Activite coordonnee et complementaire d'un professeur et de ses eleves lors de l'introduction des systemes d'equations en Troisieme

Lalina Coulange

Laboratoire Leibniz-Imag

I. Introduction

Dans notre travail de thèse centré sur l'activité du professeur, nous avons adopté un point de vue singulier sur l'enseignement des systèmes d'équations et sur les moments de transition arithmétique-algèbre, tout en nous inspirant d'apports théoriques existants. Il s'agit dans un premier temps de présenter succinctement les éléments de ce cadre théorique, qui s'appuie sur l'utilisation d'outils issus d'une part de la théorie anthropologique de Chevallard, d'autre part de la théorie des situations didactiques de Brousseau.

1. Couple enseignant-enseigné

Précisons tout d'abord que suivant l'approche conjuguée de Chevallard (1995) et Mercier (1998), nous considérons l'acte d'enseigner comme une activité coopérative entre l'enseignant et l'élève. Suivant Conne (1997), on peut dire que nous nous intéressons à *l'activité du couple enseignant-enseigné.* Il s'agit d'étudier l'enseignement à travers les choix des professeurs et d'interroger leurs comportements et ceux des élèves comme complémentaires et coordonnées (Chevallard 1995, p. 13). En cela, nous rejoignons le point de vue de Bloch (1999) sur l'activité de l'élève :

> " Quel avantage y a t-il à envisager ainsi l'activité du couple enseignant / enseigné, au lieu de focaliser sur les connaissances et l'activité de l'élève seul ? l'idée est que l'observation des situations d'enseignement / apprentissage ne se fasse plus par seule référence aux connaissances, erreurs, conceptions... de l'élève, mais par une reconnaissance ***d'interactions***. (...) En ce sens il est possible de rapporter, dans une certaine mesure, l'activité de l'élève à celle de l'enseignant, (et réciproquement) (...). " (Bloch 1999, p. 145).

2. En termes de contraintes et de libertés – théorie anthropologique et théorie des situations

Par ailleurs, l'activité de ces deux acteurs du système didactique peut être caractérisée en termes de contraintes et de libertés, en prenant appui sur un usage conjoint et articulé de l'approche anthropologique et de la théorie des situations didactiques.

On considère enseignant et élève comme étant soumis à des contraintes externes génériques (dispositifs didactiques généraux) et spécifiques du savoir mathématique à enseigner (aspects épistémologiques de l'objet de savoir à enseigner, objectifs d'enseignement associés à cet objet, fixés par les programmes, etc.) qui pèsent sur tout système didactique. Ces contraintes résultent de leurs assujettissements respectifs en tant que sujets de différentes institutions. La première hypothèse formulée relativement à ces contraintes dites externes est la suivante :

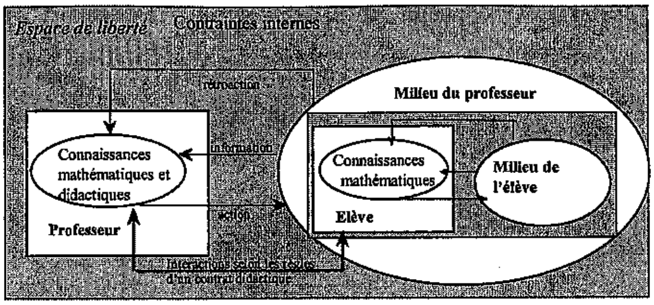
L'approche anthropologique du didactique permet de dégager des contraintes externes, spécifiques d'une institution et d'un objet mathématique à enseigner, en les abordant du point de vue du concept de rapport institutionnel au savoir.

Il reste néanmoins au professeur, ainsi qu'à l'élève, des degrés de libertés dans les limites des contextes définis par ces contraintes externes. Par exemple, à l'aide de ses connaissances didactiques et mathématiques, l'enseignant peut faire des choix et agir de façon plus personnelle, lorsqu'il élabore son projet d'enseignement ou gère sa réalisation en classe.

Cependant, au sein même de cet espace de liberté, les régulations de leur relation didactique soumettent à leur tour professeur et élève à de nouvelles contraintes dites internes. Ceci nous conduit à formuler une deuxième hypothèse :

La théorie des situations didactiques permet de dégager des contraintes dites internes auxquelles le professeur et l'élève sont soumis : il s'agit d'étudier les régulations de la relation didactique entre ces acteurs, du point de vue des concepts de milieu et de contrat didactique.

Ainsi le modèle général de situation pour le professeur et l'élève, soumis à ces deux classes de contraintes externes et internes peut-être schématisé comme suit :



Contraintes externes
différents assujettissements des acteurs à des institutions

Fig.1 Situation de l'enseignant et de l'élève – Contraintes externes et internes

Ce modèle est pour nous un moyen d'interroger l'activité du couple professeur-élève. Dans la suite, nous allons formuler les questions qu'il permet de poser sur l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième.

II. CONTRAINTES INSTITUTIONNELLES D'ENSEIGNEMENT ET D'ETUDE DES SYSTEMES D'EQUATIONS EN TROISIEME

Dans un premier temps, nous nous sommes située dans le cadre de la théorie anthropologique développée par Chevallard, pour déterminer des contraintes externes qui touchent à l'enseignement et à l'étude des systèmes linéaires en fin de collège. Les questions formulées dans ce cadre sont les suivantes : *Quelles contraintes institutionnelles pèsent actuellement sur l'enseignement et l'introduction des systèmes d'équations fin de collège ? Quelles sont les origines et causes de ces contraintes ? Quelles alternatives possibles peuvent être associées à d'anciens systèmes de contraintes institutionnelles* ?

Pour répondre à ces questions, nous avons considéré à la fois la période contemporaine[51] et des périodes d'enseignement " passées ". Nous avons mené une analyse écologique de programmes et de manuels de 1902 à 1999, considérant ces éléments textuels du savoir enseigné comme représentatifs de contraintes institutionnelles. En deçà d'un promontoire d'observation des pratiques contemporaines d'enseignement, cette enquête historique permet de prendre en compte diverses praxéologies didactiques et mathématiques, associées à ces périodes d'enseignement, que les enseignants ont pu connaître et qui peuvent se constituer en choix possibles d'enseignement. Afin de rendre compte de traces d'anciennes pratiques institutionnelles qui subsisteraient ainsi dans l'enseignement contemporain des

[51] C'est-à-dire celle associée à la réforme du Collège de 1985, et aux programmes de 3e de 1989. De nouveaux programmes sont en application depuis 1999. Mais l'essentiel des résultats présentés ici ne prend pas en compte cette réforme.

systèmes d'équations, notre analyse de programmes et de manuels a été complétée par un questionnaire auprès de professeurs de troisième (interrogés en 1998-1999, $\Sigma = 19$) : sur leurs choix d'enseignement des systèmes linéaires et les raisons (du côté de leurs connaissances mathématiques sur les systèmes) par lesquelles ils justifient ces choix. Nous résumons ci-dessous quelques résultats de l'analyse écologique et complétons ces résultats avec de brefs commentaires sur les réponses à notre questionnaire.

Pratiques institutionnelles d'introduction des systèmes d'équations

1. *Propos technologiques visant à introduire les systèmes linéaires en continuité de l'équation à deux inconnues*

Dans les manuels de la période dite *contemporaine* (1989-1999), on relève les traces d'un discours d'introduction des systèmes linéaires, à la suite d'une brève présentation ostensive de l'équation à deux inconnues, au sein de la partie identifiable à un cours (identifiable au topos du professeur). À travers ces propos d'ordre technologique, l'objet système d'équations est présenté comme moyen de répondre à la question : *Sachant qu'une équation à 2 inconnues admet " plusieurs " couples solutions, comment calculer les couples solutions vérifiant 2 équations à 2 inconnues ?*

Des discours visant ainsi à introduire l'objet système, en continuité de l'équation à deux inconnues, sont relevés au sein de tous les manuels des périodes précédentes. Les propos tenus varient d'une époque à l'autre, selon différents niveaux technologiques, voire théoriques. Par exemple, dans les ouvrages de la période dite de *contre-réforme* (1980-1988), les systèmes sont introduits à la suite d'une étude géométrique de l'équation linéaire à deux inconnues, à travers un discours tenu en langage ensembliste, associé à la question : *Quelle est l'intersection des ensembles infinis de couples solutions de 2 équations à 2 inconnues correspondant à 2 droites ?*

Ce type de discours est une alternative encore envisagée par un nombre non négligeable de professeurs contemporains. Cinq des dix-neufs enseignants interrogés parlent de " montrer le lien avec les équations de droite " et de questionner la nature de l'intersection de deux droites du plan, lors de l'introduction officielle des systèmes dans leur classe de Troisième.

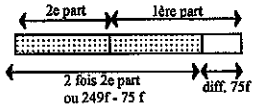
Cependant, l'analyse des manuels des années 1990, ainsi que des réponses des autres professeurs au questionnaire, montre que ce type de propos, typiquement du côté de l'enseignant, tend à perdre de son importance. Il se trouve supplanté par des " activités préparatoires ou introductives ".

2. Activités préparatoires visant à introduire le système d'équations comme outil de résolution de problèmes concrets

Comme le souligne Matheron (1994), au-delà d'idées directrices sur le savoir mathématique à enseigner, c'est une nouvelle approche de l'enseignement qui se met en place en 1989. Les personnalités du moment mettent l'accent sur l'activité de l'élève. Ceci amène la création de nouveaux dispositifs didactiques génériques, telles les activités, destinées à faire participer l'élève à l'enseignement d'une notion mathématique nouvelle. Il règne d'autre part une idéologie utilitariste : il s'agit de montrer l'utilité des mathématiques " dans la vie quotidienne ". Au sein des manuels contemporains, les systèmes d'équations sont dès lors, introduits à travers des activités qui font massivement intervenir les problèmes concrets.

C'est le choix auquel se rallie la majorité des enseignants qui ont répondu à notre questionnaire. Conformément à leur position dans l'institution contemporaine, onze des dix-neuf enseignants interrogés prévoient d'introduire officiellement le système d'équations comme outil de résolution de problèmes concrets.

Précisons l'origine des énoncés choisis par les professeurs et les auteurs de manuels contemporains à cet effet. Ils correspondent à des problèmes anciennement traités à la fois en arithmétique et en algèbre élémentaires, pendant la période d'enseignement dite *classique* (1902-1958). Ces énoncés-types : partage en parties inégales, double achat, double vente, etc. étaient le lieu d'étude de techniques de résolution arithmétique, telles que : des méthodes dites de substitution arithmétique (sans désignation algébrique, à l'aide d'un graphique conventionnel sous forme de barre ou de segment, voir ci-dessous) et des méthodes de fausses suppositions, au début du secondaire. Citons à titre d'exemple un problème de partage en deux parties inégales connaissant leur somme et leur différence :

> Deux ouvriers ont reçu ensemble une somme de 249 f. Le premier a reçu 75 f. de plus que l'autre. Combien chacun d'eux a-t-il reçu ? (...)
>
> **Solution** : si l'on retranche 75f à 249f, il reste deux fois la part du second ou 249f – 75f = 174f. Le second ouvrier a donc reçu 174/2 = 87f. Et le premier : 87f + 75f = 162f.
>
> **Vérification :162f + 87f = 24**
>
> **9f**
>
> 162f - 87f = 75f
>
> 
>
>
> *Fig. 62*
>
> **Remarque** – On aurait pu raisonner aussi bien, en remarquant que la somme 249f augmentée de 75f, contient la première part. (Royer et Court 1931, p.64).

Les équations et systèmes d'équations du premier degré étaient dès lors introduits en fin de secondaire comme outils de résolution de ces mêmes énoncés. Ces problèmes concrets nourrissaient ainsi une articulation entre arithmétique, et algèbre élémentaires, faite de filiations et d'oppositions, centrale au sein du savoir enseigné à cette époque.[52]

L'étude des activités introductives des systèmes d'équations montre que certains auteurs de manuels contemporains cherchent à travers la résolution d'énoncés similaires, à introduire le système d'équations en heureux rival de techniques de résolution non algébriques, censées être mises en œuvre spontanément par les élèves avec leurs connaissances numériques antérieures. Par un effet de mimétisme culturel, ces problèmes concrets, anciens lieux privilégiés d'un passage arithmétique-algèbre, servent ainsi l'émergence de l'outil algébrique système d'équations comme concurrent de stratégies par essais-erreurs ou tâtonnements.

À titre d'exemple, citons le début de l'activité du début du chapitre des systèmes d'équations de l'ouvrage *Pythagore* (Bonnefond et al. 1993, pp. 72-73) :

> A/ Au foyer
>
> À la première table, on a servi 3 oranginas et 2 cocas pour 39 F.
>
> À la deuxième table, on a servi 1 orangina et 3 cocas pour 34 F.
>
> *Combien coûte l'orangina ? Le coca ? (on pourra procéder par essais-successifs).*
>
> B/ L'omnibus de 1900
>
> Le conducteur d'un omnibus a reçu 2,85 F pour 12 places, les unes d'intérieur, les autres d'impériale. On sait que la place d'intérieur se paye 0, 30 F et celle d'impériale 0,15 F. Combien y a-t-il de places de chaque sorte ?
>
> Résoudre ce problème tiré d'un vieux cahier d'élève. (On pourra chercher des couples d'entiers dont la somme est 12). (op. cité, p. 72).

À la suite de ces deux énoncés, la consigne associée à un troisième problème concret *(Le Cheval et les deux bœufs)* induit une résolution intermédiaire. Les questions posées guident l'écriture de deux équations à deux inconnues. Mais les techniques de résolution algébrique d'un système n'ayant pas encore été introduites, les élèves sont censés résoudre la conjonction de ces équations " par tâtonnements et essais successifs ".

Il s'agit donc à travers cette activité introductive, d'amorcer une progression vers la démarche algébrique avec le système d'équations, en s'appuyant sur et contre les connaissances numériques d'élèves... comme lorsque pendant la première moitié du XXe, l'algèbre élémentaire était introduite sur et contre l'arithmétique préalablement enseignée.

---

[52] Nous nous référons aux travaux de Chevallard sur ce qu'il appelle la stratégie classique d'introduction à

D'après les réponses à notre questionnaire, ce type de dispositifs didactiques visant à introduire officiellement le système d'équations correspond à un choix d'enseignement fait par un nombre non négligeable de professeurs. Six des onze professeurs prévoyant d'introduire le système comme outil de résolution de problèmes concrets, précisent qu'il s'agit de mettre en scène une concurrence entre l'outil algébrique et des méthodes de résolution non algébrique.

III. ACTIVITE DU COUPLE ENSEIGNANT-ENSEIGNE LORS DE L'INTRODUCTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS – CONTRAINTES EXTERNES ET INTERNES

À la lueur de cette première étude, nous entendons maintenant nous intéresser à l'économie d'une telle situation " ordinaire " d'enseignement des systèmes d'équations, en menant une étude de cas. Il s'agit d'étudier l'influence conjointe du contexte institutionnel décrit ci-dessus et de contraintes dites internes, sur l'activité d'un professeur de Troisième ainsi que sur les comportements de ses élèves lors d'une activité introductive des systèmes linéaires. À cet effet, nous avons collaboré avec un enseignant (désigné par P dans la suite du texte) et mis en place un dispositif d'observation naturaliste du même type que Comiti et al. (1995). N'intervenant en aucune façon dans la conception et la mise en œuvre du projet de ce professeur, nous avons recueilli différents types de données provenant :

- d'un entretien avec P avant les séances d'enseignement des systèmes : nous lui avons posé des questions relatives à son projet préalable et aux raisons de ses choix planifiés.
- de fiches relatives à la série de problèmes désignée par " Cailloux " envisagée par P lors de cet entretien (jointe en annexe I), et à l'énoncé appelé " Bouchon-Bouteille " qu'il intègre par la suite pour des raisons évoquées avant la première séance observée.
- d'observation des trois séquences d'une heure (mars 1998) correspondant au déroulement effectif du projet de P et de brefs échanges " à chaud " avec P après les séances observées.

Les outils théoriques utilisés pour l'analyse du corpus constitué par l'ensemble des données ainsi recueillies, relèvent de ce que Perrin-Glorian (1999) appelle le *double feuilletage* du milieu, sous-jacent à la théorie des situations didactiques de Brousseau. Nous détaillons dans la suite, les questions que l'une des deux échelles évoquées par cet auteur : la structuration verticale du milieu,[53] a permis de poser dans l'étude de la situation d'enseignement des systèmes d'équations considérée.

---

l'algèbre s'appuyant sur et contre l'arithmétique traditionnelle, typique du début du XXe (Chevallard 1989, p.7).

[53] Tel qu'il a été crée par Brousseau (1986) puis élargi et modifié par Margolinas (1994) dans la perspective d'une étude plus approfondie de l'activité du professeur.

1. Structuration du milieu de la situation envisagée par le professeur

a) Analyse descendante de la situation projetée par le professeur

Les niveaux surdidactiques correspondent aux sujets distincts auxquels l'enseignant peut s'identifier lorsqu'il élabore et imagine une situation d'enseignement. L'analyse de ces niveaux nous informe sur les décisions prises par l'enseignant lorsqu'il imagine ou envisage un projet d'enseignement, ainsi que sur le fonctionnement des connaissances sous-jacentes à ces décisions. Avant de rentrer dans le cœur de l'analyse du projet d'introduction des systèmes d'équations de P, il nous semble nécessaire de nous arrêter un instant sur la question théorique de la description des connaissances du professeur.

En guise de préambule, la question de la description des connaissances de l'enseignant

Une question de l'analyse descendante tient effectivement à la diversité des connaissances mises en jeu par le professeur dans les niveaux surdidactiques. Comme Margolinas (1994) le souligne, les connaissances de l'enseignant peuvent relever de différents domaines et ne sont ni décrites, ni structurées de façon autonome comme le sont les mathématiques. Si on y regarde de près, cette difficulté se fait sentir dans les analyses descendantes de situations de classe ordinaire, faites jusqu'ici : pour décrire les connaissances de l'enseignant, les chercheurs sont souvent conduits à paraphraser le discours du professeur. En réponse à ce problème, nous avons choisi de décrire les connaissances du professeur en faisant référence à des praxéologies didactiques ou mathématiques. Selon Chevallard (1999), toute connaissance qu'elle soit de nature mathématique ou autre, peut être vue comme le fruit de pratiques humaines et est donc modélisable par une organisation praxéologique :

> " Le postulat de base de la TAD [Théorie Anthropologique du Didactique] fait violence à cette vision particulariste du monde social : on y admet en effet que toute activité humaine peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie. " (Chevallard 1999, p.92).

Ainsi le modèle à quatre composantes de praxéologie, issu de la théorie anthropologique, permet-il de prendre en compte et de structurer la diversité des connaissances du professeur. C'est ce que nous avons tenté de faire pour décrire les connaissances de P au sein des différentes positions surdidactiques. En nous référant au discours de P lors de l'entretien, nous rattachons ces connaissances à des praxéologies didactiques ou mathématiques ainsi qu'aux moments de l'étude distingués par Chevallard.

Ces outils de la théorie anthropologique nous invitent à une nouvelle lecture des niveaux positifs du schéma de Margolinas. L'analyse descendante peut être interprétée comme une descente vers des organisations didactiques et mathématiques toujours plus spécifiques de la notion mathématique dont l'apprentissage est visé. Nous rejoignons en cela le point de vue de Chevallard, vis-à-vis de l'importance de la prise en compte conjointe du spécifique et du générique :

> " Les problèmes spécifiques de l'étude d'une organisation locale particulière restent en général mal posés tant qu'on n'analyse pas les " choix " didactiques conscients ou non, faits à des niveaux de moindre spécificité. " (Chevallard 1999, p. 107).

Le schéma suivant illustre notre propos :

GÉNÉRIQUE

NIVEAU 3 : situation noosphérienne

P3 imagine les conditions son enseignement des mathématiques au niveau considéré

Organisations didactiques spécifiques à l'enseignement des mathématiques

NIVEAU 2 : situation de construction

P2 construit une suite de leçons/un chapitre autour d'un objet de savoir mathématique à enseigner.

Organisations didactiques et mathématiques spécifiques à l'objet de savoir à enseigner.

NIVEAU 1 : situation de projet

Le projet de P1 est d'installer une situation d'enseignement particulière, permettant d'aborder l'étude d'un objet de savoir mathématique.

Organisations didactiques et mathématiques spécifiques à la situation projetée.

SPÉCIFIQUE

Fig.2 axe générique/spécifique correspondant à la descendante dans les niveaux (de +3 à +1)

D'autre part, toujours en référence à la théorie anthropologique, nous confronterons les connaissances de l'enseignant P décrites en termes de praxéologies aux organisations didactiques et mathématiques dégagées à travers notre analyse de manuels et de programmes du début du XXème à 1999. Cette confrontation permettra de situer et de préciser la position du professeur " particulier observé " dans un champ de possibles institutionnels suggérés par notre enquête écologique.

Développons à présent l'analyse descendante de la situation d'introduction des systèmes d'équations envisagée par le professeur P. Cette analyse a pour objectif d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes : *Quelles sont les choix de P lorsqu'il envisage les premiers moments d'enseignement des systèmes d'équations en classe de Troisième ? Quelles connaissances didactiques et mathématiques sous-tendent ces choix ?*

Niveau 3 : situation noosphérienne

La situation noosphérienne représente une position non finalisée : P-noosphérien est en quelque sorte loin du professeur qui cherche à introduire les systèmes linéaires dans sa classe. Nous faisons l'hypothèse qu'en situation noosphérienne, le sujet met en jeu des connaissances génériques : non spécifiques du savoir visé, associées à sa représentation générale de pratiques d'enseignement des mathématiques en Troisième. Parmi les connaissances en jeu à ce niveau, celles qui vont jouer un rôle central dans le contexte présent, décrites ci-dessous, ont trait au moment de la *première rencontre avec un nouveau savoir mathématique.*[54]

P-noosphérien envisage deux techniques pour introduire officiellement un savoir nouveau en classe de Troisième, que l'on peut rattacher à deux types principaux de tâches didactiques : " introduire un savoir nouveau par une activité préparatoire " et " introduire un savoir nouveau de façon classique " :

- L'introduction par une activité préparatoire renvoie pour l'enseignant interrogé, à un problème qu'il qualifie d'ouvert : il le définit comme " simple dans la compréhension " et " amathématique " ou concret. Pour organiser ce type de première rencontre, il s'agit donc de proposer aux élèves un tel énoncé, pour lequel : il existe plusieurs méthodes possibles de résolution, la méthode la plus efficace et la moins coûteuse étant associée au nouveau savoir mathématique qu'il s'agit d'introduire. Ce qui justifie et légitime une telle façon de faire est d'une part, relatif au sens donné au savoir visé comme outil efficace de résolution de problème, d'autre part relatif à l'investissement d'une majorité d'élèves, y compris ceux qui sont en difficulté dans le genre de problème " ouvert ".
- Pour P3, introduire un savoir de façon classique revient soit à organiser une phase d'étude théorique autour de ce nouvel objet de savoir mathématique, soit à le présenter

[54] P-noosphérien met également en jeu des connaissances relatives à d'autres moments de l'étude : élaboration d'une technique, constitution d'un environnement technologico-théorique, institutionnalisation et évaluation, non détaillées ici (Coulange, 2000).

“ par ostension ”. Il justifie ces façons de procéder, en pointant le fait qu’on ne peut pas toujours trouver une activité préparatoire appropriée (selon les critères fixés ci-dessus). D’autre part ces techniques didactiques sont selon lui, de moindre coût pour l’enseignant et “ acceptées par les élèves en cours de mathématiques. ”

Le milieu M3 de construction est constitué des situations d’enseignement d’un savoir mathématique en Troisième vécues (ou imaginées) et connues par P (à travers ses lectures de revue, ses travaux didactiques, ou ses discussions avec des collègues) : incluant les situations d’enseignement des systèmes d’équations et de la mise en équations résultant de la situation de construction. P-noosphérien interagit avec ce milieu avec les connaissances didactiques décrites ci-dessus : il imagine les conditions d’enseignement d’un savoir mathématique nouveau en fin de Collège. Il envisage et oppose deux façons d’organiser une première rencontre avec ce nouvel objet de savoir : à “ travers une activité préparatoire ” et “ de façon classique ”. Il imagine les avantages de telle ou telle façon d’aborder ce premier moment de l’étude dans sa classe, les pratiques didactiques associées à chacune.

De manière conforme au contexte institutionnel contemporain évoqué plus haut, P-noosphérien accorde une préférence générale aux activités introductives. Mais encore faut-il pouvoir trouver le problème ouvert approprié qui permet d’accomplir à ses yeux ce type de tâches dans le cadre de l’enseignement des systèmes d’équations.

Niveau 2 : situation de construction

Une partie des connaissances mises en jeu par P-constructeur correspond à des connaissances de l’enseignant sur les dispositifs didactiques spécifiques de l’enseignement des systèmes d’équations ou des méthodes de résolution de systèmes. Pour la plus grande part, on peut faire apparaître ces connaissances comme relatives à des spécifications d’organisations didactiques envisagées en situation noosphérienne.

P2 met en jeu des connaissances relatives à l’organisation d’une première rencontre avec les systèmes linéaires dans sa classe de Troisième :

- il envisage une introduction officielle des systèmes linéaires “ par une activité préparatoire ”. Pour cela, il s’agit selon lui, de proposer un énoncé ouvert, ayant les propriétés plus spécifiques suivantes : ce problème doit laisser la possibilité de deux grands types de résolutions : algébriques (associées aux systèmes d’équations) et non algébriques. D’après P2, cette technique didactique est un moyen de donner du sens à la méthode algébrique (et donc à l'outil système d'équations) comme plus efficace, que les méthodes non algébriques, dans la résolution de problèmes " de la vie courante ".

L'organisation didactique ainsi imaginée par P-constructeur, autour d'une première rencontre avec l'objet système paraît en tout point, conforme au rapport institutionnel contemporain dégagé par notre analyse de manuels.

On dégage aussi des propos tenus pas l'enseignant, une organisation didactique spécifique, relative à une " façon classique " d'aborder l'étude des systèmes d'équations. Il s'agit pour P2 de commencer son enseignement en faisant le constat théorique : " une équation à deux inconnues admet une infinité de solutions ", afin de donner une raison d'être au système d'équations. Il justifie parfois cette technique didactique en affirmant qu'elle permet d'aborder plus directement l'étude de la résolution graphique d'un système de deux équations à deux inconnues, et d'envisager les différents " cas " d'ensemble de couples solutions.

L'introduction classique des systèmes linéaires évoquée par P peut être rapprochée du rapport institutionnel typique de la contre-réforme, décrite plus haut : il s'agit d'introduire officiellement les systèmes d'ordre deux, en continuité des équations à deux inconnues, associées à des droites du plan. P péjore cette manière de faire, qu'il déclare obsolète.

P2 imagine parallèlement à ces deux façons d'aborder l'étude des systèmes d'équations, des organisations didactiques liées à l'introduction des méthodes algébriques de résolution " par substitution " ou " par addition ". Celles-ci apparaissent également comme des spécifications des pratiques du niveau +3 :

- Selon l'enseignant interrogé, le problème ouvert approprié pour introduire une méthode de résolution algébrique dans le contexte d'une " activité préparatoire ", doit se ramener à un système d'équations canonique, relativement à la technique visée : c'est-à-dire sous une forme pour laquelle cette technique algébrique s'avère la plus économique.
- Introduire la substitution ou l'addition de " façon classique " revient pour P à présenter ces techniques algébriques par ostension. Pendant l'entretien, l'enseignant insiste sur le fait que l'apprentissage de la substitution apparaît plus difficile que celui de l'addition si on la présente ainsi, de manière " classique ".

Le sujet constructeur P2 met également en jeu des connaissances mathématiques sur les systèmes d'équations et l'algèbre. Celles-ci sous-tendent ses choix dans l'élaboration d'une organisation mathématique à enseigner autour des systèmes d'équations.

Une première organisation mathématique est relative aux pratiques de résolution des problèmes du premier degré. La résolution d'énoncés inspirés " de la vie courante " renvoie pour P nécessairement à deux grandes classes de techniques : arithmétique et algébrique :

- il est possible de résoudre ce type d'énoncés concrets par des méthodes que P qualifie " d'arithmétiques ". Quelles sont les connaissances de l'enseignant au sujet de ces techniques ? Le terme d'arithmétique employé par cet enseignant contemporain renvoie-t-il aux méthodes de résolution telles que : des substitutions arithmétique (sans désignation algébrique, voir exemple cité auparavant) et des méthodes de fausses suppositions, enseignées pendant la première moitié du XXe, au début du secondaire ? Quelles sont les connaissances de P relativement à cette arithmétique traditionnelle enseignée autrefois ? Il paraît difficile de répondre à cette question à partir de la chronique d'entretien, le professeur ne détaillant pas ce qu'il entend par une résolution arithmétique de problème. Cependant les événements observés dans la classe tendent à prouver que P a peu de connaissances relatives aux méthodes arithmétiques de la période classique.[55] Ceci pose plus généralement la question des connaissances des professeurs contemporains relativement à ce domaine de l'arithmétique élémentaire, disparu de l'enseignement secondaire, depuis les années 1970 (Coulange 2001) ;
- on peut également résoudre les énoncés du premier degré " par l'algèbre " en passant par les étapes suivantes : mise en équations puis calcul de la solution des équations obtenues. P qualifie les méthodes algébriques de rapides, efficaces, normées et faciles à communiquer, par opposition aux techniques " arithmétiques " qu'il semble considérer comme rivales de l'algèbre dans la résolution de problèmes concrets.

Une deuxième organisation mathématique est relative aux types de tâches : résoudre algébriquement un système d'équations (la plupart du temps de deux équations à deux inconnues en classe de Troisième, voire de trois équations à trois inconnues). Les deux méthodes de résolution algébrique auxquelles P fait allusion, comme nous l'avons déjà évoqué plus haut : " l'addition " et " la substitution ". P affirme que la technique par substitution est souvent plus coûteuse que la précédente. Il la justifie et la légitime cependant par le fait que contrairement à l'addition (qui est spécifique du linéaire), la substitution a une portée plus grande que la résolution des systèmes d'équations linéaires. Il insiste sur le fait que cette technique algébrique intervient par ailleurs, comme dans la composition de fonctions.

[55] Nous avons traité de ces questions lors de la précédente école d'été (Coulange, à paraître).

Le milieu de projet M2 est constitué des situations d'enseignement vécues par P (incluant notamment celles qui sont associées à l'activité " Cailloux ") ou connues de l'enseignant (par ses lectures de revues ou de manuels sur l'algèbre, ses échanges avec ses collègues au sujet de l'enseignement des systèmes d'équations). En interagissant avec ce milieu, P-constructeur construit son projet d'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième. Il organise les moments de première rencontre suivants :

• Il choisit l'activité " Cailloux " extraite de *petit x*, pour aborder l'étude à la fois des systèmes d'équations et de la méthode de résolution algébrique par substitution.

• Ne trouvant pas de problème ouvert approprié pour introduire de façon similaire la méthode par addition, il envisage de l'introduire de " façon classique ", c'est-à-dire par ostension.

Niveau 1 : situation de projet

Les connaissances de l'enseignant en position de projeteur, sont celles qui justifient la construction de l'activité introductive " Cailloux ", visant à introduire les systèmes d'équations. Entre autres, P1 met en jeu des connaissances didactiques liées à la préparation de son cours ou à ses choix de problèmes, à l'écriture de la consigne, ou encore à l'installation de la séquence associée dans sa classe.

On relève ainsi un premier type de tâches, envisagé par P1 : l'organisation d'une suite de problèmes " cailloux " à partir de la fiche initiale, tirée de *petit x*. Le professeur interviewé envisage de réduire le nombre d'énoncés par rapport à cette fiche de départ. Il justifie ce choix en affirmant que la résolution d'une série aussi longue de problèmes relativement semblables entre eux, est susceptible de " lasser les élèves ". Par ailleurs, il ne prévoit aucune autre modification des énoncés initiaux. P insiste notamment sur le fait qu'il ne faut " pas toucher " aux données numériques des problèmes " cailloux ", résultant de choix pertinents des auteurs. Lors de l'entretien, P en position de projeteur prévoit également un scénario associé à " Cailloux ". Celui-ci se déroulerait en quatre temps :

- Dans un premier temps, le professeur envisage d'organiser une phase de travail en petites équipes sur les quatre premiers énoncés : P1 envisage de donner la fiche avec les problèmes " Cailloux " sans faire de commentaires, puis d'observer les stratégies qui apparaissent dans sa classe. Les élèves devraient s'engager assez vite dans la résolution des énoncés, et *utiliser spontanément différentes méthodes de résolutions algébriques et non algébriques.*

- L'enseignant prévoit ensuite une phase de bilan sur les différentes techniques de résolution utilisées. Les élèves constatent dès lors les différences entre les stratégies et les comparent pour savoir laquelle est la plus efficace. Pour P, cette étape de bilan est nécessaire avant de passer à la suite de la série et aux énoncés " à trois tas de cailloux ". L'enseignant identifie un saut de complexité dans le passage de l'énoncé 4 (à deux tas de cailloux) à l'énoncé 5 (à trois tas de cailloux). L'enseignant prévoit également que ce bilan est un moyen de convaincre les élèves de la supériorité des techniques algébriques faisant intervenir les systèmes d'équations linéaires sur les techniques arithmétiques.
- Pour les énoncés suivants, P-projeteur envisage de " laisser faire les élèves ". Ce troisième temps relève pour lui du travail de la substitution algébrique : les stratégies non algébriques ont disparu, les élèves étant convaincus lors de la phase précédente de la supériorité algébrique.
- Le quatrième et dernier temps serait consacré à l'institutionnalisation des connaissances algébriques nouvelles acquises à travers cette activité.

Le milieu didactique M1 avec lequel interagit P-projeteur comprend ici l'ensemble des situations " vécues " : passées ou imaginées, associées à la mise en place de " Cailloux " dans une classe de Troisième. Dans ce cas précis, la composante « passé » joue un rôle essentiel : c'est la troisième année, que ce professeur met en scène cette activité dans une classe de Troisième ; lors de l'entretien, P se réfère souvent à des épisodes passés.

En situation de projet, P1 imagine les conditions de l'activité " Cailloux ". À la suite de l'entretien, il organise le texte des problèmes " Cailloux ", prévoit le scénario en quatre temps décrit plus haut.

Un moment d'apprentissage de P suite à une modification du milieu didactique

Cependant, entre la date de l'entretien avec P et l'observation de la réalisation effective de son projet, s'est produit un événement qui éclaire le fonctionnement des connaissances d'un professeur. P a réalisé " le projet " que nous venons de décrire dans une première classe de Troisième. Or au cours de cette séance (à laquelle nous n'avons pas pu assister), P a constaté un décalage entre ses prévisions ou attentes et ce qui s'est réellement passé. La mise en concurrence avec des stratégies non algébriques, souhaitée par le professeur, n'a pas fonctionné : les élèves se sont directement engagés dans des stratégies de nature algébrique. Cette situation d'enseignement et le constat de la non-apparition des stratégies que P qualifie d'arithmétiques a transformé le milieu didactique en s'y intégrant.

Cette modification provoque un moment d'apprentissage pour P-projeteur en interaction avec ce nouveau milieu. P1 prend connaissance des effets de la présence des lettres : x, y et z dans la consigne des énoncés " cailloux ", au sein d'une " bonne classe ".[56] Le milieu didactique transformé l'informe de l'insuffisance du scénario en quatre temps projeté lors de l'entretien, relativement à sa décision d'introduire l'outil algébrique système en concurrence de stratégies non algébriques. P-projeteur prévoit dès lors un nouveau scénario en cinq temps, en proposant au préalable, avant le début de l'activité " Cailloux ", l'énoncé " Bouchon-Bouteille " :

> *Une bouteille et son bouchon pèsent 110 grammes. La bouteille pèse 10 grammes de plus que le bouchon. Combien pèse le bouchon ?*

Cet énoncé doit favoriser les stratégies non algébriques. De ce fait, selon les propres termes du professeur lors d'un entretien " à chaud " avant la première séance observée, ce problème permettrait d'ouvrir la situation associée à " Cailloux " (et donc de donner plus de chances à l'apparition de stratégies non algébriques en réponse à ces problèmes) :

> " *J'ai donné des feuilles à une classe et c'est là, en voyant si tu veux un élève qui de suite semble aller un peu trop vite, c'est-à-dire que vue que dans Cailloux, les x et les y si tu veux, on induit très fortement la mise en équation et l'idée d'équation. Donc c'est pour ça, j'ai pensé que là avec l'autre classe, je pouvais la faire... la faire plus ouverte, faire un problème plus ouvert.* "

Niveau 0 : situation didactique

Au niveau de la situation didactique, P-professeur met en jeu des connaissances didactiques pour assurer l'émergence des connaissances visées et gérer la séquence projetée en classe : P0 imagine les aides qu'il va être obligé d'apporter publiquement à l'ensemble des élèves, les décisions à prendre en situation en fonction de ses observations, les diverses connaissances à institutionnaliser.

Dans cette position, P met en jeu des connaissances didactiques relatives à la gestion d'un moment de bilan (projeté dans son scénario, au niveau +1). P envisage lors de cette phase, de faire " verbaliser " les diverses méthodes algébriques et arithmétiques utilisées par les groupes d'élèves pendant la phase précédente, pour expliquer leurs stratégies aux autres.

[56] Selon P, les deux classes de Troisième sous sa responsabilité cette année-là, sont de " bonnes classes ", relativement aux années précédentes. Les bons élèves, jouant le jeu du contrat didactique spécifique à l'algèbre, sont réceptifs aux indices des attentes de l'enseignant, que peuvent représenter les lettres de la consigne ; tandis que les élèves en difficulté, passeraient outre et s'engageraient plus facilement dans stratégies non algébriques.

Cette demande d'explication devrait selon lui permettre de favoriser les méthodes algébriques (qui selon ses connaissances des niveaux supérieurs, sont plus facilement " communicables ") et disqualifier les procédures non algébriques.

Suivant le scénario élaboré en position de projeteur, P-professeur imagine également l'organisation d'un temps d'institutionnalisation des connaissances algébriques nouvelles en fin de séance. Il prévoit d'écrire lui-même ou collectivement une fiche pour " résumer " les savoirs en lien avec la mise en équations de problèmes du premier degré, se ramenant à des systèmes linéaires, ainsi que les savoirs en lien avec la résolution algébrique par substitution.

Le milieu M0 d'apprentissage est constitué : des différentes observations effectuées par P-1 passées ou imaginées d'élèves de Troisième engagés dans la résolution de la même série de problèmes " Cailloux " et des différentes réponses brutes données par ces élèves. P0 prévoit et envisage l'organisation de phases de bilans ou diverses institutionnalisations qu'il est raisonnable de faire à partir de ces observations effectuées en situation d'apprentissage.

En guise de conclusion de l'analyse descendante

En guise de conclusion, revenons brièvement sur les apports de l'emploi du modèle d'organisations praxéologiques didactiques et mathématiques dans l'analyse descendante du projet de l'enseignant P. Ce choix méthodologique a permis une description fine des connaissances de nature diverse du professeur dans différentes positions. Il a également nourri une articulation de cette analyse descendante avec notre analyse de pratiques institutionnelles. Celle-ci s'est avérée particulièrement pertinente. Elle a été un moyen de reconnaissance de systèmes cohérents de connaissances mathématiques et didactiques évoqués par bribes ou de façon incomplète dans le discours du professeur interviewé. Elle a également permis de situer la position de cet enseignant dans un champ de possibles institutionnels, en partie appréhendés dans la première partie de notre exposé et détaillés dans d'autres publications. Les choix et connaissances qui sous-tendent les décisions du professeur P s'avèrent pour la plus grande part, conformes au système de contraintes institutionnelles contemporaines. Mais notre analyse montre que le contexte institutionnel de la contre-réforme reste assez " vivant " pour cet enseignant : P se réfère souvent à des organisations didactiques ou mathématiques typiques de cette période d'enseignement, pour les opposer aux pratiques contemporaines d'enseignement, et éventuellement valoriser ces dernières.

D'autre part, l'analyse descendante précise le point de vue de l'enseignant sur la situation d'enseignement ainsi élaborée : elle nous permet de décrire les enjeux didactiques affichés par ce professeur à travers l'activité introductive " Cailloux ", et nous donne partiellement accès à une analyse de la situation d'enseignement associée, faite par l'enseignant. Les analyses qui vont suivre ont pour objectif d'étudier les problèmes " Cailloux " du point de vue d'un sujet générique en position d'élève. En un retour sur les intentions didactiques de l'enseignant, il s'agira alors d'appréhender le fonctionnement économique a priori de cette situation didactique " ordinaire " d'introduction officielle des systèmes d'équations.

b) Analyse ascendante de la situation projetée par le professeur

Selon le schéma de structuration du milieu de Margolinas, le point de vue de l'élève est pris en compte par l'analyse ascendante des niveaux adidactiques. Dans le cadre de notre recherche, nous avons conduit cette analyse du niveau –3 au niveau 0 de façon classique : sans référence explicite à la théorie anthropologique dans la description des connaissances mises en jeu par des élèves génériques. Soulignons au passage le rôle essentiel que jouent les connaissances que sont les connaissances[57] associées aux " éléments pérennes " du contrat didactique dans l'étude a priori d'une situation d'enseignement : elles seront dans le cas présent, spécifiques de l'algèbre enseignée ou à la résolution de problèmes concrets. Nous ne retraçons ici que les points essentiels de l'analyse ascendante des énoncés " Cailloux ". Nous proposons tout d'abord de faire rentrer le lecteur dans des emboîtements de milieux relatifs au premier problème de la série sans décrire dans le détail les positions adidactiques correspondantes et les connaissances impliquées.[58] Puis suivra une synthèse des résultats de l'analyse conduite sur l'ensemble des problèmes " Cailloux ".

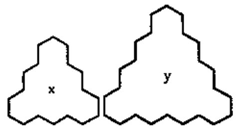
Analyse ascendante du premier problème " Cailloux " projetée par l'enseignant

Reprenons la consigne associée au premier énoncé de la série " Cailloux ", envisagée par l'enseignant interrogé :

[57] On reprend ici à notre compte la définition du mot " connaissance ", donnée par Brousseau et Centeno (1991, p. 176) : " les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat, conformément à une attente et à une exigence sociale. ".

[58] Cette analyse a été développée dans le détail dans Coulange (2000).

Voici deux tas de cailloux
x désigne le nombre de cailloux du 1er tas.
y désigne le nombre de cailloux du 2ème tas.
Le second tas a 19 cailloux de plus que le premier.
a/ Donne une écriture de y à l'aide de x.
b/ Il y a 133 cailloux en tout. Écris une égalité vérifiée par x et y.
c/ Trouve x et y.



L'analyse ascendante nous permet de dégager plusieurs emboîtements possibles de " milieux ", associés à ce premier problème : correspondant à autant de cheminements possibles d'élèves génériques.

Situations numériques S(Num)

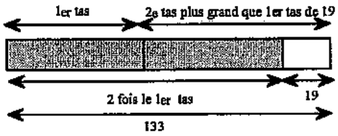
La première famille de situations associée à cet énoncé " cailloux " suppose la mise en jeu de connaissances élémentaires sur la résolution de problèmes concrets à données numériques (acquises à l'école primaire). Il s'agit de mettre en œuvre des opérations élémentaires (additions et soustractions) directement sur les données numériques de l'énoncé, en position d'agissant (niveau – 2), sous l'influence d'éléments pérennes du contrat didactique spécifique de la résolution de problèmes comme dans le *problème de l'âge du capitaine.* S(Num) donne lieu à des résultats faux rendus publics, non invalidés en situation d'action.

Situations arithmético-numériques S(Ar-num)

Un deuxième emboîtement de " milieux " fait intervenir des connaissances moins élémentaires sur la résolution numérique de problèmes du premier degré. Cette nouvelle famille de positions adidactiques peut être associée à des stratégies d'essais-vérifications. À partir de la mise en relations d'opérations sur les tas de cailloux (étiquetés " x " et " y "), évoquées dans la consigne, et d'opérations sur les entiers cardinaux de ces tas, l'apprenant fait des essais et des vérifications d'entiers pour le nombre de cailloux du premier ou du deuxième tas. Un résultat juste (x = 57 et y = 76) peut être obtenu et rendu public, avec les dernières opérations de vérification effectuées.

Situations arithmétiques S(Ar1) (substitution)

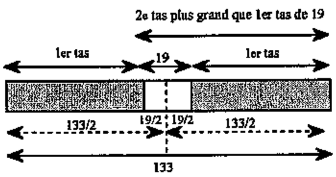
Un autre emboîtement peut être associé à la technique arithmétique “ par substitution ”, similaires à celles autrefois enseignées en arithmétique élémentaire comme méthode de résolution de problèmes de partages en deux parties inégales, connaissant leur somme (133) et leur rapport (19). À partir de mises en relations d’opérations sur les tas de cailloux et d’opérations sur les nombres entiers de cailloux correspondant (incluses dans le milieu d’action), l’apprenant raisonne par substitution arithmétique, sans désignation algébrique, en s’appuyant ou non sur un dessin, du type :



E-1 trouve alors que si on retranche 19 à 133, on obtient deux fois le nombre de cailloux du premier tas. Soit le nombre de cailloux du premier tas égale 114 divisé par 2 : 57. Puis l’apprenant calcule le nombre de cailloux du deuxième tas en ajoutant 19 à 57 : 76. Ces résultats ($x = 57$ et $y = 76$) sont rendus publics par l’élève en situation didactique, ainsi que les opérations arithmétiques qui ont permis de les obtenir : $133 - 19 = 114$; $114 \div 2 = 57$; $57 + 19 = 76$.

Situations arithmétiques S(Ar2) (changement de variables)

Un quatrième emboîtement de milieux peut être associée à une technique arithmétique dite “ par changement de variables ”. Un sujet apprenant ayant été dans des positions objective et d’action semblables aux précédentes, peut chercher à “ corriger ” l’erreur commise en ramenant le nombre de cailloux des premier et deuxième tas à la demi-somme, sans désignation algébrique, s’appuyant ou non sur un dessin du type :



E-1 détermine les relations : le nombre de cailloux du premier tas est égal au nombre total de cailloux : 133 divisé par 2 diminué de 19 divisé par 2 ; le nombre de cailloux du deuxième tas égale 133 divisé par 2, auquel on ajoute 19 sur 2. Suivant la synthèse de son raisonnement arithmétique, il effectue les calculs : $133 \div 2 = 66{,}5$ et $19 \div 2 = 9{,}5$, d’où le nombre de cailloux du tas “ y ” est $66{,}5 + 9{,}5 = 76$ et le nombre de cailloux du tas “ x ” est : $66{,}5 - 9{,}5 = 57$.

Soulignons que les deux emboîtements non algébriques que nous venons de caractériser, sous-entendent l'apprentissage de nouvelles connaissances arithmétiques de la part d'un élève de Troisième contemporain (ce type de techniques ne lui ayant pas été enseigné auparavant).

Situations algébriques S(Alg1) (équation à une inconnue)

Nous envisageons également une famille de situations associées à l'utilisation d'une équation à une inconnue dans la résolution de ce problème. En situation d'action, E-agissant passe outre la double désignation algébrique en x et y de l'énoncé (pourtant identifiée en situation objective) et cherche des informations relatives à une seule quantité inconnue, en vue de ramener le problème à une équation à une inconnue. E-apprenant en position réflexive par rapport à ses actions ramène le problème à une équation à une inconnue $x + (x + 19) = 133$ (1). E-1 résout ensuite cette équation avec ses connaissances de calcul algébrique élémentaire, acquises en classe de Quatrième. En situation didactique, l'élève rend le résultat obtenu ($x = 57$ et $y = 76$), ainsi que l'équation (1) et la suite de calculs algébriques qui ont permis de la résoudre. Dans ce type d'emboîtements, interviennent des éléments pérennes du contrat didactique relatif à la résolution algébrique de problème, installés en Quatrième.

Situations algébriques S(Alg2) (deux équations à deux inconnues)

Au final, reste à considérer l'emboîtement qui correspond à l'intervention de la conjonction de deux équations à deux inconnues dans la résolution de ce premier énoncé " cailloux ". Après avoir identifié la double désignation algébrique des nombres respectifs de cailloux des deux tas évoqués dans l'énoncé, le sujet en situation d'action, cherche des informations relatives à ces deux grandeurs inconnues en vue de ramener le problème à deux équations à deux inconnues. En réfléchissant à ses actions, E-1 écrit les deux équations : $y = x + 19$ et $x + y = 133$. Avec une nouvelle connaissance algébrique, éventuellement acquise lors de cette phase adidactique, il substitue l'expression $x + 19$ à y dans la deuxième équation. Il se ramène dès lors à l'équation $x + (x + 19) = 133$, qu'il résout avec ses connaissances algébriques acquises en Quatrième. L'apprenant obtient $x = 57$ puis par substitution numérique, $y = 76$. L'élève rend public : ce résultat, les deux équations à deux inconnues auxquelles se ramène le problème posé, ainsi que la suite d'opérations algébriques qui ont permis d'en résoudre la conjonction, par substitution.

Ce dernier cheminement dans la résolution du premier énoncé de la série " Cailloux ", avec l'outil système d'équations, suppose une adaptation des connaissances du contrat didactique installé en Quatrième, à la mise en équations d'un énoncé " à deux inconnues ", à la résolution par substitution algébrique d'un tel système, etc.

Analyse ascendante de l'activité " Cailloux " envisagée par l'enseignant

Sans détailler l'analyse ascendante des neuf problèmes de l'activité " Cailloux ", résumons les résultats essentiels en les commentant brièvement. Les notations S(Num), S(Ar-Num), etc. employées ci-dessous recouvrent des familles de situations qui ne sont pas tout à fait semblables entre elles, mais qui font intervenir des connaissances de même nature.

À propos des emboîtements de situations non algébriques

Les emboîtements de types Num et Ar-Num peuvent être envisagés en réponse de l'ensemble des énoncés " cailloux ". Mais S(Num), engageant des connaissances numériques qui paraissent élémentaires pour des élèves de Troisième, ne permet jamais d'obtenir un résultat exact. Et une résolution relevant de S(Ar-Num) paraît relativement coûteuse et peu favorisée par les données numériques de la plupart des énoncés.

Les emboîtements désignés par S(Ar2) ont un domaine de validité recouvrant tous les énoncés à deux tas de cailloux, type " somme et différence " (le nombre total de cailloux est donné, ainsi que la différence entre les nombres de cailloux de chacun des deux tas) : le sixième problème est le dernier de la série de ce type. Soulignons que cette technique arithmétique ne s'applique à aucun des énoncés " à trois tas de cailloux ".

Les techniques relevant de la substitution arithmétique et de S(Ar1) permettent de résoudre la quasi-totalité des problèmes de l'activité " Cailloux " : seul le neuvième et dernier énoncé fait exception. Néanmoins, notons que le passage du septième au huitième énoncé représente un saut de complexité dans l'application de cette technique arithmétique. Le nombre total de cailloux des trois tas n'étant pas indiqué, il est en effet nécessaire d'isoler un sous-problème intermédiaire " à deux tas " pour résoudre le huitième problème " à trois tas de cailloux ".

À propos des emboîtements de situations algébriques

Les familles de situations S(Alg1) qui font intervenir l'outil algébrique : équation à une inconnue permettent de résoudre les sept premiers énoncés " cailloux ". Cependant, malgré la présence prévisible d'éléments pérennes du contrat didactique propre à l'enseignement de l'algèbre en Quatrième, les stratégies relevant de ce type d'emboîtements restent peu probables : en raison de la double désignation algébrique qui favorise nettement l'écriture de deux équations à deux inconnues.

Les familles de situations S(Alg2) qui font intervenir la conjonction de deux/trois équations à deux/trois inconnues permettent de résoudre efficacement l'ensemble des problèmes prévus par l'enseignant. Néanmoins l'analyse ascendante permet de pointer deux sauts de complexité, induits par la succession des septième, huitième et neuvième problèmes " cailloux ". Ces sauts de complexité sont en lien avec la résolution par substitution algébrique des systèmes de trois équations à trois inconnues auxquels se ramènent les deux derniers énoncés. Il est nécessaire que le sujet en position d'apprenant adopte une position réflexive pour repérer où substituer algébriquement (une voire deux fois dans le neuvième problème), et ne se contente plus de remplacer des inconnues par l'expression algébrique équivalente dans l'équation " somme " : correspondant à " il y a n cailloux en tout… ". Ces sauts de complexité peuvent poser des difficultés, voire bloquer des stratégies algébriques d'apprenants.

D'autre part, ces analyses ascendantes révèlent globalement une faible adidacticité des sous-situations didactiques de nature algébrique, associées aux problèmes " cailloux ". C'est uniquement par l'intermédiaire de connaissances du contrat didactique que le milieu adidactique est susceptible de provoquer des apprentissages sur les équations à plusieurs inconnues comme outil de résolution de problèmes, et sur la technique de substitution algébrique, comme permettant de résoudre deux/trois équations à deux/trois inconnues.

Le tableau ci-après synthétise les résultats de l'analyse ascendante conduite sur l'activité " cailloux ", que nous venons de commenter.

Situations non algébriques				***Situations algébriques***	
numérique	arithmético-numérique	arithmétique " substitution "	arithmétique " changement de variables "	équation à une inconnue	équations à plusieurs inconnues (2 ; 2) et (3 ; 3)
S(Num)	S(Ar-Num)	**S(Ar1)**	**S(Ar2)**	S(Alg1)	**S(Alg2)**
Énoncés " Cailloux " (1,2, ..., 9)					
1 → 8 très peu probable	1 → 8 très peu probable	**1 → 7 ↪ 8**	**1, 3, 4, 5, 6**	1 → 7 peu probable	**1 → 7 ↪ 8 ↪ 9**

Forte adidacticité

Faible adidacticité
Contrat didactique

Tableau 3 : résultats de l'analyse ascendante des problèmes " Cailloux "

Conclusions de l'analyse ascendante

La confrontation de l'analyse ascendante à l'analyse descendante, nous permet de formuler l'hypothèse de contraintes internes pour le couple professeur/élève dans la situation didactique considérée. Nous questionnons ici les contraintes résultant de décalages entre le point de vue du professeur et celui d'apprenants, révélés par cette confrontation.

La mise en regard des deux analyses précédentes nous laisse tout d'abord présumer de décalages entre les enjeux didactiques de l'enseignant P et les apprentissages d'élèves de Troisième au sein de la situation d'enseignement. Nous voyons la possibilité d'un dédoublement de situations progressif. Le professeur interviewé pense que l'activité introductive " Cailloux " impose d'elle-même la méthode de résolution algébrique qui fait intervenir l'outil système d'équations, et ceci bien avant le dernier problème de la série. Il ne prévoit l'intervention de stratégies non algébriques qu'au début de l'activité et uniquement à titre de faire valoir des méthodes algébriques qui prendraient rapidement le dessus. Or l'analyse ascendante tend à prouver la possibilité d'apprentissages de connaissances arithmétiques, puisque les techniques dites de substitution arithmétique, permettent de résoudre la quasi-totalité des énoncés.

D'autres décalages sont probables. P prévoit un unique saut de complexité dans le passage du dernier énoncé à deux tas de cailloux (sixième problème) au premier énoncé à trois tas (septième problème). Or l'analyse ascendante amoindrit l'importance de ce saut, mais révèle que la série de problèmes " cailloux " occasionne deux autres sauts de complexité importants, ignorés par l'enseignant (dans le passage du septième au huitième problème, puis dans le passage du huitième au neuvième problème), susceptibles de conduire à des blocages de la part des apprenants.

Notre modèle de structuration verticale du milieu construit ci-dessus nous invite ainsi à prévoir des tensions internes au sein du couple enseignant/élève au sein d'une telle situation " ordinaire " d'enseignement et nous conduit à formuler les questions suivantes : *quelles sont les régulations nécessairement produites par l'enseignant et les élèves, pour maintenir la relation didactique, au sein de la situation d'enseignement considérée ? Quels sont les jeux entre élèves et enseignants qui résultent des décalages présumés ? Notamment, quel rôle l'enseignant fait-il jouer "en situation" aux différences identifiées entre les élèves ?*

Ces questions nous conduisent à faire l'analyse a posteriori des séquences de classe observée, afin de confronter ce modèle à la contingence et de chercher des éléments de réponses aux questions posées ci-dessus.

2. Analyse a posteriori de la situation d'enseignement observée

Nous donnons une partie des résultats de nos analyses a posteriori selon un découpage en quatre phases principales de la réalisation du projet de P, associée à l'activité " Cailloux ".[59]

a) Première phase (problème 1 → problème 4) élèves algébristes et élèves arithméticiens

Une première phase des séquences de classe observée peut être associée à la résolution des quatre premiers problèmes de l'activité " Cailloux ".

Résolution des problèmes posés

Dans un premier temps, l'enseignant transfère aux élèves (organisés en petits groupes), la responsabilité de chercher un résultat aux problèmes posés. On rentre dans un processus de dévolution. Il donne à ses élèves des explications qui leur permettent de s'engager dans une interprétation correcte et dégagée de tous présupposés didactiques, de la consigne. P intervient d'abord auprès de tous les groupes puis uniquement auprès de ceux qui le demandent, tout en observant les stratégies engagées par ses élèves. Il cherche à identifier les procédures arithmétiques et algébriques correspondantes. À partir d'extraits de protocoles, nous pouvons dire que les observables retenus par l'enseignant relèvent des situations

[59] Nous laissons ici de côté l'analyse de la première étape du scénario élaboré par P en position de projeteur, associée au problème " Bouchon-Bouteille ". Nous renvoyons le lecteur intéressé à Bessot et Coulange (1999).

numériques, arithmétiques et algébriques, identifiées dans notre analyse ascendante : S(Num), S(Ar1) S(Ar2) (pour les premier, troisième et quatrième problèmes “ cailloux ”) et S(Alg2). Mais il est difficile de savoir ce que l’enseignant reconnaît et distingue précisément comme stratégies en dehors des stratégies algébriques.[60]

Moments de bilan

L’enseignant envoie des groupes d’élèves au tableau, rendre publiques leurs solutions aux problèmes “ cailloux ” posés ”. En accord avec son projet initial de mise en concurrence entre procédures algébriques et non algébriques, P choisit des élèves visiblement engagés dans des stratégies arithmétiques : S(Ar1), S(Ar2), et algébriques : S(Alg2). Il laisse de côté les élèves apparemment restés dans une interprétation très élémentaire des problèmes posés : S(Num). En reprenant les termes de Mercier (1998, p. 303), on peut dire que le professeur autorise uniquement les élèves algébristes et arithméticiens, et seulement eux à enseigner à toute la classe. Pendant les moments de bilan, apparaissent ainsi au tableau, des solutions relevant de divers emboîtements de situations arithmétiques ou algébriques. Par exemple, en réponse au premier problème “ cailloux ” :

sol.1 *(Anaïs, Cyril...)*	**sol.2** *(Ambline, Caroline ... Laure)*	**sol.3** *(Benoit, Xavier, Claire ...)*
1) x+y=133 y=x+19 $x+\underbrace{(x+19)}_{y}=133$ 2x = 114 x=57 y=57+19 y=76	I 133-19=114 114÷2=57 x=57 y=57+19=76 x+y=133	1) x=y-19 y=x+19 133 ÷2=66,5 19÷2=9,5 x=66,5-9,5 x=57 y=66,5+9,5 y =76 76+57 =133 76-57=19
Solution algébrique de type S(Alg2)	**Solution arithmétique de type S(Ar1)**	**Solution arithmétique de type S(Ar2)**

Le professeur demande aux élèves restés au tableau d’expliquer leurs solutions. Notons les difficultés qu’ont les élèves arithméticiens à expliquer publiquement leurs procédures arithmétiques : l’absence d’un contrat didactique spécifique à la rédaction et à l’oralisation de solutions relevant de S(Ar1) ou S(Ar2) se fait sentir.[61] P associe ses propres

[60] Nous avons étudié la possibilité d’apprentissages de l’enseignant en situation, relativement à des procédures arithmétiques employées par ses élèves (Coulange 2001).

[61] Un élève du début du XXe aurait sans doute éprouvé moins de difficulté à rendre publiques ce type de solutions et à verbaliser leurs raisonnements arithmétiques. Ceci faisait en effet partie des enjeux explicites d’enseignement, que d’avoir à résoudre “ oralement ” des problèmes-types partages en parties inégales.

explications à celles de ces élèves. Il se borne souvent à décrire les opérations arithmétiques écrites au tableau. Au-delà des difficultés qu'il a lui-même à identifier les procédures sous-jacentes, ou à les expliquer à l'oral, il ne s'agit sans doute pas pour lui de s'attarder sur ces techniques arithmétiques qui ne représentent pas un enjeu d'enseignement en soi, et ne sont là que pour valoriser les techniques algébriques. Il s'attarde d'ailleurs de plus en plus au fil de ces quatre énoncés sur la solution algébrique faisant intervenir l'outil système d'équations : il introduit officiellement l'objet système d'équations, avec l'ostensif accolade comme traduction des phrases de la consigne. Les explications de P prennent également de plus en plus de place au fil des bilans organisés autour de ces quatre premiers énoncés " cailloux " : P cherche à reprendre la maîtrise de la situation.

b) Deuxième phase (problème 5 → problème 6) : avancée du projet " algébrique "

C'est chose faite à partir du cinquième problème " cailloux ", premier énoncé à trois tas de cailloux. Pendant la deuxième phase correspondant à la résolution des cinquième et sixième énoncés de la série, l'enseignant décharge les élèves de la responsabilité du savoir, et redevient maître du jeu didactique. Ce changement de gestion par l'enseignant renvoie au moins dans un premier temps au saut de complexité prévu par P-projeteur dans le passage des problèmes à deux tas à ceux à trois tas de cailloux. Mais il cherche également à fermer la situation et à imposer l'algèbre. P se rend compte que la concurrence entre stratégies algébriques et non algébriques n'a pas fonctionné dans le sens prévu : les stratégies arithmétiques résistent, ce qui tend à prouver la composante adidactique de ces problèmes " cailloux ", vis-à-vis de techniques arithmétiques, prévue par notre analyse ascendante. Pour revenir à son projet d'enseignement de l'algèbre, l'enseignant montre de plus en plus explicitement ses attentes qui sont l'écriture d'un système d'équations puis sa résolution par substitution. Illustrons notre propos en reprenant l'épisode associé à la résolution du sixième énoncé.

Résolution du problème posé

Pendant la phase de résolution de ce sixième énoncé, l'enseignant intervient exclusivement auprès de Laure, élève en difficulté qui semblait se désinvestir explicitement de la situation d'enseignement. Laissant le reste de la classe travailler en autonomie, il guide " pas à pas " cette élève vers une solution algébrique de type S(Alg2). Dans les échanges entre P et Laure, on note un effet Topaze très marqué.

Moment de bilan

Le professeur envoie Laure rédiger au tableau la solution qu'il a ainsi lui-même produite en aparté avec cette élève. L'ensemble de la classe est en mesure de deviner que cette solution provient de l'enseignant. Par ce biais, P cherche à modifier le contrat didactique initialement installé : il s'agit à partir de maintenant de produire une solution algébrique conforme à celle écrite par Laure au tableau. L'enseignant fait jouer à cette élève, un rôle de " porte-parole ".

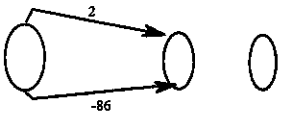
c) *Troisième phase (problème 6 → problème 8) : élèves algébristes*

Pendant cette troisième phase, P ne gère plus de moments de résolution : il n'intervient plus en aparté auprès des élèves ; ses observations de leurs stratégies sont limitées (il a d'ailleurs donné une partie de ces problèmes à résoudre " à la maison "). Lors de plusieurs moments de bilan, P s'appuie sur l'ensemble des élèves ayant manifestement perçu ses attentes concernant les solutions algébriques. Il s'agit maintenant pour lui d'envoyer ces élèves et seulement au tableau : le temps de la concurrence entre procédures algébriques et non algébriques a vécu. En accord avec ses prévisions en situation de projet, P cherche à faire rentrer ses élèves dans un moment de travail de la résolution d'un système d'équations par substitution algébrique. Retraçons pour illustrer le moment de bilan associé à l'avant dernier problème de " Cailloux ".

Moment de bilan

P envoie Antoine au tableau, qui rédige une solution algébrique de type S(Alg2). En commentant cette solution, l'enseignant perçoit les nombreuses incompréhensions qui subsistent dans la classe vis-à-vis de la procédure algébrique sous-jacente. Ceci est conforme à notre analyse ascendante qui nous permettait de prévoir un saut de complexité important occasionné par le passage du septième à ce huitième énoncé, au sein de la résolution algébrique du système d'équations par substitution. L'enseignant incrimine le fait que la solution d'Antoine est peu lisible (cet élève n'a pas assez bien appuyé sur sa craie).

P envoie Benoît au tableau. Mais à sa grande surprise, cet élève s'engage dans l'explication publique d'une solution arithmétique relevant d'un emboîtement type S(Ar1). Benoît fait le dessin ci-dessous, montrant qu'il isole un sous-problème intermédiaire " à deux tas de cailloux " (correspondant à un énoncé type partage en deux parties inégales connaissant leur rapport et différence).



Cette résistance forte d'élève à rentrer dans le jeu algébrique de l'enseignant confirme l'adidacticité de la situation d'enseignement, vis-à-vis de connaissances arithmétiques. Le professeur élude cette solution arithmétique " indésirable ". Seuls les élèves ayant un profil algébrique sont autorisés à enseigner.

d) Quatrième phase (problème 9) : Retour au projet algébrique

Lors de cette dernière phase, l'enseignant pressé de revenir à ses enjeux d'enseignement (la fin de séance est imminente) fait à nouveau le choix d'envoyer une élève en difficulté au tableau. Rémandine est chargée de jouer le " porte-craie " : elle écrit au tableau la solution algébrique idoine, produite collectivement et dictée par l'enseignant. Le professeur cherche ensuite rapidement à institutionnaliser les savoirs algébriques nouveaux mais n'arrive pas au bout du résumé prévu à cet effet (en position de projeteur), faute de temps.

e) Conclusions de l'analyse a posteriori

Les résultats a posteriori présentés, révèlent les différents jeux didactiques entre le professeur et ses élèves. L'enseignant observé s'appuie sur trois ensembles d'élèves pour contrôler les tensions internes inhérentes à la situation projetée (que laissait présumer notre modèle de structuration du milieu) et maintenir la relation didactique dans le sens de ses enjeux d'enseignement : les arithméticiens, les algébristes et les élèves " en difficulté ". Il utilise notamment ces derniers pour fermer la situation et revenir à ses objectifs didactiques. Ainsi l'hétérogénéité rencontrée dans cette classe (plus persistante que ne semblait le prévoir l'enseignant en position de projeteur), devient pour lui un moyen d'exprimer ses attentes et de mener à terme son projet initial.

Notons que vis-à-vis de l'enseignement contemporain au Collège, la situation de classe " ordinaire " analysée ici paraît exemplaire. En réponse aux directives officielles, le professeur est souvent conduit à enseigner des savoirs nouveaux par l'intermédiaire de dispositifs ouverts, qui offrent la possibilité de divers cheminements (dont certains ne mettant pas en jeu les savoirs précisément visés). Mais l'enseignant ne se retrouve-t-il pas contraint (par des effets de contrat) de fermer de telles situations qui faute de " moyens mathématiques ", ne rendent pas optimales l'utilisation des connaissances visées ?

IV. En guise de conclusion

Ce travail se veut un essai d'utilisation conjointe de l'approche anthropologique et de la théorie des situations dans l'analyse de situations de classes " ordinaires ", en termes de couple enseignant/enseigné. Nous espérons qu'à la lueur des résultats présentés ici, le lecteur est en mesure d'entrevoir les promesses de telles études s'appuyant sur les outils théoriques évoqués en introduction. Le début de la deuxième partie de cet article illustre l'intérêt d'un regard théorique croisé sur l'activité de l'enseignant. Comme nous l'avons déjà évoqué, l'articulation entre notre enquête sur les pratiques institutionnelles d'enseignement de l'algèbre et l'analyse descendante conduite à partir discours du professeur interviewé, s'est avérée particulièrement pertinente. Mais l'étude écologique de programmes et de manuels a également permis d'éclairer l'analyse ascendante de la situation, et l'activité arithmétique d'une partie des élèves de la classe observée. D'autre part, l'outil de structuration du milieu en théorie des situations didactiques apparaît comme productif dans l'analyse des interactions professeurs-élèves. Il donne accès aux enjeux didactiques du professeur et aux apprentissages mathématiques d'élèves au sein d'une situation d'enseignement donnée. La confrontation des analyses descendantes et ascendantes permet dès lors de distinguer le caractère nécessaire des décisions des acteurs du système didactique du caractère contingent de certaines autres, et par suite d'éclairer leurs interactions au sein de la situation didactique réalisée.

BIBLIOGRAPHIE

BESSOT A. et COULANGE L. (1999), Analyse a posteriori d'un protocole à l'aide d'un modèle local a priori, *Actes de l'Université d'Été de Didactique des mathématiques de La Rochelle 1998,* in Noirfalise (ed.) IREM de Clermont Ferrand, pp. 53-64.

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.19, n°2, pp. 221–266, Edition La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G., CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 11, n° 2/3, pp. 167–210, Edition La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1989), *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche,* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

CHEVALLARD Y. (1995-1996), *Séminaire d'analyse et d'ingénierie didactique,* IUFM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.19, n°2, pp. 221–266, Edition la Pensée Sauvage.

COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C. (1995), Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classes et modélisation de phénomène didactiques in Arsac et al. (coord.) *Différents types de savoirs et leur articulation,* pp. 92–113, eds La Pensée Sauvage.

CONNE F. (1997), l'activité du couple enseignant / enseigné, , *Actes de la neuvième École d'Été de didactique des mathématiques, Houlgate 1997,* in Bailleul (éd.), pp. 15-24.

COULANGE L. et BESSOT A. (1999), Structuration du milieu et modèle local a priori, *Actes de l'Université d'Été de Didactique des mathématiques de 1998,* in Noirfalise (éd.) IREM de Clermont Ferrand, pp. 39-51.

COULANGE L. (2000), *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologie et économique, Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième.* Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

COULANGE L. (à paraître), Evolution du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20ème siècle : contraintes et espaces de libertés pour le professeur, *petit x,* n° 57, pp. 65-85.

COULANGE L. (2001), Analyse de l'activité du professeur à propos de l'enseignement des systèmes d'équations en Troisième, in Dorier éds., *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques.*

MARGOLINAS C. (1994), Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire Didatech,* LSD-IMAG Grenoble, pp. 27-83.

MATHERON Y. (1993), Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès, *petit x,* n° 34.

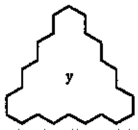
MERCIER A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 18 n°3, pp. 279-310, Edition La Pensée Sauvage.

PERRIN-GLORIAN M-J. (1999) Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.19, n°3, pp. 279–322, Edition la Pensée Sauvage.

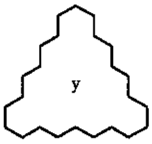
Annexes - Problèmes " Cailloux "

1 Voici deux tas de cailloux.
x désigne le nombre de cailloux du 1er tas.
y désigne le nombre de cailloux du 2ème tas.

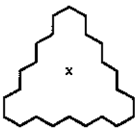
Le second tas a 19 cailloux de plus que le premier.
a) Donne une écriture de y à l'aide de x.
b) Il y a 133 cailloux en tout. Ecris une égalité vérifiée par x et y.
c) Trouve x et y.



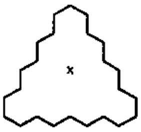
2 -Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :
- le 2ème tas a 7 fois plus de cailloux que le 1er ;
- il y a 56 cailloux en tout.

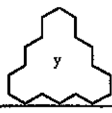


3 -Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :
- le 2ème tas a 26 cailloux de moins que le 1er ;
- il y a 88 cailloux en tout.

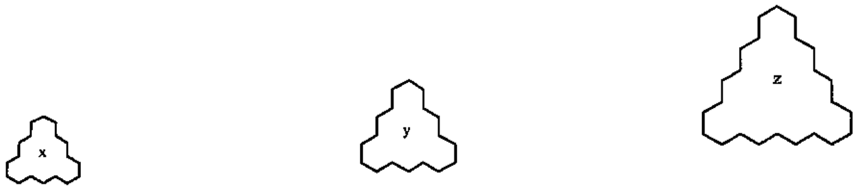


4 -Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :
- le 1er tas a 65 cailloux de plus que le 2ème ;
- il y a 175 cailloux en tout.





5 -Voici trois tas de cailloux :
- x désigne le nombre de cailloux du 1er tas.
- y celui du 2ème tas.
- z celui du 3ème tas.



Tu sais que :
- le 1er tas a 15 cailloux de moins que le 3ème ;
- le 2ème tas a 5 cailloux de moins que le 3ème.

a) Donne une écriture de x à l'aide de z ; de y à l'aide de z ;
- il y a 31 cailloux en tout.

b) Ecris une égalité vérifiée par x, y et z.

c) Trouve x, y et z.

6 - Refais le même travail avec les renseignements suivants :
- le 1er tas a 5 cailloux de moins que le 3ème ;
- le 2ème tas a 15 cailloux de plus que le 3ème ;
- il y a 31 cailloux en tout.

7 - Tu sais que :
- le 2ème tas a 3 fois plus de cailloux que le 1er ;
- le 3ème tas a 2 fois plus de cailloux que le 1er ;
- il y a 72 cailloux en tout.

Refais le même travail mais en calculant cette fois y et z à l'aide de x.

8 - Tu sais que :
- le 1er tas a 2 fois plus de cailloux que le 2ème ;
- le 3ème tas a 36 cailloux de plus que le 1er ;
- le 2ème tas a 86 cailloux de moins que le 1er.

Trouve x, y et z.

9 - Tu sais que :
- le 1er tas a deux fois plus de cailloux que le 2ème ;
- le 3ème tas a 36 cailloux de plus que le 1er ;
- le 2ème tas a 43 cailloux de moins que le 3ème.

Trouve x, y et z.