

Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire

Ghislaine Gueudet-Chartier

Laboratoire de didactique des mathématiques, Université de Rennes 1

&

Equipe de didactique des mathématiques, Laboratoire Leibniz - Grenoble

Les difficultés posées par l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG sciences en France sont bien connues des enseignants de l'université. Elles ont déjà donné lieu à plusieurs recherches didactiques, dont l'essentiel est présenté dans le livre : "L'algèbre linéaire en question" (Dorier et al. 1997). Dans les opinions exprimées par des enseignants-chercheurs comme dans les travaux de didacticiens, la géométrie est fréquemment évoquée comme pouvant contribuer à élaborer une approche de l'algèbre linéaire accessible aux étudiants. Ainsi, dans son rapport d'étape sur l'enseignement de la géométrie, la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques écrit :

"En fait, l'intérêt du lien entre algèbre linéaire et géométrie nous semble plutôt en sens inverse¹, dans le fait que la géométrie usuelle en dimensions 2 et 3 fournit un support intuitif pour travailler en dimension supérieure à 3, voire en dimension infinie (par exemple en analyse fonctionnelle), voire sur un anneau au lieu d'un corps (en algèbre commutative), etc." (C.R.E.M. 2000, p.14)

Il nous semble que plusieurs des points mentionnés dans cette citation demandent à être éclaircis. Qu'appelle-t-on "géométrie usuelle en dimensions 2 et 3" ? S'agit-il de géométrie vectorielle, analytique, ou de géométrie euclidienne (au sens historique du terme) ? Ou encore de la géométrie actuellement pratiquée dans l'enseignement secondaire ? Qu'est-ce qu'un "support intuitif" ? Cette notion est-elle simplement associée à la possibilité de visualisation ? Et à qui un tel support peut-il être utile ? A des mathématiciens, à des étudiants abordant les premières notions d'algèbre linéaire, à des étudiants plus avancés ?

Apporter des éléments de réponse à ces questions demande selon nous une étude didactique précise ; c'est l'objet de notre thèse, intitulée "rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire", et effectuée sous la direction de Jean-Luc Dorier (soutenue le 21 novembre 2000). Nous allons présenter ici certains des résultats que nous y avons obtenus.

1. Présentation du sujet

Nous allons préciser dans un premier temps ce que nous qualifierons de "géométrie". Ceci est crucial ici, puisque pour certains mathématiciens, l'algèbre linéaire elle-même peut être considérée comme une sorte de géométrie.

Nous avons choisi, dans le cadre de ce travail, d'appeler "géométrie" une théorie qui a pour objet la modélisation² de l'espace physique, et présente un lien spécifique avec la réalité (en

¹ Cette citation est extraite d'une critique de la réforme des mathématiques modernes. Il s'agit d'une réaction allant à l'encontre de la présentation de la géométrie comme application de l'algèbre linéaire.

² Ici, le terme modélisation est employé au sens de "modélisation mathématique", et non en référence à la définition de modèle qui sera utilisée par la suite.

particulier, une géométrie est dans ce cas limitée à la dimension trois). Ce lien confère aux notions et aux propriétés relevant de cette géométrie l'aspect d'objets concrets, un caractère d'évidence intrinsèque. Ce choix de définition est restrictif ; il repose sur une référence au savoir enseigné (dans le secondaire en particulier) et non au savoir savant. En effet les géométries que nous serons amenés à considérer resteront apparentées à la géométrie vue dans le secondaire, et ce même si elles sont fondées sur l'algèbre linéaire. La caractéristique de lien avec l'espace physique ne serait sans doute plus pertinente si nous cherchions à déterminer, dans les mathématiques actuelles, quels domaines peuvent être désignés comme "géométrie".

Toute géométrie est évidemment "**géométrique**", et l'emploi, en algèbre linéaire, d'un exemple issu d'une géométrie est une forme de recours au géométrique. Mais nous considérerons également l'emploi de figures en algèbre linéaire comme une autre forme de recours au géométrique. En effet, le dessin est un objet matériel, qui confère à la figure³ l'aspect concret qui caractérise selon nous le géométrique.

Il nous faut par ailleurs préciser ce qui relève de "l'intuition géométrique". C'est dans les travaux de Fischbein que nous avons trouvé les éléments nécessaires à une étude de l'intuition portant à la fois sur les mathématiciens, les enseignants et les étudiants. Nous allons brièvement présenter ici ces travaux et le cadre théorique que nous avons retenu.

L'intuition géométrique

Selon Fischbein, le rôle essentiel de l'intuition est de répondre à notre besoin naturel de certitudes ; c'est ce besoin, élément incontournable de toute activité mentale, qui nous conduit à fabriquer des représentations et des interprétations apparemment évidentes.

"L'intuition n'est pas la principale source de connaissances certaines, mais elle semble l'être, parce que c'est exactement son rôle : créer l'apparence de certitude, conférer à différentes interprétations ou représentations un caractère de certitude intrinsèque et indiscutable." (Fischbein 1987, p.12)

Nous avons besoin de certitudes pour agir, quand bien même celles-ci ne seraient qu'apparentes.

Les modèles constituent une source fondamentale de connaissances intuitives ; ils permettent de remplacer une notion par un substitut intuitivement acceptable. Fischbein définit ainsi la notion de modèle :

"Un système B représente un modèle du système A si, sur la base d'un certain isomorphisme, une description ou une solution produite dans A admet un correspondant cohérent dans B et vice versa." (ibid., p.121)

Un modèle suggère des questions pertinentes, inspire des stratégies de résolution, permet de vérifier la validité d'un résultat ; un modèle sera efficace s'il est suffisamment fidèle à l'original (sur un plan structurel), et qu'il a cependant une relative autonomie par rapport à celui-ci. La relation modèle-original, étant basée sur un isomorphisme, est bien entendu réversible ; il est donc possible que l'original suggère à son tour des propriétés du modèle.

Fischbein distingue différents types de modèles. Nous avons retenu ici certaines des oppositions qu'il mentionne, et qui seront centrales dans notre étude :

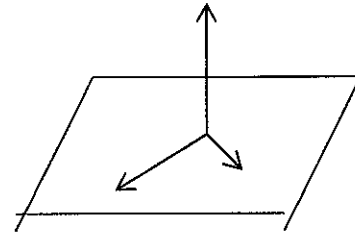
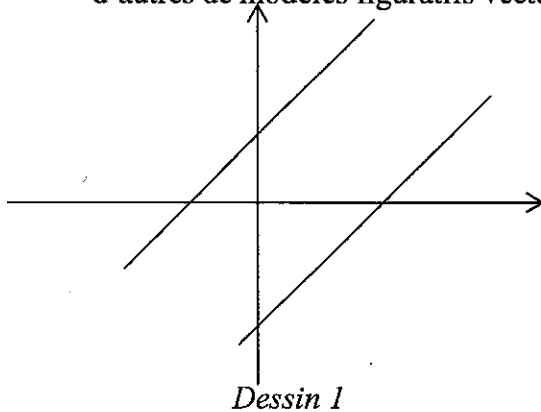
- Modèle abstrait/Modèle intuitif

³ Pour la définition de figure, et la distinction entre figure et dessin, nous nous référons à Laborde et Capponi (1994).

Nous mentionnons ici cette distinction pour clarifier le lien entre les modèles au sens de Fischbein et la modélisation mathématique, à laquelle nous avons fait référence dans notre définition de géométrie. Le terme de modèle abstrait qualifie une modélisation mathématique ; une relation mathématique peut ainsi être un modèle abstrait pour une certaine réalité concrète. Un modèle intuitif offre en revanche l'apparence d'une réalité concrète (c'est le cas d'une géométrie, au sens où nous l'avons définie), bien qu'il dépasse souvent celle-ci.

- **Modèle intramathématique/Modèle extramathématique :**

Il y a emploi d'un modèle intramathématique lorsque le modèle et l'original sont tous deux issus de théories mathématiques. Ce sera le cas ici lorsque nous parlerons de modèles géométriques utilisés en algèbre linéaire. En revanche, l'emploi de dessins correspond à l'intervention d'un modèle extramathématique ; nous parlerons pour les dessins de modèles figuratifs. Nous y ajoutons une distinction personnelle : certains des modèles figuratifs que nous rencontrerons seront qualifiés de modèles figuratifs affines, et d'autres de modèles figuratifs vectoriels. Donnons ci-dessous un exemple :



Le dessin 1 peut par exemple être utilisé pour représenter deux droites parallèles du plan ; il sera donc employé en géométrie affine, et n'apparaîtra probablement pas en algèbre linéaire.

Le dessin 2 peut être utilisé pour illustrer le théorème de la base incomplète : le parallélogramme représente un plan, ou un hyperplan, ou un sous-espace vectoriel de dimension quelconque ; les deux flèches à l'intérieur du parallélogramme constituent une base du plan, et la flèche verticale est un vecteur (ou suggère une famille libre de vecteurs !) permettant de compléter la base du sous-espace en base de l'espace complet.

- **Modèle analogique/modèle paradigmatique :**

Il s'agit d'une distinction entre modèles intramathématiques. Un modèle est analogique si le modèle et l'original relèvent de deux théories mathématiques indépendantes ; à l'opposé, un modèle paradigmatique est une sous-classe de l'original. Le modèle paradigmatique est bien plus qu'un exemple : c'est l'objet de référence sur lequel s'appuie le raisonnement. Dans notre cas, un modèle géométrique pourra être analogique ou paradigmatique selon qu'il relève d'une géométrie indépendante de l'algèbre linéaire ou non.

L'intuition géométrique correspondra donc, selon nous, au recours à un modèle géométrique. Cependant le terme même de recours à un modèle, géométrique ou figuratif, est plus adapté à

notre étude que celui d'intuition. C'est donc cette terminologie que nous emploierons par la suite.

Questions étudiées

En adoptant la terminologie présentée ci-dessus, nous pouvons résumer notre questionnement de la manière suivante :

- Quels sont les possibilités de recours à des modèles géométriques et figuratifs en algèbre linéaire ?
- Quels sont les recours effectivement pratiqués (en France, de nos jours) par les enseignants et les étudiants ?

Pour répondre à ces questions nous avons utilisé différents moyens. Tout d'abord une étude historique portant sur l'emploi de modèles géométriques dans la genèse de l'algèbre linéaire. Une fois l'algèbre linéaire établie sous sa forme moderne, un processus de transposition didactique a conduit au texte de savoir actuellement en place. Nous avons analysé ce processus, et étudié d'autre part l'articulation algèbre linéaire-géométrie dans les textes de savoir actuels sous l'angle de l'évolution de concepts issus de la géométrie. Par ailleurs, nous avons interrogé enseignants et étudiants de l'université, et nous avons observé des séances de cours et travaux dirigés pour déterminer les recours au géométrique en algèbre linéaire.

Notons ici, avant de passer aux résultats établis, que nous emploierons le terme "algèbre linéaire" par souci de concision, mais que celui-ci désigne aussi bien l'algèbre linéaire proprement dite que l'algèbre bilinéaire et même certaines parties de l'analyse fonctionnelle (en particulier l'étude des espaces de Hilbert).

2. Possibilités et limites du recours au géométrique

Nous allons détailler ici trois résultats concernant les possibilités et les limites du recours au géométrique en algèbre linéaire :

- **L'algèbre linéaire ne peut pas être présentée comme une simple généralisation d'une géométrie, quelle que soit celle-ci ;**
- **Des liens avec la géométrie enseignée en France au lycée existent, et sont exploitables dans l'introduction de l'algèbre linéaire (il existe évidemment aussi des ruptures, que nous signalerons) ;**
- **La présentation de l'algèbre linéaire limitée à la dimension 3 permet d'aborder certaines notions et propriétés d'algèbre linéaire, et pourrait donc constituer un support à l'introduction de la théorie générale.**

Ces résultats découlent de différentes parties de notre étude, que nous évoquerons donc simultanément.

2.1 Impossibilité de généralisation d'une géométrie

Nous allons montrer pourquoi il est selon nous impossible de présenter l'algèbre linéaire comme une simple généralisation (à d'autres objets, en dimension supérieure à trois) d'une

géométrie. Trois types d'arguments développés dans notre thèse conduisent à cette conclusion :

- L'étude du rôle de la géométrie dans la genèse de l'algèbre linéaire montre que celle-ci a toujours été en interaction avec d'autres domaines dans les travaux qui ont constitué des avancées significatives ; nous détaillons ce point ci-dessous.
- L'étude du phénomène de transposition didactique qui a conduit à l'introduction de l'algèbre linéaire dans les programmes de lycée en 1969 montre que le lien entre algèbre linéaire et géométrie a été nettement accentué dans le savoir enseigné, sans comparaison avec le savoir savant. Ceci est dû au fait que cette introduction a eu lieu lors de la réforme des mathématiques modernes, et était associée à la rénovation de l'enseignement de la géométrie. Ainsi les débats, entre Dieudonné et Choquet notamment, opposaient les partisans d'une approche structuraliste, consistant à présenter l'algèbre linéaire d'abord, la géométrie étant alors une simple application de celle-ci, aux tenants d'une géométrie axiomatique présentée avant l'algèbre linéaire.
- Par ailleurs, la limitation à la dimension 3 induit des restrictions, que nous aborderons lorsque nous évoquerons les possibilités offertes par l'algèbre linéaire limitée à la dimension 3 (partie 2.3).

Genèse de l'algèbre linéaire

L'étude du processus qui a mené à l'algèbre linéaire sous sa forme actuelle montre que la géométrie y a tenu une place importante, mais le plus souvent en association avec une autre partie des mathématiques, en particulier dans les travaux qui ont conduit à des avancées déterminantes de la théorie. Plus précisément, des modèles géométriques très variés sont en jeu ; et, lorsque le rôle de la géométrie est prépondérant, il semble freiner l'avancée de la théorie. Nous présentons ici des exemples de différents emplois de modèles ; nous commencerons par examiner des travaux d'analyse fonctionnelle, car ces travaux ont été déterminants dans l'élaboration de l'algèbre linéaire sous sa forme actuelle.

Maurice Fréchet

Les travaux de Fréchet portent sur les espaces fonctionnels topologiques ; la structure linéaire elle-même n'y est pas fondamentale, contrairement aux autres cas que nous allons évoquer ; cependant ces travaux présentent pour notre étude un intérêt certain, du fait de l'interaction entre analyse et géométrie que l'on y observe.

En termes de modèles, la démarche de Fréchet peut se formuler de la manière suivante : recherche d'un modèle analogique (symbolique) commun pour la géométrie élémentaire et certaines parties de l'analyse fonctionnelle. Dans son livre " Les espaces abstraits " (Fréchet 1928), il déclare avoir été guidé par les analogies entre ces domaines, analogies qui lui ont permis de supposer qu'il pouvait les considérer comme les branches d'une théorie plus générale.

Selon Fréchet, une suite, ou une fonction caractérisée par une suite de coefficients, peut être considérée comme un point :

" On peut considérer les nombres de la suite qui définit chacun de ses éléments comme les coordonnées de cet élément envisagé comme un point d'un espace (E_∞) à une infinité dénombrable de dimensions. Il y a plusieurs avantages à opérer ainsi. D'abord l'avantage qui se présente toujours quand on emploie le langage géométrique si propice à l'intuition par les analogies qu'il fait naître." (Fréchet 1906, p.39)

Fréchet souligne même explicitement l'importance de l'intuition, et de l'emploi du langage géométrique pour développer celle-ci. Bien qu'il soit à la recherche d'un modèle commun, pour la géométrie et d'autres domaines, celle-ci joue un rôle particulier ; il considère qu'elle seule peut être facteur d'intuition. En fait la spécificité du modèle géométrique repose sur son lien avec l'espace physique, qui confère aux objets de la géométrie l'aspect d'objets réels.

Dans les travaux de Fréchet, la première impulsion a été donnée à l'analogie par les coordonnées, puis l'importance prise par l'aspect synthétique de la géométrie auquel correspond un aspect synthétique de l'analyse permettant l'étude directe des fonctions.

Ehrard Schmidt et Frédéric Riesz

Les travaux de Riesz et Schmidt portent sur les espaces de Hilbert, selon une terminologie moderne.

C'est Schmidt qui introduit le premier, dans sa thèse soutenue en 1905, un vocabulaire géométrique à propos des fonctions de carré sommable : il y parle d'orthogonalité, de norme de fonctions, et développe des propriétés analogues à certaines propriétés géométriques.

Il emploiera ensuite le même type de vocabulaire à propos de suites : il définit un produit scalaire pour les suites (sans employer ce terme), et montre le théorème de Pythagore dans ce contexte (le théorème en question est effectivement appelé théorème de Pythagore). A propos des suites, il écrit que les résultats qu'il établit ont une signification géométrique claire, en particulier si l'on considère les suites comme des points d'un espace de dimension infinie. Cependant il ne détaille pas l'emploi du modèle géométrique, qui reste presque implicite. En particulier, bien qu'il utilise un vocabulaire identique pour les suites et les fonctions, il traite séparément ces deux cas, sans effectuer de rapprochement, et sans allusion à la dualité analytique/synthétique.

Cette dualité est au contraire soulignée dans les travaux de Riesz ; elle y est le moteur de l'analogie. Riesz établit tout d'abord une correspondance entre les suites et les fonctions de carré sommable, en considérant une suite de carré sommable comme les coefficients de Fourier d'une fonction. Il adopte une démarche qui se rapproche de celle de Fréchet : Riesz cherche à définir une distance entre fonctions, qui permette de développer une théorie synthétique.

Cependant Riesz, contrairement à Fréchet, ne cherche pas à déterminer une théorie générale qui s'applique aussi bien à la géométrie qu'aux suites et aux fonctions. Il souhaite avant tout mettre en rapport les suites et les fonctions ; puisqu'il existe en géométrie un aspect analytique et un aspect synthétique, et que la notion de distance confère un caractère géométrique aux suites et aux fonctions, le rapport cherché se dessine naturellement.

Hermann Günther Grassmann

Grassmann publie en 1844 l'*Ausdehnungslehre* ou *théorie de l'extension*. Bien que les correspondances avec des mathématiques actuelles soient délicates à établir, on peut trouver dans cette œuvre différents types de géométrie : affine, projective... ainsi qu'une part importante des résultats de l'algèbre linéaire. Grassmann fait le choix d'une présentation aussi formelle et rigoureuse que possible. La théorie de l'extension est selon lui une des quatre branches de la théorie des formes, qui concerne (et même, devrait précéder) toutes les branches de la mathématique.

Cependant la description que fait Grassmann de son processus de découverte de la théorie de l'extension montre l'importance de l'intuition géométrique dans celui-ci.

Dès le début de l'Ausdehnunglehre, il souligne en effet l'importance de l'intuition pour un éventuel lecteur, intuition dont la géométrie sera le principal moteur.

“ Pour ne pas fatiguer le lecteur avec de continuelles abstractions et pour le mettre également en état, partant de choses connues, de se mouvoir avec plus de liberté et d'indépendance, je me rattache partout à la géométrie pour la déduction des concepts nouveaux, dont notre science constitue la base. Mais en posant toujours à la base le concept abstrait pour la déduction des vérités qui constituent le contenu de cette science, sans jamais me fonder sur une vérité démontrée en géométrie, j'obtiens cependant ainsi la science dans son contenu totalement pure et indépendante de la géométrie. ” (Grassmann 1844 trad.Flament 1994, p.11)⁴

On observe en fait dans l'Ausdehnunglehre une géométrie indépendante de la théorie de l'extension ; il s'agit, selon Grassmann lui-même d'une science appliquée, “ tirant ses lois des propriétés de l'espace ” ; cette géométrie fournit un modèle analogique pour la théorie des formes. Par ailleurs, une fois la théorie établie, celle-ci est illustrée par des applications géométriques ; on observe alors l'intervention d'un modèle géométrique paradigmatique, la géométrie associée étant une partie de la théorie des formes.

Grassmann insiste à plusieurs reprises sur le fait que sa théorie est indépendante de la géométrie qui l'a inspirée ; mais l'importance du modèle géométrique paradigmatique fait que la distinction entre la théorie générale et son application à la géométrie est extrêmement difficile à réaliser. Grassmann lui-même en vient à utiliser parfois un vocabulaire spécifiquement géométrique, dans la théorie générale.

Il est évidemment impossible de déterminer les conséquences effectives, sur un éventuel lecteur de l'époque, de ce recours systématique aux deux modèles géométriques que nous avons mentionnés. L'œuvre de Grassmann fut peu diffusée, et resta longtemps méconnue pour différentes raisons : la position de l'auteur, en dehors du milieu académique, et ses choix de présentation très formalistes, accompagnés de discours philosophiques obscurs, ont certainement freiné la diffusion de l'Ausdehnunglehre.

Cependant certains mathématiciens reconnurent la richesse de son contenu ; c'est en particulier le cas de Peano, qui publia en 1888 : “ *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnunglehre di H.Grassmann* ”. Dans ce livre, Peano présente la théorie des formes, mais en se limitant aux applications à la géométrie. Il a donc repris, en les accentuant, les choix faits par Grassmann dans l'Ausdehnunglehre ; seul le modèle paradigmatique géométrique est conservé, en tout cas dans la majeure partie du “ *Calcolo geometrico* ”. On peut donc supposer que l'attachement de Grassmann au modèle géométrique a été l'un des facteurs qui ont limité l'influence de l'Ausdehnunglehre dans la genèse de l'algèbre linéaire.

2.2 Evolution de notions géométriques et liens avec le secondaire

Le passage de la géométrie vectorielle enseignée au lycée à l'algèbre linéaire et bilinéaire, voire ensuite à l'analyse fonctionnelle, peut être interprété en termes de niveaux de conceptualisation. Cette notion, introduite par Robert, désigne :

“ Un palier dans un champ de connaissances mathématiques (champ conceptuel), correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ, caractérisée par des objets mathématiques présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes, et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré. ” (Robert, in Dorier et al. 1997, p.149).

⁴Les citations de Grassmann en français sont extraites de [Flament 1994]

De nombreuses notions rencontrées en géométrie au lycée sont ensuite revues en algèbre linéaire, voire en analyse fonctionnelle ; les définitions données changent, de nouvelles propriétés sont introduites, et bien entendu, de nouvelles tâches sont proposées. Nous avons tenté de repérer les continuités et les ruptures dans ce processus, afin d'une part de mettre à jour des liens possibles avec ce qui est fait dans le secondaire, et d'autre part d'identifier des possibilités et les limites de l'emploi d'une géométrie, à préciser, pour atténuer les ruptures observées.

Nous allons présenter ici l'analyse que nous avons faite autour de la notion de base.

Notion de base : définition, propriétés

DEUG

Une base d'un espace vectoriel est définie comme une famille libre et génératrice de cet espace. Cette définition est valable en dimension finie comme en dimension infinie (les termes "libre" et "génératrice" traduisent cependant en dimension infinie des propriétés différentes).

Les propriétés et théorèmes suivants sont ensuite établis :

- (P₂₁) B est une base de E si et seulement si tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire (finie) d'éléments de B (les coefficients de cette combinaison linéaire sont alors appelés composantes, ou coordonnées de cet élément) ;
- (P₂₂) Tout espace vectoriel non réduit au vecteur nul admet des bases ;
- (P₂₃) De toute famille génératrice on peut extraire une base ;
- (P₂₄) Toute famille libre peut être complétée en une base ;

Plus, en dimension finie :

- (P₂₅) Dans un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K , toutes les bases ont même cardinal. Ce nombre est appelé dimension de E sur K .
- (P₂₆) Dans un espace de dimension n , une famille libre a au plus n éléments ; si elle a n éléments, c'est une base.
- (P₂₇) Dans un espace de dimension n , une famille génératrice a au moins n éléments ; si elle a n éléments, c'est une base.

Licence-Maîtrise

Dans les espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets), on introduit des bases vérifiant des propriétés particulières. On dit que $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base de Schauder d'un espace de Banach E si pour tout u de E , il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ unique telle que $u = \sum_{n \geq 1} u_n$. On retrouve donc ici la propriété d'existence d'une décomposition unique, devenue centrale puisqu'elle constitue la définition d'une telle base. En revanche la propriété d'existence (P₂₂) n'est pas valable dans le cas des bases de Schauder.

Lycée

La notion de base du plan est définie en classe de seconde comme un couple de vecteurs non colinéaires ; la notion de base de l'espace est définie en première comme un triplet de vecteurs non coplanaires. Cette notion est immédiatement associée à celle de repère de l'espace ou du plan : un repère est une base à laquelle on adjoint un point origine. Notons que la notion de repère orthonormal du plan avait déjà été vue en classe de troisième. Dans le manuel Hachette de troisième on trouve en note cette définition de repère orthonormal du plan : ce sont deux axes perpendiculaires, gradués avec la même unité. Notons que, comme les élèves rencontrent d'abord la notion de repère sous la forme " repère orthonormal ", et que cette notion de repère et celle de base sont ensuite fortement associées, la notion de base non orthonormale semble peu naturelle.

La notion de base dans le cours de géométrie vectorielle du lycée renvoie à deux définitions distinctes, pour le plan et pour l'espace. Si le caractère " famille libre " apparaît en germe dans ces deux définitions, le caractère " famille génératrice " en est absent⁵. En effet, la dimension des espaces est connue a priori ici, bien que la notion même de dimension ne soit pas abordée. Le nombre de vecteurs fait ainsi partie de la définition de base.

Au lycée, la notion de base n'est pas évoquée à propos d'autres ensembles que l'espace (ou le plan) complet : on parle de vecteur directeur d'une droite, de couple de vecteurs directeurs d'un plan, mais le terme même de base n'est pas employé pour des objets du type sous-espace. Ceci accentue le fait que l'espace complet (ou le plan, en dimension 2) semble de nature tout à fait différente dans ce cadre géométrique de celle d'une droite ou d'un plan ; la structure commune n'est pas soulignée.

Parmi les propriétés vues en DEUG et citées ci-dessus, seules (P₂₁) et (P₂₆) présentent une parenté avec des propriétés du lycée. Ainsi, le théorème d'existence et d'unicité des coordonnées d'un vecteur sur une base est vu en seconde pour le plan et en première pour l'espace. Toutefois, la propriété (P₂₁) est une équivalence ; un seul des sens est vu au lycée, caractériser les bases par l'existence et l'unicité d'une décomposition n'y étant pas pertinent (voir l'étude de tâches qui suit). Dans le cas de (P₂₆), c'est seulement la partie " une famille libre de n vecteurs en dimension n est une base " qui est apparentée à la définition de base donnée au lycée.

Pour les autres propriétés, la connaissance a priori de la dimension, et l'absence de la notion de famille génératrice ne permet pas d'évoquer (P₂₃) , (P₂₅) , (P₂₇) . L'existence de bases, (P₂₂), n'est pas une propriété pertinente dans le cadre géométrique, elle semble évidente. La possibilité de compléter une famille libre (P₂₄) pourrait être évoquée ; mais les bases sont fréquemment données à l'avance dans les exercices, on ne recherche pas de base possédant des caractéristiques particulières qui pourraient conduire à compléter, par exemple, un couple de vecteurs directeurs d'un plan. De plus, la possibilité de compléter une base reste une propriété peu pertinente en dimension inférieure ou égale à trois, étant donné le faible nombre de vecteurs en jeu.

⁵ Dans l'ensemble du cours de géométrie vectorielle du lycée, peu d'éléments renvoient à la notion de famille génératrice. On peut l'associer à celle de vecteur directeur d'une droite, ou de couple de vecteurs directeurs d'un plan, au vu de la caractérisation vectorielle de la droite par " l'ensemble des points M tels que $\vec{OM} = t \vec{AB}$ ", ou du plan par " l'ensemble des points M tels que $\vec{OM} = r \vec{AB} + s \vec{AC}$ "; mais dans les deux cas il s'agit du cas particulier d'une base du sous-espace sous-jacent.

Les élèves ne rencontrent jamais dans le cours de géométrie du secondaire de famille génératrice qui ne soit pas une base ; ceci n'est pas surprenant, étant donné que le calcul vectoriel n'est enseigné qu'en tant qu'outil, et que la notion de dimension n'est pas abordée ; les dimensions manipulées sont faibles, et toujours connues d'avance.

Notion de base : types de tâches

Nous avons employé dans notre thèse, pour une étude détaillée des tâches, qui complète l'étude des différents niveaux de conceptualisation, la notion de praxéologie introduite par Chevallard. Une praxéologie, ou organisation praxéologique, est selon Chevallard un quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$. T représente un type de tâches, présent dans une institution donnée. τ , la technique, est une manière d'accomplir les tâches appartenant au type de tâches T . La partie $[T/\tau]$ représente selon Chevallard le bloc *pratico-technique*, usuellement appelé savoir-faire.

Nous présentons ici un exemple lié à la notion de base ; nous observerons des liens avec ce qui est vu au dans le secondaire, et poserons la question de ce qui pourrait être vu, mais ne l'est pas.

T_{base} : Déterminer si des vecteurs donnés forment une base d'un espace vectoriel

DEUG

Cette tâche sera effectuée différemment selon que l'on connaît, ou non, la dimension de l'espace ; nous nous plaçons ici dans le cas d'une dimension finie, et connue.

Si la dimension est connue (et finie), alors soit le nombre de vecteurs de la famille est différent de cette dimension et il suffit de faire cette remarque ; soit ce nombre est égal à la dimension, et il suffit de déterminer si la famille est libre, ou éventuellement génératrice (ce dernier cas de figure étant beaucoup plus rare). On est donc conduit à effectuer une sous-tâche du type :

T_{libre} : déterminer si une famille est libre

Pour cette tâche, les techniques employées varieront en fonction de l'espace étudié ; nous allons examiner l'exemple de $\mathbb{R}^n$, auquel on peut toujours se ramener par l'isomorphisme canonique (en supposant bien entendu que les notions correspondantes ont été rencontrées). Toutes les techniques évoquées ci-dessous peuvent donc être employées dans tout espace de dimension finie. Cependant, il existe des techniques spécifiques selon les objets étudiés : polynômes, suites, fonctions.

Exercice DEUG

Déterminer si n vecteurs $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Plusieurs techniques sont disponibles pour déterminer si la famille est libre :

- τ_S : emploi d'un système linéaire, dont les solutions sont les coefficients d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille ;
- τ_{MC} et τ_{ML} : emploi d'une matrice, qui sera échelonnée selon les lignes ou selon les colonnes ;
- τ_D : calcul d'un déterminant.

Etudier si des vecteurs du plan sont colinéaires, ou si des vecteurs de l'espace sont coplanaires pourrait être perçu comme une tâche du type T_{libre} , si l'on disposait dans l'institution "lycée" des éléments théoriques relatifs à la notion de famille libre.

Montrer que des vecteurs sont ou ne sont pas colinéaires peut se faire dès la classe de seconde, d'abord en utilisant des configurations particulières : dans un "vrai" triangle ABC, les points A, B et C n'étant pas alignés, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ensuite, une fois introduite la notion de coordonnées dans une base, les élèves peuvent montrer que deux vecteurs donnés par leurs coordonnées ne sont pas colinéaires car les coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Ils peuvent utiliser directement cette propriété, ou employer la technique qui consiste à calculer le déterminant 2×2 de ces vecteurs (technique de type τ_D) ; les vecteurs donnés par leurs coordonnées sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul.

La technologie correspondante repose sur cette dernière propriété, qui est démontrée ; en fait il s'agit essentiellement d'une commodité d'écriture, permettant de ne pas distinguer les cas de nullité d'une des coordonnées. Le déterminant apparaît ici comme un élément relevant d'un niveau de conceptualisation supérieur, introduit dans un cas très restreint (il ne sera pas question de déterminant au-delà de la dimension 2).

Montrer que trois vecteurs de l'espace ne sont pas coplanaires peut se faire aussi à l'aide d'une configuration particulière : dans un "vrai" tétraèdre ABCD, les points A, B, C et D n'étant pas coplanaires, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

Il est également possible de vérifier si des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires en cherchant à déterminer s'il existe des coefficients x et y avec $\vec{w} = x \vec{u} + y \vec{v}$. Cette démarche est essentiellement proposée pour montrer que des vecteurs sont effectivement coplanaires, et lorsque la relation ci-dessus peut être déduite des propriétés d'une configuration particulière, avec la relation de Chasles par exemple. Ces techniques (emploi d'une configuration géométrique particulière), spécifiques du cadre géométrique, ne sont pas généralisables.

Dans les manuels que nous avons étudiés, nous n'avons rencontré le type de tâches : montrer que des vecteurs donnés forment une base de l'espace ou d'un plan que dans le cas de bases orthonormales, cas que nous n'examinerons pas ici.

On peut alors se demander pourquoi ce type de tâches est absent des manuels du secondaire, alors que les éléments technologico-théoriques permettant de développer les techniques nécessaires sont disponibles.

En effet, une base du plan étant définie comme un couple de vecteurs non colinéaires, et une base de l'espace comme un triplet de vecteurs non coplanaires, déterminer si des vecteurs forment une base pourrait être fait en vérifiant d'abord qu'on a bien le bon nombre de vecteurs, puis en étudiant s'ils sont non colinéaires ou non coplanaires.

L'absence de ce type de tâches tient au rôle de la notion de base au lycée : celle-ci a un statut d'outil, employé le plus souvent implicitement ; on dispose en général d'une base, donnée au départ, associée à un repère, et qui permet de caractériser des points ou des vecteurs par leurs coordonnées. Un choix de base adaptée peut éventuellement intervenir (mais ceci est très rare) pour une configuration géométrique particulière, mais celui-ci ne conduira pas à montrer que les vecteurs choisis forment une base, cette propriété étant généralement évidente au vu de la configuration. Ce qui manque ici est donc la raison d'être de ce type de tâches.

Ruptures constatées

Nous dressons ici un rapide bilan des ruptures qui se dégagent de l'étude de l'évolution des différentes notions (familles libres, bases, orthogonalité, produit scalaire, équations d'un sous-espace, projection, projection orthogonale, automorphismes orthogonaux).

Tout d'abord, l'enseignement du lycée se déroule dans le cadre de la géométrie affine euclidienne. L'aspect " affine " implique que l'élément premier est le point ; les sous-espaces considérés sont affines, les applications également, elles agissent presque uniquement sur des points. L'introduction du vecteur est liée à la notion de translation ; cette introduction entraîne des difficultés didactiques connues, par exemple en ce qui concerne la séparation entre un vecteur et un représentant de ce vecteur. L'objet premier reste le point ; le vecteur prend toutefois de l'importance après la définition du produit scalaire. L'anne et l'euclidien sont fortement associés, et leur séparation semblerait contraire à l'intuition dans ce cadre : l'orthogonalité, la norme y sont des notions naturelles.

De plus, au lycée, l'étude du plan et celle de l'espace sont effectuées séparément, avec des différences de vocabulaire (il s'agit notamment de " plan " et " d'espace ", et non d'espaces de dimension 2 et 3, le terme dimension n'étant pas employé). De même dans l'espace, droites et plans apparaissent comme des objets de nature tout à fait différente de celle de l'espace complet, la structure commune n'est pas soulignée.

D'une manière générale, les propriétés spatiales restent centrales, en particulier dans les exercices proposés, mais également dans les définitions et les propriétés données. L'étude des applications est liée à celle des configurations. De même, pour déterminer si des vecteurs sont colinéaires ou coplanaires, on attend souvent des élèves qu'ils utilisent une configuration géométrique particulière.

Par ailleurs, les types de tâches de DEUG que nous avons mentionnés parce qu'ils présentaient des liens avec des types de tâches rencontrés au lycée correspondent à des exercices élémentaires au niveau de l'université. Il est rare que de tels exercices fassent l'objet d'une étude approfondie en travaux dirigés, les contraintes de temps conduisant à passer rapidement à des tâches plus complexes.

2.3 Possibilités d'élaboration d'un modèle

Nous examinons ici la possibilité d'élaboration d'un modèle pour l'introduction de l'algèbre linéaire générale. Nous ne nous limitons pas à un modèle géométrique, car nous avons choisi ici d'appeler " géométrie " une théorie dont l'objet central est la modélisation de l'espace physique. En particulier, l'algèbre linéaire, même limitée à la dimension 3, ne peut pas être considérée comme une géométrie selon cette convention. Nous allons nous poser la question des apports possibles d'un enseignement d'algèbre linéaire et bilinéaire, limité à la dimension trois, les notions et propriétés introduites dans un cours de géométrie devant préparer à l'algèbre linéaire faisant partie d'un tel cours.

Un tel enseignement permettrait sans doute de renforcer le lien entre ce qui est fait au lycée et ce qui est vu en DEUG sur certains points. Il permettrait d'autre part d'introduire des notions d'algèbre linéaire sans présenter d'emblée l'ensemble de la théorie. On pourrait, dans un tel

enseignement, introduire notamment les notions de sous-espace vectoriel, famille libre, génératrice, application linéaire (en soulignant éventuellement projections, symétries), matrice d'une telle application, voire réduction d'endomorphismes, ainsi que l'étude des espaces euclidiens limités à la dimension 3, avec en particulier ce qui concerne les isométries. Mais la faiblesse des dimensions en jeu, et l'importance des propriétés spatiales lorsque la dimension est ainsi limitée, même dans un enseignement d'algèbre linéaire, ne permettent sans doute pas de combler tous les écarts rappelés ci-dessus.

Parmi les propriétés et notions qui pourraient être présentées dans un tel cours, certaines permettraient d'établir des liens avec la géométrie vue au lycée ; par ailleurs, des notions d'algèbre linéaire pourraient être introduites en dimension ≤ 3 , de manière plus concrète que dans la théorie générale. Cependant il reste des propriétés pour lesquelles la limitation à la dimension peut apparaître comme trop restrictive, en particulier à cause du modèle figuratif associé, dans lequel certaines propriétés deviennent des évidences spatiales. Donnons des exemples pour illustrer ces différents cas de figure :

- La propriété de linéarité des projections peut être présentée en lien avec le théorème de Thalès rencontré dans le secondaire ;
- Les notions de valeurs propres, sous-espaces propres peuvent être présentés en dimension 3 (notamment pour le cas d'une projection, ou d'une symétrie) ; ces notions restent pertinentes, malgré la dimension limitée ;
- En revanche, la propriété d'idempotence des projections : $pop=p$ peut apparaître comme une évidence spatiale en dimension ≤ 3 . C'est aussi le cas des propriétés d'existence : existence de bases, de bases orthogonales, qui semblent intuitivement évidentes.

En ce qui concerne les tâches, la limitation du nombre de dimensions semble moins restrictive que pour les notions et propriétés. En effet, de nombreuses tâches pourraient être travaillées dans un enseignement d'algèbre linéaire limité à la dimension trois. Déterminer si une famille est libre, déterminer une base, ou un système d'équations d'un sous-espace, calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace, identifier une isométrie à sa matrice sont des tâches qui peuvent donner lieu à des exercices dans un tel enseignement. De plus des tâches nouvelles pourraient être abordées, comme la détermination de la matrice dans une base donnée, du noyau ou de l'image d'un endomorphisme, ou même la réduction d'un tel endomorphisme.

Un tel travail permettrait de préparer aux tâches plus complexes qui sont proposées en algèbre linéaire générale.

3. Interventions effectives de modèles géométriques

Notre étude des interventions effectives de modèles géométriques en algèbre linéaire comporte deux parties : la première concerne les enseignants, et la seconde les étudiants.

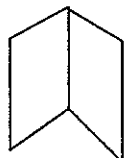
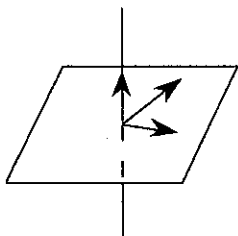
3.1 Questionnaire aux enseignants

Nous avons proposé un questionnaire à des enseignants de l'université (nous avons recueilli les réponses de 31 enseignants) ; ce questionnaire comportait trois parties distinctes, l'une consacrée aux exercices, l'autre au cours, et la dernière à l'emploi de dessins. Nous retenons ici trois résultats issus des réponses au questionnaire :

- Les enseignants ont peu recours au dessin en algèbre linéaire. Plus précisément, il ne semble pas qu'un emploi du dessin spécifique à l'algèbre linéaire soit développé ; nous détaillons ce point ci-dessous.
- Peu de liens sont faits, dans les enseignements d'algèbre linéaire, avec la géométrie vue au lycée. La moitié des enseignants que nous avons interrogés émet de sérieuses réserves sur ces possibilités d'emploi. Les raisons qu'ils invoquent sont de différentes natures : un tiers déclare explicitement ne pas connaître suffisamment les programmes du secondaire pour pouvoir les exploiter. Certains (moins nombreux) disent que ce qui est vu au lycée est trop différent, ou encore mal maîtrisé par les étudiants.
- On observe dans les choix des enseignants une influence encore forte de la réforme des mathématiques modernes. Nous aborderons ce point en conclusion de la partie 3.

Emploi de dessins par les enseignants

Nous avons tout d'abord proposé trois dessins, en demandant aux enseignants s'ils utilisaient ceux-ci, et pour illustrer quelle notion ou propriété d'algèbre. Voici le tableau correspondant :

Figure	Utilisée	Cette figure illustre
	☐ oui ☐ non	
	☐ oui ☐ non	
	☐ oui ☐ non	

Puis, dans un tableau comportant 5 lignes, nous leur avons demandé de donner d'autres dessins qu'ils utilisaient dans leur cours d'algèbre linéaire, en précisant ce que ceux-ci illustraient.

Sans entrer dans le détail des réponses, nous allons rapporter ici les éléments marquants qui ressortent de l'analyse.

Tout d'abord, il semble que les enseignants utilisent peu de dessins⁶. Les trois dessins proposés, et les cinq cases vides du tableau suivant, invitaient les enseignants à s'exprimer sur 8 dessins intervenant dans leur cours d'algèbre linéaire ; or le nombre moyen de dessins mentionnés est seulement de 3,2 par enseignant. Parmi les 28 enseignants qui ont répondu à cette question, 12 (soit 43%) ne proposent aucun dessin dans le tableau prévu à cet effet.

Par ailleurs, les dessins sont majoritairement employés pour illustrer des situations en dimension inférieure ou égale à trois. Seize enseignants (57%) associent aux dessins qu'ils déclarent employer plus d'interprétations en dimension ≤ 3 que dans un cadre général (par exemple, pour le deuxième dessin que nous avons proposé, 8 enseignants parlent d'intersection de plans, et 5 d'intersection de sous-espaces).

De plus, les dessins proposés par les enseignants dans la seconde partie de la question sont pour la plupart employés pour illustrer des notions ou des situations qui peuvent relever d'une géométrie, et ne sont en tout cas pas spécifiques de l'algèbre linéaire. Symétries, projections, rotations, coniques sont fréquemment citées, alors que la seule notion relevant spécifiquement de l'algèbre linéaire et citée par au moins deux enseignants est celle de somme de sous-espaces, sous-espaces supplémentaires. Voici quelques exemples de dessins, et d'interprétations associées :

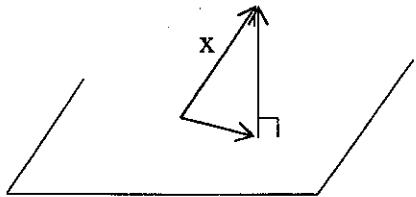
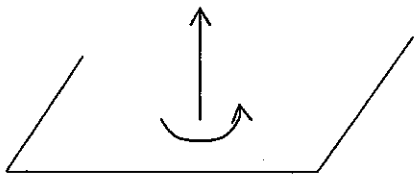
Figure	Cette figure illustre
	Projection orthogonale sur un plan

Figure	Cette figure illustre
	Rotation dans l'espace

Il semble en fait que les enseignants n'ont pas développé une réelle pratique spécifique du dessin en algèbre linéaire. Les dessins employés, qui sont peu variés car ils représentent pratiquement toujours des droites, des plans et des vecteurs (avec parfois certains traits en pointillés) sont plutôt utilisés pour illustrer des exemples dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$; les notions en jeu dans ces exemples étaient pour la plupart déjà connues au lycée. Certains enseignants font systématiquement figurer une origine O sur leurs dessins, d'autres ne mentionnent pas un tel

⁶ Ce fait est confirmé par les étudiants.

point. Les dessins dans le plan comportent souvent un repère ; ce n'est pratiquement jamais le cas des dessins illustrant une situation dans l'espace. Il n'y a pas de convention de dessin explicite commune aux enseignants interrogés. On peut supposer qu'il sera alors difficile aux étudiants de s'aider de dessins dans leur pratique de l'algèbre linéaire.

3.2 Questionnaire aux étudiants

Nous avons choisi d'interroger des étudiants de CAPES ou de maîtrise, c'est à dire en particulier des étudiants qui disposent tous d'une licence de mathématiques. En effet ces étudiants ont suivi l'ensemble de l'évolution de notions que nous avons évoquée dans la partie 2 ; ils ont par ailleurs rencontré différents enseignants, donc sans doute plusieurs types de recours au géométrique. Nous avons par ailleurs décidé d'interroger les étudiants en deux temps, en leur soumettant d'abord un questionnaire écrit, puis en les rencontrant pour un entretien afin d'éclaircir éventuellement leur réponses au questionnaire, et d'observer directement leurs pratiques en termes de dessins. L'examen de leurs réponses nous notamment conduite aux conclusions suivantes :

- Certains étudiants ont recours, en algèbre linéaire à la géométrie vue au lycée ; ceci peut entraîner des difficultés.
- Parmi les étudiants qui utilisent des dessins, certains ont recours à un modèle figuratif affine ; ce recours est associé à des difficultés en algèbre linéaire.
- Certains étudiants, qui ne semblent pas avoir de difficultés en algèbre linéaire, n'ont recours à aucun modèle figuratif.

Nous allons développer un extrait du questionnaire, qui contient des éléments relevant de ces trois aspects.

Extrait du questionnaire

Exercice 2

Donner une matrice 4×4 qui représente une symétrie.

Analyse a priori

La forme de la question permet une grande variété de réponses : aucune contrainte n'est imposée sur les caractéristiques de la symétrie, ni sur celles de la matrice en dehors du fait qu'elle doit effectivement représenter une symétrie, et aucune demande explicite de justification n'est formulée.

Différentes démarches peuvent être adoptées pour fournir une matrice qui réponde à la question.

Celles-ci dépendent notamment de la caractérisation employée pour la notion de symétrie. Il peut s'agir d'une caractérisation de type formel : une symétrie est un endomorphisme vérifiant $s \circ s = \text{Id}$, donc il suffit de donner une matrice dont le carré est égal à la matrice identité ; ou $s(x) = x_F - x_G$, si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G , ce qui donne soit les images des vecteurs d'une base de l'espace formée de vecteurs de F et de G , soit l'expression analytique de s , et permet donc de remplir la matrice.

Mais la caractérisation employée peut également être de nature beaucoup plus intuitive : les images des vecteurs de base, ou l'expression analytique d'une symétrie peuvent être ainsi utilisées directement, sans reposer sur une caractérisation formelle ; il faudra alors, lors de l'entretien, tenter de déterminer l'origine de ces propriétés. Elles peuvent notamment avoir

été déduites de propriétés lues sur un dessin représentant l'effet d'une symétrie en dimension 2 ou 3.

Il est également possible de partir de la forme, connue, d'une matrice de symétrie dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et d'étendre celle-ci à la dimension 4, en rajoutant un coefficient égal à 1 ou -1 à la diagonale, et en complétant la matrice par des coefficients nuls, sans utiliser de caractérisation non matricielle pour les symétries de $\mathbb{R}^4$.

Nous avons donc cherché lors de l'entretien, au cas où ces informations ne figuraient pas sur le questionnaire, à déterminer quelle caractérisation (plus ou moins intuitive) de la symétrie a été employée pour remplir la matrice. Nous avons tenté d'observer si des connaissances sur les symétries en dimension 2 ou 3 ont été utilisées et prolongées à la dimension 4 et en particulier si un dessin, ou une image mentale ont servi à rappeler ou à traduire ces connaissances.

47 étudiants ont participé au questionnaire et à l'entretien qui a suivi. La plupart (87 %) ont donné une matrice qui convenait. Nous avons distingué pour l'analyse trois couples de critères. Tout d'abord deux critères portant sur la nature de la symétrie observée : certains étudiants parlent de symétrie centrale, or cette notion provient nécessairement de connaissances de lycée. D'autres évoquent au contraire une symétrie par rapport à un sous-espace, selon un autre, terminologie qui n'a pu être rencontrée qu'en algèbre linéaire. Nous observons ensuite si l'étudiant a fait un dessin (nous demandions systématiquement, lors de l'entretien, s'il était possible d'associer un dessin à l'application évoquée) ; parmi les dessins, nous distinguons dessins affines et dessins vectoriels (c'est à dire des dessins représentant des symétries agissant sur des points ou sur des vecteurs). Par ailleurs, nous avons noté deux manières différentes de compléter la matrice : en considérant les images des vecteurs de base, ou en utilisant des coordonnées, et l'expression analytique de l'application.

L'analyse des réponses, faite en employant ces critères, nous a conduite à distinguer deux groupes, rassemblant 28 des 47 étudiants interrogés. Dans un premier groupe (12 étudiants), les étudiants utilisent les vecteurs de base pour remplir la matrice ; ils emploient à propos de la symétrie un vocabulaire rencontré en algèbre linéaire, et ceux qui dessinent (8 étudiants) font un dessin vectoriel. Dans le second groupe (16 étudiants), les réponses évoquent une symétrie centrale ; la matrice est complétée à l'aide des coordonnées. Dans le cas où un dessin est fait, il s'agit d'un dessin affine. Parmi les autres étudiants, on peut signaler 5 échec, et 4 étudiants faisant appel à une caractérisation purement formelle de la symétrie.

3.3 Bilan des recours effectifs

En ce qui concerne les enseignants, nous avons observé l'opposition entre deux principaux types d'attitudes, où l'on retrouve l'influence des prises de position datant de la réforme des mathématiques modernes. Pourtant d'autres attitudes sont envisageables. Ainsi certaines tentatives sont faites dans des manuels ; mais le recours au géométrique n'y dépasse guère la dimension 3. Il nous semble que ces tentatives pourraient être prolongées, au-delà de cette dimension notamment.

Pour les étudiants, nous avons observé que l'emploi d'un modèle figuratif de type affine était associé à des difficultés en algèbre linéaire. Or les deux positions majoritaires chez les enseignants risquent d'entraîner l'emploi d'un tel modèle. En effet, la position de type structuraliste, implique une défiance à l'égard des dessins qui conduit les enseignants à en utiliser peu. Ainsi le modèle figuratif affine attaché à la géométrie du lycée ne sera pas remplacé, et les étudiants éprouvant le besoin d'employer un modèle figuratif risquent d'y

faire appel. La position opposée regroupe des enseignants qui sont notamment favorables à un cours de géométrie affine précédant l'algèbre linéaire. Dans un tel cours, un modèle figuratif affine sera présenté aux étudiants, qui risquent alors d'y avoir recours y compris en algèbre linéaire. Il serait donc intéressant de tenter un enseignement d'algèbre linéaire utilisant un modèle figuratif vectoriel, sans qu'un modèle affine ait été introduit auparavant. Rappelons toutefois que nous avons observé que certains étudiants, utilisant un modèle figuratif vectoriel adapté, ont cependant des difficultés en algèbre linéaire tandis que d'autres qui réussissent mieux ne semblent pas avoir recours à un quelconque support de nature géométrique. Examiner de plus près les pratiques de ce dernier type d'étudiants pourrait faire l'objet d'une recherche spécifique, qui permettrait de déterminer si le dessin leur est utile à certains stades de leur apprentissage, et est ensuite intériorisé, ou s'il est simplement absent de leurs pratiques.

Par ailleurs, en ce qui concerne l'usage de dessins, plusieurs éléments nous montrent que la plupart des enseignants en utilisent peu, ou n'ont du moins pas développé de pratique spécifique quant à l'emploi de dessins en algèbre linéaire. En effet les réponses des enseignants au questionnaire montrent que le nombre de dessins que ceux-ci déclarent utiliser est faible, et que les notions illustrées sont soit déjà connues en géométrie au lycée, soit transférables en géométrie affine. Il semble donc que l'introduction de notions nouvelles d'algèbre linéaire ne soit pas ou soit peu accompagnée de dessins par les enseignants. Ceci est confirmé par les réponses des étudiants, qui d'une part déclarent majoritairement ne pas se souvenir d'emploi de dessins par les enseignants et d'autre part se réfèrent à des notions déjà connues dans le secondaire lorsqu'on leur demande de dessiner : base, symétrie centrale par exemple. Préciser ce qu'est l'usage effectif de dessins par les enseignants dans un cours d'algèbre linéaire est l'une des directions de recherche qu'il serait intéressant de poursuivre, en réalisant des observations en classe qui sont indispensables dans ce cas.

Par ailleurs, le questionnaire aux enseignants a montré que ceux-ci manifestent une nette défiance à l'égard de l'éventuel emploi, en algèbre linéaire, de connaissances issues de l'enseignement secondaire. Or nous avons vu dans le paragraphe précédent que certains liens pourraient être exploités. Cette possibilité n'est pas encore mise à profit ; elle pourrait également donner lieu à des expérimentations ultérieures.

Conclusion

Nous présentons en conclusion des pistes pour des recherches ultérieures, articulées autour de la mise en place d'un enseignement expérimental en DEUG.

Un tel enseignement pourrait porter, en première année, sur l'étude de l'algèbre linéaire et bilinéaire en dimensions 2 et 3.

Une étude portant simultanément sur l'algèbre linéaire et les espaces euclidiens nous semble nécessaire pour mettre à profit l'intuition géométrique. Etant donnée l'expérience de la géométrie dont disposent les néobacheliers, il ne peut pas être naturel d'exclure, même dans un premier temps, les notions de norme d'un vecteur ou d'orthogonalité.

Ceci permettrait d'aborder des concepts nouveaux sans exposer d'emblée l'ensemble de la théorie. Un certain nombre de propriétés peuvent être présentées dans le cadre de la dimension 2 ou 3, en soulignant les liens avec la géométrie vue au lycée, au sujet des bases, des projections, des isométries... De même la limitation de dimension permet de travailler des tâches non élémentaires, mais cependant moins abstraites que ce qui est pratiqué usuellement ; celles-ci ne donnent lieu habituellement qu'à peu d'exercices, comme nous l'avons constaté dans notre étude de manuels. Ainsi les tâches qui comportent des parentés avec des tâches de lycée pourraient être présentées comme un élargissement de ce qui est vu dans le secondaire et approfondies. Il ne s'agit pas ici de tenter d'empêcher toute rupture entre

le secondaire et le supérieur, en faisant apparaître l'algèbre linéaire comme une généralisation de la géométrie vue dans le secondaire. Un tel choix ne correspondrait aucunement à la réalité ; par ailleurs, la rupture est non seulement inévitable mais sans doute également souhaitable, dans une certaine mesure. En termes de niveaux de conceptualisation, nous pouvons dire que le passage d'un niveau à l'autre ne peut s'apparenter à une progression sans discontinuités. Cependant souligner explicitement les continuités comme les ruptures attachées à ce changement de niveaux ne peut qu'être profitable aux étudiants.

Au delà de la référence à l'enseignement secondaire, la limitation de dimension permet de mettre à profit des modèles géométriques et figuratifs. Il ne s'agit pas uniquement de faire le lien avec la géométrie vue au lycée, mais également d'employer autant que possible des dessins. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, il nous semble important de proposer aux étudiants un modèle figuratif vectoriel, pour éviter qu'ils aient recours au modèle affine de l'enseignement secondaire. Ce modèle vectoriel doit selon nous être utilisé également pour illustrer des situations se déroulant dans des espaces de polynômes ou de fonctions. En effet, la limitation à la dimension 2 ou 3 ne signifie pas, pour nous, une simple présentation de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens. Une limitation à ce cadre ne peut pas, selon nous, suffire à motiver un enseignement d'algèbre linéaire. Par ailleurs, il nous semble important de proposer aux étudiants un véritable modèle intuitif (associé à un modèle figuratif), adapté à l'algèbre linéaire et dépassant la simple géométrie du lycée à laquelle on aurait appliqué le vocabulaire de l'algèbre linéaire. Ainsi la notion de projection, la distance d'un vecteur à un sous-espace, l'exemple d'une rotation du plan comme endomorphisme n'admettant pas de vecteur propre... peuvent faire partie d'un tel modèle. Celui-ci peut ensuite servir comme modèle intuitif dans la présentation de l'algèbre linéaire et bilinéaire générale en deuxième année. L'emploi de ce modèle pourrait permettre d'éviter la rupture que l'on observe dans certains manuels lors du passage à une dimension quelconque. En particulier, le recours au modèle figuratif peut être effectué quelle que soit la dimension finie considérée. Au delà même de sa partie figurative, l'algèbre linéaire et bilinéaire en dimension 2 ou 3 peut être employée dans un tel enseignement comme modèle paradigmatique pour la théorie générale.

Par ailleurs, si le découpage que nous proposons ici ne permet pas, pour des questions de temps, d'exposer l'intégralité de l'algèbre linéaire et bilinéaire dans les deux premières années de l'université, il pourrait être envisageable de reporter au-delà une partie de cet enseignement ; un tel choix est d'ailleurs effectif dans les maquettes élaborées par certaines universités en vue de la prochaine réforme.

Références

- ARTIGUE, M., CHARTIER, G. et DORIER, J-L. (2000) : Presentation of other research works, in Dorier (ed.) : *On the teaching of linear algebra*, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 247-264.
- BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999) : La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.19.1, 77-124.
- CHEVALLARD, Y. (1985) : *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Editions la Pensée sauvage, Grenoble.
- CHOQUET, G. (1964) : *L'enseignement de la géométrie*, Paris : Hermann.
- C.R.E.M.(Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques) (2000) : Rapport d'étape sur l'enseignement de la géométrie, *Bulletin Apmep* n°430, 571-599.
- DIEUDONNE, J. (1964) : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Paris : Hermann 1964.
- DORIER, J.L. (1996) : Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'histoire des mathématiques* 2 , 149-191.

- DORIER, J.L. et al. (1997) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble : La Pensée sauvage éditions.
- DORIER, J.L. et al. (2000) : *On the teaching of linear algebra*, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.
- FISCHBEIN, E. (1987) : *Intuition in science and Mathematics, An Educational Approach*, Dordrecht : D.Reidel Publishing Company.
- FISCHBEIN, E. (1993) : The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.24, n.2, 139-162..
- FLAMENT, D. (1994) : *Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, la lineale Ausdehnunglehre*, Paris : Blanchard. Traduction préfacée de (Grassmann 1844).
- FRECHET, M. (1928) : *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Paris : Gauthier-Villars ; rééd, 1951.
- GRASSMANN, H. (1844) : *Die lineale Ausdehnunglehre*, Leipzig : Otto Wigand.
- GUEUDET-CHARTIER G. (2000) : *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- LABORDE, C. et CAPPONI, B. (1994) : Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14.1.2, 165-210.
- PEANO, G. (1888) : *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnunglehre di H.Grassmann e preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino : Fratelli Bocca Editori.
- PEANO, G. (1958) : *Opere Scelte*, vol I, II, III, Roma : Edizioni Cremonese.
- RIESZ, F. (1907) : Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables, *C.R. Acad. Sc.* 144, 1409-1411.
- RIESZ, F. (1960) : *Œuvres complètes*, 2 vols., Paris : Gauthier-Villars.
- ROBERT, A. (1997) : Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire, in Dorier et al.: *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble : La Pensée sauvage éditions.
- SCHMIDT E. (1907) : Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 1, *Math. Ann.* 63 , 433-467.
- SCHMIDT E. (1907) : Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 2, *Math. Ann.* 64 , 161-174.
- SCHMIDT, E. (1908) : Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Palermo* 20, 53-77.