Questions sur la modalité outil des transformations géométriques dans l'enseignement. Le cas des problèmes de construction.

Neri Both Carvalho [*]
Université Fédérale de Santa Catarina, BRÉSIL
&
Madeleine Éberhard [**]
Laboratoire Leibniz, Grenoble

Présentation par Madeleine Éberhard de la thèse de Neri Both, soutenue le 23 Octobre 2001, intitulée "Le sort des problèmes de construction dans le contexte français de l'enseignement des transformations géométriques, au lycée dans les années 1990. Une étude didactique en classe de Seconde avec une approche des aspects fonctionnels utilisant Cabri-géomètre II ".

Problématique et cadre d'étude

Pour qui les compare aux programmes du Brésil, les programmes français pour l'enseignement de la géométrie mis en place à partir des années 1985 comportent deux singularités :

– Les transformations géométriques sont enseignées à tous les niveaux du secondaire ; il s'agit des isométries et des similitudes.

– Une place importante est donnée aux transformations pour l'étude de problèmes de géométrie, la mise en avant de l'aspect " outil " allant de pair avec le rôle central que les programmes entendent donner à la résolution de problèmes.

Le propos de Neri Both est d'étudier cette modalité " outil " au travers de l'étude de la place et du rôle, possibles ou réels, que tiennent les problèmes de construction dans l'enseignement des transformations.

Pourquoi ce choix des problèmes de construction ?

En effet, si les transformations géométriques et les problèmes de construction sont deux objets emblématiques de la géométrie et de l'évolution de son enseignement au cours du 20ème siècle en France, ces objets vivent deux destinées bien différentes. Actuellement dans le Secondaire, la présence des transformations à tous les niveaux constitue un *élément de stabilité de l'enseignement de la géométrie*. Les problèmes de construction apparaissent, eux, avec une présence discrète au niveau du lycée.

---

[*] Université Fédérale de Santa Catarina, BRÉSIL

[**] Laboratoire Leibniz, Grenoble

Un travail mené par Neri Both en 1997 dans le cadre d'un mémoire de DEA lui a fait rencontrer ces deux objets. Elle a observé des élèves de fin de Collège confrontés à des problèmes de construction susceptibles d'un traitement où symétries centrale et axiale avaient leur place. Leurs difficultés l'ont amenée à s'interroger sur l'enseignement du fonctionnement outil des transformations pour la résolution de problèmes.

Ayant pris la classe de Seconde comme poste d'observation pour étudier cette modalité outil, Neri Both choisit donc d'observer au travers du prisme des problèmes de construction. Ce choix introduit, bien sûr, les particularités de ce type de problèmes ; c'est l'effet *déviation*. Mais un effet *décomposition* peut permettre de capter certains aspects du fonctionnement des transformations.

Quelles sont les conditions qu'offre une étude en classe de Seconde ?

Dans les années 1990, l'aspect outil des transformations pour la résolution de problèmes est pris en compte par les programmes de Seconde. Une place est donnée aux problèmes de construction de manière explicite en Seconde. Les niveaux d'appréhension des transformations géométriques (Laborde et Grenier, 1987) rendent compte du contexte:

> " Une transformation géométrique peut être considérée :
>
> au niveau 1 - comme une relation entre deux figures géométriques ou une relation entre deux parties d'une même figure ;
>
> au niveau 2 - comme une application de l'ensemble des points du plan dans lui-même ;
>
> au niveau 3 - comme un outil fonctionnel à des fins de mise en évidence d'invariants. "

La classe de Seconde des années 1990 est celle du *passage* du niveau 1, celui de l'enseignemen au Collège, au niveau 2. C'est le lieu de *la première rencontre avec la notion de transformation ponctuelle*.

Déjà présente au Collège, la modalité outil des transformations pour l'étude de configurations devient *objet d'étude explicite* en Seconde. Ce statut apparaît avec deux nouvelles conditions, à savoir :

> - un *élargissement du corpus des problèmes* présentés avec une organisation en différents *types de problèmes*,
> - la *coexistence de différents outils de résolution*. Les outils configurations de base et transformations se mettent en place, ainsi que le calcul vectoriel.

Les caractéristiques du fonctionnement des transformations vont pouvoir être présentées, étudiées, voire distinguées ou rapprochées de celles de l'outil configuration. Plus généralement, le programme offre les conditions d'une concurrence entre problèmes étudiés ou entre outils mis en œuvre. Mais il présente aussi des *limitations à l'étude* de problèmes de construction. Les précisions, " pas d'étude systématique ", " aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible ", peuvent notamment indiquer que l'étude des problèmes de construction n'est pas une fin en soi.

Ces considérations sous-tendent l'hypothèse principale du travail engagé :

(H) La présentation des transformations comme outil d'étude des figures constitue une condition favorable pour la vie des problèmes de construction.

En retour, les problèmes de construction sont des conditions pour l'étude des propriétés des transformations.

Les principales questions avancées

D'abord : *Quel est le savoir qui vit en Seconde sur le fonctionnement outil des transformations pour la résolution des problèmes de construction ? D'où vient-il ? Comment s'est-il constitué ? A quels objets est-il associé ? Par quels corpus de problèmes ce fonctionnement peut-il être représenté ?*

Puis, compte tenu du passage du niveau 1 au niveau 2, prévu en Seconde *: Peut-on rendre compte d'un corpus de problèmes de construction susceptibles de faire intervenir un jeu entre les aspects " relation entre figures " et " application ponctuelle " dans leur résolution par des transformations ?* Cette question s'inscrit en relation avec l'étude développée dans son travail de thèse par Ana-Paula Jahn (1998) à propos de problèmes de lieux.

Les objectifs du programme insistent sur l'importance de la résolution de problèmes. Il est question des méthodes et de leur portée. Pour les exercices, il faut que leur résolution ait valeur de méthode. Dans son étude de thèse sur les problèmes de construction, Hamid Chaachoua (1997) s'est intéressé à la " démarche de résolution ". Il n'a pas pris en compte l'outil transformation, ce que questionne Neri Both *: Comment la mise en œuvre des transformations s'insère-t'elle dans une démarche générale de résolution des problèmes de construction ?*

Le cadre théorique

A ce point, les questions formulées concernent la nature et la vie d'un objet de savoir complexe, dont l'existence est posée et qui sera nommé " Liens entre Transformations et Problèmes de Construction ". Pour les étudier, Neri Both se place dans le cadre de la *théorie de la transposition didactique* de Chevallard, élargie par *la théorie anthropologique*. Avec une large part faite au *questionnement écologique*, ce cadre lui fournit les moyens de l'étude de la vie de l'objet de savoir que nous venons de désigner, ou encore, des pratiques institutionnelles qui le concernent.

Avec la notion d'organisation praxéologique, Neri Both dispose d'instruments d'analyse en termes de Tâche, de Technique, de Technologie et de Théorie. Si l'on reconsidère rapidement les objets Problèmes de Construction (PC) et Transformations Géométriques (TG) vis-à-vis de ces instruments d'analyse, l'objet PC a justement comme caractéristique d'être du côté des tâches, la dimension outil plaçant TG du côté des techniques.

Dans ce qui précède, la dénomination problème de construction renvoie grossièrement à des énoncés de l'une des deux classes de la partition classique des problèmes de géométrie en problèmes de construction et problèmes de démonstration. Ces énoncés sont formulés en termes de tâches, il s'agit de " Construire... ". A propos, justement, de ces classes d'énoncés, Chevallard parle de genre de tâches, précisant que " concrètement un genre de tâches n'existe [dans l'enseignement] que sous la forme de différents types de tâches, dont le contenu mathématique est plus étroitement spécifié ". (Chevallard, 1999). Il souligne que ces types de tâches ne sont pas des " donnés " et que leur construction se fait à partir de tâches particulières solidaires d'une même technique.

Pour l'objet TG, il a été question ci-dessus de méthodes ; il aurait pu être aussi question d'intervention des transformations, comme il est dit parfois dans l'institution Lycée Les notions de technique et de technologie permettent de reconsidérer ces différentes composantes de l'aspect outil.

Globalement donc, l'utilisation de la notion d'organisation praxéologique invite à cerner les conditions de la genèse dialectique de l'aspect outil avec des types de tâches (à caractériser). Ce sera une ligne directrice des différentes études menées dans la thèse.

I. Des traités pour une référence

Cette partie fait une place centrale aux savoirs sur le rapport des transformations aux problèmes de construction. Elle consiste en l'analyse de traités de la fin du 19ème siècle Cette exploration de différents lieux, où les objets PC et TG sont présents, vise à dégager les conditions de leur " co-présence " et de caractériser les liens qu'ils entretiennent.

1. Des choix initiaux

Petersen (1880) *Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec application à plus de 400 problèmes.*

F.G-M. (Frère Gabriel-Marie) (1882) *Cours de mathématiques élémentaires. Exercices de géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 200 questions résolues.*

Hadamard (1898) *Leçons de géométrie (Note complémentaire sur les méthodes)*

Ces traités ayant été retenus[7] pour leurs positions respectives dans leur réponse à des besoins d'enseignement, leur légitimité épistémologique et l'influence qu'ils ont pu avoir sur l'enseignement de la géométrie en France, Neri Both les analyse comme " institutions de transposition et de formation " (Neyret,1995).

2. Le traité de Petersen comme organisation d'éléments de savoir

De l'analyse de cet opuscule ressort une organisation mathématique de référence dans le cadre d'une problématique géométrique de construction à la règle et au compas.

Cette organisation comprend deux types de tâches relatives à un même corpus de problèmes :

- Présenter la solution, avec les tâches " Effectuer ", " Démontrer ", " Discuter "
- Résoudre le problème, avec la tâche " Attaquer le problème ".

Elle comporte un ensemble structuré de *techniques d'attaque* dont la problématique des lieux, qui s'appuie sur la notion de condition, constitue l'élément technologique central.

La notion de *condition* est présente comme une notion *première* représentée au moyen des énoncés de lieux. Quant à la *problématique des lieux*, il est possible de la définir, chez Petersen, comme le fait de poser explicitement le problème de la détermination d'un point en

[7] Il est à noter qu'ils sont tous les trois réédités chez Jacques Gabay à Paris.

terme d'intersection de lieux et de chercher à augmenter le stock de lieux en vue de résoudre des tels problème de détermination de points. En termes écologiques (Artaud, 1999), on a une *relation trophique* entre les objets lieux et PC, précisément un besoin en lieux pour les problèmes de construction.

Donnons une caractérisation et une dénomination brèves des techniques d'attaque des problèmes afin de pouvoir y faire référence commodément par la suite. Chaque technique est justifiée et expliquée comme extension par l'étude de la portée de la technique précédente, d'où la structuration en chaîne qui en découle :

T0 : Séparer deux conditions

TI : Désimbriquer des conditions pour se ramener à la détermination d'un point.

TIL : Déterminer un point par intersection de lieux

TAC : Abandonner une condition

TFA : Construire une figure auxiliaire.

Les différents fonctionnements des transformations permettent d'outiller ces techniques. Chez Petersen[8], on peut distinguer, par type de fonctionnement :

– les transformations qui engendrent des lieux par multiplication des courbes : la similitude étend le stock des lieux pour TIL ;

– les transformations qui engendrent des systèmes de figures " semblables et semblablement placées " en lien avec l'abandon d'une condition de taille ou de position pour l'association d'une similitude à TAC ;

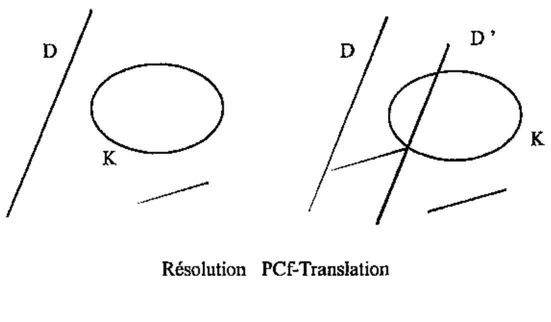
– les transformations qui modifient les figures, avec des sous-figures obtenues par déplacement, translation ou rotation, ou retournement, pour TFA.

On a là des transformations *au service* des problèmes de construction.

3. Des problèmes qui représentent un fonctionnement outil des transformations

A partir des problèmes généraux de Petersen, Neri Both défini ce qu'elle appelle le corpus des *problèmes fondamentaux*. Voici, par exemple, le problème général de la translation parallèle donné par Petersen (et une solution) :

" *Entre deux courbes données mener une ligne qui soit égale et parallèle à une ligne donnée.* " [ligne désigne ici ce qui serait maintenant nommé segment].



Résolution PCf-Translation

[8] Pour réduire l'effet d'anachronisme, il est à préciser que le premier fonctionnement apparaît dans un contexte favorable à l'émergence de la notion d'application ponctuelle (niveau 2) ; dans les deux autres cas, les transformations fonctionnent comme relation entre figures (niveau 1).

Ce problème général représente la translation dans un fonctionnement outil. Par un jeu de variables, il engendre un corpus de problèmes que Neri Both a désigné par la suite " problèmes fondamentaux pour la translation " et noté PCf-Translations.

> Par exemple, l'énoncé 271 de Petersen *" Mener une ligne égale et parallèle à une ligne donnée et qui ait ses extrémités sur deux circonférences données "* est engendré par la spécification des courbes. L'énoncé 272 *" Dans un triangle, mener une transversale de longueur donnée, parallèlement à un côté "* est lui aussi engendré par la spécification des courbes, le lexique des triangles intervenant pour exprimer la condition. On retrouve ence double jeu sur les courbes et la condition dans l'énoncé *273 " Dans un cercle, mener une corde qui soit égale et parallèle à une ligne donnée "*.

Il en ressort une typologie de problèmes de constructions fondamentaux, désignés par la notation PCf-Transformations, dont les types se distinguent par la nature[9] de la transformation représentée.. A priori, pour tout problème PCf-Transformation, il est possible de montrer que :le fonctionnement outil de la transformation est indifféremment associable à l'une des techniques TIL, TAC et TFA. De plus, la suite des sous-tâches de la résolution peut faire intervenir *un jeu ponctuel/global de la transformation.* Les invariants de ce jeu sont l'appréhension globale d'une courbe comme image (dans notre exemple, D' comme image de D) et la détermination d'un point comme antécédent de l'un des points d'intersection de D avec K.

Ce corpus[10] des problèmes fondamentaux répond à l'une des questions initiales.

4. Une complexification de l'organisation mathématique

Avec l'analyse du traité de F.G-M., l'organisation mathématique précédente s'enrichit de la *macro-technique* Analyse-Synthèse (Gascon, 1994) qui fonctionne pour les deux tâches, " Résoudre le problème " et " Présenter la solution " (les techniques précédentes étant, elles, qualifiées de particulières par F.G-M.).

Dans sa note sur les méthodes, Hadamard fait sienne la problématique de Petersen, tout en privilégiant la macro technique Analyse-Synthèse à la manière de F.G-M. On y trouve des exigences de rigueur dans le raisonnement que l'on peut rapporter à la tâche " Présenter la solution ". Ainsi, l'organisation mathématique de référence peut s'enrichir encore avec la technique de *traitement des propositions par équivalence.*

Cette analyse des traités fournit une référence et un point de départ pour étudier la transposition didactique du savoir Liens entre PC et TG. Elle met aussi en évidence (ce que nous ne développerons pas ici) que ces savoirs y sont pris dans des organisations mathématiques et didactiques qui satisfont les contraintes qui les rendent candidates à être transposées dans l'enseignement des transformations.

[9] Symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie, si l'on reprend le lexique du Collège à partir des années 1980.

[10] Nous ne ferons qu'évoquer ici un élargissement du corpus par des problèmes représentant, eux, le fonctionnement de la similitude (désignés en partie II par PCf-Similitude).

Au début du 20ème siècle, époque de débats pour des réformes qui portent, en particulier, sur la place et le rôle des transformations, ces traités ont pu jouer, parmi d'autres, leur *rôle d'institutions de transposition et de formation.* Il est fait l'hypothèse que les auteurs de manuels s'y sont assujetis par la suite, directement ou via des ouvrages intermédiaires, et que les professeurs s'y sont rapportés, via des manuels.

II. Un processus de transposition didactique

L'enjeu maintenant est de rendre compte du processus transpositif allant de la constitution d'une tradition, au début du 20ème siècle, à un héritage didactique pour le lycée des années 1980.

A la question : *Comment les savoirs sur les Liens entre Problèmes de Construction et Transformations géométriques sont-ils arrivés dans l'institution classe de Seconde des années 1980 (avant la période contemporaine) ?* , Neri Both répond par une analyse de de programmes de Seconde et de manuels : " L'étude de manuels nous permet d'accéder à une représentation des systèmes didactiques qui réalisent effectivement les textes du savoir présentés dans ces manuels ". (Menssouri, 1994).

Différentes périodes sont caractérisées. Elles sont balisées par des changements de programme qui affectent à chaque fois les transformations en classe de Seconde.

- I. L'installation dans l'édifice classique (1905 - 1959)
  - I. 1: une place incertaine pour les transformations (1905 - 1946)
  - I. 2 : des transformations bien installées (1947 - 1959)
- II. Les mathématiques modernes : transition et réforme (1960 - 1979)
  - II. 1 : les signes avant-coureurs du changement (1960 - 1969)
  - II. 2 : le temps de la rupture, la Réforme (1970 - 1979)
- III. La Contre-Réforme (1980 - 1989)
- IV. La Période contemporaine (1989 - 1999)

Trois pôles sont utilisés pour caractériser les moments successifs : la description du contexte des transformations, la place des techniques de résolution des problèmes (PC) et la fonction des problèmes fondamentaux (PCf).

1. Une place incertaine pour les transformations (1905-1946)

Dans cette période, la symétrie est vue comme propriété d'une figure. Les transformations translation et rotation sont associées au mouvement. Les techniques T0,Tl et TIL sont enseignées avec une problématique des lieux explicite (tandis qu'on trouve seulement des traces de TFA ...)

Les PCf sont rares. Leur association systématique à des problèmes de lieux forme, pour chaque transformation concernée, une petite organisation qui met en évidence les propriétés intrinsèques de cette transformation comme relation entre figures. Les PCf sont des problèmes de base pour ces transformations.

Un exemple (Chenevier, 1927)

Exercice 112 : *On donne une droite et un point A. On joint A à un point variable B de la droite, et on construit sur AB les deux triangles équilatéraux ABC et ABD. Lieux des points C et D quand B décrit la droite, A restant fixe ?*

Exercice 113 : la droite est remplacée par un cercle.

L'exercice 114 fait associer un angle de rotation au triangle équilatéral

Exercice 115 : *Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois droites parallèles données*

Exercice 116 : les droites parallèles de l'énoncé 115 sont remplacées par des cercles concentrique

2. Des transformations bien installées (1947-1959)

Dans cette période, la symétrie est vue comme action sur les figures, la translation reste associée au mouvement et l'homothétie apparaît avec son aspect ponctuel. La période est florissante pour les problèmes de construction qui sont objets officiels d'enseignement, tout comme les méthodes. Les chapitres " Méthodes " des manuels présentent des discours qui sont la marque d'un assujettissement à des traités de la fin du 19ème, tel celui de Petersen. Les techniques T0, T1 et TIL sont présentes avec une problématique de lieux explicite. L'Analyse-Synthèse est objet d'enseignement et fait intervenir des raisonnements par équivalence

Les PCf sont en relative abondance. Ils permettent de travailler les propriétés intrinsèques des transformations et de s'exercer à associer des propriétés à une transformation donnée.

3. Les signes avant coureurs du changement (1960 -1969)

La translation et l'homothétie, toutes deux présentes sous l'aspect ponctuel, se décrivent à l'aide de vecteurs. La symétrie concerne maintenant la géométrie dans l'espace...

Les méthodes sont toujours enbonne place. Les techniques T0,Tl et TIL sont enseignées, avec la notion de problèmes équivalents pour T1, mais le terme *lieu* s'efface au profit des *ensembles de points*. Analyse-Synthèse, conditions nécessaire-suffisante sont objets d'enseignement.

Les PCf sont toujours bien présents parmi les problèmes dits *spéculatifs*,.avec les rôles précédents. Ils trouvent même une vie officielle au sein de la partie cours de certains manuels. Soit alors, leur rôle est d'illustrer un type de problèmes spéculatifs définis par un type de condition ; on a ainsi une rubrique " Constructions de points intersections de deux ensembles dont l'un au moins est obtenu par translation " dans Girard et Louquet (1963). Soit, ils rendent compte de manière générique, sinon unifiée, du fonctionnement de chaque transformation ; ce qu'on trouve avec la rubrique " lieu et construction " qui va se répétant dans les chapitres distincts de Durrande (1965) consacrés aux différentes transformations. Avec l'Analyse/Synthèse, la tâche " Présenter la solution " est privilégiée, avec des normes imposées de rédaction en deux parties.

4. Le temps de la Réforme (1970-1979)

Translation et homothétie, qualifiées de transformations ponctuelles, sont présentées dans un même habitat où prédomine l'aspect application du plan sur lui même.

Les PCf sont la seule espèce de problèmes de construction qui résiste à la Réforme, contribuant à monter que l'algébrisation de la géométrie n'empêche pas de traiter de questions de géométrie. En effet, ils peuvent justifier les transformations ponctuelles dont ils illustrent de manière unifiée les propriétés fonctionnelles. Cette illustration s'appuie par une représentation des problèmes par un même formalisme. Par exemple (Cluzel et Vissio,1971) : " Il s'agit de construire deux points C et D tels que C ait pour image D dans une application f, et que C et D doivent appartenir respectivement à des ensembles c et d ".

Les techniques de résolution sont absentes. La macro-technique Analyse, identifiable dans le découpage des quelques indications de solution proposées par des manuels, est cachée dans le raisonnement par implication. C'est un indice de ce que le langage de la logique occupe la place de ces techniques. Les PCf sont systématiquement couplés à des problèmes de lieux. La problématique des lieux continue ainsi de vivre, mais de manière cachée.

5. Les années de la Contre-Réforme (1980-1989)

En Seconde, symétries, translation sont revisitées, en continuité avec le collège, mais en tant que transformations ponctuelles du plan dans le plan. L'homothétie et la rotation (pour un temps seulement) font leur entrée, comme transformations ponctuelles.

Les options épistémologiques et didactiques qui président à la mise en place des programmes de 1980 mettent au premier plan les problèmes, et les types de problèmes. Dans le fonctionnement des concepts, " leur mode d'intervention dans la résolution de problèmes est à considérer tout autant que leur organisation propre " (APMEP ; n°323). Ce lien est souligné dans les programmes par la nouvelle expression *outil de résolution.* En Seconde, les *thèmes* sont emblèmes de l'importance donnée aux problèmes et de la place voulue pour l'activité de l'élève. Le thème " Construction " participe à la reprise de la transposition de l'enseignement de la géométrie :

> " Les constructions de configurations satisfaisant à des conditions données font partie des grands problèmes (...) [qui doivent avoir une place dans l'enseignement] pour
>
> – les approfondissements ultérieurs et l'élaboration de concepts et d'outils nouveaux
>
> – la formation scientifique (la capacité à analyser des configurations ; la capacité à investir des connaissances " théoriques " dans les résolutions de problèmes)
>
> – la pratique de " l'analyse-synthèse " ".
>
> et sont listés comme types de problèmes : constructions à la règle et au compas, constructions d'images et problèmes de construction où les transformations sont outils de résolution. (Marion, 1983)

Les points de vue didactique et méthodologique sont couplés dans une perspective de formation scientifique par la référence à l'analyse-synthèse. Pour la classe de Seconde, les propositions s'en tiennent toutefois à un objectif plus vague d'acquisition de méthodes.

Le thème construction offre a priori une *possibilité de liberté écologique* : son effet immédiat a été une ouverture de l'éventail des organisations possibles autour de problèmes de construction. Mais l'ouverture se réalise globalement très inégalement sur l'ensemble des manuels, ce que nous allons préciser et discuter.

Si l'on retient les caractères communs aux organisations repérées dans les manuels étudiés, on note d'abord qu'il existe des manuels dans lesquels seuls les chapitres transformations présentent des problèmes de construction.

Appariés à l'étude d'un lieu-image de courbe, les PCf ont pour rôle d'illustrer les propriétés intrinsèques des transformations. Le point de vue ponctuel sur les transformations donne implicitement à leur fonctionnement son caractère générique. Quant aux techniques, seule Analyse-Synthèse est présente dans tous les manuels, conformément aux discours noosphériens. Mais la forme de présence est très variable, d'une présence implicite, dans une indication ou dans une rédaction de solution (Hachette, 1981, 1987), à une présentation explicite (Durrande[11], 1981, 1985). Elle se manifeste par deux parties dans la présentation de solutions.

La problématique des lieux est très amenuisée, au profit des images de courbes. Le terme lieu tend à ne servir que pour désigner le type des problèmes dans lesquels on caractérise une image d'objet géométrique. Avec ce statut des lieux et la désignation ensembliste, tout se passe comme s'il n'était plus question d'indiquer la relation entre les lieux, l'association d'une propriété caractéristique à une courbe et la détermination d'un point. La relation trophique exprimée dans les traités, le *besoin en lieux*, s'efface ainsi au profit d'une relation directe entre les objets-images et les problèmes PCf.

Cette étude du destin des problèmes PCf montre qu'ils se sont installés avec les transformations dans l'enseignement, que leur importance et leur rôle dépendent de l'appréhension des transformations, mais aussi des relations à d'autres problèmes, de la place accordée au raisonnement, aux justifications. Ils sont au service, tantôt des propriétés intrinsèques de chaque transformation, tantôt de leur caractère fonctionnel général.

III. Place et rôle effectifs des problèmes de construction

Neri Both considère que *ce qui est effectivement fait* dépend d'abord des choix du professeur confronté à la tâche d'organiser l'étude des transformations. Elle privilégie la position de professeur avec la question : Dans son enseignement des transformations, que fait " actuellement " le professeur de Lycée, plus précisément le professeur de Seconde, des problèmes de construction ?.

Pour rendre compte de ces choix, deux volets sont développés :

[11] Le manuel Durrande (1981) édité chez Vuibert est très probablement directement assujetti au traité de Petersen et aux traités de Polya (1967). Parmi les manuels examinés, il est le manuel le plus représentatif de la reprise de la transposition et de cette ouverture.

– Une étude d'un ensemble de cinq manuels de Seconde des années 1994 : cet ensemble est vu comme représentatif des choix possibles pour le professeur pour accomplir " actuellement " sa tâche.

– Un questionnaire auprès de professeurs.

1. Les choix possibles selon les manuels

L'étude réalisée atteste la présence de PC dans les chapitres dédiés aux transformations et via des problèmes PCf, dans tous les manuels, mais dans un seul manuel hors de ce contexte. Le professeur qui prépare son cours peut donc trouver des énoncés de PC où les transformations sont outils de résolution.

Ces énoncés de problèmes PCf ont pour caractéristique de ne pas se ramener à une *question directe* du type " Construire " et de comporter des *sous-questions*. De ce fait, la tâche " Ramener le problème à la détermination d'un point " n'est pratiquement jamais à la charge des élèves. Cela va de pair avec l'absence de discours sur la détermination des points par intersection de courbes (une évidence qui n'est pas mentionnée). La *problématique des lieux* est maintenant mise à l'écart, supplantée par les recherches d'images d'objets et la notion d'intersection d'ensemble de points.

Ces énoncés guident généralement vers l'étude d'une *sur-figure* qui met en évidence la détermination d'un premier point à construire par intersection de droites ou de cercles, l'un des objets images étant déjà là.

Plus généralement, les manuels de Seconde retirent tout statut de *question problématique* à PC. Cette condition écologique réduit les besoins en techniques de résolution. La technique TIL n'est plus explicitée.

Deux techniques d'attaque sont plus visibles, bien que non nommées : TAC-Abandon d'une condition et la macro-technique Analyse. Les problèmes PCf sont l'occasion de décrire la technique TAC via sa mise en œuvre, dans les deux seuls manuels où elle figure (discrètement. Cette technique est résolument couplée à la mise en œuvre d'une transformation., elle permet d'esquisser une *expérience graphique* pour introduire une transformation et une figure-image. Avec elle, l'occasion de prendre en charge la tâche " Résoudre " est présente tandis que l'étude directe de la figure à réaliser est évitée.

On rencontre la technique Analyse-Synthèse pour les problèmes PCf-Similitudes[12] par l'introduction d'une figure d'étude, le plus souvent munie d'un élément auxiliaire. La présence de sous-questions de démonstration prend en charge l'analyse. Il revient à l'élève de fournir l'algorithme, la synthèse. Plus rarement, on rencontre l'Analyse-Synthèse au travers du format d'un début de discours qui renvoie à la période des problèmes spéculatifs.

Dans les années 1990, l'objet PC est presque uniquement représenté par les PCf. Ces derniers sont les occasions de mise en œuvre implicite des techniques TIL et TFA, par introduction d'éléments auxiliaires ou de TAC (lorsqu'elle est présente dans un manuel !). Les résolutions rédigées s'expriment généralement dans le format " s'il existe... ". Certains

[12] Voir la remarque faite au .§4 en I .à propos de ce type de problèmes.

énoncés peuvent demander des distinctions de cas de non-existence ou de solutions multiples. En bref, l'objet PCf (au sens large suggéré en fin de I.1) *représente* à lui tout seul dans les manuels les organisations de problèmes de construction explorées par la tradition.

2. Le questionnaire

Le questionnaire comporte huit questions structurées autour de trois axes :

–l'estimation de la place faite aux objets PC et TG,

–les types d'énoncés et de résolution proposés par les professeurs,

–les connaissances des professeurs à propos des connaissances des élèves.

Il vise une expression assez complète des choix d'enseignement. Les questions évoquent des tâches réalisées ou à réaliser, des situations passées ou actuelles vécues par les professeurs. A priori, elles placent le professeur dans les différentes positions du modèle de la situation du professeur (Margolinas, 1995).

Des réponses aux 27 questionnaires rendus (18 étant complètement remplis) esquissons quelques résultats.

Un système de contraintes antagonistes pèse sur les professeurs :

Certaines expliquent la place réduite qu'ils donnent à l'objet PC en Seconde : l'objet n'est pas nommé dans les programmes ; les problèmes de construction sont difficiles et concurrencés par d'autres problèmes ; l'hétérogénéité des classes rend impossible de leur donner une place. Mais PC représente des valeurs fortes qui justifient de lui donner une place. Cette opinion est soutenue par des arguments empruntés aux discours de la noosphère des années 1980 et 1990.

Dans le champ de perception didactique et au dehors

Il apparaît que si l'aspect outil des transformations pour la résolution de problèmes de construction est bien dans le champ de perception didactique des professeurs, en revanche, les techniques de résolution de problèmes de construction sont quasi hors champ.

Seule l'analyse-synthèse est perçue, et bien faiblement, comme une technique de résolution. Les professeurs interrogés semblent ne pas percevoir comme objets d'enseignement les techniques particulières (au sens de F.G-M.). Ce fait peut être expliqué par l'absence d'un discours sur ces techniques dans les manuels de la période contemporaine : la problématique des lieux est évanouie, les techniques d'abandon de condition sont insérées dans les questions d'exercices de quelques manuels. Peut-il être, aussi, expliqué par l'importance donnée par les professeurs à la *fonction Problème de recherche* des problèmes de construction ? En effet, les problèmes de recherche ne sont-ils pas conçus comme des problèmes où l'important est *l'attitude de recherche*?

Le traitement d'un problème de type PCf –Translation

L'une des questions portait sur un problème :

> *On donne un cercle **C** et deux points A et B qui n'appartiennent pas au cercle **C**. Construire un parallélogramme ABCD tel que les points C et D appartiennent au cercle.*
>
> Proposeriez-vous cet énoncé aux élèves ? Si non, pourquoi ?
>
> Si oui, dans quelle classe et pourquoi ? A quel moment et pourquoi ?

Proposeriez-vous un changement de l'énoncé ? Pourquoi ? Si oui, donnez votre nouvel énoncé et la rédaction de la solution. Si non, donnez la résolution du problème conforme à l'énoncé que nous avons proposé

Dans les réponses des 18 professeurs, 5 donnent directement la solution sous forme d'algorithme. Les différents formats de discours associables à l'analyse-synthèse présents dans les manuels des années 1970-1989 se retrouvent dans les 13 autres résolutions. Il est remarquable que l'analyse s'arrête sitôt la translation trouvée et que la synthèse fait jouer pleinement le caractère ponctuel de la translation.

12 solutions sont du type *résolution canonique*, avec *le tout translation* à la manière inaugurée par Petersen puis formalisée dans la période de la Réforme, celle des manuels de Première S. Dans les résolutions non canoniques apparaissent trois sortes de réponses :

-des réponses qui manifestent une *concurrence* entre les *registres configuration et transformation* pour la détermination de l'antécédent (le deuxième sommet)

-des réponses (4) qui mobilisent une translation *non canonique* (que l'on peut rapprocher de la technique TFA)

-des réponses (2) qui ne mobilisent que des *configurations* pour rendre compte de l'ensemble de la résolution.

Ces 6 dernières réponses sont données par des professeurs qui n'enseignent pas en Première S. Elles révèlent l'ouverture des réponses possibles pour le problème traité et l'éventuelle utilisation *contractuelle* de la résolution canonique d'un problème PCf –Translation lorsque ce dernier est donné dans le chapitre " Translation ".

Les modifications d'énoncé envisagées par les professeurs montrent qu'ils sont obnubilés par la *question de l'existence* (8 fois sur 10), en même temps qu'est perçue la nécessité qu'ils la prennent en charge. Les 10 professeurs qui ont une classe de Seconde et qui proposeraient de donner l'énoncé en Seconde se regroupent autour de deux rôles pour le problème proposé : celui d'exercer à utiliser les propriétés de la translation (en donnant la translation dans l'énoncé) et celui de problème de recherche, aucune indication de solution n'étant fournie par l'énoncé. Ce deuxième rôle est en rupture avec les formes d'énoncés dominantes en Seconde et proposées dans les manuels. Cette rupture manifeste-t'elle qu'avec les PCf ces professeurs se réservent une marge de manœuvre en vue de satisfaire des conditions favorables à l'activité de l'élève voulue dans la période contemporaine ?

IV. Etude expérimentale utilisant cabri–géomètre

Les problèmes PCf sont susceptibles de faire intervenir un jeu entre les *aspects relation entre figures* et *application ponctuelle* dans le fonctionnement des transformations pour leur résolution. En mettant en place une micro-séquence d'enseignement dans deux classes de Seconde, Néri Both a pour objectif de spécifier des conditions sous lesquelles ce jeu peut contribuer à l'entrée dans l'étude des aspects fonctionnels des transformations.

Les problèmes y sont abordés dans l'environnement informatique Cabri-Géomètre II. Les conditions étudiées sont attachées à l'enseignement de la technique d'abandon de condition (TAC).

1. La séquence d'enseignement

Séance 1- Construction et reprise des outils de Cabri

Situation 1: " le parallélogramme et ses sommets sur un cercle donné "

Situation 2: " les points M et N et le point milieu "

Séance 2 - Introduction de la technique " Abandon d'une condition "

Situation 2 –TAC " les points M et N et le point milieu "

Séance 3 - Mise à l'essai de la technique " Abandon d'une condition ".

Situation 3: " le parallélogramme et ses sommets sur un cercle donné ".

Organisée en trois séances, la séquence met d'abord en scène un problème de construction (situation 1) puis deux problèmes PCf (situations 2 et 3). Ces deux derniers demandent la construction d'un Cabri-dessin comportant au moins deux points : les points M et N dans la situation 2 " les points M et N et le point milieu ", les points R et S dans la situation 3 " le parallélogramme PQRS et ses sommets R et S sur un cercle donné ". Ces points sont associés par une propriété géométrique qui les rattache à une configuration. Ils peuvent être aussi vus comme liés par une transformation (symétrie centrale en situation 2, translation en situation 3) ou par une relation de dépendance.

Le choix est d'enseigner explicitement la technique d'abandon de condition (TAC) en séance 2, suite au bilan sur l'exploration de la situation 2 entreprise en séance 1.

2. L'option Cabri-géomètre II et les questions posées

Avec la manipulation directe du dessin, Cabri-Géomètre offre avant tout une dimension expérimentale avec les possibilités d'une *expérimentation graphique*. Une autre caractéristique intéressante pour la résolution de problèmes de construction est l'ensemble des constructions de base disponible, avec des *primitives de dessin pur* et *des primitives géométriques.*

Retenons bien sûr les possibilités de déplacement des objet. Le *déplacement*, source de rétroaction, joue un rôle important dans la validation et la discussion de la solution Un autre point que nous retenons ici est celui des différents statuts qui peuvent être attribués aux objets construits jusqu'à l'obtention d'un *Cabri-dessin.*

De manière très spécifique à l'étude, l'impossibilité du logiciel d'effectuer l'intersection d'un *" Objet " Cabri* avec un *" Lieu " Cabri* est une caractéristique majeure pour l'étude menée : elle constitue un *obstacle* positif pour provoquer la recherche de la transformation outil.

Précisons les questions qui ont guidé l'analyse :

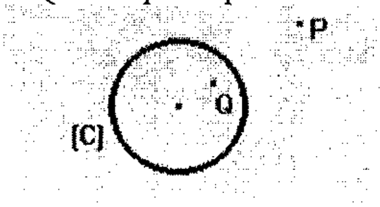
Comment " Lieu " contribue-t-il à l'identification par les élèves d'une transformation pour trouver la solution ? Comment cette transformation intervient-elle dans les différentes étapes de la solution proposée par les élèves ?

De quelle manière le jeu ponctuel-global se place-t-il dans la concurrence avec l'outil configuration ?
Comment les rétroactions du milieu font-elle ou non évoluer la résolution du problème ?

3. Fragments d'éléments issus de la Situation 3

La Situation 3 comprend le problème et les consignes suivantes :

Problème : On donne un cercle **C** et deux points **P** et **Q** qui n'appartiennent pas au cercle **C.** Construire un parallélogramme PQRS tel que les points R et S appartiennent au cercle **C.**

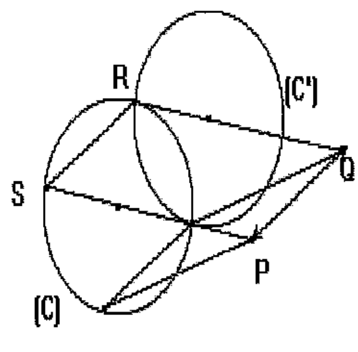


Consignes :
1. Construire le parallélogramme PQRS
2. Valider la construction
3. Justifier votre construction
4. Dire en quoi consiste selon vous la méthode " Abandon d'une condition "

Cette situation est présentée après la Situation 2 –TAC. Il est considéré *a priori* que la symétrie centrale et la translation sont maîtrisées pour les élèves de Seconde, conformément aux résultats d'évaluations de l'APMEP dans les années 1990.

Voici d'abord l'illustration d'une résolution possible pour la tâche " Construire le parallélogramme PQRS " avec l'utilisation de la technique *canonique*

On ramène le problème à celui de la détermination d'un point, par exemple R, et l'on envisage la construction de ce point par intersection de lieux géométriques : on obtient R comme intersection de (C) et de (C') (l'image de (C) par la translation de vecteur PQ). La translation est déterminée par les points d'entrée P et Q. Le point S est obtenu à partir de R par le translation de vecteur QP.



A priori plusieurs stratégies sont possibles avec Cabri pour enclancher la technique TAC, introduite pour la situation 2 à partir de R sur (C) après la construction du point S, quatrième sommet d'un parallélogramme déterminé par P, Q et S sur (C) puis de son lieu, par configuration ou avec **Translation.** Ce lieu de S étant produit graphiquement par **Trace** ou par **Lieu** ou par une construction utilisant soit une configuration et ses outils associés, soit **Translation,** la détermination d'un point S solution est à réaliser par construction

(Intersection) pour construire S. Le retour au point de solution associé R peut se faire par configuration, **(Droites parallèles, Point milieu** de la diagonale et **Symétrie centrale** ou **Cercle.**) ou par **Translation.**

Donnons brièvement des éléments issus de *l'analyse a posteriori*. L'analyse des résolutions des élèves à partir d'enregistrement Cabri avec le support des protocoles a permis de rendre compte de la suite des décisions des élèves et de l'effet de leurs actions. Des unités d'action caractérisant les essais de résolution et les reprises systématiques réalisées ont été alors dégagées.

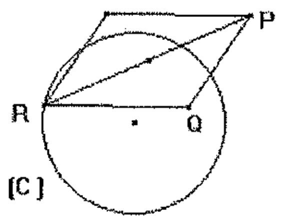
Nous nous contenterons donc d'illustrer la structure des démarches de résolution possibles par trois unités d'action.

Construction par configuration (unité d'action 1)

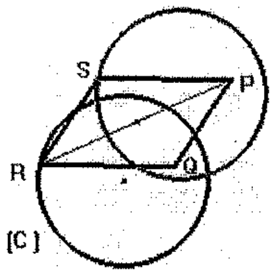
Constructions Cabri (Binôme Jo)

R sur (C) et **droite (QR)** ; construction directe de S par configuration en utilisant plusieurs fois **Droites parallèles** ; rétroaction graphique : S est bien sur C mais P n'est pas sur l'une des droites comme " souhaité ".

Reprise : parallélogramme alors construit par **Polygone** ; la construction est invalidée car le quatrième sommet S n'appartient pas à (C) !



Reprise :nouvelle construction de S par un bon choix de **droites parallèles** ; déplacement de S avec **Trace ;** remplacement du tracé de cercle obtebu par un tracé donné par **Lieu** !



L'obstacle positif intervient : il est impossible de réaliser une intersection Cabri de l'objet Lieu avec l'objet (C). : " Non, mais il faut qu'on le construise. Puisque là on ne peut pas mettre un point à cette intersection. Ça marche pas comme ça ". -

La nécessité de construire autrrement le cercle (C') amène alors à la recherche de la transformation outil.

Mises en oeuvre d'une symétrie centrale (Unité d'action 2)

R sur (C). Différentes " propriétés " sont mises en jeu par différents binômes pour associer S au point R avec **Symétrie Centrale** :

– " le centre du parallélogramme est le centre de la symétrie ", (ce centre O est d'abord pris quelconque puis au centre du cercle)

– " le centre de symétrie est le point milieu des diagonales du parallélogramme ",

– " les côtés du parallélogramme sont symétriques ",

La mise en œuvre de la translation (Unité d'action 3)

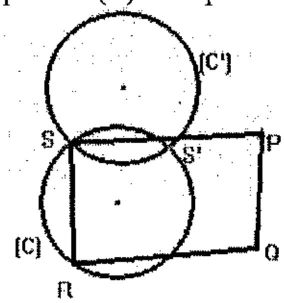
Construction Cabri **(Binôme I)**

R sur (C) ; S par **Translation** (vecteur PQ) appliquée à R; **Lieu** de S ;

(C') par **Translation** (vecteur PQ) appliquée à (C). S **Intersection** de (C') et (C) ;

Nouveau problème : Comment déterminer R, le sommet du parallélogramme solution ? En construisant un nouveau parallélogramme SPQR ?

Un obstacle : les points variables pris sur (C) au départ avec la dénomination " R "



Revenons sur l'exemple du binôme I qui pose implicitement " la question de l'antécédent " et essaie de la résoudre par configuration. Le binôme ne dispose pas encore encore de la possibilité d'établir cette relation entre les objets dont nous disons qu'elle prend en compte l'aspect ponctuel global de la transformation : " passer de t(C) = C' à (C) de telle sorte que pour S sur C' on envisage S comme $S=t(R)$ et $R = t^{-1}(S)$ ".

Même de façon particulière et locale, l'enjeu de la résolution de ce problème par les transformations est l'aspect fonctionnel de la translation.

Conclusion

Dans l'enseignement, le plus souvent, les problèmes de construction ne sont pas étudiés pour eux-mêmes. L'hypothèse de Neri Both est valide : la présence de l'objet PC est une condition pour l'étude des transformations. Cette condition est façonnée par les formes de présence des problèmes fondamentaux : leur variabilité a pu être observée, avec les changements de conditions de vie des transformations, des questions de lieux, des méthodes de résolution, induits par les changements de programmes.

L'étude avec Cabri–géomètre a voulu explorer une condition particulière à savoir : la résolution de problèmes PCf à l'aide d'une transformation rend possible un jeu entre l'aspect global et l'aspect local de la transformation. Avec l'emploi de la technique TAC, un élément de ce jeu réside dans l'appréhension globale d'une courbe comme image et la détermination d'un point comme antécédent.

L'expérimentation a permis une première appréciation du rôle que les problèmes PC_f peuvent jouer pour favorisr le passage du niveau 1 au niveau 2 dans l'enseignement des transformations. Cette possibilité est soumise à la nécessité de contrôler *la concurrence des configurations*. Ceci invite à reconsidérer les mises en scène choisies et les conditions didactiques d'un travail de la technique d'abandon de condition avec intervention d'une transformation.

Dans la situation 3, la translation à associer au parallélogramme a été très difficilement mobilisée pour rendre compte du passage d'un cercle au cercle associé. Un travail sur les situations devrait viser à *rendre disponible l'association des configurations et des transformations.* Le couplage d'un problème de lieu au problème de construction n'aurait-il pas pu permettre de travailler l'association d'une transformation, en comparaison avec une résolution par configuration ? En effet, cette association appelle la prise en compte préalable de problèmes de lieux avec une problématique des lieux, faute de quoi les élèves ne peuvent y accéder de leur propre mouvement. Une telle disponibilité serait un appui en classe de Première S pour l'étude du fonctionnement des transformations comme outil de résolution de problèmes de démonstration.

Examinons les conditions apportées par Cabri-Géomètre. Les limitations de Lieu dans Cabri ont joué le rôle déstabilisateur attendu. Elles ont conduit à rechercher un traitement de la figure auxiliaire fournie par la technique TAC. Mais, malgré le contexte d'enseignement des transformations (dans les classes de l'expérimentation(, Cabri a favorisé la mobilisation de configurations pour les constructions à réaliser.

Ainsi l'utilisation de Cabri a *révélé* une *condition* : si un problème PCf peut représenter les propriétés intrinsèques d'une transformation, il peut aussi être résolu par configurations, justement par configurations associées à la transformation. De plus, il est apparu que le seul couplage d'un problème de lieu et d'un problème de construction ne réduisait pas cette possibilité pour les élèves. Cette possibilité est en général annihilée par effet de contexte d'enseignement,. Nous avons vu, dans le questionnaire, cette possibilité réapparaître pour les professeurs quand ils abordaient le problème proposé comme un problème à chercher (ou à résoudre de nouveau...), hors de l'appui sur des pratiques routinières.

Dans les conditions de la situation 3, la possibilité d'un jeu entre l'aspect global et l'aspect ponctuel était soumise à la réduction de la concurrence possible entre outils configuration et transformation. Or la disponibilité de l'association d'une transformation à une configuration n'opère pas de facto cette réduction. Dans cette séance, la reprise d'une mise en concurrence de la construction par configuration et par transformation pour la construction du dernier point n'aurait-elle pas été alors plus favorable au travail de l'aspect ponctuel ? Comment envisager cette reprise ? En Seconde, l'organisation didactique d'une *comparaison effective des possibilités* de résolution par transformation et par configuration ne peut elle pas favoriser une meilleure maîtrise des appréhensions globales et ponctuelles des transformations **?**

Une synthèse de l'apport des travaux de Jahn, de Lavandier (2000) et de cette thèse serait bienvenue pour avancer à la fois sur l'association des configurations et des transformations et sur l'approche fonctionnelle.

Références

A.P.M.E.P. (1980), Dossier second cycle, *Bulletin A.P.M.E.P.* (Association des professeurs de mathématiques de l'Enseignement public), n°323, Avril 1980, pp. 261-367.

A.P.M.E.P. (1991*), Evaluation du programme de mathématiques, fin de Seconde. Une étude de l'A.P.M.E.P.* Publication n°88.

ARTAUD M. (1998), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques in Bailleul (coord.) *Actes de la neuvième Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, A.R.D.M. et I.U.F.M. de Caen, pp. 101-139.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19(1), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 77-124 .

BOTH N., LABORDE C. (1999), Transformations géométriques et configurations en 4^e et 3^e. Une première classification des taches proposées aux élèves et leur répartition dans deux manuels, *Petit x,* IREM de Grenoble, n° 52, pp 43-71.

CHAACHOUA A. (1997), *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes,* Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12(1), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 73-111.

GASCON J. (1994), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisée, *Petit x*, n° 37, IREM de Grenoble, pp. 43-63.

JAHN A.P. (1998), *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14 (1-2), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 43-66.

LABORDE C., GRENIER D. (1987), Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale, in *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques Actes du Colloque de Sèvres*, éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 65-86.

LAVANDIER M. (1999*), Aspects fonctionnels dans les problèmes de construction géométrique en Seconde*, Mémoire de DEA, Laboratoire Leibniz, Grenoble.

MARGOLINAS C. (1997), Projet pour l'étude du rôle du professeur en situation, in *Didactique et technologies cognitives en mathématiques. Séminaire DidaTech, Laboratoire Leibniz- IMAG*, Université Joseph Fourier, Grenoble.

MARION J. et al. (1988), Géométrie I, Publication du G.R.E.M., IREM d'Aix-Marseille (première édition 1983).

MENSSOURI D. (1994), *Essai de délimitation en termes de problématiques des effets du contrat et de transposition : Le cas de relations entre droites et équations dans les classes de Seconde et de Première,* Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

NEYRET R (1995), *Contraintes et déterminations de processus de formation des enseignantes : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres,* Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

POLYA G. (1967), *La découverte des Mathématiques, Tome I : Les modèles,* Dunod, Paris.

ANNEXE

Exemple de justification de l'étude des transformations ponctuelles
(Cluzel et Visio, classe de Seconde, 1969)
Introduction au chapitre 18 – Quelques transformations ponctuelles du plan affine
Extraits

→ Approfondir la connaissance du plan, par la découverte de **nouvelles propriétés** du plan.

→ L'étude de **lieux géométriques**, la détermination d'un ensemble E de points M (sous-ensemble du plan) satisfaisant à certaines propriétés " s'effectuera aisément si l'on définit une fonction f de P vers P telle que M = f(m) et que l'on connaisse l'ensemble A des points m. Alors E = f(A) ".

→ Pour résoudre **des problèmes de construction**, " les transformations permettent de déterminer un sous-ensemble du plan qui satisfait certaines propriétés. (Les transformations bijectives du plan dans le plan introduisent des simplifications dans la résolution de problèmes de construction, car trouver A, point du plan tel que f(A) = A', équivaut alors à $A = f^{-1}(A')$) ".
