Des paradigmes géométriques
aux petites provocations didactiques

Catherine HOUDEMENT
DIDIREM Université Denis Diderot, Paris 7
IUFM de Haute-Normandie
&
Alain KUZNIAK
DIDIREM Université Denis Diderot, Paris 7
IUFM d'Alsace

Nos travaux de recherches sont basés sur une explicitation épistémologique des différentes approches de la géométrie élémentaire enseignée, que nous appelons des paradigmes géométriques. Nous envisageons la gestion de ces paradigmes en formation des enseignants dans une optique qui privilégie des stratégies de formation entre homologie et transposition. Pour cela, nous introduisons des situations de formation qui, sur un temps court, tentent de sensibiliser les étudiants à l'importance des paradigmes géométriques : les petites provocation didactiques.

I Le point de départ : recherches sur la formation des enseignants du premier degré en mathématiques. Vers une classification des stratégies de formation [28]

Dans ce premier travail, nous avons défini un certain nombre de stratégies de formation en mathématiques, à partir d'une analyse des pratiques de formation réellement existantes dans les anciennes écoles normales et dans les IUFM avant 1993.
Nous rappelons ici la classification que nous avons pu dégager.

✧**Les stratégies culturelles.** Il s'agit des stratégies qui privilégient l'accroissement des connaissances des formés dans un domaine précis, sans préjuger de la mise en œuvre opérée dans les classes par les étudiants.

✧**Les stratégies basées sur la monstration.** Ces stratégies privilégient la transmission d'un modèle ou d'une façon de faire par l'observation de sa mise en œuvre dans les classes élémentaires. Il s'agit de transmettre une pratique en la montrant aux étudiants et en la faisant imiter.

✧ **Les stratégies basées sur l'homologie**. Ces stratégies utilisent aussi l'imitation, mais une imitation complexe et transposée par le formé. Ce dernier devra mettre en place une façon d'enseigner inspirée de celle qu'il a pu vivre en tant qu'étudiant dans le centre de formation. Les formateurs enseignent (ou essaient d'enseigner) conformément à l'idée qu'ils se font de ce que doit être l'enseignement à l'école élémentaire.

✧**Les stratégies basées sur la transposition.** Elles s'opposent aux précédentes par l'insistance mise sur la distanciation théorique. Elles visent à transmettre des savoirs de référence, mais portant sur la pratique de classe, ce qui les distingue des stratégies culturelles. Elles supposent naturellement l'existence effective d'un savoir didactique et pédagogique.

[28] HOUDEMENT et KUZNIAK (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques *Recherches en Didactiques des Mathématiques.* vol 16/3. Pages 289-322 Grenoble :La Pensée Sauvage.

L'étude détaillée des ces stratégies avait montré le rôle privilégié tenu par les stratégies d'homologie. Ces dernières apparaissent particulièrement bien adaptées au public des centres de formations du premier degré, dans lesquels les étudiants, en général de formation non scientifique doivent cependant être préparés à enseigner les mathématiques, et ce dans un contexte de pluridisciplinarité. Les stratégies d'homologie tentent, dans un temps relativement bref, de transmettre à la fois des compléments mathématiques et une conception de l'enseignement dynamique basé sur une mise en action des élèves. D'autre part, nous avions pu constater que les formateurs utilisaient assez systématiquement ce type de stratégie pour l'enseignement de la Géométrie : ceci était dû en grande partie à l'ignorance de ce domaine par les étudiants qui avaient, au moment de notre étude, suivi plutôt un enseignement de la Géométrie sans figure. Mais une autre raison provenait également de la faible étendue des études didactiques dans ce domaine, ce qui ne facilitait pas la communication d'un savoir théorique sur l'enseignement de la Géométrie en formation. Ces constatations nous ont conduit à affiner l'étude de la Géométrie avec, comme perspective, de dépasser la simple homologie : pour cela il nous a paru nécessaire de définir un cadre théorique suffisamment riche pour envisager une stratégie de transposition.

II. Recherches sur la géométrie : les paradigmes géométriques[29].

1. Un exemple problématique : la cloche de ROUEN 1998

Cet exemple est étudié en détail dans *petit x* n°51. L'étude de cet extrait de sujet de concours d'entrée au professorat des écoles pointe les malentendus possibles entre étudiants et professeurs de mathématiques corrigeant des copies de concours. Ce qui nous a conduit à définir des " paradigmes géométriques ", affinant en quelque sorte la notion de cadre géométrique de R.DOUADY (1994).

2. Paradigmes géométriques.

Notre cadre théorique s'appuie sur une approche épistémologique, fondée sur l'étude de textes philosophiques, mathématiques et didactiques et sur certains écrits de mathématiciens sur la géométrie. La démarche dans laquelle nous nous inscrivons vise à comprendre l'évolution des rapports entre géométrie et réalité, la géométrie étant vue comme modèle de l'espace. D'après GONSETH[30] , il existe trois modes de connaissance de l'espace que nous avons intégrés et revisités : intuition, expérience, déduction.

1.1.5 a. L'intuition

L'intuition fournit une sorte de théorie immédiate basée sur un lot d'évidences, qui peuvent être perceptives aussi bien que virtuelles. Elle est structurée en un tout complet qui gomme les incertitudes. Bien sûr elle peut être aussi une source d'erreurs car elle peut installer une cohérence artificielle entre les données pratiques et une théorie inadaptée. Mais elle est aussi une formidable source de découverte. Elle n'est pas statique et évolue avec le sujet. Il faut signaler ici l'importance des travaux de FISCHBEIN[31] : ce chercheur s'est particulièrement attelé à une explicitation de l'intuition en mathématiques tout en se fondant presque exclusivement sur des exemples géométriques.

---

[29] HOUDEMENT et KUZNIAK (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 40 page 283-312. Kluwer

[30] Ferdinand GONSETH[30] (1890-1974), mathématicien, contemporain de PIAGET (1896-1980), surtout connu pour ses écrits en philosophie des sciences.

[31] FISCHBEIN (1987) dans *Intuition in science and mathematics. An educationnal approach.* Reidel.Kluwer

1.1.6 b. L'expérience

L'expérience n'est pas immédiate, elle nécessite action physique et mentale. Par exemple, on pourrait dire que la propriété " par deux points il passe une seule droite " est plutôt intuitive, alors que celle " la somme de trois angles d'un triangle est plat " ne peut résulter que d'une expérience préalable. A l'école, les résultats obtenus par pliages et découpages relèvent de ce champ, de même que l'utilisation de logiciels dynamiques tels que Cabri. L'expérience nourrit l'intuition, l'intuition structure l'expérience : elles sont parfois difficilement séparables, il existe un double mouvement de l'une vers l'autre.

1.1.7 c. La déduction

La déduction consiste à tirer des informations comme conséquences d'autres, sans nouvelle expérience[32]. Elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. La déduction, au sens où nous l'entendons, est plus proche du raisonnement dans son ensemble. En aucun cas, elle ne se limite à la démonstration fondée sur une axiomatique de base

1.1.8 d. Les paradigmes géométriques.

Autour de ces trois modes de connaissances, il est possible d'organiser une synthèse qui réorganise la relation avec l'espace et donne naissance à trois types de Géométrie. Nous proposons simplement le tableau récapitulatif de ces géométries, renvoyant à nos articles pour plus de précisions

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Liée à un schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur un système complet d'axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et "figural concept"[33]	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et liens entre les objets.

Dans notre conception, l'idée de paradigme mise en jeu s'inspire de celle que KUHN a développée dans son ouvrage sur la structure des révolutions scientifiques. Deux aspects principaux sont soulignés par KUHN[34] qui, en fait, constituent deux facettes de l'approche de la théorie.

- Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de

[32] OLERON (1977) *Le raisonnement.* Paris : PUF

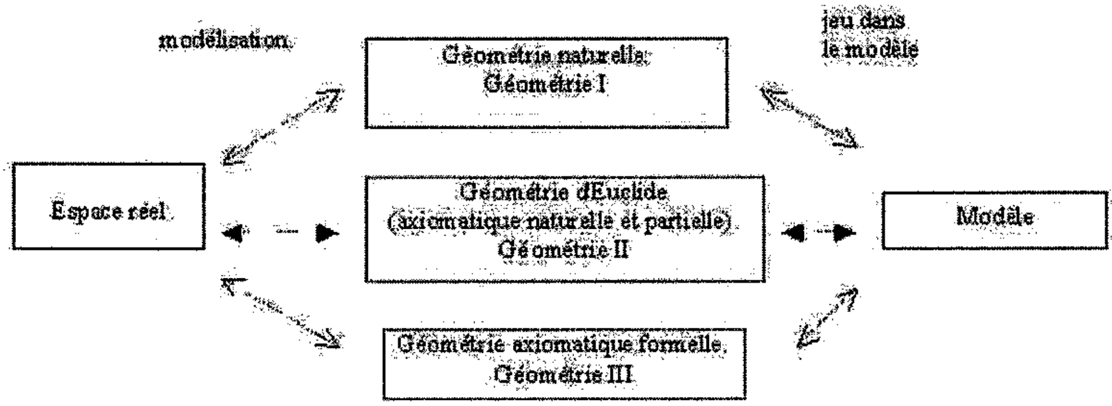
[33] FISCHBEIN (1993) The Theory of Figural Concepts dans *Educational Studies in Mathematics* N°24 (2) pages 139-162.

[34] Notamment l'article " En repensant aux paradigmes " in *La tension essentielle* Odile Jacob 1977.

poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens KUHN parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet.

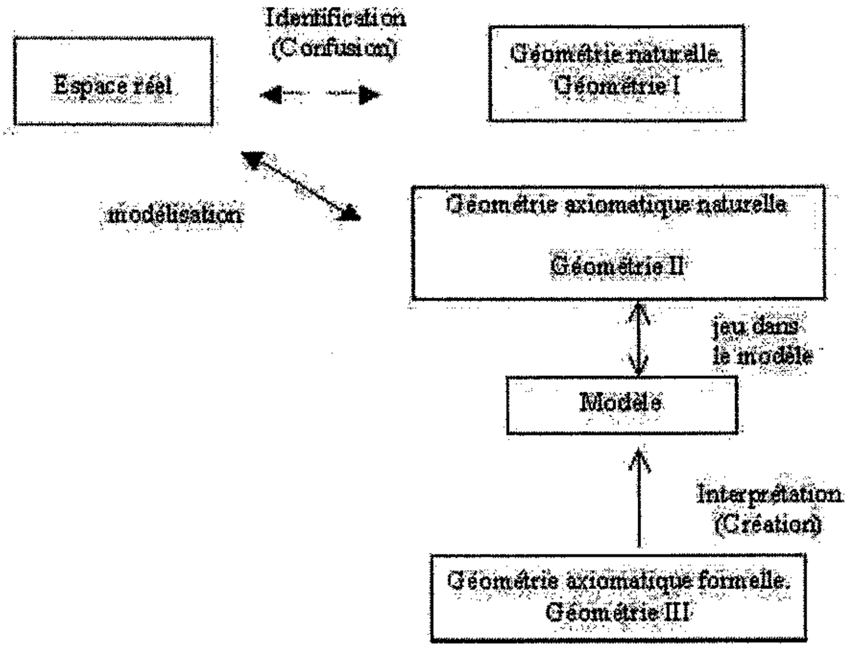
- Dans un deuxième sens, intéressant dans une perspective d'enseignement, il caractérise les exemples significatifs *(examplar)* qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique du champ disciplinaire.

Le passage d'un paradigme à l'autre s'opère par une véritable rupture, une révolution.
Une autre façon de considérer ces paradigmes est de les envisager dans une problématique de la géométrie comme modélisation de l'espace suivant le schéma suivant :



Mais en fait, chaque paradigme met en place des rapports différents de la géométrie avec l'espace d'une part, le modèle et le processus de modélisation d'autre part. On peut représenter ces diverses relations sous la forme suivante :

Articulation entre les géométries, espace réel et modèle.



III. Au carrefour des deux recherches : les Petites Provocations Didactiques

1. Ce que sont les PPD

Nous appellerons PPD des situations de formation relativement brèves, qui s'appuient sur un contenu mathématique et doivent surprendre suffisamment les étudiants pour les conduire à interroger leurs conceptions sur certains domaines des mathématiques. Ces situations s'insèrent dans les stratégies de transposition qui visent à expliciter un savoir didactique, elles peuvent s'appuyer sur une phase d'homologie.
Dans les deux exemples de PPD qui suivent, le savoir en jeu pour les étudiants porte sur l'explicitation des différents paradigmes géométriques.

2. Construction d'un trapèze

Texte donné aux étudiants PE1

> *Construire un trapèze convexe dont les côtés mesurent 8 cm, 7 cm, 5 cm, et 2 cm*
> *Combien y a t-il de solutions ? Justifiez*

1.1.9 a. Analyse mathématique

Ce problème de construction, a priori non immédiat, nécessite une analyse de la figure à obtenir. Si les instruments utilisés sont la règle et le compas (les quatre longueurs de départ étant données), le problème se transforme en une question sur la constructibilité du trapèze. Il est alors commode de faire apparaître des triangles dont les longueurs puissent se déduire des longueurs données. Ce qui amène à deux transformations possibles pour une meilleure

étude[35] : la construction d'une sur-figure (le triangle obtenu en prolongeant les deux côtés non parallèles du trapèze) ou d'une sous-figure (un parallélogramme intérieur au trapèze) dont les mesures sont déductibles des mesures initiales (soit grâce au théorème de Thalès, soit grâce aux propriétés du parallélogramme).
Il y a **3 solutions** à une isométrie près : les trapèzes dont les couples de mesures de longueurs des côtés parallèles sont (8,2) ; (7,2) et (5,2).

1.1.10 b. Déroulement

Le choix des mesures des longueurs amène un certain nombre de PE1 à ne réussir la construction d'aucun trapèze, quels que soient les instruments utilisés. Quelques-uns sont sûrs que certains trapèzes n'existent pas. Par exemple pour le trapèze (8,7), ils tracent un premier segment, de longueur 8 cm, puis deux cercles dont les centres sont les extrémités de ce segment et les rayons deux autres longueurs fixées (par exemple 5 cm et 2 cm) ; ils utilisent ensuite un gabarit du dernier segment (ici 7 cm) qu'ils font glisser parallèlement au premier segment et constatent qu'il ne " touche " jamais exactement les deux cercles. D'autres découvrent ainsi " par hasard " comme ils le disent eux-mêmes, un trapèze solution.
Le professeur relance alors, si c'est nécessaire, le questionnement : pourquoi tel trapèze peut-il être construit et tel autre non ? Pourrait on prévoir la faisabilité du trapèze pressenti ?
Le regard des étudiants sur l'objet à construire change alors : l'objet doit être mieux anticipé. Or, pour anticiper, il est utile d'analyser l'objet fini, ce que permet le " dessin à main levée ", et de faire appel à des connaissances sur la constructibilité des figures, mais le problème est de savoir lesquelles. Les PE1 tentent d'introduire dans la figure dessinée à main levée des rectangles, mais cette approche n'aboutit pas car les nouvelles longueurs ne sont pas simplement déductibles des longueurs connues. Se construit alors la nécessité de faire apparaître des figures (dont on connaît des conditions de constructibilité)avec des longueurs déduites des longueurs données. Les deux procédures signalées plus haut apparaissent avec tout d'abord une prédominance du triangle comme sur-figure et une certaine difficulté à utiliser à bon escient le théorème de Thalès, puis par une sorte de repli, la procédure de découpage en parallélogramme et triangle. La recherche de la constructibilité du trapèze se poursuit, soit dans un cadre géométrique, en testant effectivement la construction des triangles obtenus, soit dans un cadre numérique, en utilisant l'inégalité triangulaire.

1.1.11 c. Lien avec les différents paradigmes.

L'analyse des différentes postures des étudiants pendant la résolution de cet exercice permet au professeur de donner sens aux paradigmes géométriques I et II.
Le problème est posé apparemment en Géométrie I dans sa première partie, puisqu'il faut produire réellement des trapèzes en respectant des contraintes. Mais rester en Géométrie I, bien souvent, ne suffit pas à résoudre le problème, en particulier quand les instruments de tracé sont imposés. Il est nécessaire de changer de paradigme pour conclure à l'existence pratique de l'objet : sont en jeu le paradigme de la Géométrie I, où l'existence de l'objet est validée par le contingent et les instruments, et le paradigme de la Géométrie II, où l'existence de l'objet est validée par la référence à des propriétés arrêtées et textuelles dans un cadre axiomatique.
Cet exercice permet de préciser le contrat implicite du concours et d'attirer l'attention des étudiants sur l'importance du rôle du contrat didactique dans les changements de paradigmes. Le candidat PE au concours est plutôt évalué en géométrie II, bien que son rôle de professeur des écoles soit de faire travailler les élèves en Géométrie I. Les attentes concernant les élèves

---

[35] On reconnaît là ce que DUVAL a appelé une approche opératoire de type méréologique de la figure.

du primaire sont situées en Géométrie I ; la Géométrie II est plutôt du ressort du Second Degré.
Il est à noter que, dans cet exercice, le changement de paradigme nécessaire à la recherche de l'existence de solutions nourrit aussi une technique de construction, donc fournit la solution en Géométrie I. Ce n'est pas toujours le cas, comme nous le verrons dans l'exemple qui suit. Il n'y a donc pas lieu de hiérarchiser les paradigmes géométriques.

3. Construction d'un cercle dont un arc de cercle est donné.

Dans un premier temps, quatre arcs de cercle (280°, 180°, 125° et 55°) de diamètres différents sont donnés sur une feuille de papier. Les étudiants doivent construire le cercle entier.

1.1.12 a. Analyse mathématique.

Le problème se situe dans l'espace des objets et la tâche est pratique. Le cercle, connu en partie, apparaît comme un dessin. Pour résoudre ce problème, les étudiants peuvent utiliser des connaissances issues des différents paradigmes géométriques.
En Géométrie I, il peut s'agir de savoir-faire pratiques parfois non mathématiques, comme le pliage ou le report d'arcs de cercle décalqués, puis reportés plusieurs fois.
En Géométrie II, il est possible de construire les médiatrices de cordes tracées sur les arcs ou d'utiliser la propriété des angles droits inscrits dans un demi-cercle.
Dans ce cas, la Géométrie II joue le rôle d'une technologie pour des techniques utilisées en Géométrie I.

1.1.13 b. Déroulement et PPD.

Le problème n'est pas difficile et apparaît comme un problème de révision. Cependant, la grande hétérogénéité des étudiants, futurs professeurs d'école, permet de mettre en œuvre un petit conflit socio-cognitif entre les étudiants se référant soit à la Géométrie I soit à la Géométrie II.
Ainsi, on voit des étudiants utiliser leur équerre pour tenter d'inscrire l'angle droit dans le cercle, et cela fonctionne bien pour les arcs supérieurs à 180°. Ces étudiants sont souvent incapables de justifier cette technique ; ils travaillent en Géométrie I. A ce stade, les étudiants raisonnant en Géométrie II et utilisant la construction avec les médiatrices sont sûrs de leur position et simplement étonnés des procédures utilisées par leurs collègues.
Une fois, la procédure experte usuelle comprise par tout le monde, nous proposons une PPD avec une nouvelle consigne : indiquer le rayon du cercle construit sur l'arc 55°. Il existe une grande variété de mesure pour ce rayon, avec une amplitude relative importante. Les étudiants essaient de trouver des justifications à ces différences et ils arrivent à la conclusion d'une sorte d'inadaptation de la théorie à la pratique mise en jeu ici.
La construction avec les médiatrices se montre alors comme une construction théorique sur les objets idéaux que sont les figures de la Géométrie II.
Le but de cette situation et d'autres semblables est de mettre en évidence les différents rapports aux objets créés par les différentes Géométries. Elle vise aussi à bien montrer que chaque Géométrie a sa spécificité et son champ d'application, il n'y a en pas une supérieure à l'autre intrinsèquement : elles ne sont pas définies pour résoudre les mêmes types de problèmes.

IV Des pistes de travail.

Une fois dégagé un cadre théorique qui met bien en évidence la diversité des approches de la géométrie élémentaire enseignée, la recherche doit préciser l'usage de ce cadre au niveau didactique. Les PPD sont une voie explorée pour lever certaines ambiguïtés propres à la formation des enseignants.
Actuellement nous explorons deux pistes suggérées par les premiers exemples que nous avons présentés : le travail sur l'approximation et la maîtrise des effets de transposition. Dans le premier cas, nous cherchons des situations de transition entre paradigmes et l'étude des situations d'approximation en géométrie, traditionnellement négligée, semble prometteuse. Nous renvoyons le lecteur à notre contribution à l'école d'été et aux articles qui détaillent cette intervention[36]. Dans le deuxième cas, pour définir la nature de la dénaturation éventuelle produite par les étudiants à la suite de nos PPD, il apparaît nécessaire de mettre en place des études plus fines sur ces effets de transposition : cette étude (qui repose également sur la pratique des écrits réflexifs) est engagée en collaboration avec J.C RAUSCHER.
D'autre part, notre recherche nous a permis de dégager des leviers pour l'apprentissage qui semblent également pertinents au niveau des élèves à l'école primaire et au Collège : le rôle des constructions et de la gestion de l'approximation dans ce type d'activités. Il s'agit cette fois de gérer au niveau des élèves la transition des paradigmes en assumant de développer de manière approfondie des exercices relevant de la Géométrie I.

[36] HOUDEMENT et KUZNIAK (2002) Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. 349-356 *Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques,* Corps (août 2001) ;t "Approximations géométriques" . *L'Ouvert n°105.* Strasbourg et . (à paraître 2003) Quand deux droites sont " à peu près " parallèles ou le versant géométrique du " presque " égal. *petit x.* Grenoble : IREM de Grenoble.