil de Cabri a sa référence dans la théorie et à l'inverse chaque élément de la théorie trouve son interprétation dans l'environnement Cabri. En particulier, le fonctionnement de l'outil déplacement trouve sa référence dans la dépendance logique entre propriétés d'une figure.
L'ordre avec lequel les éléments de la théorie sont introduits trouve un élément correspondant dans les transformations successives du menu qui acquière des primitives nouvelles avec une capacité de construction majeure qui corresponde à l'élargissement de la puissance de la théorie.
En conclusion, une relation sémiotique entre l'environnement Cabri et le système de la géométrie est construite, en se basant sur les aspects suivants:
- le parallélisme entre les éléments de la théorie (axiomes, théorèmes et définitions) et les outils de Cabri ("primitives" ou "macro");
- la relation entre la fonction d'entraînement et la validation théorique d'une construction.

Evolution de la signification de justification. Exemples.

L'analyse des copies des étudiants montre un processus d'évolution de la signification de "construction" et en parallèle l'évolution du signifié de "Théorème", en terme de démonstration et de théorie de référence. Les descriptions des procédés changent, la clarté à travers une maîtrise croissante des termes s'améliore et, dans le même temps, les argumentations se rapprochent de plus en plus du statut des théorèmes c'est-à-dire que les justifications fournies par les élèves . prennent la forme d'un énoncé et de démonstration relative. Une analyse attentive montre également que ce procédé est très lent et pénible .
Voici un exemple, portant sur un séquence de tâches. Cathy âgée de 15 ans appartient à une classe de première année d'école secondaire supérieure (Liceo Scientifico).

1° Tâche : construction de la bissectrice

La première tâche concerne la construction de la bissectrice d'un angle. À ce point on est au début de la théorie et on a seulement les trois axiomes correspondant aux trois critères de congruence des triangles. Cathy décrit deux tentatives de solutions possibles.

Pour ce que concerne la première tentative, la description de la construction n'est pas très assurée: Cathy se réfère à la construction de deux cercles, mais ne les caractérise pas, après elle écrit :

"(les deux cercles) se rencontrent en un point, leur point commun; à partir de ce point nous traçons la droite qui passe par le sommet et donc par α (elle a marqué l'angle avec α)."

La justification, qui suive, est plutôt une affirmation:

"Il est logique que, en conséquence de cette procédure, l'angle α soit divisé en deux parties égales".

Dans la deuxième tentative, Cathy montre *qu'elle reconnaît* la nécessité d'accomplir la construction à partir des outils disponibles et de justifier la validité de la procédure.

"On considère un angle (si deux segments sont donnés), en utilisant le transport d'angle je construis un angle β égal à α".

Le transport d'angle a été fait en construisant deux triangles égaux, ayant un côté en commun. Une fois obtenue cette figure, Cathy répète la démonstration qui prouve l'égalité des deux triangles construits. Cathy ne se rend pas compte que le processus suivi ne résout pas le problème posé, puisqu'elle a simplement doublé l'angle donné. Cependant, à ce point elle essaye de construire une démonstration, et le fait à partir de la figure construite. Voilà ce qu'elle écrit.

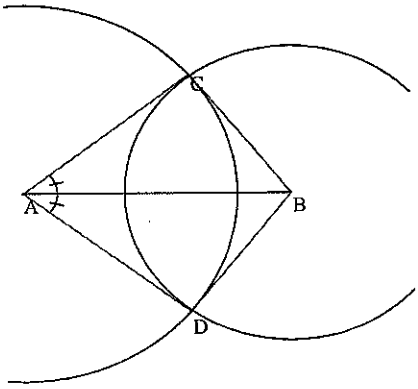

Figure 1 Le 2° dessin de Cathy

"Maintenant par le 3° critère de congruence entre triangles je peux prouver que le triangle ABC est égal au triangle ADB ... AB représente la BISSECTRICE puisqu'elle découpe un angle, que j'appelle γ en deux angles égaux ($\alpha = \beta$). "

2° tâche . Construction de la perpendiculaire

La production de l'élève montre meilleure précision par rapport au cas de la construction de la bissectrice, du point de vue tant de la description de la procédure que de sa justification.

A) P $\in$ r. La première tentative est faite 'à l'œil'.

"Je trace une droite par deux points (je sélectionne la commande de Cabri)
je dessine un point (je sélectionne le commande de Cabri)
Par ce point, je fais passer une autre droite par deux points qui me semble perpendiculaire.
RESULTAT: le point ne reste pas immobile. ECHEC
Je gomme tout [...] ECRAN BLANC."

La deuxième tentative présente une construction correcte. La justification fait référence à la construction et à la définition de perpendiculaire.

"Je trace une droite par deux points; Je trace un point tel qu'il reste toujours sur la droite (je sélectionne la commande"Point sur un objet")
Maintenant je trace la BISSECTRICE passant par P
TENTATIVE REUSSIE : j'enregistre la figure.
Démonstration: j'ai considéré la définition de PERPENDICULAIRE à une droite."

B) Cathy décrit l'exploration qui l'amène à la détermination de la construction. Elle décrit comment elle a trouvé la configuration qui a permis de construire la perpendiculaire. Une fois construits une droite et le point P, pris deux points S et Q sur la droite, Cathy construit la bissectrice de l'angle

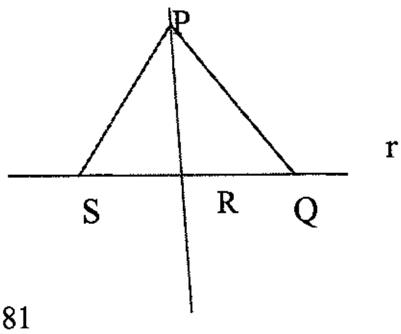

Figure 2 La 1° construction de Cathy

SPQ, déplace la figure jusqu'à ce que le triangle SPQ devienne isocèle, de façon que la bissectrice devienne perpendiculaire à la droite r.

"A l'angle P je trace la bissectrice. Avec la petite main je déforme le triangle SPQ de façon qu'il puisse devenir isocèle ou équilatéral de façon que ma bissectrice devienne $\perp$ à r.
Je crois avoir réussi. Je détermine le point R en le point où la bissectrice coupe r. Je contrôle si PRQ et PRS sont droits."

Après l'exploration - construction, Cathy ne donne pas une nouvelle construction, mais elle explicite les hypothèses relatives à une construction correcte (construction d'un triangle isocèle SPQ et de la bissectrice de l'angle P).

Hp. SP = PQ
PR bissectrice

Ts. PR $\perp$ r

Elle écrit la démonstration:

Je considère les triangles PRS et PRQ:
Ils ont
PR en commun
CH bissectrice par Hp.
SP = PQ par Hp.
$\angle RPS = \angle RPQ$ par Hp.
SRP et PRQ sont égaux par le 1e théorème d'égalité entre triangles puisque PR bissectrice de l'angle plat
→ PR $\perp$ r."

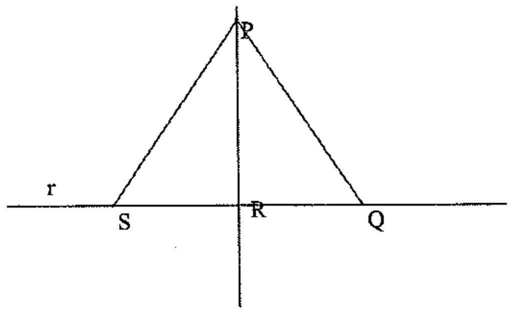

Figure 3 La 2° construction de Cathy

Il est intéressant d'observer le rôle que l'exploration dynamique semble avoir joué pendant le processus de résolution. L'élément clé est constitué par la bissectrice de l'angle en P, qui dans le cas d'un triangle isocèle est perpendiculaire au côté opposé. Á ce moment, la bissectrice est le seul outil de construction et le seul élément théorique disponible. En tout cas, la démonstration construite est correcte.

3° Tâche. Le problème du rectangle

On considère la solution proposée par Cathy au problème ouvert suivant .
'Un parallélogramme est donné, rendre un angle droit: faire les propres observations.'

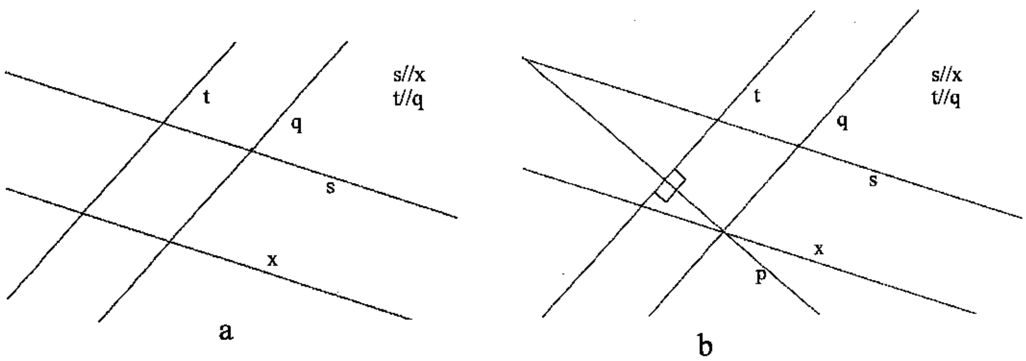

Figure 4a – 4b Les dessins qui accompagnent la description de l'exploration

Cathy construit le parallélogramme (et en décrit la construction), en traçant deux couples des droites parallèles et en localisant les sommets (avec "intersection des objets"). Dans le rapport écrit, Cathy annote (fig. 4a) à côté du dessin la construction effectuée avec Cabri (s//x e t//q). Ensuite elle trace la perpendiculaire (p) à une droite (t); même dans ce cas

Cathy écrit à côté du dessin la propriété de la droite construite (fig. 4b).
Dans sa copie Cathy écrit:
"Au moyen de la petite main, je bouge jusqu'à ce que la perpendiculaire soit superposée à la droite x; j'obtiens comme ça un angle droit".
Il ne s'agit pas d'un problème de construction, mais Cathy utilise les outils de construction pour représenter sur l'écran les propriétés qui correspondent à les hypothèses; c'est un moyen de les fixer pour guider l'exploration vers la production d'un énoncé.
L'exploration accomplie, Cathy dessine une nouvelle figure qui correspond aux hypothèses

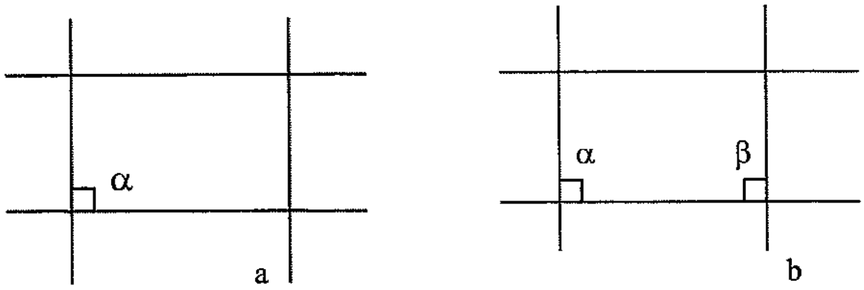

Figure 5 Les dessins qui accompagnent la démonstration

de l'énoncé. Elle continue:
« Puisque l'angle α est supplémentaire de β, parce qu'ils sont conjugués extérieurs, je découvre que tous les angles sont droits.
Je sais que α est droit parce que $p \perp t$. Puisque α et β sont conjugués intérieurs, c'est-à-dire $180 - 90 = 90$, alors β est droit. Par la propriété des parallélogrammes qui dit que les angles adjacents sont supplémentaires, les angles sont tout droits. »
Encore une fois, la dynamique de la figure a amené Cathy à la solution, c'est à dire à formuler une conjecture et trouver les éléments nécessaires pour la démontrer. Il est intéressant (Mariotti, 2001) de noter l'usage de la construction auxiliaire de la droite p. Cette droite n'a d'autre fonction que de fournir un élément fixe, qui représente l'hypothèse du problème (un seul angle droit), pour contrôler l'exploration.

Dans cet exemple l'évolution est évidente et l'analyse des copies des élèves montrent un progrès semblable, au cours de l'année scolaire. La façon dont les élèves traitent les constructions témoigne qu'ils ont acquis la maîtrise de la signification théorique qui se cache derrière une construction. Dans le même temps, il est possible de voir une évolution également dans les capacités d'expression : utilisation des termes appropriés, utilisation correcte des lettres et, en général, des symboles pour indiquer des objets géométriques et exprimer leurs relations. Certes, souvent les justifications données présentent encore des côtés obscurs, certains éléments ne sont pas parfaitement justifié. Il fallait bien s'y attendre du fait que l'évolution d'une justification à une démonstration n'est pas un fait naturel.
En effet, la médiation offerte par l'environnement Cabri est très utile, mais elle n'est pas suffisante. Une intervention spécifique de l'enseignant apparaît alors nécessaire lorsqu'on veut guider l'évolution de la signification vers l'idée de la démonstration.

Le rôle guide de l'enseignante dans les activités de discussion

Selon notre hypothèse, au cœur des activités sociales de la classe nous avons prévu la Discussion Mathématique. Ce type d'activité représente un moment clé pour l' évolution du signifié mathématique. Selon notre hypothèse, les signifiés des certaines expressions (gestes, mots, écritures, dessins...), émergeant de l'activité de solution des tâches dans l'environnement Cabri et au cours des activités de discussion collectives, doivent arriver à évoluer sous la guide de l'enseignant. L'exemple qui suit concerne une discussion collective qui a pour thème la révision des cahiers rédigés par les élèves. Cette discussion a deux objectifs principaux.
Mettre au point la séquence des axiomes théorèmes et définitions introduits jusqu'à ce moment
Réfléchir sur le statut théorique de chacun des éléments de la séquence
Les élèves savent qu'il y a d'autres commandes dans l'environnement Cabri et savent aussi qu'il serait possible de les utiliser, mais la conscience des choix faits et la nécessité de les observer, donnent un sens à la conventionalité du système en cours de construction et conduisent les étudiants vers la distinction difficile entre ce qui est vrai et ce qui est théoriquement valide. Comme on l'a souligné plusieurs fois, cette distinction constitue un des obstacles principaux dans la compréhension de la signification d'une démonstration.
L'accentuation sur la nécessité d'établir des règles et de les respecter est remarquée par une certaine ostentation avec laquelle une commande nouvelle vient d'être ajoutée au menu et, en même temps, avec laquelle un nouveau théorème est introduit dans la théorie. En ce qui concerne un nouveau théorème, l'énoncé et sa "démonstration" sont décidés d'un commun accord par la classe et transcrits par chacun dans son propre "Cahier de Géométrie".
Le système géométrique est construit graduellement, de façon à ce que la complexité augmente petit à petit: l'objectif est de fournir des niveaux successifs de difficulté qui peuvent être affrontés par les élèves . Si tout le système est présent dès le départ, on court le risque que les élèves ne soient pas en mesure de contrôler toutes les relations en jeu, plus particulièrement les relations entre ce *qui est donné* et ce qu'on *doit démontrer*.
Extrait de discussion
Après une première partie, concernant les axiomes et les premières définitions, on arrive à commenter la construction du **transport d'angle** dans Cabri et respectivement dans la théorie le Théorème qui donne la validité.

137.ENS [...] Mais nous sommes encore en train de travailler avec les axiomes... nous avons vu un élément primitif, nous avons vu une définition, nous avons vu un axiome... qu'est-ce qu'il manque encore entre les représentants de la géométrie?
138.PIER un théorème.
139.MOR maintenant il y a le transport d'angle...
140.ENS on essaye de découvrir qu'est ce que c'est le transport d'angle... Un élément primitif, une définition, un axiome, un théorème?
141.MOR un théorème parce qu'on peut le démontrer...
142.MOR: maintenant il y a le transport d'angle...
143.ENS on essaye de découvrir qu'est ce que c'est le transport d'angle... Un élément primitif, une définition, un axiome, un théorème?
[...]
144.ENS: à votre avis c'est un théorème parce qu'on peut le démontrer... alors voyons s'il est vrai ... quelle est la démonstration, qu'est ce que nous avons utilisé comme démonstration, si nous avons utilisé des choses dont nous avons déjà parlé... Si ce que nous sommes en train de faire c'est correct,... Qui va au tableau et nous décrit comment faire le transport d'angle... vas-y Bazz...
145.GIU: mais c'est dans les définitions?
146.ENS: c'est ce que nous sommes en train de comprendre... ; il y a quelqu'un qui dit qu'il s'agit d'un théorème, toi, tu demandes s'il se trouve dans les définitions... voyons...
147.BAZZ EST EN TRAIN DE FAIRE LA CONSTRUCTION AU TABLEAU
148.ENS Comme dans toutes les constructions nous avons les données dont on part et les conclusions auxquelles on arrive... alors quelles sont les données de départ du transport de l'angle?

149.QUELQU'UN: l'angle… où je veux l'amener…
150.ENS: donc un angle et une droite avec un point qui est le nouveau sommet …
151.BAZZ RACONTE CE QU'IL EST EN TRAIN DE FAIRE
152.GIUS: il se forme deux…
153.ENS :… alors je dois aussi décider de quel côté de la droite je veux le transporter…
154.ENS cela est la construction… alors sur votre petit cahier vous devriez avoir la description de cette construction … Etant donné un angle de départ… étant donné la droite r sur laquelle je veux reporter l'angle… et un point P pour le sommet du deuxième angle… je trace un cercle….etc… après la description vous devriez avoir une autre partie avec le titre …. Dans le cahier de Bazz il y a cette partie, il a donné démonstration comme titre…
155.VOCE: alors il s'agit d'un théorème…
156.ENS démonstration de quoi?
157.BERN il faut démontrer que l'angle que nous avons reporté est égal au premier…
158.ENS c'est-à-dire que cela est une construction correcte du transport d'angle… qui construit un angle égal à l'angle de départ… ok… comment nous faisons pour voir si cette construction marche?... pour cette partie quelqu'un entre vous aura écrit une justification de la construction sur le petit cahier… en fait je suis en train de justifier pourquoi la construction marche… peut-être les plus grands ont écrit un peu après… démonstration… alors si il y a une démonstration on peut supposer que celui ci est un…
159.CORO un théorème…
160.ENS alors on va faire les plus grands… si c'est un théorème il doit avoir une hypothèse et une thèse. Quelle est à votre avis notre hypothèse?
161.STEF le triangle…
162.BERN l'angle de départ
163.ENS alors …
164.VOIX la droite….
165.ENS les <u>objets initiaux</u>… ceux dont je suis parti… <u>sont mon hypothèse</u> … puis je sais que quoi d'autre est vrai … allez-y, allez-y
166.QUEL-QUES-UNS <u>la construction</u>.
167.ENS tout ce que j'ai construit … et donc si j'ai construit des cercles égaux, je peux dire … ce que donc ?
168.BAZZ qui ont les mêmes rayons…
169.ENS qui ont les mêmes rayons…que tout ce que j'ai fait dans le processus de construction est ce que je connais…
170.BERN je peux prendre comme hypothèse…
171.ENS alors que dans ma thèse…
172.BAZZ alors mon hypothèse est que C1=C1' ou bien que O1=O'1'…
173.ENS nous pouvons déjà considérer comme déduction le fait que deux cercles égaux ont des rayons égaux … en fait <u>tu as construit deux cercles égaux</u> …
174.MAS REPETE LA DEFINITION DE CERCLE ET IL DIT alors tous les rayons égaux sont des segments égaux …
175.ENS oui alors celle-ci est la déduction faite de la définition de cercle … où je mets les déductions? J'ai l'hypothèse, j'ai la thèse… où je mets les déductions? Ce que je déduis à partir de l'hypothèse où je le mets?
176.BERN dans la démonstration...
177.ENS alors comme hypothèse on a C1=C1' et C2=C2' … thèse…
178.GIUS les angles égaux….
179.ENS ma thèse, comme nous avons dit est de voir que la construction marche et donc que les deux angles sont égaux… vous voyez, il prend la forme d'un théorème… dans le théorème nous avions compris qu'il y a un énoncé, une hypothèse, une thèse, une démonstration … alors on commence à faire la démonstration…
180.BAZZ REPETE LA DEMONSTRATION...
181.CECC alors cette construction marche aussi pour faire le double d'un angle (construction qui a été donnée à faire à la maison et dont il faut encore discuter)

MOR (139) introduit un nouvel élément de discussion et il utilise l'expression **transport d'angle,** qui correspond à l'outil de Cabri « transport d'angle ». Cette expression se réfère aussi, en accord avec le but de la discussion, à un élément de la théorie sur le statut duquel il faut se mettre d'accord : est ce que c'est un théorème ou pas ? Pareillement, l'enseignant utilise la même expression **transport d'angle,** en se référant à l'élément de la théorie.

Des opinions différentes émergent, l'enseignant relance le probléme, en soulignant que pour que ce soit un Théorème il faut que certaines règles soient respectées, et propose de se déplacer dans l'environnement Cabri pour chercher la réponse. Le logiciel n'est pas présent, mais il est évoqué par la construction reproduite au tableau par BAZZ.
Comme on peut le noter la polysémie de l'expression **transport d'angle** a amorcé /déclenché une référence croisée à l'expérience dans l'environnement Cabri et à la thèorie géométrique. La référence à Cabri a l'effet de rappeler les éléments clés d'une construction : les **objets initiaux** et les **objets finaux** qui vont se transformer dans les éléments clé du théorème, l'**hypothèse** et la **thèse**
Dans ce sens, on peut reconnaître la réalisation d'un processus de 'médiation sémiotique'. L'expression **transport d'angle** se réfère aux signifiés relatifs à la construction Cabri, mais aussi aux signifiés relatifs à la théorie. Comme le rappelle l'enseignant (154 en se referant au Cahier de BAZZ), c'est dans la rédaction du Cahier de géométrie que la transformation de procédure – réellement accomplie dans Cabri - à Théorème se réalise. Ensuite la discussion montre l'enseignant qui guide les élèves dans un aller et retour, du monde de Cabri au monde de la théorie. Le résultat de cette référence croisée entre ces deux mondes porte sur l'évolution du signifié de Théorème à partir de l'idée de construction et de la justification de sa validité. La référence au monde des adultes « alors on va faire les plus grands » (160), souligne la nécessité de dépasser la référence au monde du logiciel et de chercher une formulation dans le monde de la Géométrie. C'est intéressant de noter comment l'enseignant va évoquer les expériences vécues par les élèves : le signifié de Théorème s'articule dans les signifiés d'hypothèse, thèse et démonstration. Chacun de ces signifiés est contextualisé par rapport au cas du « transport d'angle », mais il est aussi généralisé à travers les signifiés de « objets initiaux », « objets finaux » et « pas de la construction ».
L'extrait montre la dynamique entre le monde de Cabri et le monde des mathématiques, en particulier, à mon avis, il montre comment ce que l'on a vécu dans l'environnement Cabri ~~soit~~ est réinterprété en termes mathématiques et vice versa.
Le travail de révision collective a révélé son efficacité. Selon les buts poursuivis par l'enseignant, d'une part on arrive à systématiser les éléments de la théorie géométrique dans un ordre logique, de l'autre la discussion donne l'opportunité de réfléchir, à plusieurs reprises et en se référant au monde de Cabri, sur les différentes statuts théoriques pertinents à pour chacun de ces éléments. Le savoir auquel l'outil/artefact et son usage se réfère, par l'action de l'enseignant, peut émerger, être explicité par le langage et être internalisé par l'élève.
Dans différentes occasions, axiomes, définitions et théorèmes sont mis en relation et trouvent leur correspondants avec les commandes de Cabri et leur fonctionnement.
Pour conclure nous donnons la parole à Stef qui, après la discussion de révision des cahiers, évoque dans son rapport ce qui s'est passé dans la classe et écrit le commentaire suivant. On peut considérer ses mots comme exemplaires de ce que nous voulions et pouvons obtenir comme production des élèves.

Stef.

… Nous avons examiné la figure de la bissectrice, un camarade à nous, a dit que la bissectrice pouvait être démontrée même avec le triangle isocèle mais pour faire ça nous aurions dû avoir le dernier théorème sur la perpendiculaire. Dire que même si nous avons le théorème nous ne pouvions pas l'utiliser ne signifie pas que nous sommes fous, mais simplement que quand nous avons commencé nous ne l'avions pas et nos moyens pour la démonstration n'étaient pas beaucoup.

Références

Bartolini Bussi M. (1991), Social interaction and mathematical knowledge, *Proceedings of 15th PME Conference* , Assisi, Italy,

Bartolini Bussi M G. (1998), Verbal interaction in mathematics classroom: a Vygotskian analysis, Sierpinska, A. et al. (eds.) *Language and communication in mathematics classroom,* NCTM, 65-84

Bartolini Bussi M. G. (1996), Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, 31 (1-2), 11-41.

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (1999), Instruments for Perspective Drawing: Historic, Epistemological and Didactic Issues, in Goldschmidt G., Porter W. & Ozkar M. (eds.), *Proc. Of the 4th International Design Thinking Research Symposium on Design Representation*, III 175-185, Massachusetts Institute of Technology & Technion – Israel Institute of Technology.

Bartolini Bussi M. G., Boni, M., Ferri, F. & Garuti, R.: 1999a, Early Approach To Theoretical Thinking: Gears in Primary School, *Educational Studies in Math*ematics, 39 (1-3), 67-87.

Bartolini Bussi M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F . (à paraitre) Semiotic mediation in the Primary School: Durer's glass, Hoffmann H. et al.(eds) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education* (Festschrift for Michael Otte), Dordrecht

Boero, P., Dapueto, C. Ferrari, P. Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., Scali, E. (1995), Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School, in *Proc. 19th PME* (Recife), 1, 151-166

Laborde, C. (1999) L'activité instrumentée par des logiciels de géométrie dynamique, *Actes de X° École d'été Houlgate,* JUFM Académie de Caen, Tome I, pp.235-244 .

Mariotti, M.A. (1996). Costruzioni in geometria, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 19B, (3), 261 - 88.

Mariotti, M.A. (1998). Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate,* 21B, (3), 209-52.

Mariotti M.A. (2001) Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics* 44, (1&2), 25 – 53.

Mariotti, M.A. : (2001a) La preuve en mathématique, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* Volume 1, n° 4 pp. 437 – 458.

Mariotti M. A. (2002), The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning, in English L. D. et al. (eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 695-724, Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero P., Ferri F., & Garuti R. :1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th PME Conference*, Lathi, I- 180-95.

Mariotti, M.A., & Bartolini Bussi M.G. (1998). From drawing to construction: teachers mediation within the Cabri environment. In *Proceedings of the 22nd PME Conference* (pp. I- 180-95). Stellenbosh, South Africa.

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et lee technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris

Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématique, *Actes de X° École d'été Houlgate*, JUFM Académie de Caen, Tome I, pp.203-13.

Radford, 2003 Gestures, speech and the sprouting of signs, *Mathematical thinking and learning*, 22 (2), 14-23.

Vygotskij, L. S. (1974), *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti,* Giunti.

Vygotskij, L. S.(1978), *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press.