Proposition d'un modele pour l'etude didactique de la memoire

Yves Matheron

Université de Provence, IREM et IUFM d'Aix-Marseille

« *On pourrait traiter toute la didactique sous ce terme de mémoire* » a pu écrire Julia Centeno dans sa thèse posthume. Cependant, depuis la publication de ce travail fondateur, peu de recherches ont poursuivi l'étude du thème de la mémoire au sein des systèmes didactiques, même si bien des auteurs, et non des moindres - d'Aristote à Paul Ricœur, en passant par Henri Bergson ou Maurice Reuchlin - s'accordent pour associer mémoire et apprentissage. L'objet de cette communication, qui s'appuie sur un travail de thèse sous la direction d'Alain Mercier, est d'exposer une reprise possible de la problématique de la mémoire dans les institutions didactiques, en en proposant une modélisation.

S'engager dans un travail sur la mémoire se heurte immédiatement à la polysémie du terme et aux méprises qu'elle induit[40]. De fait, la modélisation proposée se démarque par bien des points de ce que l'on entend d'ordinaire sous le terme de « mémoire ».

On la voit volontiers comme une faculté personnelle, propre au sujet, interne, voire intime ; elle est ici montrée *collective*, *externe*, *visible*, *ostensive* et, de surcroît, *outillée* par d'autres instruments que le seul cerveau humain. On la traque grâce à des dispositifs expérimentaux, dans des laboratoires, et souvent à travers l'expression de ses dysfonctionnements, de ses pathologies, or le propos porte dans ce texte sur son observation dans le normal et *l'ordinaire des classes de mathématiques*, hors laboratoire et hors expérimentation. On la considère généralement comme associée à la constitution personnelle de l'identité, ce qui renvoie alors volontiers aux idées de différenciation interindividuelle, voire de liberté individuelle, or, dans ce qui suit, lorsqu'il s'agira de considérer la mémoire personnelle, la personne sur laquelle porte le regard sera d'abord vue comme *assujettie* à une

[40] Ricœur (2000) indique une voie pour aborder le thème de la mémoire : « À l'encontre de la polysémie qui, à première vue, semble propre à décourager toute tentative même modeste de mise en ordre du champ sémantique désigné par le terme de mémoire, il est possible d'esquisser une phénoménologie éclatée, mais non radicalement dispersée, dont le rapport au temps reste l'ultime fil conducteur. »

institution principale, l'institution didactique, et secondairement à des institutions pour l'étude qui lui sont annexées.

La conception culturelle courante de la mémoire semble ainsi l'anti-thèse de la thèse principale sur laquelle se fonde ce travail. Cette thèse peut s'exprimer ainsi : pour accéder à l'étude du rôle de la mémoire, dans l'étude des mathématiques, il est nécessaire de considérer cette mémoire comme l'expression d'un rapport, inscrit dans une temporalité, à une pratique au sein d'une institution.

I. Une demarcation necessaire par rapport aux theories courantes de la memoire

Tout d'abord, pour rentrer dans la problématique dans laquelle se place l'exposé, il est nécessaire de mettre à l'écart certaines théories de la mémoire : celles qui, issues de la psychologie, diffusent au sein de la société par l'intermédiaire de revues de vulgarisation qui font régulièrement leurs couvertures sur le thème[41]. Elles importent le double handicap d'une absence, classique, de prise en compte du contexte, et aussi d'une construction basée sur un paradigme limitatif : pour appréhender le « sémantique » en tant que dimension du cognitif, elles se déploient selon le principe de la catégorisation. Or les concepts mathématiques, se prêtent mal à la catégorisation, parce qu'ils renvoient souvent simultanément à une quantité de catégories qu'ils dépassent par leur mise en relation. De surcroît, si l'on tente de se servir de ces théories afin de rendre compte de phénomènes mnésiques spécifiques de l'étude des mathématiques (Matheron 2000, pp. 25-42), l'analyse nécessite rapidement la mobilisation de toutes les catégories : mémoire à court et long terme, épisodique et procédurale, explicite et implicite, sémantique et lexicale, etc. La catégorisation est donc inopérante, sauf à vouloir appréhender la mémoire relative à l'enseignement des mathématiques - la mémoire didactique - sous l'angle des déficits rapportés à des catégories posées *a priori* ; mais ceci n'est pas l'objet du travail exposé qui se préoccupe de la mémoire utilisée, en général, par des élèves et des professeurs de classes ordinaires, c'est-à-dire réputés « normaux »... et non pathologiques !

Un autre champ des sciences humaines s'est penché sur l'étude de la mémoire : les théories sociologiques de la mémoire, au premier rang desquelles se trouve l'œuvre de

Maurice Halbwachs (1924 & 1950), présentent l'intérêt de considérer la mémoire comme portée par une collectivité humaine, et non comme propriété spécifique d'un individu. En première approche, cette préoccupation semble pouvoir mieux rendre compte de la dimension collective associée à l'étude scolaire. L'œuvre d'Halbwachs contient une idée-force – la mémoire est relative à des cadres sociaux -, qui ouvre sur deux directions. À partir de l'idée qu'un cadre social est une structure sociale unifiant une pensée, on peut en effet soit rechercher quelle est la forme spécifique que prend cette mémoire, soit rechercher comment se constitue cette forme spécifique.

En suivant la première direction, se trouvent un ensemble de travaux qui décrivent la spécificité selon le cadre social : les travaux d'Halbwachs sur la mémoire familiale, religieuse, de classe telle la noblesse, ceux de Gérard Namer sur les déportés, les Juifs égyptiens, les contremaîtres ou ceux d'Anne Muxel sur la mémoire familiale. Ces travaux ont la double particularité, tout d'abord, de considérer le cadre comme relatif à de grandes institutions (la famille, la religion, les Juifs, une classe sociale, etc.), et ensuite, de considérer la mémoire comme un discours que l'on va recueillir sous la forme d'histoires de vie. Or l'étude des mathématiques trouve place dans une multitude de petites institutions annexées aux classes du système éducatif, et le discours qui porte sur « une histoire de vie » de l'étude menée par des élèves ne nous renseigne pas forcément sur les phénomènes mémoriels relatifs à l'étude des mathématiques.

En suivant la seconde direction, illustrée par les études d'Halbwachs lui-même sur la mémoire collective chez les musiciens ou chez les géomètres, on met l'accent non plus sur le discours de mémoire, mais sur l'activité spécifique d'un groupe social constituant le cadre, activité qui organise le type de mémoire propre au groupe, et se rapportant précisément à cette activité. Mais, ici encore, l'activité peut être essentiellement langagière. C'est le cas du célèbre exemple, étudié par Evans-Pritchard, des Nuers qui doivent dire la lignée des cinq ancêtres dont ils descendent pour déterminer les offrandes données et reçues lors de cérémonies. Ou encore des études ethnographiques, telles que celle de Françoise Zonabend sur un groupe de femmes du village de Minot en Bourgogne : elles reconstruisent la mémoire de la communauté villageoise en se promenant certains jours dans le cimetière, et en se racontant les histoires de vie des personnes qu'elles ont connues et qui y sont enterrées. De

[41] À celles-ci il faut adjoindre divers ouvrages, dotés d'une certaine notoriété dans le milieu enseignant, qui voudraient faire accroire que certains résultats de recherches sur la mémoire permettent d'ores et déjà de régler le problème pratique du rôle de celle-ci à l'École.

même, dans l'étude de Maurice Bloch relative à la mémoire de la répression du soulèvement à Madagascar en 1947, la mémoire se dit à partir d'objets, notamment topographiques.

Nous retrouvons donc, comme prédominant dans ces travaux, le même aspect langagier. Certes, y apparaît la notion intéressante d'activité comme support de la mémoire mais, assez curieusement, l'accent n'est pas mis par les chercheurs sur les outils qui instrumentent l'activité. Adopter le point de vue de la théorie anthropologique du didactique, qui se détourne soigneusement de l'écueil pour l'analyse didactique que peut représenter la métaphore des mathématiques comme un langage (*cf.* Marianna Bosch 1994 et Marianna Bosch & Yves Chevallard 1999), conduit à considérer les mathématiques comme une pratique, un travail, qui s'accomplit grâce à des outils au sein d'une institution.

La mémoire peut-elle être relative à une pratique instrumentée ? Ricœur (2000) répond sans hésiter par l'affirmative en revenant au concept bergsonien de « mémoire-habitude » qu'il enrichit, parlant après Marcel Mauss et Pierre Bourdieu, de la prise en compte des capacités corporelles et des habitus sociaux ; il parle alors des « savoir-faire » auxquels, dit-il, *« dans la vaste panoplie des usages du mot "mémoire", nous appliquons une des acceptions admises de ce mot ».* Il rejoint ainsi les résultats de travaux anciens, mais dont la prise en compte est souvent négligée lorsqu'il s'agit de mémoire : ceux de Lev Sémionovitch Vygotski, vieux de soixante-dix ans, qui montrent comment des outils sémiotiques facilitent la mémorisation, ou ceux d'André Leroi-Gourhan, vieux de quarante ans, qui inscrivent la mémoire dans « la synergie opératoire de l'outil et du geste ».

Dès lors, une conséquence immédiate découle du positionnement anthropologique de la mémoire pour l'étude des mathématiques. Elle relève de deux pratiques : celle des mathématiques et celle de leur étude. On doit alors considérer au moins trois instances pour la mémoire didactique : une qui relève de la pratique du savoir lorsqu'on en maîtrise les outils, une qui relève de l'institution d'étude, et une qui relève de l'étude de la maîtrise des outils de la pratique. L'analyse des deux dernières dimensions permet d'envisager tout à la fois comment s'opère la mémorisation par l'assujettissement de la personne à l'institution d'étude, et de quel degré de liberté dans l'expression de sa mémoire dispose la personne. Nous aboutissons ainsi à la proposition d'un modèle de la mémoire selon trois dimensions : personnelle, institutionnelle et propre au savoir pour sa pratique.

II. LA MEMOIRE DU SAVOIR

L'objet de ce paragraphe est de montrer que le savoir mathématique contient une mémoire des pratiques qui lui sont relatives ; ce que nous nommons *la mémoire du savoir.* Pour qui s'adonne au travail mathématique, ou en prend connaissance, il y a nécessité afin de contrôler la justesse du travail réalisé, de s'attacher à la *chaîne de raisons* qui le charpentent. Étudier la mémoire du savoir nécessite de « faire un pas de côté » en donnant la primauté à la *chaîne d'actes* volontaires, conscients et revendiqués, que des hommes ont dû accomplir en certaines institutions, à l'échelle de l'histoire plusieurs fois millénaire des savoirs mathématiques, pour pouvoir fonder ces savoirs.

L'étude suivante, menée à grands traits, et relative à l'exemple du développement historique du calcul différentiel et intégral nous permettra de montrer plus facilement cela. On se réfère dans ce qui suit, soit aux ouvrages originaux des mathématiciens cités, soit aux commentaires qu'ont pu en faire des historiens des mathématiques.

1. Étude d'un exemple

En 1666, Leibniz soutient sa thèse dans laquelle se trouve une étude des différences des carrés de deux entiers consécutifs et de la somme de ces différences, égale au dernier carré :

0,	1,	4,	9,	16,	25,	36
	1,	3,	5,	7,	9,	11

1+3+5+7+9+11=36

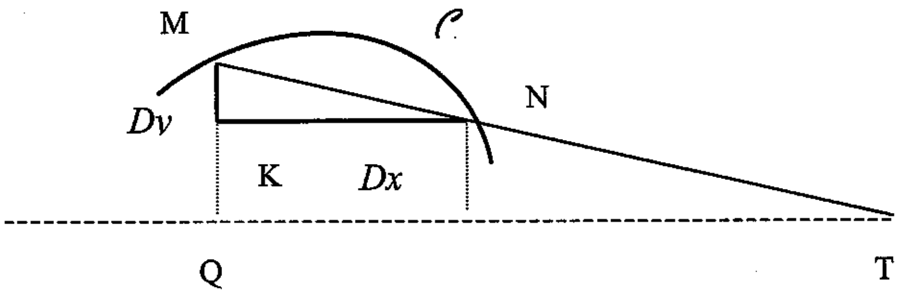
À partir de 1675, Leibniz utilise un formalisme qui le conduit à écrire :

y : 0,	1,	4,	9,	16,	25,	36
dy	1,	3,	5,	7,	9,	11

$\int$: initiale de *summa omnium*. D'où : $\int dy=y$

Lors d'une mission diplomatique à Paris en 1672, Leibniz obtient de Huygens, le *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal dans lequel, dit-il : *« j'y trouvai une lumière que l'auteur lui-même n'y avait point vue. »* C'est ainsi qu'en 1684, dans *Acta eruditorium*, le problème du triangle caractéristique trouvé dans le *Traité des sinus du quart de cercle*, devient pour Leibniz : $\frac{Dy}{Dx}$ reste constant et sa limite (cas du triangle inassignable) s'écrit $\frac{dy}{dx}$.

En 1684, l'idée est utilisée dans *Nova methodus pro maximis et minimis* pour le problème des tangentes à une courbe, et non plus des tangentes à un cercle. Elle peut s'illustrer de la manière suivante :



Le triangle KMN restant semblable au triangle QMT lorsque N varie sur la courbe $\mathcal{C}$:

$\frac{Dy}{Dx} = \frac{QM}{QT} = \frac{y}{sous - \tan gente}$, d'où par passage à la limite lorsque N tend vers M :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{sous - \tan gente}$$

On connaît les développements du calcul différentiel et intégral durant le siècle qui suivit. Nous nous arrêtons sur le travail de Lagrange dont le projet, rendu public dès 1772, est de substituer à l'emploi des différentielles celui des fonctions dérivées.

Ce changement n'est pas anodin et ne relève pas d'un « caprice » mathématique. Ovaert (1976) récapitule, en effet, les intentions de Lagrange quant aux objectifs qu'il se fixe et les critiques qu'il formule à l'encontre de l'emploi des anciennes méthodes du calcul infinitésimal :

« 1. Insistance sur l'emploi des fonctions dérivées et non des différentielles [...]
Selon Lagrange, l'emploi des différentielles a non seulement entraîné un manque de clarté et de rigueur, mais il a suscité un obstacle épistémologique à la construction du calcul différentiel à plusieurs variables. [...]
2. Établir les principes du calcul différentiel et intégral sur des règles purement algébriques, à l'exclusion de toute considération de géométrie et de mécanique [...]
3. Le calcul différentiel et intégral doit apporter des bases claires à la géométrie et à la mécanique [...]
4. Le recours à toute métaphysique des infiniment petits est expressément exclu. [...]
5. À l'opposé, il faut recourir à des analyses rigoureuses dans les domaines qui le permettent et retrouver la perfection des raisonnements des Anciens, mais par l'usage des moyens théoriques

modernes. [...] Nous voyons que, comme Euler, Lagrange situe la source de la rigueur dans la manipulation algébrique et formelle des fonctions et leurs développements en série. [...]
6. Ces conclusions font apparaître un autre aspect important des intentions de Lagrange : la méthode des infiniment petits est efficace, il ne faut renoncer à aucun de ses résultats. Il est donc inutile de reprendre toutes les applications de cette méthode [...] Seuls sont à corriger les principes. [...] »[42]

On peut relever de cette liste d'objectifs quelques non-ostensifs, quelques « concepts mathématiques », émergents cristallisés de certaines pratiques mathématiques dont l'engagement dans les « nouvelles » pratiques du calcul infinitésimal élaborées par Lagrange va induire réorganisations, modifications, déplacements par rapport aux anciennes. Ainsi, par exemple, les principes du calcul différentiel et intégral doivent découler, pour Lagrange, du calcul algébrique et non plus de la géométrie, comme pour Leibniz, les Bernoulli, L'Hospital, ou de la mécanique, comme c'était le cas avec Newton et sa méthode des fluxions. Aussi, tout au contraire, dans la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, c'est « la théorie des fonctions », l'analyse, qui va fournir des applications à la géométrie et à la mécanique. Pour cela, les « fondements » du calcul infinitésimal seront revisités, eux aussi. Apparaissent en effet pour Lagrange, à cette époque, comme relevant de la métaphysique, les méthodes des infiniment petits et des limites. Cette dernière méthode, utilisée par Maclaurin et D'Alembert, et qui n'a pas encore acquis la rigueur à laquelle elle accédera au cours du XIX^e siècle, encourt le reproche de Lagrange : *« l'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer, est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul. »* C'est, entre autres choses, de cette « métaphysique » que veut se dégager Lagrange, mais aussi de l'écriture du rapport de deux différentielles considéré comme *« réduit à l'expression vague et indéterminée de zéro divisé par zéro ».*

Le développement des mathématiques au cours du XVIII^e siècle, permet à Lagrange d'utiliser diverses « clés » pour réaliser son projet. En effet, Euler a développé le non-ostensif « fonction » (défini comme étant *« une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes »* pour les fonctions d'une variable[43]), et introduit l'ostensif $f(x,y,z,...)$[44] . Newton et Euler ont obtenu les

[42] Ovaert et alii (1976), pp. 167-171.
[43] Lagrange (1797) en donne la définition suivante : *« On appelle **fonction** d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, reliées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées. »*

développements en série entière de fonctions rationnelles et irrationnelles, de l'exponentielle et du logarithme, du sinus et du cosinus, de l'arc tangente, etc. Lagrange peut ainsi écrire, dès la leçon 1 des *Leçons sur le calcul des fonctions*, *« Le développement des fonctions, envisagé d'une manière générale, donne naissance aux fonctions dérivées de différents ordres ; et l'algorithme de ces fonctions une fois trouvé, on peut les considérer en elles-mêmes et indépendamment des séries d'où elles résultent. Ainsi une fonction donnée étant regardée comme primitive, on en peut déduire, par des règles simples et uniformes, d'autres fonctions, que j'appelle* ***dérivées*** *; et lorsqu'on a une équation quelconque entre plusieurs variables, on peut passer successivement aux équations dérivées, et remonter de celles-ci aux équations primitives. Ces transformations répondent aux différentiations et aux intégrations ; mais dans la théorie des fonctions, elles ne dépendent que d'opérations purement algébriques, fondées sur les simples principes du calcul formel. »*

C'est ce plan d'exposition que Lagrange suit déjà dans la *Théorie des fonctions analytiques* de 1797. Les fonctions dérivées de f sont définies comme coefficients des puissances de i dans le développement en série de $f(x+i)$, f étant la fonction primitive :

> « Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx+pi+qi^2+ri^3+$&c., dans laquelle les quantités p, q, r, &c., coëfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i. » p. 2

Lagrange démontre ensuite que les puissances de i ne peuvent qu'être entières (pp.7-8), puis s'intéresse à chacun des termes du développement en série. Après avoir démontré que *« [...] $f(x+i)$ sera égale à fx, plus à une quantité qui doit disparaître en faisant $i=0$ »*, donc qui s'exprime selon les puissances entières de i, Lagrange obtient le développement limité à l'ordre 1 : *« On aura donc ainsi $f(x+i)=fx+iP$, donc $f(x+i)-fx=iP$, et par conséquent divisible par i ; la division faite, on aura $P=\dfrac{f(x+i)-fx}{i}$. »*

[44] Pour Lagrange (1797) : *« Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la formulation d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^2 ou $a+bx$ ou &c., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi, fx désignera une fonction de x, $f(x^2)$, $f(a+bx)$, &c. désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, &c. Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons $f(x,y)$, et ainsi des autres. »*

Il montre qu'en itérant le raisonnement précédent, on obtient ainsi les différents *« coëfficiens des puissances de i »*, et donne en exemple, les développements de $\frac{1}{x}, \sqrt{x}$. Puis :

> « Après ces considérations générales sur le développement des fonctions, nous allons considérer en particulier la formule du n°3, $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\&c.$, et chercher comment les fonctions dérivées p, q, r, &c. dépendent de la fonction primitive fx. » p. 13

En remplaçant i par $i+o$, le développement devient : $fx+p(i+o)+q(i+o)^2+r(i+o)^3+\&c.$, puis en développant les puissances de $i+o$: $fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\&c.+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+\&c.$
En remplaçant x par x+o, « et en ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o », les fonctions fx, p, q, r, &c. deviennent respectivement $fx+f'xo+\&c.$, $p+p'o+\&c.$, $q+q'o+\&c.$, $r+r'o+\&c.$ La formule du n°3[45] devient alors : $fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\&c.+f'xo+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\&c.$ Puis :

> « Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, de i^2o, &c. $p=f'x$, $2q=p'$, $3r=q'$, $4s=r'$, &c. Maintenant, de même que $f'x$ est la première fonction dérivée de fx, il est clair que p' est la première fonction dérivée de p, que q' est la première fonction dérivée de q, r' la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'x$ la première fonction dérivée de fx, par $f''x$ la première fonction dérivée de $f'x$, par $f'''x$ la première fonction dérivée de $f''x$, et ainsi de suite, on aura $p=f'x$, et de-là $p'=f''x$; donc $q=\frac{p'}{2}=\frac{f''x}{2}$; donc $q'=\frac{f'''x}{2}$, et de-là $r=\frac{q'}{3}=\frac{f'''x}{2\cdot 3}$; donc $r'=\frac{f^{IV}x}{2\cdot 3}$, et de-là $s=\frac{r'}{4}=\frac{f^{IV}x}{2\cdot 3\cdot 4}$, et ainsi de suite. Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura $f(x+i)=fx+f'xi+\frac{f''x}{2}i^2+\frac{f'''x}{2\cdot 3}i^3+\frac{f^{IV}x}{2\cdot 3\cdot 4}i^4+\&c.$ » p. 14.

De la formule de Taylor, ainsi démontrée, Lagrange tire les définitions suivantes :

> « Nous appellerons la fonction fx, *fonction primitive*, par rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$, &c. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, par rapport à celles-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'x$, *fonction prime* ; la seconde dérivée $f''x$, *fonction seconde* ; la troisième fonction dérivée $f'''x$, *fonction tierce*, et ainsi de suite. » pp.14-15.

[45] Rappelons que la formule du n°3 est $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\&c.$

Avec le développement du concept de limite au cours du XIX^e siècle, Cauchy peut donner, quelques décennies plus tard, la définition de la dérivée d'une fonction comme limite en 0 du rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, et non plus comme « coèfficiens des puissances de i » dans la formule connue désormais sous la désignation de Taylor-Lagrange, pour une forme particulière de son reste.[46] Cependant, le système d'ostensifs défini par Lagrange va fixer un système de pratiques.

2. Permanence de certaines pratiques ostensives et oubli des raisons d'être

L'ostensif scriptural f' et l'ostensif langagier « dérivée » demeurent de nos jours, de même que les ostensifs $\int$ et « primitive ».

La genèse des pratiques dans lesquelles ils sont engagés a changé, au point de pouvoir être ignorée, donc « oubliée » de qui se contente de leur manipulation, sans la référer à l'histoire des mathématiques. Il en résulte alors que, de l'organisation nouvelle des pratiques dans lesquelles ces ostensifs sont engagés, vont émerger des non-ostensifs nouveaux. Ainsi, le non-ostensif « la fonction dérivée » n'aurait sans doute pas le même sens dans l'organisation du savoir mathématique, parce que renvoyant à d'autres pratiques ostensives, si son histoire s'était arrêtée avec Lagrange. Il serait apparu, ainsi que le définit Lagrange, comme « dérivant » d'une fonction « primitive », car c'est effectivement à partir d'une pratique d'où il découle d'une fonction « première », développée en série de Taylor, qu'il est défini par Lagrange. Alors que dans la présentation standard du calcul différentiel et intégral « classique », le non-ostensif « primitive d'une fonction » apparaît, inversement, comme

[46] En fait, comme l'indiquent Ovaert et Verley (1997) : *« Il n'est donc pas possible, comme l'a tenté Lagrange dans la Théorie des fonctions analytiques (1797), de fonder le calcul différentiel sur le développement en série de Taylor. »* La raison en est que *« .. l'application de Taylor T de* $C^\infty(\mathbf{R})$ *dans l'anneau* $C[[X]]$ *des séries formelles à coefficients complexes, définie par* $T : f \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n$ *est surjective. »* (souligné par nous).

Le Bourbaki des *Éléments d'histoire des mathématiques* n'est, quant à lui, guère tendre envers le travail de Lagrange : *« Le monumental ouvrage de Lagrange représente une tentative de fonder l'analyse sur l'une des plus discutables conceptions newtoniennes, celle qui confond les notions de fonction arbitraire et de fonction développable en série de puissances, et de tirer de là (par la considération du coefficient du terme du premier ordre dans la série) la notion de différentiation. »* pp. 246-247. Même s'il concède que donner la démonstration de la formule de Taylor, avec reste intégral et son évaluation, et fournir des matériaux pour, à la fois, la théorie des fonctions d'une variable complexe et la théorie des séries formelles, n'est pas rien, il conclut : *« Mais, du point de vue de son objet immédiat, elle représente un recul plutôt qu'un progrès. »* p. 247 !

découlant du non-ostensif « dérivée d'une fonction », car la pratique de la dérivée est première.

Citons pour illustrer cela l'exemple, antérieur à la période des « mathématiques modernes » à laquelle on pourrait à tort attacher ce trait, du *Cours de mathématiques spéciales* de H. Commissaire et G. Cagnac (1936), dans lequel les raisons d'être des ostensifs utilisés par Lagrange ont d'ores et déjà disparues. Cet ouvrage définit de la manière suivante les fonctions primitives, en son chapitre II « Recherche des fonctions primitives » du troisième et dernier tome consacré au calcul intégral :

> « 406. *Fonctions primitives et intégrales indéfinies*.- DÉFINITION.- Étant donnée une fonction $f(x)$, on appelle primitive de $f(x)$ toute fonction admettant $f(x)$ pour dérivée.
> NOTATION. – *On représente une fonction primitive quelconque de la fonction f(x) par le symbole* $\int f(x)dx$ (qui s'énonce somme de $f(x)dx$).
> Les notations $y'=f(x)$ ou $dy=f(x)dx$, d'une part, et $y=\int f(x)dx$ d'autre part, ont la même signification.
> Si F(x) est une primitive particulière de $f(x)$, on a
> $$\int f(x)dx = \mathrm{F}(x)+\mathrm{C},$$
> C étant une constante arbitraire.
> [...]
> Le symbole $\int$ s'appelle le signe somme ; la fonction $f(x)$ est dite placée sous le signe somme ; $f(x)dx$ est appelé l'élément différentiel de l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$ » p. 19.

Cette définition importe, à travers les non-ostensifs qu'elle désigne (fonction, primitive, dérivée, élément différentiel, intégrale indéfinie), et les ostensifs qu'elle contient ($f(x)$, y', dy, dx, $F(x)$, C, +, $\int$, $\int f(x)dx$), la mémoire du savoir mathématique, des choix des règles et conventions qui furent faits, sans pour autant les expliciter ou les rendre intelligibles de prime abord.

Elle importe, de la même manière, les débats mathématiques et les avancées qui en résultèrent, sans pour autant les justifier, ni les rendre compréhensibles au lecteur qui s'arrêterait, en ce point, à la lecture de l'ouvrage : pourquoi y a-t-il équivalence entre « $y'=f(x)$ ou $dy=f(x)dx$,[47] d'une part, et $y=\int f(x)dx$ d'autre part » ? Pourquoi « le signe

[47] On peut remarquer que cet ouvrage donne aussi la notation ostensive due à Leibniz, sans autre forme d'explication. Il faudrait vérifier si le manuel en faisait un usage spécifique que n'aurait pas permis l'écriture $f'(x)$, autrement que pour la notation d'une primitive sous forme d'intégrale indéfinie.

somme » ? Pourquoi « intégrale » et pourquoi « indéfinie » ? Y en a-t-il qui soient « définies » ?

Cet exemple montre que les ostensifs langagiers peuvent demeurer, tandis que les pratiques originelles dans lesquelles ils furent tout d'abord engagés, ainsi que les non-ostensifs qui en résultèrent, peuvent être oubliés.

Il montre aussi le processus par lequel les œuvres[48] mathématiques peuvent demeurer présentes dans la mémoire d'une institution donnée, à travers la perpétuation des pratiques utilisant les outils ostensifs bâtis au fil du développement de l'œuvre, alors que les raisons d'être de l'œuvre ont été oubliées[49]. En reprenant les métaphores des « chaînes » évoquées par Halbwachs et Leroi-Gourhan, les « chaînes des raisons d'être » ont historiquement tendance à être oubliées, tandis que demeurent les « chaînes d'actes ».

Ces chaînes d'actes n'apparaissent pas, de prime abord, à qui pratique les mathématiques, parce que leur connaissance n'est pas nécessaire pour la pratique. Elles sont pourtant présentes, sous la forme du savoir qui est enjeu de la pratique mathématique et qui en constitue une mémoire cristallisée.

Nous trouvons donc la *mémoire du savoir*, en théorie anthropologique du didactique, à la fois au niveau des outils pour les pratiques mathématiques, et au niveau des « objets » sur lesquels ces pratiques portent : à savoir, d'une part les ostensifs (scripturaux qu'on nomme communément les « notations mathématiques », graphiques, gestuels, etc.) qui se donnent à voir, et d'autre part les non ostensifs associés (soit ce qu'on nomme communément « notions » ou « concepts »), les deux étant des produits de ces actes fondateurs.

Ainsi les chaînes d'actes producteurs d'ostensifs et de pratiques, décisions fondatrices assumées par leurs auteurs, commandent aux chaînes d'actions que l'usage de ces ostensifs engage, puisque les premières correspondent aux choix faits pour les secondes. Ces dernières commandent enfin, à leur tour, les gestes qui permettent l'accomplissement de la pratique. C'est dans ce sens, et dans ce sens seulement, que l'on peut dire que le savoir mathématique est dépositaire de mémoire.

[48] La notion d'œuvre est prise ici dans le sens que lui donne Chevallard (1996) : « J'appelle œuvre toute production humaine *O* permettant d'apporter réponse à un ou des types de questions *Q*, questions "théoriques" ou "pratiques", qui sont les *raisons d'être* de l'œuvre – et cela sans considération de la "taille" de l'œuvre (parmi les œuvres, beaucoup sont des "œuvrettes" : par exemple, la théorie de la transposition didactique) »

[49] Cette question est abordée par Chevallard (1997) : « Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui » *in* Actes du colloque « Défendre et transformer l'école pour tous », IUFM d'Aix-Marseille.

L'accomplissement d'un geste mathématique actualise le choix du type d'action, de l'acte volontaire dont le savoir est porteur, et qui commande le geste. Pour autant, ces activations ne supposent pas le souvenir narratif des actes fondateurs et des choix qui les ont produits : c'est même parce que la mémoire est incorporée dans les systèmes d'objets mathématiques, que les mathématiques peuvent sembler une pratique qui ne nécessite pas de mémoire, et que s'oublient les raisons qui les ont fondées.

C'est ainsi que la création d'ostensifs et leur utilisation réalisent, pour la pratique des mathématiques, le principe « d'économie de l'énergie cognitive » mis en évidence par Douglas (1999) dans le fonctionnement des institutions. Ce principe d'économie se retrouve, dans la pratique mathématique « ordinaire ». Lors d'une observation que nous analysons ci-dessous, deux élèves de Terminale S en font l'expérience pratique ; leur soumission à ce principe résulte de leur assujettissement à l'institution didactique. À quelques semaines d'intervalles, ils oublient, réellement, la coûteuse technique de résolution d'une équation logarithmique qui leur a été enseignée lorsque le défilement du texte du savoir ne permettait encore de disposer ni de l'ostensif (e^x), ni du non-ostensif (l'exponentielle), par lesquels cette économie pouvait s'obtenir ; ce faisant ils reconstruisent leur passé didactique.

III. LA MEMOIRE PRATIQUE

1. Étude d'un exemple

Lors de la séance du 5 février dans une classe de Terminale S qui étudie la fonction logarithme, un élève passe au tableau pour résoudre l'équation : $\ln x^2+\ln x=2$ que les élèves avaient tous à rechercher pour ce jour-là. Après être parvenu à $3\ln x=2\ln e$, il réfléchit un instant puis écrit $x^3=e^2$; se produit alors l'épisode suivant (P désigne le professeur et ce qui est écrit au tableau est noté en gras) :

16. [...]
$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{e^2}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$
17. P : Quoi, quoi, quoi ? Tu simplifies par ln de... !
18. *L'élève efface* **$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$**

19. P : Alors, écoute-moi ! Qu'est-ce que ça veut dire $\sqrt[3]{e^2}$? Ça veut dire que si tu mets ce nombre-là au cube tu trouveras e^2, d'accord ? Si tu mets : $(\sqrt{e})^3$ qu'est-ce que tu vas trouver ? Tu vas trouver...

20. L'élève : $e\sqrt{e}$

21. P : Tu vas trouver $e\sqrt{e}$, pas e^2

$(\sqrt{e})^3 = e\sqrt{e}$

Attention !... Bon, c'est vrai qu'on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires !... Ça va ?... C'est-à-dire que pour rédiger ça, on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires... *(P rajoute)*

$\Leftrightarrow 3\ln x = 2\ln e \Leftrightarrow \ln(x^3) = \ln(e^2)$

Donc $x^3 = e^2$ donc $x = \sqrt[3]{e^2}$

La séance du 5 février, qui a été filmée, est montrée dans son intégralité le 25 mars à deux bons élèves de cette classe présents le 5 février. Le 25 mars, il leur est demandé de dire les souvenirs que la projection du film de la séquence du 5 février évoque pour eux, au fur et à mesure de son défilement. Les propos sont enregistrés. Lors du passage relatif à la résolution de $\ln x^2 + \ln x = 2$, et de la difficulté rencontrée par l'élève à propos de la racine cubique, l'échange relatif au tour de parole 16 du 5 février, est le suivant (Q désigne la personne qui questionne, G l'élève garçon et F l'élève fille) :

1. Q : Et là, vous, vous faites comment ? Parce qu'il a l'air d'être embarrassé... 2. F : Moi, j'avais marqué $\ln x = \frac{2}{3}$ 3. G : Voilà, ouais 4. Q : Et là ? 5. F : Et après 6. G : $x = e^{\frac{2}{3}}$ 7. F : $x = e^{\frac{2}{3}}$, oui [...] 12. Q : Et d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$, ça vous gênait pas ?... 13. G : Non, non. En fait on avait fait comme ça : 2, c'est 2lne, donc égale $\ln e^2$. Donc dès qu'on avait $\ln x = 3$, donc $x = e^3$

Q fait part de son étonnement à propos de l'utilisation de cette technique à cet instant de l'année :

14. Q : Oui, mais là y'a une nouveauté quand même... C'est la puissance fractionnaire, l'exposant fractionnaire.

Ce qui provoque l'embarras de F et G :

15. F : Oui 16. G : Là, heu... Ça on l'a fait après, l'exposant fractionnaire, on a fait ça quand même ! 17. F : Oui 18. Q : Oui. Je veux dire : là le $e^{\frac{2}{3}}$, vous l'avez fait après, quand vous avez étudié les fonctions puissances j'imagine ? 19. F et G : Oui 20. Q : Exponentielle et puissance 21. F : Oui 22. Q : A ce moment-là du cours, vous ne l'aviez pas fait ? 23. F : Oui, à ce moment-là, non on ne l'avait pas fait.

2. Interprétation de l'exemple

L'observation montre que, pour ces élèves, tout semble s'être passé comme si le savoir nouveau relatif à l'exponentielle, enseigné depuis par le professeur et qu'ils ont appris, avait effacé de leur mémoire des connaissances pratiques dont ils disposaient lorsque ce savoir n'était pas encore disponible. Par exemple il n'est plus besoin pour eux, désormais, de mobiliser la substitution de 1 par l'écriture $\ln e$, ni la technique passant par l'étape $\ln x = \ln y$ ou la racine n-ième. Un non-ostensif nouveau, l'exponentielle, contient, grâce aux manipulations ostensives qu'il autorise, des réponses aux questions qui nécessitaient l'emploi de ces techniques. Leurs raisons d'être s'effacent derrière la manipulation ostensive : $\ln x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$ et, avec elles, la mémoire pratique des techniques antérieures. Les pratiques mathématiques des élèves objectivent les derniers niveaux travaillés de leur mémoire relative à la pratique des mathématiques.

Arrivés en ce point, on pourrait se poser la question de la définition du type de mémoire dont nous parlons ici. S'agit-il de la mémoire personnelle et privée des élèves, qui opère à leur insu, comme cela semble être le cas pour le commun des mortels, soumis aux caprices de sa propre mémoire ? Ou bien s'agit-il d'une mémoire artificielle, car officielle, travaillée sciemment par l'institution, et à partir de laquelle il est possible, de provoquer des « oublis officiels », mais dont personne n'est réellement dupe ? Ainsi, le professeur pourrait-il dire cette mémoire en ces termes : « Quand on aura à résoudre une équation du type $\ln x = a$, on se souviendra que la solution est $x = e^a$ », sous-entendant ainsi que la technique antérieure n'a plus cours et que, même si certains élèves la conservent dans leur mémoire, il n'est plus désormais de mise de l'utiliser ; donc qu'à ce moment de son histoire, elle est officiellement oubliée de l'institution d'étude.

Ce deuxième type de mémoire, qui définirait les comportements conformes, transmis et attendus à un moment donné du temps didactique, et dans une institution donnée, se rapproche du sens couramment attribué à la mémoire collective. C'est une mémoire qui nécessite d'être instrumentée pour être travaillée, agie, et qui s'accommode de la définition que donne Leroi-Gourhan (1964) :

> « Mémoire est entendu, dans cet ouvrage, dans un sens très élargi. C'est non pas une propriété de l'intelligence mais, quel qu'il soit, le support sur lequel s'inscrivent les chaînes d'actes. On peut à ce titre parler d'une "mémoire spécifique" pour définir la fixation des comportements des espèces animales, d'une mémoire "ethnique" qui assure la reproduction des comportements dans les sociétés humaines et, au même titre, d'une mémoire "artificielle", électronique dans sa forme la plus récente, qui assure, sans recours à l'instinct ou à la réflexion, la reproduction d'actes mécaniques enchaînés. » p. 269.

Le « support » de ce deuxième type de mémoire est, pour l'exemple des équations logarithmiques, de deux ordres :

- il s'agit tout d'abord, banalement, d'un support « matériel » constitué d'un dispositif (une feuille ou un tableau, un stylo ou une craie) et de gestes incorporés (gestes de la main qui tient l'outil permettant l'écriture)
- ensuite, un deuxième support, plus transparent mais sans lequel n'auraient jamais existé les gestes activant le premier, renvoie aux conduites tacitement attendues des partenaires de la relation didactique : le contrat didactique auquel l'assujettissement des élèves, dans l'institution indirectement observée, leur a permis d'écrire, pour une manipulation réglée et sous contrôle institutionnel, des ostensifs permettant l'engagement dans la pratique mobilisant $e^{\frac{2}{3}}$.

Ce deuxième ordre de support correspond à la mémoire « ethnique », dont parle Leroi-Gourhan, et qui assure la reproduction des comportements dans les sociétés humaines. Il s'agit ici, par l'adhésion des élèves au contrat didactique, d'obtenir la reproduction des comportements, envers ce type d'équation, tels que définis par la « société humaine des classes de Terminale S » à la fin de l'année scolaire, dans le système éducatif français.

On pourrait alors considérer ces deux types de mémoire comme dotés d'une certaine étanchéité. Il y aurait d'une part, selon l'acception généralement admise parce qu'elle semble aller de soi, les comportements qu'il est convenu d'adopter dans une certaine « société humaine ». Et il y aurait d'autre part les comportements personnels qu'un individu connaît et qu'il peut décider ou non d'adopter lorsqu'il se trouve dans une autre société, ou lorsqu'il choisit de mettre ces « sociétés humaines » à distance, selon son gré.

Or, il est troublant de constater qu'à un peu plus d'un mois et demi seulement d'intervalle, les élèves observés ont oublié les pratiques qui étaient attendues dans la classe. Cet oubli est tel qu'ils leur substituent, dans leurs propres souvenirs, les pratiques qui ont cours aujourd'hui (ce qui pourrait se comprendre s'ils avaient été « absents », physiquement ou mentalement, à ce moment-là – mais ce n'est pas le cas). Cela les étonne même lorsque, s'apercevant de la déformation de leurs souvenirs, ils conviennent qu'ils ont décrit, à leur insu, l'utilisation d'une technique non alors disponible. En quoi, le fait de se plier à la conformité des comportements attendus dans une institution donnée, créerait-il l'oubli des comportements qui ont été les siens dans une autre institution, ou dans la même, mais à un autre moment de la vie institutionnelle ? Comment s'opère ce qu'on peut considérer comme un recouvrement de la mémoire personnelle par cette mémoire officielle ? L'institution « manipule-t-elle », à leur insu, la mémoire des élèves, au cours d'une sorte de « lavage de cerveau institutionnel » ?

La vision du film constitue un moyen d'évoquer l'univers cognitif dans lequel baignaient ces élèves un mois et demi auparavant. Il constituait un cadre formé d'une part d'ostensifs, à l'usage réglé, et d'autre part de certains non-ostensifs, tels le logarithme ; ostensifs et non-ostensifs étant pris dans certaines techniques. Mais l'univers cognitif des élèves n'est plus le même désormais : l'utilisation des ostensifs disponibles antérieurement s'est élargie, d'autres ostensifs sont apparus, des non-ostensifs nouveaux l'ont enrichi, par exemple l'exponentielle. Ceux-ci ont modifié le cadre personnel antérieur qui devient difficile à retrouver. C'est la raison pour laquelle les souvenirs relatifs à la mémoire pratique de ces deux élèves n'apparaissent plus.

Ces élèves savent que cet oubli est sans conséquence pour la réalisation de la tâche qui mobilisait auparavant un souvenir pratique qu'ils ont perdu ; ils ont l'assurance de parvenir encore, et par d'autres moyens, à l'accomplir. En effet, on peut faire l'hypothèse que ces bons élèves, « bons sujets » très assujettis aux contraintes de l'étude, s'appliquent par leur travail à réduire régulièrement l'écart, constamment créé par l'enseignement, entre le temps didactique et celui de leur propre apprentissage. Ils savent d'expérience, et par contrat, que le savoir qu'ils étudient régulièrement leur garantit la résolution des problèmes relevant d'un enseignement passé et qui, au sein de l'école, leur sont proposés. La résolution de cette équation implique la mise en œuvre d'au moins une technique permettant d'accomplir cette tâche. La connaissance de cette technique est officiellement garantie par l'apprentissage, une fois la tâche reconnue. Sachant cela, ces élèves travaillent à transformer par l'étude, et régulièrement, leur système mémoriel. Du point de vue d'un tel élève, il n'est donc pas nécessaire que le souvenir de certaines techniques soit demeuré, puisque la connaissance actuelle, garantie par l'apprentissage, possède en elle-même et retrouve autour d'elle les moyens de les fabriquer. Si la connaissance disponible actuellement ne permet pas de disposer d'une technique, c'est que ces moyens sont insuffisants, donc que l'apprentissage est insuffisant. Ce n'est pas que la connaissance fasse obstacle à un souvenir réel qui voudrait se montrer : c'est qu'entre les techniques disponibles à un élève d'alors et celles d'un élève actuel, il y a trop de différences[50].

Et en effet, les moyens techniques dont disposent les élèves au moment où ils visionnent le film, sont d'une terrible efficacité comme le montre le schéma suivant :

Technique institutionnalisée en classe les 4 et 5 février et justification technologique	**Technique décrite par les élèves le 28 mars et justification technologique**
$\ln x^2+\ln x=2$	$\ln x^2+\ln x=2$
$2\ln x+\ln x=2$ (car $\ln x^n=n\ln x$)	$2\ln x+\ln x=2$ (car $\ln x^n=n\ln x$)
$3\ln x=2$ (car $2+1=3$)	$3\ln x=2$ (car $2+1=3$)
	$\ln x=\frac{2}{3}$ (car $ax=b \Leftrightarrow x=\frac{b}{a}$)
$3\ln x=2\ln e$ (car $\ln e=1$)	$x=e^{\frac{2}{3}}$ (car $\ln x=a \Leftrightarrow x=e^a$)
$\ln x^3=\ln e^2$ (car $n\ln x=\ln x^n$)	
$x^3=e^2$ (car ln bijection)	
$x=\sqrt[3]{e^2}$ (car définition de la racine cubique)	

[50] Pour que de telles pratiques oubliées puissent reparaître, il faudrait sans doute, pour ces élèves, changer d'institution et modifier alors leur univers cognitif afin de le rendre compatible avec cette nouvelle institution. Par exemple, se faire l'aide d'un élève plus jeune qui, l'année suivante, parcourra au cours de son étude, la même organisation mathématique.

L'économie des gestes est manifeste : seulement quatre pas de calcul sont désormais utiles lorsqu'il en fallait six auparavant. Leur mise en œuvre est plus simple, puisqu'ils ne nécessitent qu'une seule fois la manipulation de $\ln x^n$ et la seule connaissance de $\ln x=a \Leftrightarrow x=e^a$, quand il fallait utiliser $\ln x^n$, $\ln e$, puis $n\ln x$, ainsi que la bijectivité et la racine cubique. Enfin, la générativité du geste qui consiste à passer de $\ln x=a$ à $x=e^a$ est plus grande, puisqu'il permet de résoudre, par ailleurs, des équations d'un nouveau type telles que $\ln x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, pour lesquelles le recours à une éventuelle racine $\sqrt{2}$-ième paraît hasardeux !

Il y a ainsi une véritable puissance de la manipulation ostensive, qui tient à son efficacité, pour qui possède la maîtrise des gestes convenables, au point d'effacer le souvenir de techniques plus rustiques et d'usage mal commode. C'est ce que savent ces bons élèves qui, oublieux des techniques anciennes au profit de nouvelles d'une plus grande portée, soulagent ainsi leur mémoire afin de s'engager, avec plus de chances de succès, dans les apprentissages à venir. Nous retrouvons, en ce point, un principe d'anthropologie cognitive décrit, entre autres, par Douglas (1999), qui le désigne sous la forme de « l'économie de l'énergie cognitive », et par Brousseau dans la théorie des situations, qui parle de « coût d'une stratégie ». Mercier (1996) désigne un de ses effets, la stabilité des connaissances, en ces termes :

> « Selon Brousseau, la connaissance socialement stable associée à une situation didactique peut donc être prévue par l'étude du coût des différentes stratégies permettant de réussir des tâches demandées. Je rappelle ici que le coût d'une stratégie s'analyse en un coût à l'apprentissage et un coût à l'emploi, ce qui permet de prédire d'emblée qu'une connaissance chère à l'apprentissage ne sera stable que si les occasions de son emploi sont nombreuses [...] ».pp. 1-2.

Nous pouvons désormais préciser ce que l'on entend par « stabilité des connaissances ». Il s'agit des souvenirs relatifs à sa mémoire pratique et que la personne peut mobiliser. Ces souvenirs seront d'autant plus faciles à mobiliser que le coût, certes à l'apprentissage mais ici surtout à l'emploi, sera plus faible. La baisse de ce coût est, dans ce cas, assurée par certains ostensifs, dont l'apprentissage de la mise en œuvre permet l'économie des gestes qui, en définitive, soulage la pensée, et ceci à un point tel qu'il n'est plus nécessaire de conserver le souvenir de manipulations ostensives antérieures beaucoup trop coûteuses.

3. Mémoire pratique : définition

Une pratique suppose un dispositif constitué de moyens matériels. Ce dispositif doit être outillé par des gestes, afin que la pratique puisse se déployer. Il est donc nécessaire que soient mobilisés des moyens personnels, pour l'activation du dispositif. Il faut que la personne qui produit les gestes possède une mémoire pour ces gestes ; c'est-à-dire qu'elle puisse reproduire les gestes de la pratique antérieurement appris. C'est ce que nous nommons *la mémoire pratique de la personne.* Elle est le produit de l'incorporation personnelle de chaînes opératoires traditionnelles, portées par « la collectivité culturelle » (les anthropologues disent ethnique, et nous la considérons ici comme étant la collectivité qui étudie : la collectivité didactique), qui joue à la fois le rôle de mémoire externe et de médiateur pour l'apprentissage personnel de cette mémoire externe, conservée par une institution humaine comme œuvre humaine : la mémoire du savoir. Dans un domaine de réalité à l'intérieur d'une institution didactique, si la pratique qui s'y déploie est outillée par les gestes permis par le savoir qui les commande et qui agit comme mémoire de ces gestes pour régler leur activation, l'accomplissement de la pratique par une personne construit simultanément une mémoire nouvelle de cette pratique pour la personne ; c'est ce qu'illustre l'exemple précédent.

IV. LA MEMOIRE OSTENSIVE

1. Définition

Nous appelons *mémoire ostensive*, la mémoire délibérément donnée à voir, de manière revendiquée, et par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu, quelle que soit sa position dans l'institution. Bien qu'elle obéisse, suivant la position occupée par la personne, à certaines règles institutionnelles (par exemple, le professeur évoquera la mémoire officielle du savoir enseigné, l'élève montrera sa mémoire personnelle et pratique du savoir appris), cette ostension peut être réalisée, comme pour les ostensifs outils du travail mathématique, dans le cadre de divers registres perceptifs : gestuel, discursif - langagier, graphique, scriptural.

Ainsi l'espace et les gestes, des uns et des autres, sont-ils sciemment organisés dans la classe pour que certains événements didactiques puissent se produire « au vu et au su » de tous, ou au contraire à destination d'un seul, à l'abri du regard des autres. Lorsqu'ils sont ou ne sont plus accomplis en direction de tous dans l'institution, ces gestes, qui donnent à voir la mémoire, permettent que soient emmagasinés, oubliés ou rappelés certains souvenirs. On peut dans ce cas qualifier cette mémoire de « mémoire didactique ostensive de la classe », parce qu'elle s'appuie sur des événements relatifs au savoir enseigné qui ont été publiquement, et intentionnellement pour une grande partie d'entre eux, donnés à voir (ou à entendre, manipuler, etc.), et sur certains que l'on ne montre plus.

2. Exemple

L'enseignement ordinaire, qui recourt à l'ostension assumée ou déguisée, fournit de nombreux exemples d'utilisation de la mémoire ostensive. L'exemple suivant, relatif au discours du professeur après la résolution des équations $(\ln x)^2+\ln x=2$ et $(\ln x^2)+\ln x=2$, reste dans le registre des équations logarithmiques en Terminale S, mais chacun peut trouver d'autres illustrations, tant elles abondent :

> Alors, regardez ces deux équations. Evidemment, le gros truc, c'est ça *(P entoure* (lnx)^2 et (lnx^2)*)*. Qu'est-ce qu'on a fait, là ? Dans les deux, on a composé la fonction logarithme avec la fonction carré. Seulement, on les a pas composées dans le même sens ! Ici *(P montre de la main sous* (lnx)^2*)*, on a d'abord fait ln et ensuite la fonction carré :
>
> $(1 \quad + \quad \alpha \quad)^2 \quad = (\ln x)^2$
>
> (Puis sous (lnx^2)).
>
> $\mathbf{x \xrightarrow{\text{carré}} x^2 = X \xrightarrow{\ln} \ln(X) = \ln(x^2)}$
>
> Ici *(P montre sous* (lnx)^2*)*, ça donne un polynôme de degré 2 où la variable a été remplacée par lnx:
>
> X^2+X-2
>
> [...] Je vais transformer ça, je sais transformer ça, en logarithme de machin égale logarithme de truc. [...] Vous allez vous ramener à logarithme de machin égale logarithme de truc :
>
> $\mathbf{\ln\blacksquare=\ln\bullet}$
>
> Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. La deuxième chose qu'il faut voir, c'est que tantôt on se ramènera à ça *(P montre sous*(lnx^2)*)*, et que tantôt on se ramènera à ça *(P montre sous* (lnx)^2*)*. Suivant que le logarithme joue un rôle d'inconnue, vous pouvez toujours vous ramener à une forme où le logarithme joue un rôle de variable. Ou bien alors, vous pouvez transformer votre équation en logarithme de quelque chose égale logarithme d'autre chose.

Jusque dans la gestuelle du professeur, qui désigne de la main les deux équations et entoure $\ln x^2$ et $(\ln x)^2$, dans le symbolisme (« $\mathbf{\ln\blacksquare=\ln\bullet}$ ») ou le vocabulaire qu'il utilise (« logarithme de machin égale logarithme de truc »), il s'agit bien pour lui de *montrer*, pour les institutionnaliser et les discriminer, les étapes les plus importantes de techniques dont la désignation est mal commode, ou pas assez « parlante » à ce niveau de l'enseignement (« le changement de variable »). Cette ostension passe par l'appel direct à la mémoire des élèves : « Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. » Dans cet exemple, l'usage de l'ostension et de la mémoire ostensive, par le professeur, permet de rassembler les éléments épars, enseignés sur deux séances, et qui constituent la technique à institutionnaliser.

3. Quelques fonctions de la mémoire ostensive

Pour qu'un enseignement puisse être assuré, il est nécessaire de ménager des phases d'institutionnalisation qui indiquent une homogénéisation des pratiques personnelles antérieures. À travers la standardisation des pratiques, est engagée une reconstruction du passé, donc un travail de mémoire à travers les pratiques qu'il contient. Celle-ci opère à un double niveau : public, en ce qui concerne la mémoire didactique ostensive de l'institution, et privé en touchant à la mémoire pratique personnelle. Travail qui se poursuivra dans ce dernier cas par l'étude, afin d'atteindre à nouveau à une compatibilité de ces deux types de mémoire.

Cette homogénéisation peut être réalisée, dans la pratique courante de l'enseignement par ostension, afin de construire un milieu pour l'enseignement d'un savoir. Il s'agit alors, pour le professeur, de montrer les savoirs ou les savoir-faire que les élèves doivent connaître afin qu'il puisse s'engager dans l'enseignement d'un objet nouveau. Ce faisant, ce n'est pas un milieu a-didactique d'action, au sens de la théorie des situations didactiques de Brousseau, qui est créé. Nous assistons plutôt à la production d'un ensemble de souvenirs relatifs à des notions, jugées par le professeur comme étant communes à un nombre suffisant d'élèves, afin que le cours délivré ne puisse être vu comme un monologue duquel les élèves sont exclus. Cette manière de faire réalise la nécessité de montrer, au sein de l'institution, que l'intention d'enseigner rencontre aussi l'intention d'apprendre, condition nécessaire à la pérennisation de la relation didactique. Mais surtout, tant dans l'institutionnalisation que dans l'ostension, c'est « un principe de cohérence institutionnelle », mentionné par Douglas, qui est en jeu ; dans l'institutionnalisation, pour montrer que tous doivent désormais se comporter envers le savoir de la manière conforme aux usages institutionnels, et dans l'enseignement par ostension, afin de créer une convivialité didactique officielle censée élargir le *topos* de chaque élève en attribuant à chacun ce qui est une propriété déclarée de l'institution, fiction rendue crédible par le spectacle d'un débat sur l'objet montré : le cours comme exposé d'une démonstration.

Sous cet angle, la mémoire apparaît, une fois de plus, comme un processus cognitif, mais pris en charge, pour partie, par l'institution. Mise en œuvre pour la construction d'un milieu, la mémoire ostensive, en retour, est constamment reconstruite à partir des rapports aux arrangements inédits des objets pris dans la construction du milieu. Ce type de mémoire, qui définirait les comportements institutionnellement conformes, transmis et attendus à un moment donné du temps didactique, se rapproche du sens couramment attribué à la mémoire collective. Nous y retrouvons cependant cette dimension pratique qui organisait un clivage par rapport aux approches traditionnelles de la mémoire, dans le sens où les souvenirs nécessitent d'être instrumentés pour être travaillés afin d'en construire de nouveaux.

V. PRENDRE EN COMPTE LES PHENOMENES MEMORIELS POUR DEVELOPPER DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Le concept de mémoire apporte une dimension supplémentaire au concept de rapport au savoir, en l'inscrivant dans une temporalité, donc dans l'histoire de sa constitution et dans la biographie de sa construction. La statique du rapport permettait de montrer son existence et de le définir ; la mémoire ajoute une dimension dynamique à la description en intégrant tout à la fois sa naissance, son patrimoine génétique en quelque sorte, et ce que son histoire en a fait, ce qu'il a conservé ou perdu, donc son développement et sa construction. Elle situe donc respectivement le cognitif (la pensée), son objet (le savoir), et son sujet (l'homme qui apprend par la pratique du savoir), dans un processus institutionnel et temporel.

Notre connaissance de la mémoire des objets de la pratique du savoir peut permettre de mieux appréhender les processus didactiques en œuvre, tant du point de vue de la mémoire de ces processus telle qu'elle se dit, que du point de vue des pratiques incorporées mobilisées par les personnes qui étudient. Elle permet donc d'imaginer des dispositifs didactiques capables d'assurer certaines évolutions du rapport personnel au savoir, c'est-à-dire l'apprentissage.

Grâce au modèle de la mémoire construit, intégrant les trois types de mémoire présentés, il est possible d'envisager un nouveau champ d'étude didactique. Ainsi, l'analyse qui suit, relative à une ingénierie didactique mise en place en 1999-2000, pointe une direction à prendre pour favoriser et diriger le travail de la mémoire mobilisée par les élèves pour leur pratique des mathématiques, et donc pour leur étude. Elle passe par un travail portant sur les ostensifs ; l'utilisation de ceux disponibles dans la communauté qui étudie, et aussi l'anticipation ou la création de nouveaux, leur communication au groupe et leur évaluation au regard de leur efficacité pratique.

Nous montrons, pour exemplifier les déclarations qui précèdent, des extraits d'une expérience menée par une équipe dirigée par A. Mercier dans le cadre d'un travail conjoint ENFA, IUFM d'Aix-Marseille et de Toulouse, INRP. Il s'agit d'un enseignement des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues dans des classes de 3^e^, réalisé au cours de six séquences par un professeur volontaire. Ces séquences sont organisées en trois « tableaux » pensés pour permettre l'écriture des formules, leur observation, la résolution des équations et l'établissement des méthodes générales de résolution. Chaque tableau est fait d'une classe de problèmes dont la résolution passe par une modélisation à l'aide d'un système d'équations. Des groupes de quatre à cinq élèves sont constitués dans la classe. Après une phase de dix à quinze minutes de recherche individuelle des problèmes du tableau, le travail est ensuite mené dans chaque groupe, afin de réaliser en commun un transparent qui sera montré à la classe pour qu'elle en débatte, lors d'une phase d'exposé des travaux des groupes. Les séances sont filmées et elles sont précédées et suivies d'entretiens enregistrés avec le professeur de la classe. Les feuilles de travail des élèves et les transparents sont photocopiés et conservés.

Du premier tableau, nous extrayons le deuxième problème :

> *Deuxième problème* : Un grand hôtel dispose de 50 chambres et peut recevoir 83 personnes. Il y a des chambres pour une personne et des chambres pour deux personnes. De combien de chambres pour une personne et de combien de chambres pour deux personnes dispose cet hôtel ?

La production ostensive est très diverse dans l'échantillon de transparents de groupe dont nous disposons. Elle peut parfois se limiter à une écriture langagière qui expose le travail mené dans le groupe. C'est le cas du groupe 2 qui rédige un transparent, pour ce problème, de la manière suivante :

> <u>Deuxième problème.</u>
> Pour trouver le résultat, nous avons encore effectué une soustraction. Nous avons soustrait le nombre de personnes au nombre de chambres. Donc 83-50 est égal à 33. Alors il y a 33 chambres de 2 lits et 17 chambres à 1 lit. »

Le groupe 3 est plus laconique et sa solution, dans sa rédaction, réalise une économie substantielle par rapport à celle du groupe 2. La référence à la nature des choses (chambre ou lit) à laquelle se rapportent les nombres n'est plus mentionnée, et les symboles - et = remplacent la rédaction en français du groupe 2. Elle est la suivante :

> 2$^{\text{ème}}$ problème
> 83-50=33
> Donc il y [a]33 chambres de 2 lits.
> 50-33=17
> Donc il y [*de nouveau manque le a*] 17 chambres de 1 lit.

La rédaction du groupe 6 introduit, quant à elle, des ostensifs (encadrements, flèches, disposition des calculs) qui lui sont spécifiques :

> Problème n°2
> Il y a 50 chambres et 83 personnes.
> Pour 80 personnes et toujours 50 ch.

30	chambres à 2 lits →30×2=	60
+		+
20	chambres à 1 lit →20×1=	20
50		80
		+3
30+3=33	(33×2)+17= →	83
20-3=+17		
50		

Dans ce premier tableau, les élèves n'en sont encore qu'à l'exploration d'une solution ; c'est donc « par tâtonnement » qu'ils parviennent à trouver les nombres du résultat. Il est remarquable de noter que, dans l'écriture de la solution du groupe 6, les ostensifs accompagnent et commandent cette recherche, « par tâtonnement », de la solution. Ainsi, après avoir ramené le problème à 80 personnes (les 3 qui restent pouvant être réparties, soit en utilisant une chambre à 2 lits et une chambre à 1 lit, soit trois chambres à 1 lit), les nombres encadrés représentent respectivement une décomposition des 50 chambres en 30 et 20 qui permet de décomposer à son tour les 80 personnes utilisées dans cette première étape. La correspondance est indiquée par les « petites » flèches qui indiquent qu'à la décomposition

30+20 peut être associée une décomposition 60+20. Reste le problème des 3 personnes. Par un heureux hasard dû aux donnés du problème, l'erreur commise dans le raisonnement qui suit va cependant conduire à la solution. En effet, ce nombre de personnes (3) se transmute en nombre de chambres soustrait et ajouté au nombre de chambres de chacun des types (ce qui ne modifie pas leur somme, mais change la répartition des personnes qui ne correspond alors plus à la correspondance du deuxième encadré), tandis qu'il est ajouté aux 80 personnes pour arriver aux 83 à répartir. On obtient alors 33 chambres à 2 lits et 17 à 1 lit, ce qui est effectivement la solution du problème, obtenue de manière chanceuse (puisque les 3 chambres ajoutées correspondent à 6 personnes ajoutées et les 3 chambres retirées à 3 personnes soustraites, donc à une somme algébrique égale aux 3 personnes à rajouter à 80). La vérification est notée et correspond, à l'aide de l'ostensif « flèche », aux 83 personnes. La manipulation ostensive s'accompagne donc ici d'une erreur, mais elle économise, et masque, toute la description du raisonnement que nous venons d'exposer. On peut raisonnablement imaginer que, pour parvenir à faire accepter et noter cette écriture dans le groupe, il a sans doute fallu discuter, argumenter, montrer et expliciter ce raisonnement. On retrouve donc cette propriété des ostensifs de conserver la mémoire du débat ou du raisonnement dont on peut, à travers cette rédaction, retrouver quelques éléments.

Lors du deuxième tableau, après avoir vu que ces problèmes peuvent être modélisés par des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, les élèves sont invités à revenir sur les problèmes du premier tableau afin de réaliser la modélisation et de les résoudre.

Le troisième problème du premier tableau était le suivant :

Troisième problème : Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à deux lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge. Combien de chambres à 2 lits et combien de chambres à 4 lits y a-t-il dans le refuge ?

Suivant la consigne, une élève revient au problème qu'elle avait résolu lors du premier tableau, en utilisant ici aussi des ostensifs qui lui sont propres, de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Chambresà 2lits}\\ \text{Chambresà 4lits}\end{array}\right\}\text{30randonneurs}$$

---

12 chambres

12→ au moins 2 personnes=24

30-24=6÷2

↓

si on divise 6 par 2 ça fait 2×3 randonneurs à placer 2+2=4

donc

3 chambres à 4 lits et 9 chambres 2 lits

Maintenant qu'elle dispose des ostensifs appropriés, elle peut alors les utiliser pour écrire, lors du deuxième tableau :

$$\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+4y=30 \end{cases}$$

Ce qui la conduit à développer sa propre « créativité » mathématique : elle « invente » deux techniques pour parvenir à la solution trouvée lors du premier tableau. La première est la suivante :

$2x+4y=30$

$x+y=30-x-3y$

$12=30-x-3y$

$x+3y=30-12$

$x+3y=18$

$x+y=18-2y$

$12=18-2y$

$2y=18-12$

$2y=6$

$y=3$

$x=12-3=9$

La première technique « inventée » consiste donc à faire apparaître la première équation à partir de l'autre afin de substituer à la première la constante à laquelle elle est égale, et à itérer le procédé jusqu'à « disparition », dans la deuxième équation, d'une des inconnues. Ceci permet, au bout d'un certain nombre d'étapes, de la résoudre comme équation du premier degré à une inconnue, et à obtenir alors la valeur de la deuxième inconnue. Cette élève, qui parvient dans un deuxième temps à perfectionner sa technique, écrit alors :

$$\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+4y=30 \end{cases}$$

Plus court → $2x+4y=30$ $\qquad$ $2(x+y)+2y=30$

$2(x+y)=30-2y$

$2\times12=30-2y$

$24=30-2y$

$2y=30-24$

$2y=6$

$y=3$

$x=12-3=9$

Il s'agit donc d'une amélioration technique, allant dans le sens d'une économie, tant de l'énergie cognitive à déployer que de l'expansion de l'écriture ostensive, dans la mesure où la double itération du procédé consistant à faire apparaître $x+y=12$ dans $2x+4y=30$ peut être remplacée par une factorisation par 2 après décomposition de $4y$.

Cette pratique ostensive, qui permet un travail de la technique dans le sens d'une économie identifiée par l'élève, contient et s'appuie sur la mémoire de la technique précédente, moins élaborée ; un travail de la mémoire pratique permet un travail de la technique.

Cet état de fait peut alors être judicieusement utilisé par le professeur, en engageant la classe à travailler sur la portée de la technique. Nous mène-t-elle à la solution à tout coup ? Sinon, dans quels cas fonctionne-t-elle ? Et comment faire dans les cas de systèmes pour lesquels elle est inapplicable ? Que sont ces systèmes et pourquoi est-elle inopérante alors ? La prise en compte de ces questions par la classe débouche sur le travail de la dimension technologique des techniques disponibles à cet instant (Chevallard, 1999). Ceci n'a pas échappé au professeur, lors d'un entretien *post* séance, qui relate en ces termes :

> **P** : [...] À partir du moment où il y en a un qui a eu cette idée de retrancher $x+y$ et de retrancher 20, [...] Ils sont restés sur cette piste-là, en se demandant comment ils pouvaient, par soustraction, faire... procéder à la transformation. [...]
>
> **P** : [...] Et après, j'ai fait venir quelqu'un d'autre au tableau, qui a proposé... qui est la copine d'Émilie d'ailleurs, et qui a proposé cette méthode où finalement on décompose : 5y. Et qui a eu énormément de mal à l'expliquer. [...] Et alors, il y a eu tout un débat sur : il manque des étapes [...] Bon, il y avait un

autre débat, parce qu'il y a tellement de choses qui sont sorties de là. C'est que… l'autre débat c'est : on perd, on perd en route des conditions qui doivent être remplies, et euh… comment, quel choix va-t-on faire, et est-ce qu'on aurait le droit de rajouter, d'associer à ces deux premières équations ce fameux 2x+2y = 172. Alors moi, je leur ai posé la question, il n'y a pas eu de réponse.

Le « principe d'économie de l'énergie cognitive » est identifié par les élèves, ce que relève le professeur :

P : [...]donc, à la quatrième séquence sont apparues les deux méthodes principales, par substitution et par addition, avec d'autres à côté, du type méthode des fonctions par exemple. Ils ont trouvé ça, plus encore une ou deux autres, mais ils se sont bien rendus compte que finalement les deux qui étaient efficaces, qu'ils utiliseraient sûrement, ce sont celles-là.

P : [...] Dans l'autre classe on a eu le temps de mettre en forme les deux méthodes, on a eu le temps d'étudier la deuxième méthode, où elle écrit dans les deux équations x en fonction de y, où elle a même développé l'argument : de toute façon, si on divise par deux ce n'est pas un problème, on s'en débarrasse après. Donc, ça a été accepté par tout le monde comme étant une troisième méthode possible, mais un peu en retrait des autres, ce qui est intéressant, parce que moins économique.

Enfin, à travers la diversité des écritures créées par les élèves eux-mêmes, le travail des ostensifs leur apparaît dans sa dimension mémorielle facilitant l'exécution du calcul, et contenant la mémoire des dimensions technologiques associées à la technique. Dans ce travail des ostensifs, c'est le travail de la mémoire pratique, avec ces variantes personnelles, qui peut être mené collectivement et sous la direction du professeur :

P : [...] Et, lui avait écrit, il avait écrit ceci : 2x+4y = 232 et en dessous il avait écrit, il avait préparé son accolade, c'est important, parce qu'il y en a qui ont toujours pas éprouvé le besoin...

[...]

P : De coder l'association des deux conditions. Alors il y en a qui numérotent, il y en a qui ont laissé de l'espace, ça se voit. Et c'est vrai que ceux qui… et pourtant ça a été suggéré. C'est le bon moyen de faire comprendre au cerveau qu'on associe les deux conditions. Eh ben non. Comme c'est pas écrit formellement sur le… et qu'on n'a pas appris une leçon qui dit qu'il faut mettre une accolade, il a écrit : je fais 2x-2x ça fait hein… 5y-3y = 232-162.

Les ostensifs interviennent alors dans la mémoire ostensive de la classe. Se montre la nécessité d'y recourir, et les difficultés qui surgissent lorsqu'on déroge à leur utilisation :

P : Alors, le débat, il y en a qui comprenaient plus d'où ça sortait ça, pourquoi il écrivait ça ; alors il a commencé à expliquer qu'il faisait une soustraction. Et puis finalement, je me suis rendue compte que, le fait de le laisser persister avec une écriture comme celle-là, avec la deuxième équation associée à nouveau à celle-ci, ça apportait une confusion complète, et le sens de la soustraction membre à membre disparaissait, au profit d'un autre problème qui était : est-ce qu'il faut absolument continuer à associer ces deux conditions, est-ce que celle-là elle est absolument nécessaire. Alors le débat...

L'expérience que nous venons de décrire rapidement indique une voie pour un d'enseignement en lequel le temps de l'étude est en grande partie pris en charge par le professeur. Mercier (1998) souligne *a contrario* ce trait de l'enseignement ordinaire qui conduit à ce que *« le travail des savoirs désignés indirectement par les épisodes didactiques ne peut trouver place dans le cours ordinaire de la classe, parce qu'il ne produit pas de progression du temps didactique. »* Les épisodes qui signent des moments d'apprentissage personnel, pour un élève donné, de savoirs pertinents pour l'enseignement à venir d'autres éléments de savoir, autrement dit le travail de l'idonéité du rapport au savoir, est mené le plus souvent de façon privée, hors de la classe. Des dispositifs didactiques, tels que celui-ci, prennent à leur charge le nécessaire travail personnel de la mémoire pratique, sous la direction de l'enseignant, avant sa mise en commun ; donc ils prennent en compte le processus de construction de la mémoire pratique selon les nécessités personnelles rencontrées par chacun, et l'articulent à la mémoire ostensive : celle qui se dit et qui est relative à des connaissances et savoirs institutionnalisés. Ils peuvent ainsi favoriser le travail de l'idonéité du rapport au savoir, parce qu'il n'est plus laissé à la charge exclusive des élèves.

BIBLIOGRAPHIE

Bosch M. (1994) : *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad,* Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelone.

Bosch M. & Chevallard Y. (1999) : *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique,* Recherches en didactique des mathématiques, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 77-124.

Bourbaki N. (1969) : *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris.

Centeno J. (1995) : *La mémoire didactique de l'enseignant,* thèse posthume inachevée, LADIST, Bordeaux.

Chevallard Y. (1989) : *Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*, Actes du *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1988-1989*, Université Joseph Fourier, pp. 211-235.

Chevallard Y. (1996) : *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, in* Actes de la VIII^{e} École d'été de didactique des mathématiques, Noirfalise R. et Perrin-Glorian M-J. éds., IREM de Clermont-Ferrand, pp. 83-122.

Chevallard Y. (1997) : *Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui*, in Actes du Colloque Défendre et transformer l'École pour tous, IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1999) : *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, 19/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 221-266.

Commissaire H. & Cagnac G. (1936) : *Cours de mathématiques spéciales,Tome III, Calcul intégral, courbes et surfaces du second degré*, Masson et C^{ie}, Paris.

Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986) : *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Éditions du Seuil, Paris.

Delachet A. (1949) : *L'analyse mathématique*, coll. Que sais-je ?, PUF, Paris.

Dieudonné J. (1978) : *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Tome I, Hermann, Paris.

Douglas M. (1999) : *Comment pensent les institutions*. Paris : La Découverte.

Halbwachs M. (1925 ; 1994) : *Les cadres sociaux de la mémoire*, Postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.

Halbwachs M. (1950 ; 1997) : *La mémoire collective*, Préface et postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.

Houzel C., Ovaert J.-L., Raymond P., Sansuc J.-J. (1976) : *Philosophie et calcul de l'infini*, François Maspero, Paris.

Lagrange J.-L. (1797) : *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel*, Imprimerie de la République, Prairial an V, Paris.

Leroi-Gourhan A. (1964) : *Le geste et la parole II, La mémoire et les rythmes*, Albin Michel, Paris.

Matheron Y. (2000) : *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au Collège et au Lycée. Quelques exemples*, Université Aix-Marseille I.

Mercier A. (1996) : *Comment appréhender le cognitif depuis la position de la didactique des mathématiques ?*, communication au symposium REF, 1996, Université de Montréal.

Mercier A. (1998) : *La participation des élèves à l'enseignement*, Recherches en didactique des mathématiques, 18/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 279-310.

Muxel A. (1996) : *Individu et mémoire familiale*, Nathan, Paris.

Namer G. (1987) : *Mémoire et société*, Méridiens Klincksieck, Paris.

Ovaert J. – L. & Verley J. – L. (1997) : *FONCTIONS représentation & approximation des*, in *Dictionnaire des mathématiques, algèbre, analyse, géométrie*, Encyclopædia Universalis et Albin Michel, Paris, pp. 361-400.

Ricœur P. (2000) : *La mémoire, l'histoire, l'oubli*, Seuil, Paris.

Vygotski, L. (1978) : *Mind in society, the development of higher psychological processes*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.