

Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques

Bettina Pedemonte ¹

Istituto delle Tecnologie Didattiche, CNR de Gênes

Résumé. Ce travail présente une analyse cognitive sur les rapports entre argumentation et démonstration. L'objectif de la recherche est de proposer un modèle comme outil méthodologique pour leur comparaison : le modèle de Toulmin. Le modèle permet de comparer l'argumentation et la démonstration selon deux points de vue : la structure, et le système de référence. D'une part, une analyse structurelle de l'argumentation et de la démonstration permet de rendre compte de certaines continuités ou écarts nécessaires pour passer d'une argumentation à une démonstration (d'une argumentation abductive à une démonstration déductive, d'une argumentation inductive à une démonstration par récurrence, etc.). D'autre part, il est possible, au moyen de ce modèle, de prendre en compte les énoncés mobilisés par les élèves pendant l'argumentation pour les comparer avec les théorèmes utilisés pendant la démonstration. La continuité ou l'écart du système de référence, conception ou théorie, s'appuie sur cette comparaison.

Introduction

L'apprentissage de la démonstration demande un changement de vision des mathématiques, progressant au-delà de la vérification expérimentale et de l'intuition pour adopter une démarche conforme à une théorie mathématique. Il ne s'agit pas d'apprendre des techniques mais de savoir les situer dans la théorie. L'objectif de la démonstration est d'établir la validité d'un résultat à l'intérieur d'un système théorique. Cet objectif est difficile à comprendre, et il est encore plus difficile de le faire comprendre. Mais on ne peut pas enseigner les mathématiques sans introduire la démonstration (Mariotti, 2001). Ceci explique les nombreuses recherches en didactique des mathématiques concernant la démonstration.

En tant que chercheurs, notre hypothèse est que la problématique de la démonstration doit s'inscrire dans une problématique plus vaste. En effet, la démonstration d'un énoncé répond à un problème de validité, mais une question sur la validité est posée avant la démonstration : souvent on démontre un énoncé dont on suppose la vérité. Et cette question ne peut pas se situer simplement au niveau de la démonstration. La démonstration est liée à une théorie mathématique, mais il y a souvent un processus précédant la démonstration, qui, au moyen des connaissances, non nécessairement théoriques, permet de construire les éléments de base pour la mise en place d'une démonstration.

C'est pourquoi la démonstration, comme objet d'étude de la didactique en mathématique, doit élargir sa problématique à un univers qui échappe aux « règles rigides » auxquelles elle est au contraire soumise. Balacheff, dans la Lettre de la preuve de Mai/Juin 1999, a proposé une problématique de l'argumentation.

Comprendre la démonstration c'est d'abord construire un rapport particulier à la connaissance en tant qu'enjeu d'une construction théorique, et donc c'est renoncer à la liberté que l'on pouvait se donner, en tant que personne, dans le jeu d'une

¹ bettyped@tin.it, pedemonte@itd.cnr.it

argumentation. Parce que ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration (Balacheff, 1999).

L'argumentation, en tant que processus moins contraint que la démonstration, permet d'avoir accès à des connaissances des élèves qui dans la démonstration ne sont pas nécessairement explicitées. Le problème de la vérité d'un énoncé se trouve finalement séparé du problème de sa validité. L'accès authentique à une problématique de la vérité et de la preuve se situe dans l'argumentation. C'est donc dans une problématique de l'argumentation que peut s'expliquer une problématique de la démonstration.

C'est ici que notre travail trouve son point de départ.

Objet d'étude et problématique

Les recherches didactiques qui s'intéressent aux rapports entre argumentation et démonstration sont nombreuses, et diffèrent radicalement les unes avec les autres. Le désaccord entre les recherches existantes s'appuie en particulier sur le rapport entre les suggestions didactiques pour l'apprentissage de la démonstration et l'analyse des aspects cognitifs qui interviennent pendant sa construction. Les deux points de vue auxquels nous faisons référence dans ce manuscrit sont les recherches sur l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) et celles sur les rapports de l'argumentation et la démonstration (Duval, 1995).

La liaison entre argumentation et démonstration a été mise en évidence dans le cas de problèmes demandant la construction d'un théorème, et donc la construction d'une conjecture et de sa démonstration. Certaines recherches prennent appui sur la présence d'une *unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) entre l'argumentation qui conduit à l'explicitation d'une conjecture, et sa démonstration. L'hypothèse de l'unité cognitive énonce que pendant la construction d'une conjecture l'élève peut produire une activité argumentative dans laquelle il justifie la plausibilité des choix qu'il fait. Pendant la phase ultérieure de preuve, cet élève peut s'appuyer sur ce processus de façon cohérente en organisant les arguments déjà produits suivant une chaîne déductive.

Le sujet qui construit une démonstration à partir d'une argumentation fait intervenir ses propres connaissances. En conséquence, nous pensons qu'une analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration peut révéler des aspects significatifs pour l'apprentissage de la démonstration.

Plusieurs recherches expérimentales (Boero, Garuti, Mariotti, 1996 ; Garuti, Boero, Lemut, 1998; Mariotti, 2001) ont montré que l'accès à la démonstration à partir d'un processus de construction d'une conjecture est plus accessible à l'élève que dans un enseignement fondé sur l'apprentissage de démonstrations étrangères au sujet.

Une conséquence de cette étude, qui a une profonde signification didactique, est que l'unité cognitive peut être utilisée comme outil pour prédire et analyser certaines difficultés rencontrées par les élèves lors de leurs premières démonstrations. Une seconde conséquence est qu'une bonne façon d'initier les élèves à la démonstration est de leur proposer des problèmes ouverts (Arsac & al., 1991) qui demandent la construction d'une conjecture. En fait, dans le modèle de l'unité cognitive proposé par l'école italienne, l'argumentation devrait favoriser la construction d'une démonstration.

L'analyse de l'interaction sociale avait, au contraire, suggéré une hétérogénéité entre argumentation et démonstration d'ordre épistémologique (Balacheff, 1988), c'est-à-dire liée à un rapport à la connaissance, au passage du pragmatique au théorique dont les valeurs épistémiques et opératoires sont la signature cognitive. L'étude de ces rapports dans une

problématique cognitive et linguistique (Duval, 1995), a encore conforté l'idée d'une distinction forte entre argumentation et démonstration.

A partir d'une analyse fonctionnelle et d'une analyse structurelle de l'argumentation et de la démonstration Duval décrit leurs processus cognitifs sous-jacents. La double distinction entre valeur épistémique² et valeur de vérité d'une proposition d'une part, et entre contenu et statut d'une proposition d'autre part, constitue la clé d'une analyse fonctionnelle. Dans la démonstration, la valeur épistémique d'une proposition dépend du statut théorique, alors que dans l'argumentation elle serait complètement liée au contenu des propositions.

L'analyse structurelle prend en compte les structures d'argumentation et de démonstration. La démonstration peut être décrite par une structure ternaire : données, conclusion et énoncés. Ses pas sont connectés selon un processus de recyclage : la conclusion du premier pas devient le début du pas suivant. Au contraire, dans l'argumentation les inférences sont reliées par connexion intrinsèque, c'est-à-dire qu'elles sont connectées en prenant en considération le seul contenu. En conséquence, Duval soutient qu'il y a une distance cognitive entre argumentation et démonstration, qui n'est pas seulement logique mais elle est aussi cognitive.

... Il est important de voir que cette hétérogénéité (dans le cas d'un pas de déduction et dans le cas d'un pas d'argumentation) n'est pas seulement « logique » mais qu'elle est aussi cognitive, c'est-à-dire relative à des modes d'appréhension par un sujet (Duval, 1992-1993).

Les conséquences didactiques sont opposées par rapport à celles tirées à partir d'une hypothèse de l'unité cognitive. Duval soutient que les règles de construction d'un pas déductif doivent être enseignées et centrées sur le statut des propositions et pas sur le contenu. C'est pourquoi il propose un enseignement de la démonstration centré sur les graphes propositionnels.

Avec l'objectif de déterminer des solutions didactiques pour l'apprentissage de la démonstration, nous nous sommes proposée de répondre à une question clé :

y a-t-il continuité ou distance cognitive entre argumentation et démonstration ?

La difficulté que nous avons rencontrée pour donner une réponse à cette question nous a poussée à aller plus loin. Nous nous sommes posée une autre question :

Quel est le rapport d'une argumentation avec une démonstration ?

Les « outils » fournis par les recherches didactiques existantes n'étaient pas suffisants pour fournir une réponse à cette question. En particulier, nous avons besoin d'un outil méthodologique pour l'analyse de l'argumentation et de la démonstration, tel que la comparaison entre les deux processus puisse être non seulement possible, mais également bien fondée. L'objectif principal de ce manuscrit est de proposer cet outil méthodologique : le modèle de Toulmin.

Le champ mathématique que nous considérons pour accomplir cette étude est celui de la géométrie. Le niveau scolaire est restreint à celui du lycée.

Le modèle de Toulmin

Un argument dans le modèle de Toulmin est composé par un schéma ternaire :

E (claim) l'énoncé ou conclusion qu'apporte l'interlocuteur,

D (data) un certain nombre de données justifiant l'énoncé E,

P (warrant) le permis d'inférer qui fournit une règle, un principe général capable de servir de fondement à cette inférence, de jeter un pont entre D et E.

² La valeur épistémique est le degré de certitude ou de conviction attachée à une proposition (Duval, 1991)

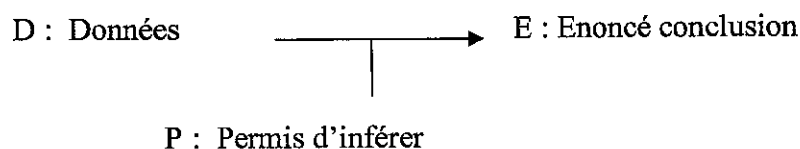
Le premier pas dans l'argument est l'expression d'un point de vue, c'est la conclusion, le but de l'argument. Cette affirmation doit être soutenue par l'argumentation. Nous appelons énoncé E ("claim", Toulmin 1958, p. 97) la conclusion de chaque argument.

Cette conclusion se base sur un certain nombre de données D ("data", Toulmin 1958, p. 97) qui sont produites pour soutenir l'énoncé. Les données sont significatives parce qu'elles sont le point de départ de chaque argument. Les données peuvent être constituées par des évidences, des faits, des informations, des exemples. C'est sur les données que l'énoncé conclusion s'appuie.

Pour passer des données à l'énoncé conclusion une "autorisation" qui légitime ce passage est nécessaire. Une règle, un principe général, un permis d'inférer P ("warrant", Toulmin 1958, p. 98) permet de jeter un pont entre données et énoncé conclusion.

Ce permis d'inférer est la partie de l'argument qui établit la connexion logique entre les données et l'énoncé conclusion. C'est la « raison » de l'acceptation ou de la réfutation de l'argument. C'est le point qui peut être réfuté par l'auditoire. Si l'argument n'est pas accepté, c'est justement le permis d'inférer qui est sous la critique (Toulmin, 1958, p. 100).

Le schéma ternaire peut être schématisé ainsi :



Ce schéma élémentaire n'est pas complet. L'articulation générale du discours peut être plus complexe et nécessiter trois étapes auxiliaires :

F (qualifier) l'indicateur de force de l'argument ;

R (rebuttal) la réfutation potentielle de l'énoncé conclusion ;

B (backing) le support du permis d'inférer.

En général, les règles et les données ne permettent pas d'inférer avec un degré absolu de certitude. C'est pourquoi, on utilise un indicateur de force F ("qualifier", Toulmin 1958, p. 102) qui précise avec quelle force le couplage des données à la loi permet d'atteindre l'énoncé. L'indicateur de force de l'argument peut ne pas être explicite, mais l'argument est toujours qualifié comme "vrai", "probablement vrai", "probable", etc.

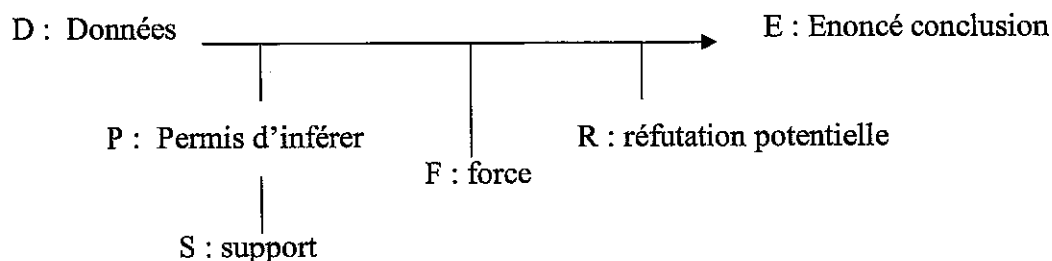
Il se peut que certaines circonstances particulières suspendent l'application du permis d'inférer au domaine des données. Le schéma argumentatif prévoit une place pour la restriction R de son énoncé. S'il y a des exceptions à l'énoncé la force du permis d'inférer est affaiblie. Les conditions des exceptions ou réfutations potentielles R ("rebuttal", Toulmin 1958, p. 102) sont alors prises en considération. Ces réfutations potentielles, ou restrictions, apportent un commentaire sur le rapport entre le permis d'inférer et la légitimité du passage des données à la conclusion ; elles signalent les circonstances dans lesquelles il faudra annuler l'autorité du permis d'inférer.

En conséquence, le permis d'inférer peut être mis en question. Il faut donc l'épauler, l'étayer d'un certain nombre de justificatifs, le support S ("backing", Toulmin 1958, p. 103).

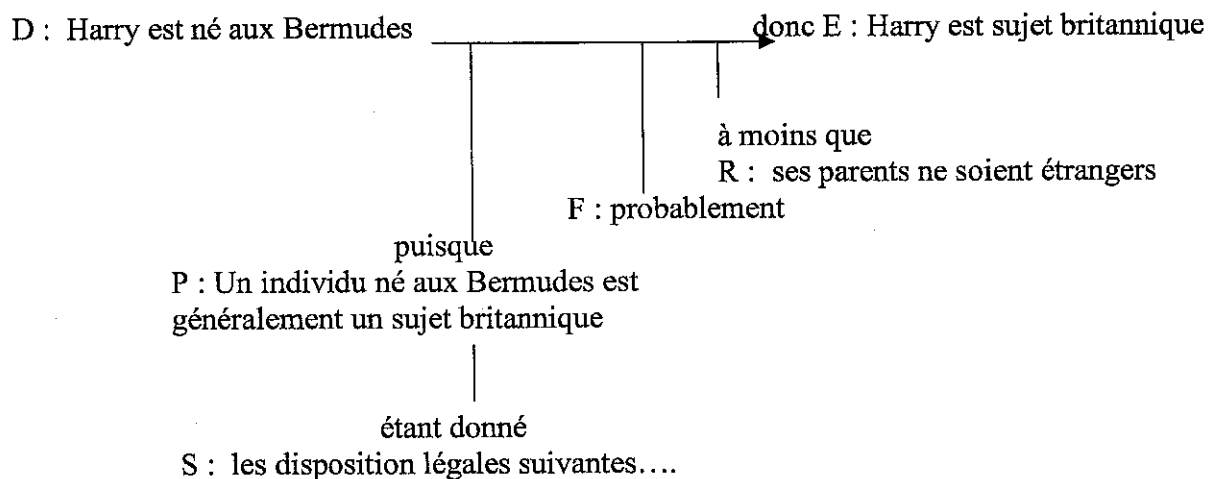
L'existence d'un permis d'inférer entre donnée et conclusion est justifiée par la légitimité de la question « Dans quelles conditions y a-t-il une relation entre données et énoncé conclusion ? ». Cependant, une autre question peut se poser : « Pourquoi y a-t-il une relation entre données et énoncé conclusion ? ».

C'est pourquoi un support peut être nécessaire dans la schématisation de l'argument. Si l'autorité du permis d'inférer n'est pas acceptée, un support au permis peut être demandé. Le support peut aider l'auditoire à comprendre le permis d'inférer ; sans le support il se peut que le permis ne soit pas accepté.

Le schéma complet est le suivant :



Toulmin donne l'exemple suivant :



Un tel modèle de l'argumentation nous permet de modéliser l'argumentation et la démonstration des élèves afin d'identifier une structure dans l'argumentation comparable avec celle de la démonstration. En particulier, l'argumentation peut être modélisée comme une chaîne de pas argumentatifs, chacun pouvant être comparé avec les pas correspondants de la démonstration. Et ce n'est pas seulement la structure de l'argumentation et de la démonstration qui peuvent être comparées. La comparaison entre la nature du permis d'inférer dans l'argumentation et dans la démonstration montre clairement que le permis d'inférer d'une démonstration est un théorème, alors que dans l'argumentation il ne l'est pas nécessairement. L'analyse de la nature du permis d'inférer nous permettra de faire la liaison avec les aspects fonctionnels de l'argumentation et de la démonstration, ce que nous appelons le *système de référence*.

Conjecture et théorème

L'argumentation et la démonstration sont en relation, comme le sont la conjecture et sa validation, le théorème.

D'après Balacheff « *l'argumentation est à la conjecture ce que la démonstration est au théorème* » (Balacheff, lettre de la Preuve 99 mai/juin). Ainsi, la distinction entre

argumentation et démonstration dans les productions des élèves peut être faite à partir de l'identification du théorème et de la conjecture.

Mariotti & al (1997) a défini le « théorème mathématique » comme un ensemble composé par un énoncé, une démonstration et une théorie mathématique. Le théorème existe parce qu'il y a une théorie mathématique de référence, c'est-à-dire un système de règles de déduction et de principes communément admis, nécessaires pour construire une démonstration.

The existence of a reference theory as a system of shared principles and deduction rules is needed if we are to speak of proof in a mathematical sense. Principles and deduction rules are intimately interrelated so that what characterises a mathematical theorem is the system of statement, proof and theory (Mariotti & al., 1997, p. 182).

Le théorème est institutionnalisé par la communauté des mathématiciens.

Néanmoins, il y a des énoncés mathématiques qui ne figurent pas dans le manuel scolaire et qui ne sont pas donnés par l'enseignant. Ces énoncés sont les théorèmes construits directement par les élèves à l'occasion d'activités de résolution de problèmes. Nous sommes intéressée par ces théorèmes construits dans la classe.

A partir de la définition de théorème (Mariotti & al., 1997), nous pouvons définir la *conjecture* comme l'ensemble d'un énoncé, d'une argumentation et d'un ensemble des conceptions. Nous faisons ici référence à la définition de conception donnée par le modèle cK ϕ ³ (Balacheff, 1995). La conjecture est potentiellement vraie parce que les conceptions du sujet ont permis la construction d'une argumentation qui la « justifie ».

Théorème	Conjecture
Énoncé Démonstration Théorie mathématique	Enoncé Argumentation Conceptions (modèle cK ϕ)

Il est utile de localiser la conjecture et le théorème parce que c'est surtout à partir de ces énoncés que l'argumentation et la démonstration (ou preuve) sont repérables. L'argumentation est liée à la conjecture et la démonstration au théorème. En outre, le début de la démonstration est souvent annoncé par l'élève lui-même.

Un premier découpage du processus de résolution de l'élève en argumentation et démonstration (ou preuve) est fondamentale pour leur analyse comparative.

Une fois que l'argumentation est modélisée, il est possible d'analyser sa structure et son système de référence. Dans la suite nous analyserons la façon d'accomplir cette analyse.

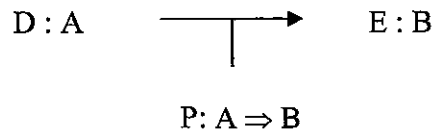
... pour analyser les structures entre argumentation et démonstration

La comparaison entre structure de l'argumentation et de la démonstration peut se faire directement à partir du modèle. Le modèle doit nous permettre d'identifier les structures de

³ La caractérisation d'une conception est rendue possible par la prise en compte d'une quadruplet : une sphère de pratique ou un ensemble (P) de problèmes; un ensemble (R) d'opérateurs qui permettent le traitement des problèmes; un système de représentation (L) qui permet la représentation des problèmes et des opérateurs; une structure de contrôle (Σ) qui donne et organise les fonctions de décision, de choix, de jugement de validité et d'adéquation de l'action (Balacheff, 1995, p. 223).

l'argumentation : déduction, abduction et induction⁴. Contrairement à la structure de la déduction, qui apparaît entrer naturellement dans le modèle, l'abduction et l'induction, nécessitent quelques précisions.

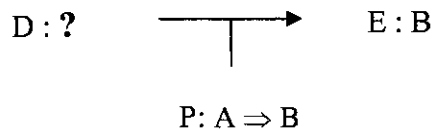
La représentation d'un pas déductif dans le modèle de Toulmin est la suivante :



$A \Rightarrow B$ est la règle (ou le théorème) ;
A est une proposition d'entrée ou donnée ;
B est la conclusion

L'énoncé conclusion est déduit à partir des données et du permis d'inférer qui sont déterminés à l'avance. La règle d'inférence du « modus ponens » est cohérente avec le modèle.

L'abduction, au contraire, est un raisonnement qui part des conclusions et monte aux prémisses. L'énoncé conclusion et le permis d'inférer sont donnés, en revanche les données sont à chercher ; nous proposons la représentation d'un pas abductif dans le modèle de Toulmin de la façon suivante :

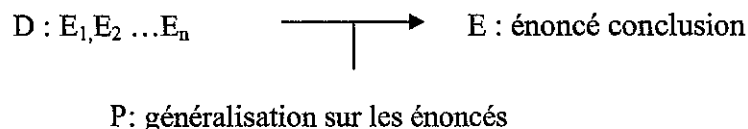


Le point d'interrogation, au lieu des données, signifie que le sujet est en train de chercher les données afin de les relier à l'énoncé conclusion par le permis d'inférer ; énoncé conclusion et permis d'inférer sont disponibles. La flèche de l'argument est toujours dirigée vers l'énoncé conclusion parce que le sujet est conscient que la détermination des données permettra l'application du permis d'inférer aux données afin de justifier la conclusion.

Au pas suivant le schéma sera peut-être complété, c'est-à-dire que le point d'interrogation sera remplacé par l'explicitation des données finalement déterminées⁵.

Le déroulement de l'induction est différent par rapport à celui de la déduction et de l'abduction. L'induction se construit par généralisation des énoncés ou arguments précédents déjà observés ou étudiés. Cette particularité doit être visible dans l'argument.

Nous proposons le schéma suivant pour une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés (*result pattern generalisation*, Harel, 2001, p.191) :

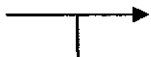


⁴ Nous avons restreint l'analyse à ces argumentations parce que l'étude de l'argumentation en termes déductifs, abductifs et inductifs est tout à fait classique (Aristote ; Peirce, 1960 ; Polya, 1958, 1962)

⁵ Dans le cas de la déduction, le point d'interrogation peut se situer au lieu des conclusions. Nous ne l'avons pas explicité pour question de simplicité. En fait, la cohérence entre le modèle et la déduction ne rendait pas nécessaire cette spécification.

$E_1, E_2 \dots E_n$ sont les conclusions des pas précédents ou sont les cas observés. Ils deviennent les données du dernier pas, celui qui amène au cas général. Le permis d'inférer est une généralisation sur les énoncés.

En revanche, une argumentation inductive par généralisation sur le processus (*process pattern generalisation*, Harel, 2001, p.191) peut être ainsi schématisée :

$D : E_1, E_1 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_3, \dots$  $E : \text{énoncé conclusion}$

P: généralisation sur le processus

Les données $E_1, E_1 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_3, \dots$ représentent les arguments précédents qui relient les énoncés. Ils deviennent les données du dernier pas, celui qui amène au cas général. Le permis d'inférer est une généralisation sur le processus.

L'induction, mais aussi l'abduction, peuvent être représentés par le modèle, si on considère une concaténation des pas de l'argumentation et non un pas isolé. Un argument élémentaire peut perdre toute signification s'il n'est pas vu dans la structure globale du raisonnement dans lequel il prend place. Ainsi, le dernier pas de l'induction doit être relié à ceux qui le précèdent. Le pas abductif exprimé avec le point d'interrogation anticipe les pas suivants au terme desquels le point d'interrogation peut être finalement substitué par les données ou le permis d'inférer.

Pour chaque structure nous considérons les structures possibles de la démonstration afin d'en déterminer les continuités ou les écarts.

Si l'argumentation est déductive la démonstration est facilement une déduction. Dans ce cas une continuité structurelle entre argumentation et démonstration est attendue. De plus, si l'argumentation est déductive, il est possible qu'elle soit déjà une démonstration.

Si l'argumentation est abductive, un écart structurel permet la construction d'une démonstration. La démonstration ne peut pas être abductive. L'écart doit être comblé pour construire une démonstration. En revanche, une continuité structurelle amène à la construction d'une preuve encore abductive.

Si l'argumentation est une induction par généralisation sur les énoncés, seulement un écart structurel peut amener à la construction d'une récurrence. Une continuité structurelle peut amener à la construction d'une preuve inductive, c'est-à-dire d'une preuve basée sur une généralisation sur les énoncés.

Au contraire, une généralisation sur le processus pourrait permettre la construction d'une démonstration par récurrence. Dans ce cas il s'agit d'une continuité structurelle entre argumentation et démonstration car c'est à partir d'une généralisation sur le processus qu'une démonstration par récurrence peut être construite. La liaison entre deux pas successifs permet de passer du cas n au cas $n+1$. On suppose devoir calculer la somme des n premiers nombres impairs. On peut par exemple déterminer la loi à partir d'un certain nombre d'exemples numériques. Dans ce cas la généralisation accomplie pour la détermination de la loi est une généralisation sur les énoncés. Si au contraire, on considère la liaison entre un pas n et le successeur $n+1$, par exemple en considérant un carré de côté n auquel on ajoute une « équerre » de $2n+1$ petits carrés pour le transformer en un carré de côté $n+1$, la généralisation est une généralisation sur le processus. Le passage à la construction d'une démonstration par récurrence à partir d'une argumentation inductive par généralisation sur le processus a alors un caractère de continuité car la loi que la récurrence permet de démontrer est celle qui relie

un pas n au pas suivant $n+1$. La généralisation sur les énoncés ne permet pas de visualiser la liaison entre un pas et le suivant.

En conséquence, pour construire une démonstration correcte il est souvent nécessaire de combler un écart structurel. Les argumentations abductives et certaines argumentations inductives ne peuvent pas rester telles quelles dans la démonstration.

...pour analyser le système de référence entre argumentation et démonstration

Le **système de référence** prend en compte les systèmes de représentations expressives (en particulier le langage, les heuristiques sur le dessin, etc.) et les systèmes des connaissances (*cadre*, *concepts-en-acte*, etc.) qui sont en jeu pendant la construction d'une conjecture et la mise en place de sa démonstration.⁶ Les continuités ou écarts du système de référence entre argumentation et démonstration que nous analysons sont les suivantes (Pedemonte 1998) :

Continuité du langage. On observe comment les expressions verbales, les expressions algébriques, les dessins géométriques se maintiennent ou évoluent en passant d'un processus à l'autre. Cette continuité est observable à partir des mots, des expressions, des phrases utilisés pendant l'argumentation et pendant la construction de la démonstration.

Continuité conceptuelle. On peut regarder si par exemple des *concepts-en-acte* (Vergnaud, 1990) apparaissant pendant l'argumentation peuvent venir à être explicités pendant la construction de la démonstration. Cette continuité est observable à partir du discours. Par exemple, pendant l'argumentation le sujet peut utiliser des mots référents à un théorème, sans pour autant l'expliciter. Si en phase de démonstration ce théorème est utilisé, on peut conclure à une continuité conceptuelle entre les deux phases.

Continuité de « cadre » (Douady, 1986). On peut regarder si la conjecture et la démonstration sont construites dans le même « cadre ». Cette continuité est observable à partir du référent théorique que le sujet utilise dans les deux phases. Si par exemple il produit la conjecture par moyen de la géométrie synthétique et il produit la démonstration en utilisant la géométrie analytique, il n'y a pas continuité de cadre entre les deux processus.

Continuité heuristique. On peut observer si les éléments désignés comme variables (que l'on fait varier) et ceux qui sont maintenus fixes sont les mêmes dans les deux phases. Cette continuité est observable à partir du discours du sujet et de sa manipulation du dessin (en particulier dans Cabri-géomètre). En fait, les éléments qui jouent un rôle de variables pendant un processus de résolution peuvent être liés au seul discours, ou au contraire déterminés à partir de la manipulation du dessin. Par exemple pendant la manipulation de la figure d'un triangle on peut décider de maintenir un côté fixe et faire varier les deux autres. On peut observer une continuité heuristique si pendant l'argumentation et pendant la démonstration cette manipulation est décrite par le sujet.

Pour analyser le système de référence, nous utilisons le modèle cK ϕ (Balacheff, 1995). Une *conception*, au sens du modèle cK ϕ (Balacheff, 1995), est « une structure mentale attribuée à un sujet, par un observateur de son comportement, dont on exige qu'elle apparaisse cohérente et efficace dans une sphère de pratique » (Balacheff, 2001)

⁶ C'est à partir de l'analyse des copies des élèves que nous avons ressenti la nécessité de définir le système de référence. La démonstration fait référence à une théorie mathématique. Le système de référence représente une tentative d'organiser certains éléments qui interviennent pendant l'argumentation pour pouvoir les rapprocher et les comparer avec la théorie mathématique qui intervient pendant la démonstration.

Par *sphère de pratique* on entend un ensemble de tâches ou de situations où la conception est opératoire. (Balacheff, 2001, il s'agit de la reprise d'un concept introduit par Pierre Bourdieu) Balacheff (1995) propose une caractérisation formelle d'une conception sous la forme d'un quadruplet constitué de:

Un ensemble (P) de problèmes (sphère de pratique de la conception);

Un ensemble (R) d'opérateurs (qui permettent le traitement des problèmes);

Un système de représentations (L) (qui permet la représentation des problèmes et des opérateurs);

Une structure de contrôle (Σ) (qui donne et organise les fonctions de décision, de choix, de jugement de validité et d'adéquation de l'action)

Ce quadruplet permet de décrire les conceptions des élèves qui interviennent dans la résolution d'un problème (voir par exemple Vadcarr 2000, Sangaré 2000, Balacheff et Gaudin 2002 ; Miyakawa 2002).

Nous croyons que pendant la construction d'une argumentation les conceptions ont un rôle fondamental : elles interviennent dans sa mise en place, en particulier elles déterminent les choix des élèves quand ils doivent résoudre une tâche. Notre intérêt à les repérer avec le modèle de Toulmin est justifié par au moins trois raisons.

- Les conceptions semblent être à la base de la construction d'une argumentation.
- La détermination des conceptions dans le modèle de Toulmin, permet une analyse comparative entre conceptions utilisées en phase d'argumentation et théorèmes utilisés en phase de démonstration.
- L'analyse de la continuité ou écart en termes de système de référence s'appuie sur cette étude : le modèle permet une analyse locale de l'argumentation et de la démonstration.

Considérons l'exemple suivant tiré de notre étude.

Exemple

L'élève doit résoudre la tâche suivante : comparer les aires de trois triangles d'une figure. Deux des trois triangles sont égaux et le troisième est d'une forme différente mais a la même aire que les autres.

Voici une partie de l'argumentation d'un élève.¹

« Il y a deux triangles égaux. Leurs aires sont égales parce que les triangles sont égaux. Au contraire le troisième triangle est différent par rapport aux autres et donc son aire est différente des deux autres aires »

Il y a deux énoncés conclusion que nous appelons E_1 , E_2 :

E_1 : les aires de deux triangles égaux sont égales,

E_2 : l'aire du troisième triangle est différente des autres aires.

Le permis d'inférer P_1 est implicite. Néanmoins, l'élève nous donne une indication : il dit que les aires sont égales parce que les triangles sont égaux. Nous pouvons expliciter le permis d'inférer avec une bonne approximation : « Si deux objets sont égaux, leurs aires sont égales ». Nous appelons ce principe « héritage de l'égalité ». La donnée D_1 est l'égalité des deux triangles.

Le permis d'inférer P_2 semble être au contraire fourni par le principe suivant : « Si deux objets sont différents, leurs aires sont différentes ». Nous appelons ce principe « héritage de l'inégalité ».

L'argumentation peut être représentée dans le modèle de Toulmin de la façon suivante:

¹ L'argumentation supposée est un prototype des argumentations présentées par les élèves pendant la résolution d'un des problèmes utilisés pour la phase expérimentale de cette recherche.

D_1 : deux triangles égaux $\xrightarrow{\quad}$ E_1 : leurs aires sont égales

P_1 : héritage de l'égalité

D_2 : deux triangles différents $\xrightarrow{\quad}$ E_2 : leurs aires sont différentes

P_2 : héritage de l'inégalité

Nous pouvons peut-être identifier la présence d'une conception, dont deux opérateurs sont les permis d'inférer P_1 , P_2 . Déterminer l'égalité ou l'inégalité entre aires de triangles, ou d'autres objets géométriques, est l'un des problèmes appartenant à la sphère de pratique ; le système de représentation est composé du langage verbal, du dessin etc. Le contrôle est complètement implicite. Il pourrait être perceptif, lié donc à ce que les élèves voient sur la figure. Il pourrait être lié à la formule de l'aire : « si les deux triangles sont égaux leurs bases et hauteurs sont égales et donc ils ont la même aire », « s'ils sont différents, les bases et les hauteurs sont différents et donc ils ont des aires différentes ». Nous n'avons pas les moyens de déterminer le contrôle.

L'élève doit construire une démonstration à partir de l'exemple d'argumentation présenté ci-dessus. Il peut démontrer le premier pas d'argumentation mais pas le deuxième.

Par exemple, il peut construire la démonstration suivante pour le premier pas.

« Deux triangles égaux ont la même aire parce que les hauteurs et les bases sont égales et, en conséquence, les aires aussi ». La formule de l'aire peut lui permettre de substituer le permis d'inférer de l'argumentation avec un permis d'inférer « théorique ».

Le premier pas de l'argumentation est transformée en pas de démonstration :

D_1 : bases et hauteurs des triangles égales $\xrightarrow{\quad}$ E_1 : leurs aires sont égales

P_1 : formule de l'aire

En revanche, l'élève ne peut pas réussir à substituer le deuxième permis d'inférer (à moins qu'il ne construise une déduction erronée appuyant sur une conception, la même ou une autre).

L'identification de la conception, ou au moins de certains de ses éléments, est important pour l'analyse de l'argumentation parce qu'elle permet de déterminer (et peut-être d'anticiper) des difficultés possibles pour le passage à la démonstration. Si, par exemple, le permis d'inférer (qui correspond à un opérateur de la conception mobilisée) n'est pas un théorème de la classe de mathématiques, on peut penser que l'élève arrivera difficilement à construire une démonstration acceptable à partir de celle-ci. D'autre part, le permis d'inférer faux ne peut pas être substitué par un théorème.

En revanche, si le permis d'inférer (un opérateur de la conception mobilisée) est correct, il existe un théorème qui peut se substituer au permis d'inférer de l'argumentation. Cela est fondamental pour le passage à la démonstration. Il est aussi nécessaire que l'élève le connaisse, et qu'il s'en souvienne.

En conséquence, la continuité du système de référence entre argumentation et démonstration est possible seulement si l'opérateur de la conception utilisé pendant l'argumentation peut être remplacé par un théorème dans la démonstration. En revanche, si le théorème n'est pas disponible il y a écart du système de référence entre argumentation et démonstration, qui pourra éventuellement être géré.

Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental nous a permis de montrer comment analyser les productions des élèves (argumentations et preuves) avec l'outil méthodologique du modèle de Toulmin.

Nous voulons exposer les résultats des expérimentations afin de répondre aux questions que nous avons soulevées à propos de la continuité ou écart du système de référence et structurelle entre une argumentation et une démonstration.

Le dispositif expérimental a été conçu avec des situations problèmes qui demandent, implicitement ou explicitement, la construction d'une conjecture, et en conséquence, la mise en place d'une argumentation et d'une démonstration éventuelle. Nous avons décidé de faire travailler les élèves en binôme pour favoriser l'apparition d'une activité argumentative ; le manque d'argumentation nous empêcherait une analyse comparative avec la preuve.

Pendant l'activité, l'enseignant et un ou plusieurs observateurs sont présents, mais n'interviennent pas.

L'échange discursif entre les binômes est observé et enregistré avec un magnétophone. Nous disposons donc des enregistrements du travail complet des binômes, de la rédaction écrite de la démonstration, et quelque fois de la rédaction écrite d'une partie de l'argumentation.

Nous avons proposé aux élèves des problèmes ouverts (Arsac & al., 1991), afin d'accentuer les difficultés des élèves pour construire une conjecture afin d'assurer une forte interaction entre eux.

Les deux problèmes que nous avons choisis sont les suivants :

Problème 1. ABC est un triangle quelconque. A l'extérieur du triangle, trois carrés ont été construits sur chacun des trois côtés. On construit trois nouveaux triangles en reliant les sommets libres des carrés. Comparer l'aire de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC.

Problème 2. Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultants en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments. Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre? Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre?

En total, nous avons analysé 47 binômes du lycée.

Dans la suite nous présentons deux exemples de copies des élèves : la première relative au problème 1, la deuxième sur le problème 2.

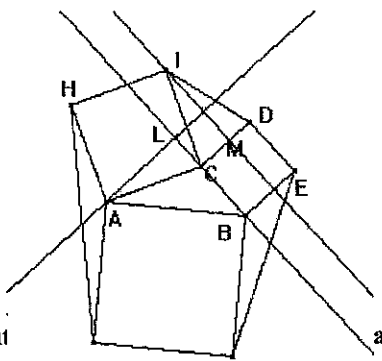
La première copie est un exemple de continuité du système de référence et d'écart structurel. La deuxième copie est un exemple d'écart du système de référence et de continuité structurelle.

Continuité du système de référence. Ecart structurel : Argumentation abductive et preuve déductive.

Binôme : Giulia (G), Luisa (L), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'italien au français.

Nous débutons l'analyse à partir de l'argument E_6 où les élèves décident de comparer les bases et les hauteurs des triangles pour en comparer les aires. À ce moment, les élèves comparent les aires du triangle ABC et d'un des triangles extérieurs : le triangle IDC (dans la figure ci-dessous). Elles construiront les hauteurs des deux triangles afin de comparer leurs aires. En fait, elles remarquent que les bases BC et CD sont égales. Et en conséquence pour comparer les aires des deux triangles elles doivent comparer leurs hauteurs.

Argumentation des élèves	Analyse
<i>L bouge la figure sur Cabri: le triangle sur l'écran est un triangle quelconque.</i> 21. G: mais si on considère les bases des triangles les deux côtés qui sont égaux... 22. L: les deux côtés du carré? 23. G: oui et si on construit les hauteurs, on peut comparer les seules hauteurs afin de comparer les aires 24. L: oui, je comprends, tu veux dire de comparer les hauteurs pour comparer les aires parce que les bases sont égales. Les élèves construisent les hauteurs des triangles $\triangle ABC$ et $\triangle IDC$ 31. L : Je suis en train de prolonger la droite, oui, la droite sur ce segment... qu'est-ce que je dois faire ? 32. G : la droite par les points B et C 33. L : ah c'est vrai ! 34. G : puis il faut faire la perpendiculaire à celle-là 35. L : ah voilà, mais tu sais qu'elles semblent être presque... 36. G : presque pareilles ! 37. L : non, plus qu'égales : elles semblent être perpendiculaires, je l'avais déjà observé tout à l'heure. 50. Élèves ensemble : eh ces deux triangles sont égaux ! 51. L : c'est vrai, ALC et ICM alors ces deux triangles qu'est-ce qu'ils ont ? 52. G : Nous considérons... alors AC est égal à IC parce qu'ils sont côtés du même carré 53. L : attends ! 54. G : AC est égal à IC parce qu'ils sont côtés du carré, puis 55. L : LC... 56. G : il est égal à CM, pourquoi ? 57. L : Alors ... Pourquoi il est égal à CM ? ... Selon moi c'est mieux de prouver... non attends cet angle est droit et cet angle aussi est droit 58. G : Pourquoi ? 59. L : Parce que ce sont les hauteurs n'est-ce pas ?	Les élèves observent que les bases CB et CD des deux triangles sont égales. Donc, pour la formule de l'aire, la comparaison entre aires peut être déterminée à partir de la comparaison entre hauteurs. On modélise le discours des élèves avec le modèle de Toulmin. La structure de l'argument est une abduction (les élèves semblent supposer l'égalité des aires comme cela apparaît dans l'int. 37). $D_6 = ?$  E_6 : comparaison entre aires P: formule de l'aire Afin de construire la donnée D_6 les élèves construisent les hauteurs. L'explicitation de la donnée D_6 permettra de donner une réponse à la question des aires.  E_7: les haut E_8: les h perpendiculaires Les énoncés E_7, E_8 décrivent les "faits" dont la valeur épistémique est liée à la perception de la figure dans Cabri. Le « drag » de Cabri permet aux élèves de voir les deux petits triangles ($\triangle ALC$ et $\triangle ICM$) égaux. Les élèves s'aperçoivent que les hauteurs font partie des deux triangles égaux. L'énoncé explicite encore un "fait". E_9 : les triangles ($\triangle ALC$ et $\triangle ICM$) sont égaux La nécessité de justifier l'égalité entre triangles, amène les élèves à chercher des côtés et des angles égaux pour appliquer le théorème d'égalité. La structure argumentative est encore une abduction: $D_9 = ?$  E_9 P: théorème d'égalité

60. G : donc elles sont perpendiculaires et puis il faut un côté ou un angle, il faut trouver un autre angle ou on est obligé de trouver un autre côté 61. L : par le deuxième théorème d'égalité n'est-ce pas ? 62. G : eh oui 63. L : mais alors on peut trouver un autre angle 64. G : alors l'angle... 65. L : celle-ci et celle-là ou bien celle-ci et celle-là 66. G : ces deux angles ne sont pas complémentaires ou supplémentaires à cet angle ? 67. L : non 68. G : si, si, cet angle est droit, ACI est droit, il est l'angle droit du carré, alors l'angle ACL + LCI est 90° et MCI + ICL est 90° donc ils sont complémentaires 69. L : oui, oui, ils sont complémentaires 70. G : alors ça va, ils sont égaux	<i>Les élèves considèrent un côté, l'angle droit et un deuxième angle.</i> $D_9 : AC = IC$ $\angle ALC = \angle IMC$ $? \angle ACL = \angle ICM$ $\longrightarrow$ $E_9 : \text{les triangles } \triangle ALC \text{ et } \triangle ICM \text{ sont égaux}$ P: théorème d'égalité <i>Les élèves doivent prouver que les angles sont égaux. Ils n'ont pas à disposition ni les données ni le permis d'inférer. Il s'agit d'un autre pas abductif :</i> $D_{9'} = ?$ $\longrightarrow$ $E_{9'} : \angle ACL = \angle ICM$ P: ? <i>Les deux angles sont complémentaires du même angle. Le permis d'inférer et les données sont finalement trouvées.</i> $D_{9''} :$ $\angle ACL + \angle LCI = 90^\circ$ $\angle MCI + \angle ICL = 90^\circ$ $\longrightarrow$ $E_{9''} : \angle ACL = \angle ICM$ P: angles complémentaires sont égaux
---	--

La structure de l'argumentation est une abduction, en particulier trois abductions sont construites. Les élèves observent que les bases des deux triangles ABC et IDC sont égales. Donc pour comparer les aires il faut comparer les hauteurs (argument 6). La comparaison entre hauteurs renvoie implicitement à une comparaison des petits triangles ALC et ICM ; ils sont égaux. Les élèves cherchent les données pour conclure ce fait (argument 9). La troisième abduction est la recherche de la troisième donnée pour appliquer le théorème d'égalité qui permet de conclure que les triangles ALC et ICM sont égaux (argument 9').

La preuve construite par les élèves est une déduction ; tous les pas abductifs sont transformés en pas déductifs.

Preuve des élèves	Analyse
Je considère le triangle ABC et le triangle ICD. D'abord je considère les triangles ALC et ICM et je démontre qu'ils sont égaux par le deuxième théorème d'égalité parce qu'ils ont: - $AC = IC$ parce que côtés du même carré - $\angle ALC = \angle IMC$ parce que droits (angles formés par l'intersection entre le côté et la hauteur) - $\angle ACL = \angle ICM$ parce que complémentaires d'un même angle (LCI) En particulier $IM = AL$. Donc les triangles ABC et ICD ont la même base (parce que côtés du même carré) et même hauteurs, donc ils ont la même aire.	<i>La structure de la preuve est une déduction :</i> $D_9 : AC = IC$ $\angle ALC = \angle IMC$ $\angle ACL = \angle ICM$ $\longrightarrow$ $E_9 : \text{les triangles } \triangle ALC \text{ et } \triangle ICM \text{ sont égaux}$ P: théorème d'égalité <i>Si les triangles sont égaux on peut conclure que les hauteurs sont égales et donc les aires, car les bases sont égales.</i> $D_{10} : E_9$ $\longrightarrow$ $E_{10} : \text{les hauteurs sont égales}$ P: héritage d'égalité $D_{11} : E_{10} \text{ et égalité des bases}$ $\longrightarrow$ $E_{11} : \text{les aires des triangles } \triangle ABC \text{ et } \triangle ICD \text{ sont égales}$

P: formule de l'aire

La preuve des élèves est une preuve déductive. Un écart structurel a été nécessaire pour passer de l'argumentation abductive à la preuve déductive. Cependant, les élèves ne semblent pas avoir rencontré de difficulté pour accomplir ce passage.

En revanche, la copie des élèves est un exemple de continuité du système de référence entre argumentation et démonstration. En fait, les permis d'inférer utilisés pendant l'argumentation sont des théorèmes. C'est pourquoi la preuve construite par les élèves utilise les mêmes permis d'inférer que l'argumentation.

Ecart du système de référence. Continuité structurelle : Argumentation et preuve inductives.

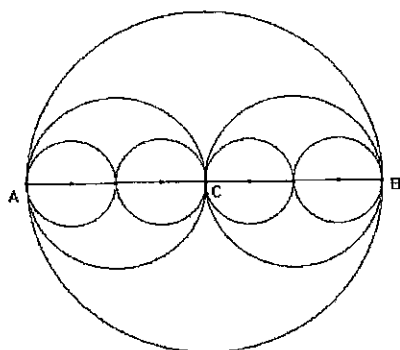
Binôme : Vincent (V), Ludovic (L), classe Première en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français. Les élèves construisent la conjecture à partir d'un calcul tout de suite algébrique. Les élèves ne prennent pas en compte des exemples numériques. La généralisation au cas de la courbe n est probablement faite à partir du processus mais cette généralisation reste encore implicite. Les élèves semblent considérer deux courbes successives.

Pour ce qui concerne le système de référence, c'est intéressant l'analyse sur le cas limite. Les élèves considèrent l'aire et le périmètre au cas limite. Ils se trouvent en désaccord pour la limite du périmètre. La conception de Ludovic est mobilisée dans le cadre numérique : le périmètre au cas limite est constant car quand n tend vers l'infini, la formule $(2\pi r)$ reste invariant. La conception de Vincent est mobilisée dans le cadre géométrico-perceptif : le périmètre au cas limite est le diamètre de la première courbe.

Considérons la copie et le discours des élèves.

Argumentation des élèves	Analyse
9. V : le périmètre c'est $2\pi r$ et l'aire c'est πr au carré 10. L : oui 11. V : mais comment évolue le rayon déjà ? r est divisé par deux ? 12. L : oui, le premier périmètre est $2\pi r$ et le deuxième est $2\pi r$ sur deux plus $2\pi r$ sur deux et donc ... ça va être le même 13. V : et oui... 14. L : et ça va à être toujours le même parce que... regarde... on va appeler r au premier, r est le rayon du premier, le premier cercle a le périmètre.... 15. V : $2\pi r$ 16. L : $2\pi r$ et la somme des deuxièmes est $2\pi r$ sur deux 17. V : plus $2\pi r$ sur deux donc $2\pi r$... et cetera. l'autre est $2\pi r$ sur 4 mais pour 4 fois 18. L : donc la somme est toujours $2\pi r$ 19. V : c'est toujours le même périmètre....	<i>D'abord les élèves considèrent la première courbe et ils calculent l'aire et le périmètre à partir d'un rayon générique r.</i> D_1: cercle  E_1: le périmètre est $2\pi r$ et l'aire est πr^2 P: formule de la circonférence et de l'aire du cercle <i>Les élèves se posent la question de l'« évolution » du rayon d'une subdivision à l'autre.</i> <i>Ils disent que le rayon est divisé par deux mais ils ne disent pas s'ils considèrent ça pour toutes les subdivisions. Nous pouvons le supposer car le mot « évolue » (int. 11) semble donner un sens de continuité.</i> E_2 : le rayon est divisé par deux (dans chaque subdivision) <i>L'énoncé explicite un fait : il est emprunté à Cabri-Géomètre.</i> <i>La généralisation est faite à partir des résultats des calculs. Cependant il semble que les élèves considèrent deux cas attachés l'un à l'autre. L'énoncé E_2 permet de comprendre le changement du rayon d'une subdivision à l'autre. D'une certaine façon le rayon est finalement lié à la courbe. En outre le mot « mais » est une locution qui indique une affirmation qui a été déjà faite, et au même temps une affirmation attendue.</i>



20. L : oui, par contre l'aire... l'aire c'est πr au carré
 21. V : là on va avoir ...
 22. L : hem... Ça va être divisé par deux à chaque fois
 23. V : Oui, πr sur deux au carré plus πr sur deux au carré est égal à
 24. L : est égal à ... πr carré sur deux
 25. V : oui c'est comme ça en divisant par deux
 26. L : oui, et donc c'est toujours la moitié de la précédente

31. V : l'aire est à chaque fois divisée par deux....et à la limite? A la limite c'est une droite, confondue avec le segment de départ ...
 32. L : mais l'aire est divisée par deux à chaque fois
 33. V : oui, mais à la limite arrive à zéro
 34. L : oui c'est vrai que si on continue...
 35. V : elle tend vers zéro
 36. L : oui elle tend vers zéro l'aire

L'argument semble être le suivante :

D₃: le périmètre de la deuxième courbe est $2\pi r$ → E₃: le périmètre de la troisième courbe est $2\pi r/4$ pour 4 fois

P: le rayon est la moitié du précédent et le nombre des courbes est double

D₄: argument 3

E₄: le périmètre est toujours le même

P: généralisation sur le processus

Pour l'aire les élèves utilisent la même stratégie : ils font les calculs sur les deux premiers cas et ensuite ils généralisent.

D₅: l'aire de la première courbe est πr^2 → E₅: l'aire de la deuxième courbe est $\pi(r/2)^2$ pour 2 fois

P: le rayon est la moitié du précédent et le nombre des courbes est double

D₆: argument 5

E₆: l'aire c'est toujours la moitié de la précédente

P: généralisation sur le processus

Ensuite les élèves considèrent le cas limite.
 Vincent voit le cas limite sur la figure. L'énoncé est un fait construit à partir de la perception de la figure sur Cabri-géomètre.

E_{5v} : l'aire à la limite est une droite confondue avec le segment de départ

De ce fait, il conclut qu'à la limite l'aire est zéro.

D_{6v} : E₅ → E_{6v} : à la limite l'aire est zéro

P_v : l'aire d'un segment est zéro

En revanche, pour Ludovic, le cas limite est construit à partir de la formule.

D_{6L} : E₄ : l'aire est toujours la moitié de la précédente → E_{6v} : à la limite l'aire est zéro

P_L : conception numérique de « limite »

37. V : oui mais alors le périmètre ? 38. L : non, le périmètre est toujours le même 39. V : au pire le périmètre il tombe jusqu'à deux fois le segment 40. L : comment ? 41. V : ça tombe sur le segment... si les cercles sont tellement petits 42. L : hem... mais ce sera toujours $2\pi r$ 43. V : oui mais quand l'aire tend à zéro ça sera presque égal... 44. L : non, je pense non 45. V : si on fait tendre à zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi... je ne sais pas... 46. L : Je finis la première démonstration <i>Silence... Ludovic continue à écrire la première démonstration</i> 47. V : mais si on fait tendre l'aire vers zéro on pourrait faire tendre le périmètre vers deux fois le... Au diamètre du premier 48. L : c'est différent, le périmètre est constant 49. V : ah d'accord...	<i>Puisque la conclusion des deux raisonnements est la même, les élèves ne se rendent pas trop compte de la divergence de leurs raisonnements.</i> <i>Par contre, pour ce qui concerne le périmètre, les élèves se trouvent en désaccord. Vincent est encore lié à la perception de la figure sur Cabri-géomètre, alors que Ludovic pense en termes numériques.</i> <i>Pour Ludovic :</i> $\begin{array}{ccc} D_{\pi_L} : E_3 : \text{le} & \xrightarrow{\quad} & E_{\pi_L} : \text{à la limite le} \\ \text{périmètre est toujours} & & \text{périmètre est} \\ \text{le même} & & \text{toujours le} \\ & & \text{même} \end{array}$ P_L : résultat de calcul <i>Pour Vincent :</i> E_{TV} : à la limite le périmètre est le diamètre <i>L'énoncé explicite un fait qui s'appuie sur la figure de Cabri-géomètre</i>
---	--

Les élèves construisent la preuve en suivant les pas de l'argumentation. Ils considèrent les courbes jusqu'à la courbe n. Ils écrivent tous les passages des calculs. C'est le processus qui est généralisé et non les énoncés.

Preuve des élèves	Analyse
Notons R le premier rayon ($R=AB$) 1) Soit $P_1, P_2, P_4, \dots$ les périmètres respectifs du premier cercle, des deux seconds des quatre troisièmes,... $P_1=2\pi R$ $P_2=2\pi R/2 + 2\pi R/2=2\pi R$ $P_4=2\pi R/4 + 2\pi R/4 + 2\pi R/4 + 2\pi R/4=2\pi R \dots$ $P_n=2\pi R/n + 2\pi R/n + 2\pi R/n + \dots + 2\pi R/n=2\pi R$ n fois, donc le périmètre est constant	<i>Les élèves calculent le périmètre pour la première courbe</i> $\begin{array}{ccc} D_1 : \text{cercle} & \xrightarrow{\quad} & E_1 : P_1=2\pi R \end{array}$ P : formule du périmètre du cercle <i>Les élèves calculent le périmètre pour la deuxième et la troisième courbe, enfin ils généralisent pour la courbe n..</i> $\begin{array}{ccc} D_4 : P_1, & \xrightarrow{\quad} & E_4 : \text{le périmètre est} \\ P_1 \rightarrow P_2 & & \text{constant} \\ P_2 \rightarrow P_{3\dots} & & \end{array}$ P : généralisation sur le processus <i>Les élèves écrivent « pour n fois » quand ils font les calculs pour la courbe n ; n représente le nombre des cercles dans la courbe et en même temps la subdivision du rayon d'un cercle de la courbe n.</i> <i>Pour l'aire, la structure est la même : d'abord ils calculent l'aire pour le premier cercle. Ensuite ils</i>

2) Soit $A_1, A_2, A_4, \dots$ les aires respectives du premier cercle, des deux seconds des quatre troisièmes,... $A_1 = \pi R^2$ $A_2 = \pi R^2/4 + \pi R^2/4 = \pi R^2/2 = A_1/2$ $A_4 = \pi R^2/16 + \pi R^2/16 + \pi R^2/16 + \pi R^2/16 = \pi R^2/4$ $= A_1/4 \dots$ $A_n = \pi R^2/n^2 + \pi R^2/n^2 + \dots + \pi R^2/n^2 = \pi R^2/n^2 * n$ $= \pi R^2/n = A_1/n$ donc l'aire tend vers zéro quand n augmente	généralisent à la courbe n. $D_1: \text{cercle} \quad \longrightarrow \quad E_1: \text{l'aire est } \pi R^2$ P: formule de l'aire du cercle $D_3: A_1, \quad \longrightarrow \quad E_3: A_2 = A_1/2$ $A_1 \rightarrow A_2 \quad \quad \quad \dots A_n = A_1/n$ $A_2 \rightarrow A_4, \dots$ P: généralisation sur le processus
---	---

Cette analyse révèle une continuité structurelle entre argumentation et preuve. La structure inductive de l'argumentation se maintient dans la preuve construite par l'élève.

La liaison entre le rayon et la courbe nous permet d'appuyer l'hypothèse que la généralisation a été faite sur le processus et non sur les résultats de calcul. C'est la relation entre le nombre des cercles dans une courbe et le rayon de chacun d'eux qui permet de voir la généralité sur le processus.

Du point de vue du système de référence, c'est évident qu'ici il y a deux conceptions différentes. La conception de Ludovic s'appuie sur un contrôle numérique, alors que celle de Vincent s'appuie sur un contrôle géométrico-perceptif. Les deux cadres différents permettent de rendre compte des différences de conceptions. Nous avons observé une continuité du système de référence (concernant la limite) entre argumentation et preuve pour Ludovic et un écart pour Vincent.

Conclusions

A partir du modèle de Toulmin sur l'argumentation, nous avons développé un cadre théorique qui a permis de construire les questionnements et les réponses éventuelles à propos des rapports entre argumentation et démonstration.

Dans ce cadre théorique, le modèle de Toulmin a été un outil qui a permis à la fois d'établir la relation entre argumentation et démonstration et de réaliser une analyse comparative en termes de continuité/écart de structure et continuité/écart du système de référence entre argumentation et démonstration.

L'analyse du système de référence s'appuie, en partie, sur le repérage des conceptions utilisées pour la mise en place d'une argumentation, et de les comparer avec les théorèmes utilisés pour la démonstration. Le permis d'inférer d'une argumentation, en tant qu'opérateur d'une conception, peut être comparé avec le théorème utilisé dans la démonstration. La conception, en tant que support de l'argumentation, peut être comparée avec la théorie mathématique utilisée dans la démonstration.

En conséquence, la transformation d'une conception en théorie mathématique et en particulier le passage d'un opérateur de la conception (permis d'inférer de l'argumentation) à un théorème (permis d'inférer de la démonstration) permet d'observer une continuité du système de référence. En revanche, c'est dans le manque d'évolution de l'opérateur de la conception en théorème que nous pouvons reconnaître un écart du système de référence.

L'analyse structurelle s'appuie sur la comparaison entre la structure de l'argumentation et celle de la démonstration. Nous avons montré comment la structure des arguments (déductive, abductive, inductive) peut être représentée avec le modèle de Toulmin.

Le modèle de Toulmin a permis de reconnaître des structures similaires et comparables dans l'argumentation et dans la démonstration, de façon à reconnaître une continuité structurelle si les structures sont les mêmes dans les deux cas. En revanche, nous observons un écart structurel si l'argumentation et la démonstration ont des structures différentes.

Du point de vue de l'analyse cognitive, notre position s'éloigne sensiblement de la position de Duval. Il n'y a pas toujours une distance cognitive entre argumentation et démonstration. Au contraire, nous avons souvent trouvé une unité cognitive non seulement du point de vue du système de référence mais aussi du point de vue de la structure.

Cela a été observé même quand cette continuité peut empêcher la construction d'une démonstration. Par exemple, les analyses des expérimentations ont montré qu'à partir d'une argumentation abductive, les élèves construisent fréquemment des preuves contenant encore des traces d'abduction. Cette thèse est ultérieurement étayée par le fait que certaines expérimentations déroulées en Italie ont été conduites dans des classes expérimentales d'un projet centré sur l'introduction des élèves à la démonstration. Ce projet prend en compte l'apprentissage de la démonstration d'une façon rigoureuse. Bien que ces élèves aient participé à des activités spécifiques sur la démonstration, les continuités structurelles et du système de référence entre argumentation et preuve ont également été observées.

Néanmoins, l'hypothèse de l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996), comme elle a été avancée, ne prenait pas en compte le cas où les continuités structurelles ou du système de référence amènent à des preuves fausses. Dans ce cas une rupture cognitive est nécessaire pour la construction d'une démonstration. Et les élèves peuvent ne pas arriver à construire la démonstration justement à cause de la continuité « naturelle » entre argumentation et fausse démonstration.

En conséquence, si d'un côté penser en termes d'*unité cognitive* permet de comprendre les difficultés pour la construction d'une démonstration et localiser la source du problème éventuel, d'un autre côté, la considération que l'*unité cognitive* peut amener à la construction de preuves erronées doit être prise en compte.

Références

Une partie des références bibliographiques citées ici est extraite du site Internet de la Lettre de la Preuve (<http://www-didactique.imag.fr/preuve>)

Anscombe J. C. & Ducrot O. (1983) : *L'argumentation dans la langue*, Bruxelles : Mardaga.

Arsac G. & al. (1991) : Problème ouvert et situation-problème. Irem de Lyon.

Aristote : *Rhetorique*. Traduction française par Dufour M. et Wartelle A. Les belles lettres, 1991 pour le livre I et le livre II. Les belles lettres, 1980 pour le livre III.

Aristote : *Organon*. Traduction française par Tricot J. 1962. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.

Aristote : *Les topiques : livres I-VIII*. Traduction française par Tricot J. 1974. Paris : Librairie philosophique J. Vrin..

Arzarello F., Bartolini Bussi M. (à paraître) : Methodological problems in innovative research paradigms: notes on the time variable, in English L., Bartolini Bussi M., Jones G., Lesh R., Tirosh D. editors, *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Balacheff N. (1987) : Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, 147-176, Ed : D. Reidel Publishing Company.

Balacheff N. (1988) : Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de Collège, Thèse d'état, Université Joseph Fourier, Grenoble

Balacheff N. (1995) : Conception, connaissance et concept. In Grenier D. : Séminaire didactique et technologies cognitives en mathématiques, Grenoble IMAG, pp. 219-244.

Balacheff N. (1999) : L'argumentation est-elle un obstacle ? Lettre de la preuve Mai/Juin 1999 ; URL : <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506.html>

Balacheff N., Gaudin N. (2002) : Modeling students conceptions (the case of functions). *Mathematical Thinking and Learning*. (to appear).

- Boero, P., Garuti, R., Mariotti M. A. (1996) : « Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures » *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, vol. 2, (pp. 121 – 128), Valencia.
- Douady, R. (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.7, n°2, pp. 5-31 ; Ed : La pensée sauvage, Grenoble.
- Douady R. (1984) : *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*, Thèse d'Etat, Université Paris-VII.
- Ducrot O. et al. : (1979) : *Les mots du discours*, Ed. de Minuit, Paris.
- Ducrot O. (1980) : Analyses pragmatiques, *Communications* n° 32, Ed : Le Seuil, Paris.
- Duval, R. (1992–1993) : Argumenter démontrer expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit X* n°31, 37–61, IREM (ed.), Grenoble.
- Duval, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine* Edition: Peter Lang, Suisse.
- Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998) : Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XXII*, Stellenbosch, vol. 2, pp. 345-352.
- Garuti, R.; Boero, P.; Lemut, E. & Mariotti, M. A. (1996) : Challenging the traditional school approach to theorems:... *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, Valencia, vol. 2, pp. 113-120.
- Harel G., Sowder L. , (1998) : Students' proof schemes: Results from exploratory studies, In : Schoenfeld A. H., Kaput J., & Dubinsky E. (ed.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, Vol. 3, American Mathematical Society, 234-283.
- Harel, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.). *Learning and Teaching Number Theory*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation.
- Lakatos I. (1979) : *Proofs and refutations. The logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge 1976; Traduction italienne de Benelli D. *Dimostrazioni e confutazioni La logica della scoperta matematica* Feltrinelli, Milano.
- Magnani, L. (2001) : *Abduction, Reason and Science. Processes of Discovery and Explanation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Mariotti M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero P., Ferri F., Garuti M. R. (1997) Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceeding of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME 21*, Lahti, Finland. pp. 180-195.
- Mariotti M. A. (2001) : La preuve en mathématique. *La Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 437-458.
- Mariotti M.A. (2001) Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics* 44, Issues 1 & 2, Dordrecht: Kluwer, pp. 25-53.
- Mariotti M. A. & Fischbein E. (1997) : Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34. 219-248.
- Martin W. G., Harel G. (1989) : Proof frames of preservice elementary teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51,
- Miyakawa T. (2002) : Relation between proof and conception : the case of proof for the sum of two even numbers. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-26*, Norwich, 21-26 July 2002.
- Pedemonte B. (1998) : *Modélisation, preuve et manipulation des variables de situation dans Cabri-géomètre* mémoire de DEA Grenoble; Université Joseph Fourier.
- Pedemonte B. (2001): Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics *Proc. of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25*, Editors: van den Heuvel-Panhuizen M., Utrecht (Olanda); vol. 4, 33-40.
- Pedemonte B. (2002): *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Peirce C. S. (1960) *Collected papers* Cambridge, M A: Harvard University Press.
- Perelman C., Olbrechts-Tyteca L. (1988) : *Traité de l'argumentation-La nouvelle rhétorique* Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles 1992 (5^{ème} édition).
- Plantin C. (1990) : *Essais sur l'argumentation*, Kimé (ed.), Paris.
- Polya G. (1954) : *Mathematics and plausible reasoning* Princeton University Press, London. Traduction française de Vallée R., *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*, Gauthier – Villars (ed.), Paris, 1958.
- Polya G. (1962) : *How to solve it ?* Princeton University Press, New York, Traduction française de Mesnage C. *Comment poser et résoudre un problème* Dunod (ed.), (deuxième édition), Paris, 1962.
- Sangaré M. (2002) : *La rotation : approche cognitive et didactique. Une étude de cas au Mali*. Thèse de l'Université de Mali.

- Toulmin S. E. (1993) : *The use of arguments*. Cambridge: University Press, 1958; Traduction française par De Brabanter P. *Les usages de l'argumentation*, Presse Universitaire de France.
- Van Eemeren, F. H. & al. (1996) : *Fundamental of argumentation theory*. Mahwan N. J; Lawrence E., pp. 129–160, 1996.
- Vadcard L. (2000) : *Etude de la notion d'angle sous le point de vue des conceptions*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Vergnaud, G. (1991) : La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n°2.3, pp. 133-170.