

Questions didactiques liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.

*Sophie Gobert-Sanou,
IUFM d'Aix-Marseille & DIDIREM, université Paris VII*

Introduction

Le travail de thèse présenté ici s'intitule " **Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire** " ¹³.

A l'origine de cette recherche, une question : qu'est-ce que faire de la géométrie à l'école élémentaire ? Et plusieurs constats : au niveau du collège et du lycée, les apprentissages en géométrie requièrent des compétences et un certain bagage de connaissances, pouvant être prises en charge dès l'école élémentaire ; elles relèvent de l'articulation de deux espaces, l'espace sensible et l'espace géométrique ; l'école élémentaire est le lieu et le moment privilégié dans les apprentissages des élèves pour l'expérimentation dans l'espace sensible.

Ceci nous a amenée à vouloir analyser ce qui est en jeu dans les activités dites géométriques proposées à ce niveau de la scolarité, essentiellement du point de vue des interactions des élèves avec les situations. Pour poser des questions de recherche, et tenter quelques éléments de réponse, nous avons utilisé des outils définis dans le cadre de la théorie des situations : les notions de milieu, de situation fondamentale, des concepts de didactique comme la dévolution ou l'institutionnalisation, et des outils développés par M-H. Salin et R. Berthelot ¹⁴, principalement les différentes problématiques qu'ils définissent pour l'étude des rapports des élèves à l'espace et à la géométrie : les problématiques pratique, de modélisation et géométrique.

Notre travail s'articule autour de trois axes de réflexion :

Le premier axe concerne l'usage des images en géométrie, du plan ou de l'espace, où il s'agit d'étudier comment l'enseignement prend en compte la problématique épistémologique et phénoménologique inhérente à cet usage. Cette étude permet de clarifier deux fonctions de l'environnement graphique, que l'on peut développer à l'école élémentaire : l'environnement graphique comme lieu d'observation, d'expérimentation de phénomènes géométriques, pour apprendre des propriétés géométriques ; et l'environnement graphique comme intermédiaire dans la modélisation géométrique de problèmes spatiaux.

¹³ Thèse réalisée sous la direction de Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Laboratoire DIDIREM, Université Paris 7 – Denis Diderot, soutenue le 18 décembre 2001.

¹⁴ BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse, Université Bordeaux I.

Le second axe de notre travail est orienté sur l'étude de l'ostension, pour tenter d'en définir des fondements objectifs et des moyens pour maîtriser son usage, dans le cadre didactique. La symétrie axiale et les patrons de solides servent de support pour aborder cette étude. Le troisième axe a porté sur une expérimentation à l'école élémentaire d'une situation de modélisation, modalité d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace.

Pour l'exposé d'aujourd'hui, nous développerons dans une première partie les éléments relatifs à l'ostension, pour voir en quoi elle peut être un procédé didactique maîtrisé. La seconde partie portera sur une présentation de la situation de modélisation expérimentée à l'école élémentaire, et les éléments de régularité dégagés dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu.

1^{ère} Partie : Ostension

Définition et insuffisances mentionnées dans des recherches antérieures

Nous reprenons une définition de U. Eco¹⁵ en l'adaptant au cadre didactique, pour définir l'ostension de la manière suivante :

L'ostension a lieu quand le maître choisit un objet ou un événement, dans le milieu de l'élève, qu'il utilise comme signe pour déterminer et exprimer à l'élève une certaine classe d'objets à laquelle le maître sait que cet objet appartient.

C'est un procédé répandu, qui s'utilise quotidiennement, à l'intérieur et hors du cadre didactique, efficace lorsqu'il fonctionne, puisqu'alors il permet une compréhension rapide d'une définition générale. Le problème à l'école, est qu'il ne fonctionne pas toujours, voire induit des dérives pouvant gêner les apprentissages des élèves et même y faire obstacle.

La théorie des situations a permis à un certain nombre de chercheurs¹⁶ de mettre en évidence des effets négatifs de l'ostension :

l'illusion d'une continuité entre ce qui est montré et les savoirs formulés ;

l'illusion d'une évidence, pour la compréhension de l'élève, du passage entre l'objet sélectionné par le maître à la classe d'objets qu'il va désigner ;

et surtout, l'absence de sens, construit autour des savoirs, dans la mesure où ils n'apparaissent pas pour les élèves comme des outils pour résoudre un problème posé.

Dans leur étude sur l'ostension¹⁷, M-H Salin et R. Berthelot repèrent une forme d'ostension classique, où le maître montre aux élèves ce qui est à savoir, désignée comme " assumée " car elle l'était dans les discours institutionnels d'une certaine époque.

¹⁵ ECO U. (1992) *La production des signes*, Livre de poche. " L'ostension a lieu quand un objet ou un événement, produit de la nature ou de l'action humaine (intentionnellement ou inintentionnellement), fait parmi les faits, est "sélectionné" par un individu et désigné pour exprimer la classe des objets dont il est membre. " p79.

¹⁶ Principalement : RATSIMBA-RAJOHN H. (1977) *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, DEA, Université Bordeaux 1 ; BERTHELOT R. et SALIN M-H. (1992) op. cit. ; FREGONA D. (1995) *Les figures planes dans l'enseignement de la géométrie*, Thèse, Université Bordeaux I, IREM d'Aquitaine.

¹⁷ Op. cit. Chapitre C-2 : Etude diachronique de l'utilisation de l'ostension dans l'enseignement primaire, p163-176.

Ils repèrent également une forme d'ostension " déguisée ", consistant à faire croire aux élèves qu'ils découvrent eux-mêmes ce qu'il y a à voir et à savoir dans le matériel ou les images soumis à leurs observations et manipulations.

Nous pouvons signaler une autre forme d'ostension déguisée, dans la gestion que fait le maître de situations à caractère adidactique pour lesquelles l'activité effective des élèves ne fait pas apparaître les connaissances visées ; leur formulation par le maître au moment de la synthèse se fait alors de manière ostensive.

Ces différentes formes d'ostension sont courantes dans les pratiques à l'école élémentaire, où les élèves travaillent beaucoup à partir de situations d'action, basées sur des manipulations de matériel, ou sur l'observation d'images.

Nous nous sommes intéressée à certaines de ces situations, pour examiner la possibilité d'un contrôle du procédé d'ostension, afin d'en faire un procédé didactique maîtrisé, et ainsi faciliter le travail des enseignants et par suite les apprentissages des élèves.

Evidemment, si cela est possible, ce procédé s'articule avec d'autres formes de situations d'apprentissage ; entre autres des situations à caractère adidactique, pour lesquelles les savoirs introduits par ostension peuvent être transformés en connaissances pour les élèves, pour agir sur ces nouvelles situations.

2. Nouvelle approche

Nous avons dégagé trois modes différents d'introduction ostensive des savoirs, avec une ostension contrôlée par le maître, notamment par le choix de certaines variables didactiques, et en liaison avec un milieu pour une situation adidactique ultérieure ou conjointe :

les savoirs introduits par les démonstrations¹⁸ visuelles,
les savoirs introduits comme contraintes pour une tâche,
les savoirs introduits comme constats d'observations dans l'environnement spatial ou graphique.

a) Les démonstrations visuelles, une forme d'ostension classique assumée

Une démonstration visuelle est une mise en scène où le maître montre des objets ou des actions sur ces objets, à partir de manipulations de matériel, pour définir des objets ou notions géométriques, et faire fonctionner ces définitions de façon opératoire.

Par exemple la manipulation d'un certain matériel permet de montrer des réalisations effectives d'une définition par pliage de la symétrie axiale, " deux dessins sont symétriques par rapport à un axe lorsqu'ils se superposent après pliage suivant cet axe ". Pour le matériel cité en annexe 1, le papier calque est nécessaire pour visualiser la superposition des deux dessins après pliage, élément au cœur de la définition ; le papier opaque est choisi pour visualiser l'image formée par l'ensemble des deux dessins et la ligne de pli. L'objectif d'un maître de cycle 3, réalisant cette démonstration visuelle, est de réactiver chez les élèves les images de symétrie qu'ils ont pu rencontrer, et de réintroduire les définitions dans un contexte le plus général possible, générant le moins de confusion possible sur ce que recouvre la notion.

Evidemment il y a des variables à prendre en compte dans le choix du matériel accompagnant la déclaration des savoirs. Pour cet exemple, l'usage du calque et du papier opaque, le fait d'avoir arrondi les bords du support papier, le choix d'une figure hexagonale sans côté

¹⁸ Le mot démonstration n'est pas utilisé dans son sens mathématique mais le sens courant de " action de montrer ".

parallèle ni perpendiculaire à l'axe, la multiplicité des exemples et la présence de contre exemples (non cités en annexe), constituent les principaux choix relatifs à cette démonstration visuelle.

Citons un autre exemple, pour introduire (ou réintroduire) la définition des patrons de solides : le maître peut disposer de solides. Il annonce aux élèves qu'ils vont apprendre une façon particulière de construire ces objets, consistant à " dessiner à plat, toutes les faces du solide, juxtaposées les unes aux autres, de façon à obtenir le solide, après découpage du contour du dessin et pliage suivant ses segments ". Le maître montre ensuite de tels dessins, et effectue les manipulations de montée en volume pour visualiser l'obtention du solide. Il montre et manipule également un contre exemple, où l'organisation des faces est pourtant proche d'un patron présenté précédemment.

Pour l'exemple de matériel proposé en annexe 2, les variables pour l'ostension sont le choix du solide, sa nature, son format, sa couleur, les patrons choisis, et la présence d'un contre exemple. Les choix faits sont déterminés par des organisations de la position des faces assez régulières, sans toutefois être prototypiques, cela pour ne pas focaliser l'attention des élèves sur les images utilisées, mais sur les actions effectuées à partir de ces images. Ainsi pour la définition que le maître donne de la notion de patron, les aspects principaux sont mis en évidence : " un patron, c'est un dessin où toutes les faces du solide sont représentées, juxtaposées les unes aux autres, pas n'importe où, mais de telle sorte qu'après découpage du contour et pliage suivant les segments, on obtienne le solide ".

Il est nécessaire, après ce premier moment d'ostension, que les élèves s'approprient la définition donnée pour apprendre à fabriquer ou reconnaître des patrons de solides. Pour cela le maître doit proposer aux élèves des situations d'action et de formulation associées à la démonstration visuelle, situations pour lesquelles le milieu objectif contiendra alors les savoirs permettant aux élèves de réguler leurs actions et de valider leur travail.

De façon plus générale, caractérisons ce type de présentation ostensive des savoirs :

Une démonstration visuelle consiste à mettre en scène un matériel et des manipulations de ce matériel, en jouant sur des variables, didactiques et non didactiques, de sorte que le maître dit clairement aux élèves ce qu'il veut que les élèves voient dans ce qu'il leur montre.

Dans une démonstration visuelle, les connaissances visées sont formulées déjà comme des savoirs.

Les élèves sont dans un rapport passif au milieu, puis dans un rapport effectif lors de situations d'action et de formulation associées à la démonstration visuelle.

Savoirs introduits comme contraintes pour une tâche

Nous pouvons envisager un second mode d'ostension dérivé du précédent qui consiste à placer les élèves directement dans ces situations d'action et de formulation, où le milieu objectif contient les connaissances visées dans la mesure où elles sont formulées comme contraintes pour la tâche ; elles seront ensuite reformulées à la fin de la situation comme éléments d'institutionnalisation.

Par exemple, considérons une autre façon d'introduire la définition des patrons de solides : le maître propose aux élèves une tâche de mise à plat de solides, construits avec du matériel d'assemblages de pièces polygonales¹⁹, mise à plat devant respecter certaines contraintes : " les faces doivent être assemblées les unes aux autres, en un seul morceau, de façon à pouvoir reconstituer le solide ". A la fin de la situation, après l'activité des élèves, le maître

¹⁹ du type Clix-géométrie, Ed. CELDA.

peut introduire le vocabulaire et institutionnaliser la définition des patrons comme des mises à plat de solides respectant ces contraintes.

Prenons un autre exemple concernant à nouveau la symétrie axiale, une situation pour définir ce qu'est "une figure avec un axe de symétrie". Considérons l'activité suivante : dans une première étape, les élèves ont à produire des dessins réalisés avec un certain gabarit, en repassant le contour du gabarit une première fois, puis à nouveau en juxtaposant le gabarit au premier contour suivant un côté de même longueur, avec la possibilité de retourner ou non le gabarit. Le choix du gabarit est évidemment déterminant pour la pertinence de la situation par rapport à l'objectif visé. Pour les configurations présentées en annexe 3 nous avons choisi un gabarit polygonal à cinq côtés dont trois ont la même longueur.

Le maître indique suite à la mise en commun des productions, que certains dessins ont une propriété particulière, "quand on les plie suivant le côté commun aux deux contours, les deux parties du dessin se superposent exactement". Pour visualiser ce phénomène il utilise du calque ou la semi-transparence du papier blanc à la lumière ; il peut alors dans une deuxième étape engager les élèves à produire de tels dessins. Suite à la mise en commun des productions pour cette nouvelle tâche (les images avec axe de symétrie), le maître peut institutionnaliser la notion et introduire le vocabulaire, en reformulant une partie de la consigne : "Quand on plie un dessin et que les deux parties de chaque côté du pli se superposent exactement, on dit que le dessin a un axe de symétrie. C'est la ligne de pliage."²⁰

Les savoirs introduits comme constats d'observations dans l'environnement spatial ou graphique.

Dans les deux modes d'ostension précédents, les démonstrations visuelles, ou les savoirs introduits comme contraintes pour une tâche, les connaissances visées pour l'apprentissage sont présentées d'entrée dans la situation didactique. Ce n'est pas le cas pour le troisième mode d'introduction ostensive des savoirs, abordé maintenant.

Il s'agit de situations d'observation et de manipulation de matériel ou d'images dans lesquelles les connaissances visées découlent de constats réalisés dans l'environnement spatial ou graphique, constats reformulés comme propriétés géométriques des dessins ou des objets représentant les objets mathématiques.

Un exemple de ce mode d'ostension dans le cadre spatial, peut être extrait du dispositif de M-P. Rommevaux sur le discernement des plans dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle²¹. Les élèves travaillent à partir d'une maquette d'un cube transparent, ils doivent représenter une section du cube : successivement sur cette maquette, sur une représentation en perspective du cube, et en vraie grandeur. La section du cube est définie par un plan passant par trois points situés sur trois arêtes distinctes du cube. Les positions des points varient au cours des reprises de cette tâche, rendant de plus en plus complexe l'activité cognitive et mathématique des élèves. Une propriété géométrique facilite la réalisation de la tâche : la propriété de parallélisme des intersections par un même plan de deux faces parallèles²². Cette connaissance, utile à la résolution, apparaît pour les élèves dans leurs

²⁰ Certains aspects liés à la contextualisation/décontextualisation dépassent le cadre de cette situation, et sont donc à prendre en charge au cours d'une progression.

²¹ ROMMEVAUX M-P. (1997) *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*, Thèse, Université L. Pasteur, Strasbourg I, Ed. IRMA.

²² "Lorsqu'un plan coupe deux faces parallèles, les droites intersections de ce plan et de ces faces sont également parallèles."

observations à partir des manipulations du cube et des premiers tracés qu'ils font sur la maquette. Le milieu est un milieu allié qui suggère les connaissances que l'on veut institutionnaliser comme des savoirs. En effet ce constat est alors confirmé par l'enseignant, et devient un élément d'institutionnalisation, servant ensuite dans les reprises de cette tâche comme moyen de résolution ou argument de validation.

Prenons un autre exemple dans l'environnement graphique cette fois-ci, concernant à nouveau la symétrie axiale. Certaines des configurations données en annexe 4 suggèrent les propriétés de la symétrie axiale nécessaires pour que les figures soient symétriques par rapport aux axes marqués ; par exemple à partir de la D, la propriété que "deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être retournées l'une par rapport à l'autre de chaque côté de la droite", ou à partir de la G que "deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être situées à la même distance de cette droite".

Ce support permet de construire une situation d'argumentation, basée sur l'observation d'images, où le milieu suggère les propriétés des images qui traduisent l'absence de propriétés géométriques. Cela permet ainsi de formuler ces propriétés de la symétrie axiale, et de les institutionnaliser. Elles peuvent ensuite servir de moyens de résolution ou d'arguments de validation, pour d'autres situations de reconnaissance ou de constructions de figures symétriques.

Remarquons que d'autres configurations ne permettent pas si clairement d'établir une propriété déterminée de la symétrie axiale, c'est le cas de la C ou de la E. Elles constituent des contre exemples à l'efficacité de ce type d'ostension.

Conclusion

Nous venons de voir trois modes différents d'introduction ostensive des savoirs : les savoirs introduits par les démonstrations visuelles, les savoirs introduits comme contraintes pour une tâche, les savoirs introduits comme constats d'observations dans l'environnement spatial ou graphique²³.

Pour ces trois modes, l'efficacité de l'ostension pour la compréhension des élèves va dépendre de la façon dont le maître fixe les variables, à la fois didactiques et celles liées à la mise en scène des concepts en jeu. Ce qui guide le choix du maître doit être la recherche du moins d'ambiguïté possible sur ce que le maître veut montrer, et doit répondre à quelques conditions nécessaires que nous rappelons malgré leur caractère d'évidence : le matériel ou les images utilisés doivent

montrer ce que le maître veut dire, et ne pas montrer ce qu'il ne veut pas dire, éviter le décalage entre ce qui est perçu par les élèves et ce qui est à savoir, et être tel que ce qui est à voir et à savoir soit bien visible.

Pour conclure, résumons les conditions préalables pour que le mode ostensif soit adapté à une présentation constructive des savoirs, et permette la dévolution du milieu objectif de situations d'apprentissage, ou d'un milieu pour la validation par des savoirs de géométrie :

Les situations doivent porter sur des savoirs admettant des réalisations spatiales ou graphiques effectives.

Le maître doit créer un milieu dans lequel les connaissances visées sont suggérées ou réalisées.

²³ Il y aura lieu de s'interroger, dans les recherches ultérieures, sur ce qui caractérise ces savoirs introduits selon ces modes, et de cerner "quel mode pour quel savoir".

Il fixe les variables de sorte que les savoirs soient clairement identifiables, avec le moins d'ambiguïté perceptive possible.

Les élèves doivent être dans un rapport effectif à ce milieu.

2^{ème} partie : étude d'une situation de modélisation

Passons maintenant à la seconde partie, concernant l'étude expérimentale d'une situation de modélisation.

Questions de recherche

Rappelons que l'on peut envisager deux aspects différents de la géométrie dans les rapports qu'elle entretient avec l'espace sensible : la géométrie comme discours consistant sur l'espace ; et la géométrie comme modèle de l'espace, donc moyen de résoudre des problèmes spatiaux. C'est ce second aspect qui a retenu notre attention dans ce travail de recherche, pour tenter de le cerner du point de vue des situations didactiques.

Pour étudier les situations de modélisation, c'est à dire les situations pour lesquelles un problème se pose dans l'espace sensible, et que la géométrie permet de représenter et de résoudre, nous avons dégagé trois questions principales :

Quel milieu construire pour permettre aux élèves d'apprendre que les connaissances de géométrie sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux, et leur permettre d'en maîtriser cet usage ?

Quelles sont les composantes du milieu objectif avec lesquelles les élèves interagissent ? Et quelles sont les variables pertinentes qui modifient les interactions des élèves avec le milieu ?

Comme s'articulent, et comment articule-t-on les connaissances spatiales spontanément développées par les élèves dans un rapport pratique à la résolution d'un problème, et les connaissances géométriques sous-jacentes à cette résolution ?

Parmi les problèmes spatiaux que la géométrie permet de modéliser, notre choix a porté sur celui d'une mesure inaccessible, du type de la situation des drapeaux²⁴, modalité d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace.

Rappelons qu'une situation fondamentale est "un paradigme de recherche [...] une métaphore qui permet en jouant sur les variables d'engendrer plusieurs situations"²⁵, "elle est caractéristique d'une connaissance et calculée d'après elle"²⁶. Les concepts ou connaissances dont il est question dans cette citation peuvent être spécifiquement des concepts géométriques, ou bien des connaissances spatiales non formalisées en géométrie mais utiles pour l'apprentissage de la géométrie, ou bien encore des connaissances liées à un certain rapport à l'espace et à la géométrie.

C'est selon cette dernière optique que nous avons travaillé, autour d'une situation appelée "Terrain et tige" pour laquelle nous avons mené une expérimentation à l'école élémentaire, dans une classe de CM2.

²⁴ situation décrite dans BROUSSEAU G. et N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux ; et dans SALIN M-H. et BERTHELOT R. (1992) chapitre B-7, p130-133.

²⁵ PERRIN-GLORIAN M-J. (1994) "Théories des situations didactiques : naissance, développement, perspectives" dans *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

²⁶ BROUSSEAU G. Intervention au séminaire DIDIREM, janvier 1999.

La situation " Terrain et tige "

La situation " Terrain et tige " peut se décrire en tant que situation objective de la manière suivante : " Une tige rectiligne est située à l'intérieur d'un terrain polygonal, ses deux extrémités sont situées sur deux côtés consécutifs du terrain. Il s'agit de déterminer une mesure de la longueur de la tige, sans entrer dans le terrain, et sans passer quoi que ce soit au-dessus du terrain. "

La situation de référence proposée aux élèves consiste à travailler lors d'une première séance dans la cour de récréation de l'école, avec des terrains d'environ huit à douze mètres carrés, représentés à la craie au sol, et des baguettes en bois pour matérialiser les tiges. Dans la consigne il est demandé d'imaginer des murs transparents pour signifier l'impossibilité d'entrer sur le terrain. Ces choix sont justifiés par l'hypothèse que la crédibilité spatiale du problème participe à la dévolution de la situation.

Les éléments qui font de " Terrain et tige " une situation d'apprentissage articulée sur la situation de référence précédente, sont la variation de la forme du terrain, et l'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon²⁷. Précisons les maintenant.

o La forme du terrain est une variable qui a priori agit essentiellement sur la dévolution du problème, et sur les connaissances mises en jeu par les élèves. Nous avons choisi de travailler initialement avec des terrains de forme rectangulaire (sur les deux premières séances) pour une première appréhension du problème par les élèves dans un contexte assez proche des configurations habituelles rencontrées, leur permettant ainsi de se connecter avec des procédures géométriques connues, comme par exemple la symétrie axiale, ou la reproduction d'un triangle rectangle.

Le changement de forme du terrain en quadrilatère quelconque (sur les trois autres séances) favorise la mise en évidence de propriétés géométriques existantes mais non apparentes dans le cas du terrain rectangulaire ; par exemple pour la symétrie, la perpendicularité à l'axe ; ou pour la reproduction du triangle, la prise en compte de l'angle. Cette déstabilisation des procédures efficaces semble nécessaire pour les questionner afin de mettre en évidence les propriétés géométriques sous-jacentes.

o Concernant l'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon, nous avons fait l'hypothèse que cette variable agit essentiellement au niveau des rapports des élèves à l'espace et à la géométrie, de façon favorable pour leur entrée dans une problématique de modélisation. Plus précisément, le recours aux dessins sur papier peut rendre nécessaire l'explicitation des connaissances utilisées dans le cadre spatial, d'un point de vue géométrique, et permettre ainsi la dévolution aux élèves de l'environnement papier crayon comme représentation de l'espace géométrique.

Sans entrer dans les détails de l'analyse des travaux des élèves, analyse développée dans deux chapitres de la thèse, nous présentons ici les points dégagés dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu, points appelés " éléments de régularité " dans la mesure où nous faisons l'hypothèse qu'ils se retrouveraient dans l'analyse pour d'autres situations de modélisation.

Éléments de régularité dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu

Ces éléments sont rassemblés suivant trois axes :

²⁷ Présentation en annexe 5 des choix pour chacune des séances de l'expérimentation.

Les éléments de régularité liés à l'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon

Les éléments de régularité concernant l'articulation de la problématique de modélisation avec la problématique géométrique.

Les éléments de régularité concernant le caractère adidactique de la situation et les interventions du maître.

Eléments de régularité liés à l'articulation des environnements

Premièrement, les procédures de type géométrique apparaissent plus rapidement dans l'environnement papier crayon que dans l'environnement cour de récréation.

Deuxièmement, il existe dans l'environnement cour de récréation un autre rapport aux figures de géométrie, dans la mesure où les références spatiales deviennent celles de la position du sujet et non plus celles du support papier. Les phénomènes inhérents à l'environnement papier crayon, comme la prégnance des directions horizontale et verticale, n'apparaissent pas dans l'environnement cour de récréation.

Troisièmement, le contrôle par les élèves de leurs actions de résolution, des propriétés spatiales ou géométriques mises en jeu, des formulations des propriétés, ou même encore de l'usage des instruments, ce contrôle s'effectue en général par la vue, de la même façon dans les deux environnements papier crayon et cour de récréation. Pour reprendre des termes de la problématique pratique, les élèves contrôlent leurs actions "de manière empirique et contingente", que ce soit dans l'un ou l'autre des environnements, et ce rapport au cours du dispositif évolue peu, quel que soit l'environnement de travail.

Eléments de régularité concernant l'articulation de la problématique de modélisation avec la problématique géométrique.

Dans les situations de modélisation, l'explicitation des connaissances géométriques est relative à deux types d'argumentation : celle liée à l'usage d'une connaissance, c'est une validation interne, et celle liée à l'adaptation de cette connaissance pour la résolution du problème, c'est une validation externe.

Par exemple considérons une procédure de construction de parallélogramme pour trouver une mesure de la longueur de la tige (annexe 6) :

- la validation interne consiste en une justification que le quadrilatère construit est bien un parallélogramme. On utilise pour cela des propriétés caractéristiques du parallélogramme.
- la validation externe correspond par contre à la validation de cette construction comme permettant effectivement d'obtenir une mesure de la longueur de la tige. On utilise une propriété du parallélogramme, "les côtés opposés sont de même longueur".

Il semble que le rapport pratique des élèves aux figures entraîne une difficulté à donner du sens à la validation interne, parce que la reconnaissance du parallélogramme fonctionne sur le mode de l'évidence perceptive. Par contre la validation externe prend son sens par rapport au problème posé. Et pour cette validation les arguments géométriques sont accessibles directement aux élèves, ce sont des propriétés des figures qui ne nécessitent pas le détour par d'autres propriétés géométriques.

C'est au travers de ces questions de validation que la problématique géométrique croise, à un niveau élémentaire, la problématique de modélisation.

Eléments de régularité : adidacticité et interventions du maître

Dans l'étude menée, un constat s'impose : bien que les élèves soient dans une problématique pratique, ils font intervenir des arguments de nature géométrique, mais souvent partiellement ou de façon instable. Ils oublient ou il leur manque les connaissances géométriques qui leur permettraient de contrôler leur rapport au milieu (par exemple les

propriétés sur les quadrilatères, ou sur la symétrie axiale, ou sur les angles). En fait, le milieu adidactique ne suffit pas pour renvoyer à l'élève les rétroactions nécessaires pour qu'il modifie, adapte, ou formule les connaissances en jeu dans la situation. Par conséquent l'intervention du maître est indispensable pour faire évoluer le milieu objectif de la situation en y introduisant les savoirs de géométrie qui permettent ces rétroactions.

Il est donc à envisager que ces savoirs fassent déjà partie du milieu objectif de la situation, en étant déjà institutionnalisés dans des situations d'apprentissage antérieures, et le maître peut alors les rappeler ; ou bien que le maître les introduise dans le dispositif au moment où il faut, qui n'est pas le même pour tous les élèves. Pour ceux proches de ces connaissances dans leurs procédures c'est lors de la phase de recherche ; pour d'autres c'est au moment de l'exposition de ces connaissances lors de la mise en commun ; et pour d'autres encore, c'est lors de la synthèse, de l'institutionnalisation " officielle " de ces connaissances.

Nous concluons donc à l'importance des reprises des situations pour que tous les élèves soient à un moment donné en interaction avec ces savoirs dans le milieu, lors d'une phase adidactique, pour leur permettre de transformer ces savoirs en connaissances dans d'autres situations plus générales, didactiques ou non didactiques.

Conclusion

En conclusion de cette seconde partie, il apparaît raisonnable d'affirmer que pour une situation de modélisation donnée, la reprise et l'articulation des situations basées sur le jeu entre l'environnement spatial et l'environnement graphique, paraît être un élément fondamental, pour la compréhension, l'appropriation et la maîtrise de l'usage des connaissances et des savoirs de géométrie utiles à la résolution de problèmes spatiaux.

Conclusion générale de l'exposé

L'ensemble de ce travail nous amène à considérer une approche de la géométrie à partir des situations, plutôt qu'à partir d'une organisation axiomatique, déductive, ou par corpus de connaissances, ceci à cause de la prégnance de la problématique pratique à ce niveau de la scolarité.

Nous distinguons les situations suivant la place qu'y occupe le géométrique pour les tâches considérées :

des situations de familiarisation avec un environnement géométrique (comme on en trouve souvent en maternelle par exemple)

des situations pour définir des notions ou établir des propriétés géométriques (par exemple les situations d'ostension maîtrisée que nous avons proposées)

des situations pour argumenter par l'usage de propriétés géométriques (pour une entrée dans la problématique géométrique)

des situations pour utiliser des connaissances de géométrie pour la résolution de problèmes spatiaux (" Terrain et tige " en est un exemple)

et des situations non étudiées ici mais à prendre en compte, celles pour apprendre des aspects techniques liés à l'apprentissage de la géométrie (l'utilisation d'instruments, ou la connaissance d'algorithmes de constructions, par exemple).

Cela permet de cerner où se trouve le géométrique dans les activités considérées, et de percevoir également la multiplicité des procédés didactiques pour atteindre ces objectifs.

Bien du travail reste à faire pour répertorier et analyser ces diverses situations, et se poser les questions pertinentes pour leur dévolution dans le cadre de la formation des maîtres.

L'ensemble de ces situations participe à l'élaboration d'un milieu pour l'apprentissage de la géométrie à l'école élémentaire, élaboration qui reste encore à approfondir.

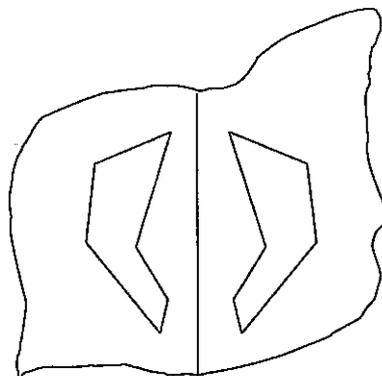
ANNEXE 1

Sur un format A3

Un exemplaire sur papier calque

Un exemplaire sur papier opaque

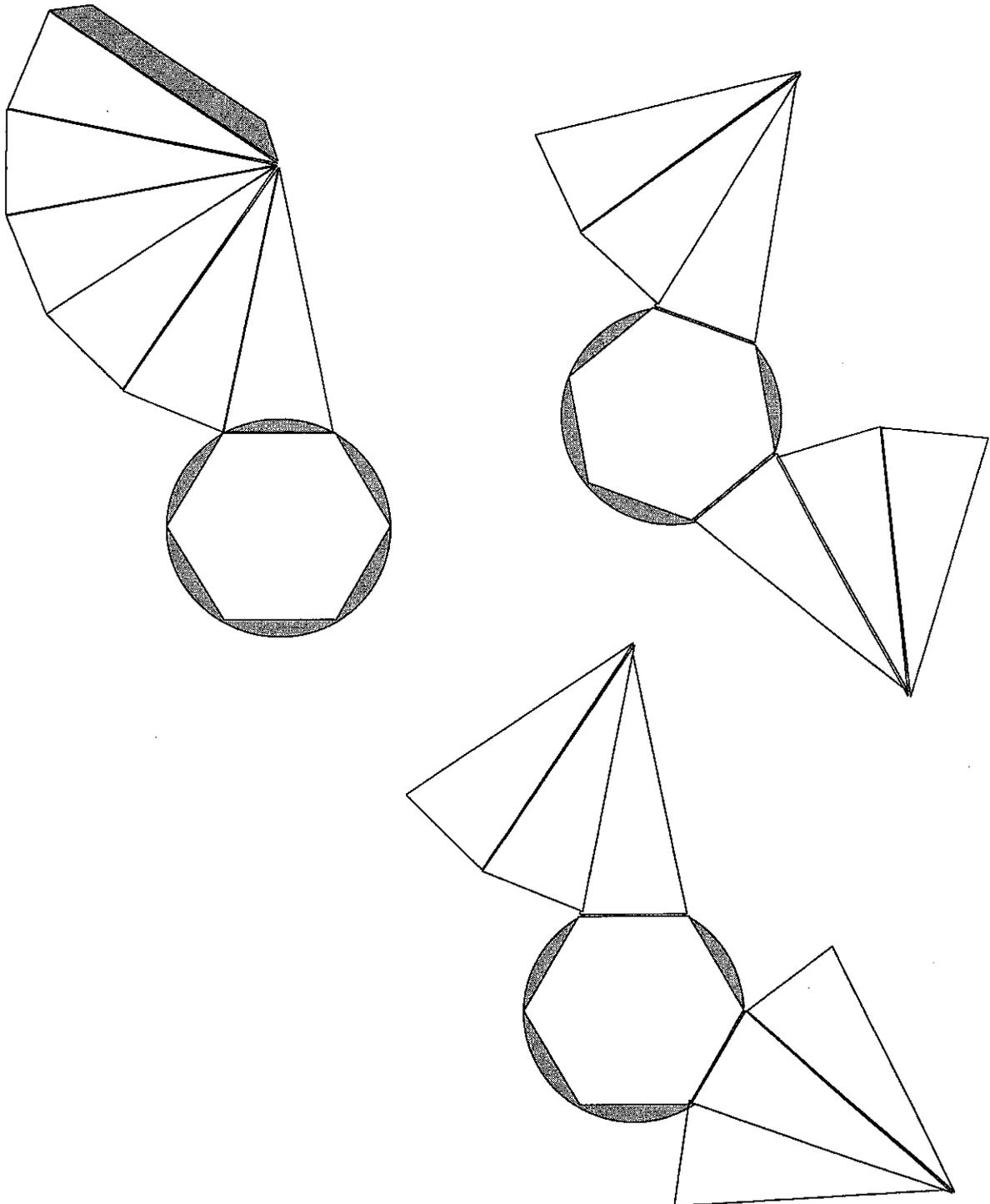
Le trait représente la ligne de pli marquée
et repassée en trait de couleur sur le papier



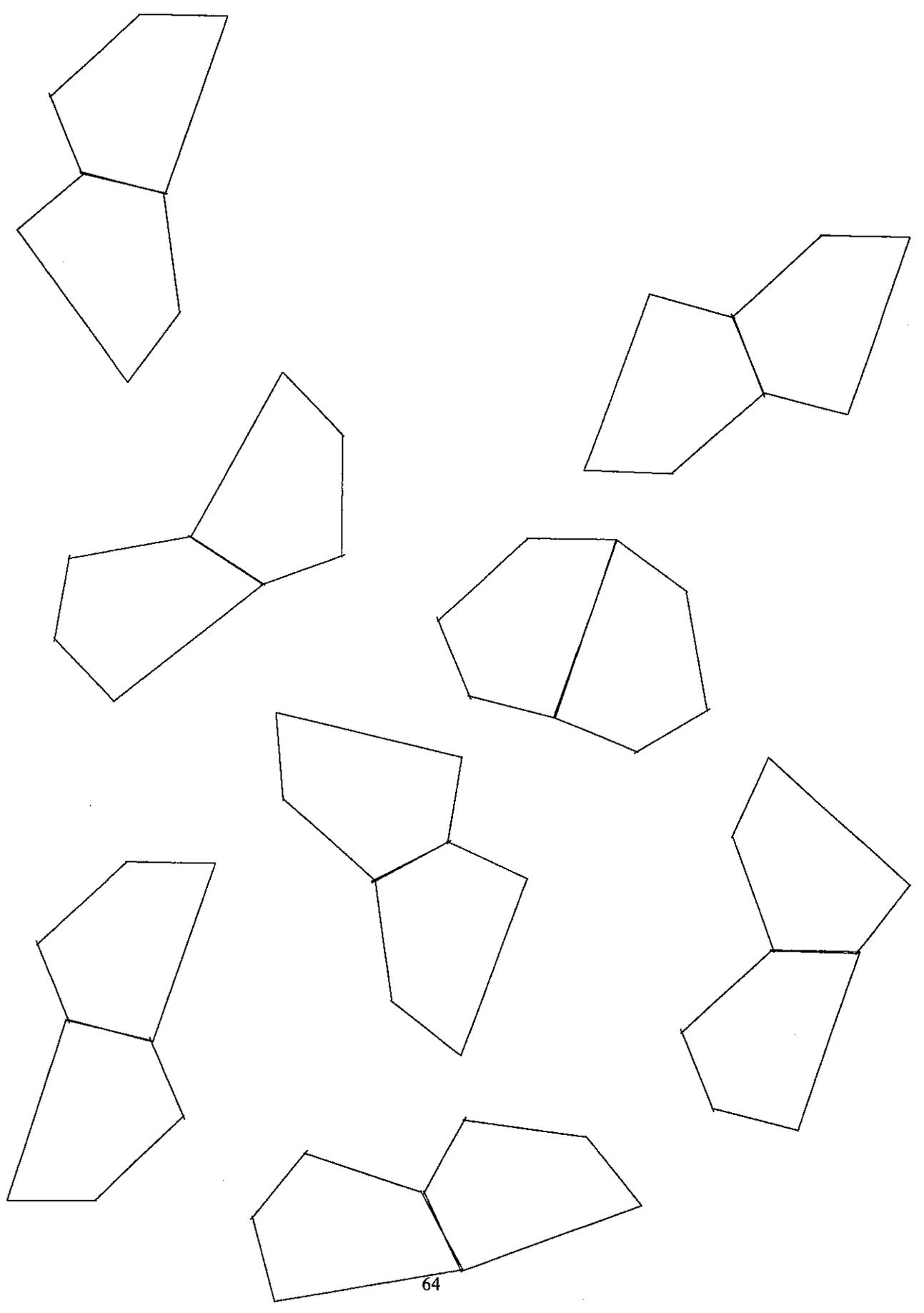
ANNEXE 2

Matériel utilisé pour “ la démonstration visuelle ” de définition d’un patron de solide.

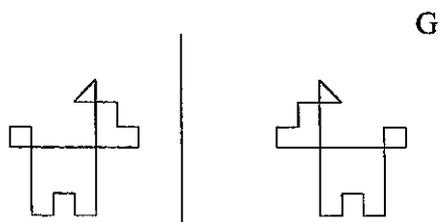
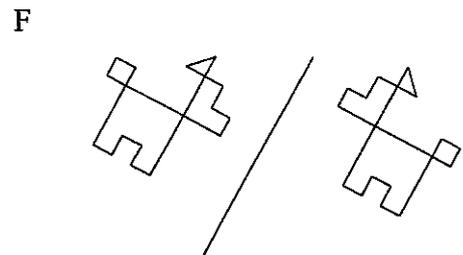
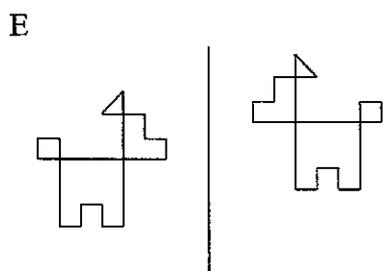
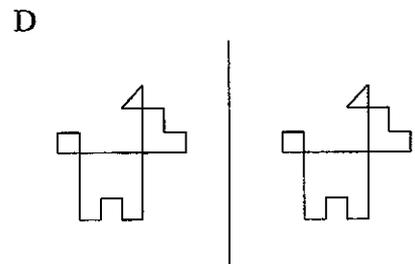
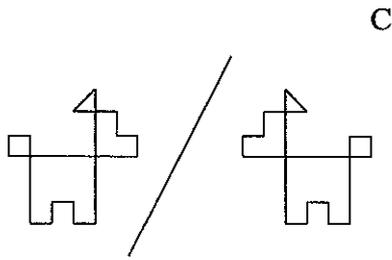
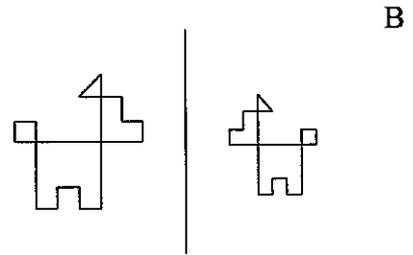
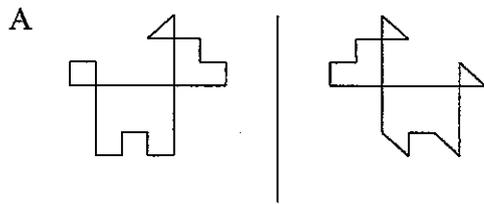
Un solide (papier canson épais, plastifié, avec les arêtes repassées au stylo épais pour une bonne visibilité) : pyramide à base un hexagone régulier, de mêmes dimensions que celles utilisées pour la constructions des patrons. Diamètre du cercle pour l’hexagone 15 cm, et longueur des autres côtés des triangles 17 cm. En grisé ce sont des éléments visibles sur le matériel, éléments techniques conservés permettant de maintenir les faces pour faciliter les manipulations.



ANNEXE 3



ANNEXE 4



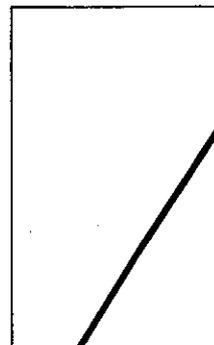
ANNEXE 5

1.1.1 Première séance

DANS LA COUR DE RÉCRÉATION
DES QUADRILATÈRES RECTANGLES

1.1.2 Deuxième séance

DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES RECTANGLES



1.1.3 Troisième séance

DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

Forme fixée du quadrilatère
sur papier (dans la cour,
formes variées)

1.1.3.1 Quatrième séance

1^{ère} Partie

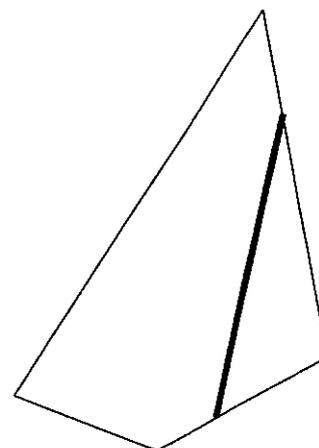
DANS LA COUR
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

2^{ème} Partie

DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

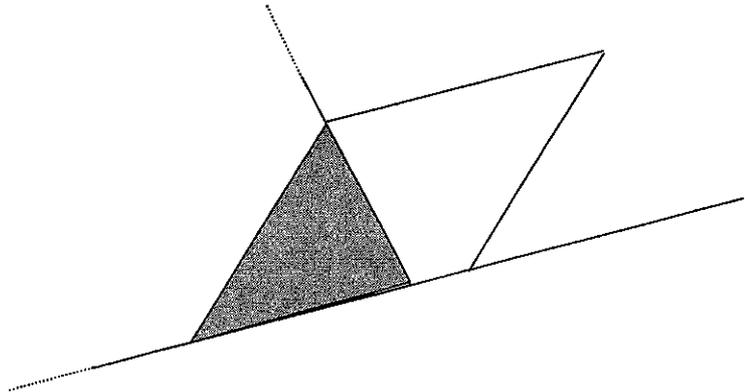
Cinquième séance

EN CLASSE, AU TABLEAU
éléments de reprise et synthèse



Articulation de la problématique de modélisation avec la problématique géométrique

Le triangle grisé est délimité par la tige et les parties des deux côtés du terrain

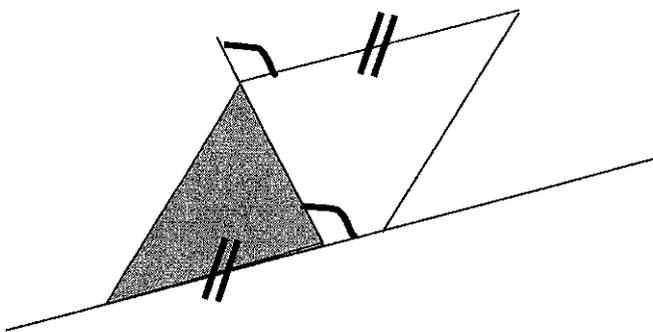


1.1.3.2

1.1.3.3

1.1.3.4 Validation interne

1.1.4 On a construit un parallélogramme



1.1.1.1.1 Validation externe

1.1.1.1.2 On a une mesure de la longueur de la tige

