Ordres de connaissances et institutionnalisation

Groupe CESAME[24]

Catherine Sackur, Maryse Maurel, Jean-Philippe Drouhard, Teresa Assude[25]

GECO-IREM de Nice

I. Introduction

Le but de nos travaux est de comprendre les difficultés rencontrées par nos élèves quand ils apprennent des mathématiques et nous cherchons des façons de lutter contre les erreurs tenaces des élèves. Notre travail théorique s'appuie en permanence sur notre pratique d'enseignants, mais cette pratique s'alimente à la théorie qui sert de fil directeur à nos préparations et décisions d'enseignement.

En ce qui concerne les erreurs des élèves nous savons que la réalisation d'exercices répétitifs est inefficace si on refuse le dressage mathématique. Nous voudrions que nos élèves apprennent à distinguer par eux-mêmes le vrai du faux. Nous pensons qu'un mathématicien n'utilise pas seulement les règles du raisonnement logique pour faire cette distinction. Nous pouvons donc nous demander comment identifier les connaissances utilisées par un mathématicien pour faire des mathématiques et pour faire partager la validité de ses résultats ? Quelles sont parmi ces connaissances celles que n'ont pas certains de nos élèves quand ils font des mathématiques en classe ?

Quel que soit le type d'enseignement, certains élèves acquièrent ces connaissances par eux-mêmes, d'autres ne les acquièrent pas spontanément. Ce sont ceux-là qui nous intéressent. Ce sont pour ceux-là que nous cherchons des dispositifs d'enseignement spécifiques qui permettront de leur enseigner tout ce qui ne se réduit pas à des définitions, des théorèmes ou des méthodes. C'est ainsi que nous en sommes arrivés à la notion d'*ordres de connaissances* que nous allons présenter ici.

---

[24] CESAME est un groupe de recherche composés de six chercheurs dont le nom est l'acronyme de Construction Expérientielle du Savoir et Autrui dans les Mathématiques Enseignées.

[25] Voir en fin d'article le rattachement institutionnel et les mels des auteurs.

Dans la recherche CESAME, développée depuis plusieurs années, nous avons élaboré des séquences pour permettre à nos élèves ou à nos étudiants de faire l'expérience du caractère nécessaire des énoncés mathématiques. La connaissance qui émerge de cette expérience est de nature particulière. Le plus souvent, il ne suffit pas de l'énoncer d'emblée, elle s'acquiert dans la pratique et l'expérience des mathématiques. C'est ce type de connaissances que nous voulons institutionnaliser. Dans ce texte, nous allons rendre compte de ce qui s'est passé autour d'un partiel dans une première année de DEUG MASS[26] au cours du deuxième semestre 2000-2001. Il s'agit d'un *dispositif d'enseignement* qui résulte de notre réflexion sur " ce que cela veut dire d'apprendre des Mathématiques ".

Après un exposé du problème mathématique, nous décrirons, du point de vue des professeurs, la chronologie de la mise en place du dispositif. Puis nous décrirons les outils théoriques que sont les ordres de connaissances pour montrer la *spécificité des dispositifs d'enseignement* qui visent ces connaissances et *la pertinence de cette notion d'ordres de connaissances* pour analyser des données issues du terrain. La partie suivante étudiera, avec les outils de la théorie CESAME, la genèse du dispositif et les effets produits sur le travail des étudiants. Enfin la dernière partie, en forme de conclusion, fera le lien avec l'institutionnalisation et la notion de milieu dans la théorie des situations didactiques.

II. LES MATHEMATIQUES

L'exercice sur lequel portent nos observations avait pour but de tester, dans un partiel, la compréhension des étudiants sur le thème des développements limités d'une fonction à une variable. Nous rappelons ici le savoir de référence pour les étudiants.

Pour une fonction à une variable et son étude locale au voisinage d'un point (nous choisirons ici le point 0), il s'agit d'écrire

$$f(x)=P_n(x)+o(x^n)$$

où $P_n(x)$ est l'expression d'un polynôme de degré n qui réalise la meilleure approximation polynomiale de f et où $o(x^n)$ est le reste.

Ce reste doit vérifier $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$.

Il a été distribué aux étudiants un feuillet de dessins obtenus avec le logiciel Maple comme celui que nous reproduisons ci-dessous.

[26] MASS : Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales ; le MASS est une filière scientifique qui offre aux étudiants trois enseignements fondamentaux, les mathématiques, l'économie et l'informatique.

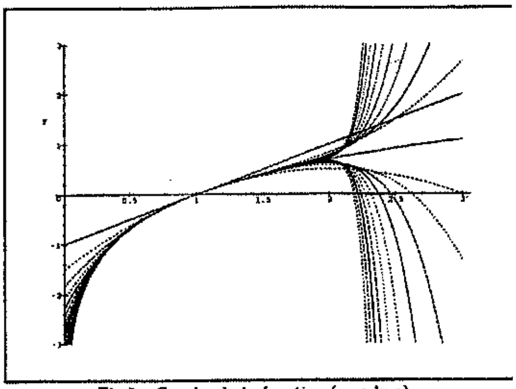

Fig.2 Graphe de la fonction ($x \mapsto \ln x$), et de ses "approximations de Taylor" successives en $x = 1$

Si on définit une fonction évanescente en 0 comme une fonction φ qui vérifie $\lim_{x \to 0} \varphi(x)=0$ (notée *eva* dans cet enseignement[27]) on en déduit que $o(x^n)$ est le produit de x^n par une fonction évanescente en 0.

Dans ce cas, deux définitions sont possibles pour $o(x^n)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^n)}{x^n}=0 \qquad \text{ou} \qquad o(x^n)=x^n.eva$$

III. LA CHRONOLOGIE

1. Le premier partiel (P1)

A la fin de la première partie du deuxième semestre, les étudiants ont passé un partiel d'analyse qui comportait quatre exercices. L'énoncé de l'exercice 2 était le suivant :

Sachant que $\alpha=x+o(x)$, quels développements limités en 0 pouvez-vous en déduire pour les expressions suivantes : α^2 et $(1+\alpha)^2$?

Dans les séances de TD[28] qui ont suivi le partiel, les étudiants ont fait à leurs professeurs le retour suivant : ils n'ont pas donné ce qu'ils se sentaient capables de donner. Ils avancent deux raisons pour expliquer ce fait ; ils n'ont pas eu suffisamment de temps pour préparer ce partiel[29] et ils ont trouvé le sujet trop long. Ils disent aussi que ce n'est pas

---

[27] Pour plus d'information sur cet enseignement de MASS première année, conçu par Frédéric Pham, voir la brochure de la Commission Inter Irem Université (*L'expérience de Nice*, à paraître).

[28] TD : Travaux Dirigés, séances d'exercices en trois groupes de trente cinq étudiants.

[29] Ce qui est vrai, compte tenu de la charge de travail par ailleurs.

compatible avec le conseil donné par les professeurs selon lequel il est plus important de comprendre et d'aller au fond des choses que d'être rapide. Les professeurs, de leur côté, dans le cadre de ce programme expérimental articulé avec l'enseignement de l'économie, se sont engagés à envoyer en deuxième année des étudiants maîtrisant bien ces notions.

La correction du partiel se fait dans une séance de TD. A propos de l'exercice 2 sur les développements limités, le professeur dit :

- J'ai trouvé ces deux réponses dans vos copies :

Réponse 1 : $(1+\alpha)^2=1+2x+o(x)$

Réponse 2 : $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$

Il lance alors un débat en demandant :

- Est-ce que les deux réponses sont justes ? Qu'en pensez-vous ?

De façon unanime, les étudiants votent oui et expliquent :

- Oui, les deux réponses conviennent, cela dépend de l'ordre du développement limité ; comme il n'est pas précisé, on pouvait donner l'un ou l'autre, le premier résultat donne le développement limité à l'ordre 1, le deuxième donne le développement limité à l'ordre 2.

Les étudiants sont tous d'accord et il n'y a pas de débat. Le professeur, qui avait un peu anticipé cette éventualité à partir des réponses trouvées dans les copies, propose un contre-exemple :

Calculer $(1+\alpha)^2$ pour $\alpha=x+x^2$.

Après calcul, les étudiants obtiennent :

$$(1+x+x^2)^2=1+2x+3x^2+2x^3+x^4$$

soit, à l'ordre 1 : $1+2x+o(x)$,

et, à l'ordre 2 : $1+2x+3x^2+o(x^2)$,

ce qui infirme la deuxième réponse.

Les étudiants commentent :

- Bof ! si vous le dites, c'est faux, d'accord, le contre-exemple le prouve, mais je ne comprends pas pourquoi.

Ils acceptent que la deuxième réponse soit fausse, ils ne peuvent pas faire autrement, mais ils ne sont pas vraiment convaincus.

Le professeur :

- Vous y réfléchissez et nous en reparlerons à votre demande.

Ils ont l'habitude de ce type de commentaire et ils savent que le professeur n'ira pas plus loin dans ses explications, qu'ils n'en obtiendront plus que s'ils posent des questions.

Certains étudiants en ont reparlé en TD, beaucoup sont venus en discuter dans les bureaux des professeurs, certains plusieurs fois.

A la fin du TD, le professeur distribue à chacun la copie virtuelle[30] de l'épreuve. Voici l'extrait de la copie virtuelle correspondant à l'exercice 2 :

(II : 3½)

exercice 2 :

$\alpha = x + o(x)$

Developpements limités en $x = 0$:

$\Rightarrow \alpha^2 = (x + o(x))^2 = \cancel{x^2 + 2x \cdot o(x) + o(x^2)}$ $x^2 + o(x^2)$

$= (x + (\varepsilon_a \cdot x))^2 =$

$= x^2 + 2x^2 \cdot \varepsilon_a + (x \cdot \varepsilon_a)^2.$

$= x^2 + o(x^2).$

$\Rightarrow (1+\alpha)^2 = (1 + x + o(x))^2 = (1 + x + o(x))(1 + x + o(x)).$

$\cancel{= 1 + x + o(x) + x + x^2 + x \cdot o(x) + o(x) +}$

$(1 + x + \varepsilon_a \cdot x)(1 + x + \varepsilon_a \cdot x)$

$= 1 + x + \varepsilon_a \cdot x + x + x^2 \varepsilon_a + \varepsilon_a x^2 + \varepsilon_a x + \varepsilon_a x^2 + (\varepsilon_a \cdot x)^2.$

$= 1 + 2x + o(x)$ vrai

manque l'explications ~~un peu succinctes~~ mais le calcul avec les "εa" montre que l'étudiant a compris

2. Le deuxième partiel (P2)

Entre les deux partiels, les deux professeurs responsables de cet enseignement réfléchissent à l'idée d'interroger à nouveau les étudiants, dans un autre partiel, sur ce même programme d'analyse, pour améliorer les notes du premier partiel sur la base d'un réel travail de la part des étudiants.

Ce deuxième partiel est annoncé pendant le cours en amphithéâtre avec la consigne suivante : " Le prochain partiel sera facultatif, son but est de vous permettre d'améliorer vos notes, il portera sur le même programme, vous pourrez y gagner des points qui s'ajouteront à la note du premier partiel. Comment faire ? Inutile d'apprendre par cœur la copie virtuelle. Il faut faire mieux, certes, mais surtout vous devrez montrer que vous avez compris et que vous savez pourquoi. Vous devrez savoir faire les exercices demandés et expliquer en quoi, selon vous, votre compréhension s'est améliorée depuis le premier partiel et ce qui s'est passé pour vous entre les deux partiels ".

Les professeurs décident alors de poser exactement le même sujet, accompagné d'une consigne écrite qui reprend ce qui a été expliqué à tous les étudiants pendant un cours et qui a été redit plusieurs fois sous différentes formes à la demande des étudiants, un peu inquiets comme toujours.

La consigne écrite sur le recto du texte du partiel le jour de l'examen reprend celle qui a été expliquée en cours oralement.

DEUG MASS1, Mathématiques

Jeudi 17/5/2001 8h15 à 9H45

Documents et calculatrices interdits

Objectifs de l'épreuve : améliorer votre note du partiel du 12/4.

1er cas Vous êtes satisfait de votre note du partiel.

Au revoir !

2e cas Vous voulez montrer que vous maîtrisez les principales notions au programme du partiel, mieux que votre copie du 12/4 ne pourrait le laisser croire.

Prouvez-le nous en choisissant librement certains des exercices ou passages d'exercices sur lesquels vous pensez avoir fait des progrès importants.

Rédigez-en la solution.

Commentez votre évolution personnelle depuis le partiel (obstacles éventuels dont vous avez compris entre temps comment les franchir).

Les points supplémentaires seront attribués aux copies montrant un progrès substantiel par rapport à la copie du 12/4, et faisant preuve d'un vrai travail de réflexion.

Les étudiants savaient que ce partiel serait corrigé par les deux professeurs de façon indépendante, sans barème et en toute subjectivité et que les notes obtenues après addition des points gagnés seraient sans appel. Ils savaient aussi que les points supplémentaires seraient attribués sur les résultats mathématiques et sur la preuve d'une bonne compréhension de ces résultats. Rappelons qu'à Nice les copies de partiels et d'examens sont anonymes.

[30] La copie virtuelle est un montage de bonnes réponses d'étudiants accompagné de commentaires. Elle montre que chaque question était accessible puisqu'au moins un étudiant a su donner une réponse obtenant le maximum (ou plus) des points prévus par le barème.

IV. LES ORDRES DE CONNAISSANCE

1. Analyse de quelques copies de P2.

Entre P1 et P2, beaucoup d'étudiants ont appris la définition et la citent. On peut penser que ceci est induit par le commentaire du professeur sur la copie virtuelle. Pour certains on en reste là : la définition ne leur sert pas à travailler, la définition est citée pour la première question et pas pour la deuxième (alors que le plus souvent ils ont déjà fait la première question juste dans P1).

S. G.

Elle[31] connaît la définition, mais ne s'en sert pas pour justifier son résultat ; elle revient au contre exemple donné en TD.

Elle développe $(1+\alpha)^2$ et arrive à :

$1+2x+x^2+2xeva+2x^2eva+2x^2eva+x^2eva^2$

et conclut : $(1+\alpha)^2=1+2x+o(x)$.

Elle explique ce qu'elle fait :

En effet, dans cet exemple, on ne laisse pas la variable en x^2, car on n'est pas sûr de son coefficient (ce dernier n'est pas forcément égal à 1). Prenons un contre exemple afin de prouver ceci...

elle déroule alors le contre-exemple du TD de correction.

Donc cet exemple confirme bien qu'on ne puisse pas mettre le terme en x^2 dans le DL, fait que je n'avais pas bien compris lors du dernier partiel.

On peut se demander si ce qu'elle vient de faire pourra être réutilisé sur un autre exercice où ce contre exemple ne sera pas pertinent, mais nous n'en savons rien.

D'autres étudiants utilisent la définition pour faire des mathématiques, elle est un véritable outil pour résoudre la deuxième question de l'exercice.

A.B.

$(1 + \alpha)^2 = (1+ x + o(x))^2 = (1 + x + eva.x)^2 =$

$= 1 + 2x + 2eva.x + 2xeva.x + x^2 + x^2(eva)^2 = 1 + 2x + o(x)$

étant donné que :

$x.eva = o(x)$

$x^2 = x.eva = o(x)$

$x^2.eva = o(x^2) = o(x)$

Elle ne fait pas de commentaires, mais ses écritures prouvent qu'elle utilise la définition pour réécrire les expressions. Par opposition à **S.G.**, elle peut faire fonctionner la définition sur différents cas.

2. Les ordres de connaissance

Nous avons donc l'impression que certains étudiants ont appris l'énoncé de la définition et que d'autres ont appris quelque chose de plus qui est que la définition permet de répondre à la question.

Dans la théorie CESAME, nous avons introduit la notion *d'ordres de connaissance* qui permet de faire la distinction entre différentes connaissances.

En ce qui concerne les définitions, **une connaissance d'ordre I** est un énoncé tel que : " on appelle $o(x)$ toute fonction qui se présente sous la forme du produit de x par une fonction évanescente " ou " on appelle $o(x)$ toute fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ ".

Une connaissance d'ordre II fait référence aux règles du jeu mathématique ; elle indique qu'une " définition définit comme elle est censée définir ".

A quoi sert une définition en mathématiques ? Nous avons vu que les étudiants n'utilisent pas tous les définitions de la même façon. Certains les donnent, c'est tout, d'autres les donnent et les font travailler. Si, bien souvent, les étudiants n'apprennent pas les définitions précises et se fabriquent des règles d'usage approximatives[32], c'est bien parce qu'ils ne savent pas que les définitions doivent permettre de faire des mathématiques, en permettant de distinguer le vrai du faux par des raisons internes aux mathématiques.

[31] Dans le cadre du programme pour l'égalité des chances, nous avons décidé de décliner tous les exemples au féminin.

[32] Citons comme exemple de ces règles : En TD, un étudiant a dit, "je mets dans $o(x^2)$ ce que je ne connais pas, comme x^2 je le connais, je le garde ". Pour d'autres, on calcule sur la partie polynomiale du développement limité et selon son ordre (c'est-à-dire le degré du polynôme obtenu) on le termine par un $o(x)$ ou un $o(x^2)$.

Dire qu'une définition " définit comme elle est censée définir " signifie qu'une définition doit permettre de produire des résultats cohérents pour le sujet, partageables par l'ensemble du groupe social et efficaces d'un point de vue mathématique. Nous retrouvons ici les trois espaces de la triple approche (Léonard & Sackur 1991) et l'idée qu'un résultat exact est, nécessairement, à la fois cohérent, efficace et partagé sinon ce n'est pas un résultat mathématique.

Comparons ce qu'a fait **A.B.** dans les partiels P1 et P2 et voyons comment la définition lui permet de faire des mathématiques partagées, au sens de "on est obligé d'être tous d'accord".

Partiel 1. :

> $(1+\alpha)^2=1+2\alpha+o(\alpha)$
>
> *on remplace par la valeur de* α*, ça nous donne :*
>
> $(1+\alpha)^2=1+2(x+o(x))+o(x+o(x))=1+2x+o(x)$ *car tous les termes en* $o(x)$ *se regroupent.*

Partiel 2. :

> $(1+\alpha)^2 = (1+x+o(x))^2 = (1+x+eva.x)^2 =$
>
> $= 1 + 2x + 2eva.x + 2xeva.x + x^2 + x^2\,(eva)^2 = 1 + 2x + o(x)$
>
> *étant donné que :*
>
> $x.eva = o(x)$
>
> $x^2 = x.eva = o(x)$
>
> $x^2.eva^2 = o(x^2) = o(x)$
>
> $x^2.eva = o(x^2) = o(x)$

L'argument que donne **A.B.** dans le premier partiel est certes exact, mais il peut ne pas convaincre quelqu'un qui n'aurait pas bien compris la notion de *o(x)*. L'argument du deuxième partiel, au contraire, permet de convaincre.

3. Pour résumer notre propos

Nous venons de montrer, à propos de la définition, ce que sont une connaissance d'ordre I et une connaissance d'ordre II.

L'ordre I concerne les énoncés, axiomes, définitions, théorèmes.

L'ordre II est relatif aux connaissances qui font que les parties du discours mathématique fonctionnent comme elles sont censées fonctionner : les définitions définissent comme elles sont censées définir, les théorèmes établissent comme ils sont censés établir, les écritures dénotent ce qu'elles sont censées dénoter... Ces connaissances font ce qui fait que les mathématiques sont ce qu'elles sont censées être. Elles permettent, comme pour le principe de non-contradiction par exemple, aux règles du jeu mathématique de s'appliquer. Ainsi une des propriété importantes des énoncés mathématiques est leur caractère nécessaire ; nous avons déjà étudié cette connaissance d'ordre II et sa mise en œuvre en classe par des dispositifs spécifiques (Sackur & Maurel, 2000 et Maurel 2001).

L'ordre III fait référence aux croyances de ce que sont les mathématiques et l'activité mathématique. Le fait que les connaissances mathématiques soient socialement construites suppose une forme minimale d'accord sur ce que sont ces connaissances, sur ce qui fait qu'elles sont mathématiques ou non. Peut-être n'y a-t-il qu'une unique connaissance d'ordre III, à savoir que l'activité mathématique consiste à jouer avec des connaissances d'ordre I selon des règles du jeu d'ordre II. Un étudiant peut dire à un autre : "en algèbre, il n'y a rien à comprendre ", un professeur peut rendre sa copie à un étudiant et lui dire "non, ça, ce n'est pas des maths ". Ce n'est ni de l'ordre I, ni de l'ordre II ; nous disons que ce qui permet de tels énoncés ce sont les connaissances d'ordre III.

V. COMMENT LE DEUXIEME PARTIEL DEVIENT LE "PARTIEL REFLEXIF" ?

1. Les origines théoriques

Nous allons nous intéresser maintenant à la partie du travail CESAME qui permettait de savoir que ce dispositif déclencherait ce qu'il a déclenché. Deux axes de recherche sont particulièrement importants pour cette analyse, ce qui concerne la problématique du récit et ce qui concerne la posture réflexive. Nous en ferons un bref exposé avant de commenter quelques copies d'étudiants.

La problématique du récit

A partir des travaux de Ricœur (Ricœur, 1983), nous avons souligné l'importance, pour un élève, de l'inscription dans son expérience personnelle de l'histoire de ses connaissances (CESAME 1997). On peut l'aider à faire exister cette histoire grâce à des récits structurés par des indicateurs langagiers : " avant je pensais que..., j'ai appris que..., maintenant je pense (ou je sais) que... ". Cette 'mise en intrigue narrative', demandée en classe, réorganise pour le sujet son expérience et lui donne une signification dans l'ensemble de ses connaissances. L'intention didactique est de faire exister en classe les trois temps de l'apprentissage, le présent du passé, le présent du présent et le présent du futur. Ce type de récit permet alors de faire de ce temps vécu par les élèves en classe un temps raconté qui pourra être partagé (Assude et alii, 1998). La temporalité de ce temps vécu, raconté et partagé s'oppose à celle du temps didactique de l'avancement du programme.

La posture réflexive

La posture réflexive consiste à prendre pour objet d'étude un fait de sa propre pensée, de l'isoler pour pouvoir le décrire et l'étudier. Nous empruntons à la phénoménologie et à la psychophénoménologie[33] pour décrire et étudier l'expérience subjective. Il y a des connaissances implicites inscrites dans les actions des élèves, ces connaissances sont le plus souvent pré-réfléchies (Vermersch, 1994) au sens *de non encore portées à la conscience du sujet*. Il est possible de demander à des élèves de tourner leur attention vers ce qu'ils ont fait quand ils ont fait leur exercice comme ils l'ont fait le jour où ils l'ont fait et quand ils l'ont retravaillé ensuite. Cette injonction les oriente vers des actes de pensée qui, la plupart du temps, ne sont pas présents spontanément chez eux. Le but recherché est de faciliter des prises de conscience qui seront utiles pour l'activité mathématique présente et à venir. Cela peut se faire spontanément, mais *si vivre une expérience subjective est spontané, s'en souvenir et l'utiliser est une expertise*[34]. Ici, il s'agit de faire l'expérience de quelque chose pour avoir de l'expérience et pour se construire en même temps une identité d'étudiant en mathématiques. Ce que nous faisons, sans être sûrs de gagner à tous les coups, c'est que nous créons une situation d'accompagnement, de facilitation, où est possible, dans la classe, la création du souvenir en vue de son utilisation ultérieure, pour avoir de l'expérience en mathématiques, pour sortir du pré-réfléchi de ce vécu et le porter à la conscience réfléchie, pour en faire un souvenir conscient et mobilisable.

Dans la théorie CESAME, nous avons montré, à propos du caractère de nécessité des énoncés mathématiques, que le récit est lié à l'expérience[35]. Il la fait exister pour les élèves, pour certains d'entre eux au moins, sous une forme langagière et permet ensuite son institutionnalisation par le professeur, même pour les étudiants qui ne l'ont pas faite. Cette

[33] Vermersch P. (1996), Expliciter N° 13, Pour une psychophénoménologie, téléchargeable sur le site du GREX (www.grex-fr.net).
[34] Vermersch P., op. cité.

théorie prévoit donc que, pour faire émerger un certain type de connaissance, qui sera institutionnalisée ensuite, il faut que les étudiants en fassent l'expérience. Il faut donc qu'il se passe quelque chose pour eux, mais aussi qu'ils aient l'occasion de prendre conscience de ce qui s'est passé, c'est-à-dire que cette chose qui s'est passée soit recréée avec son déroulement temporel personnalisé[36].

Dans cette perspective, sur le plan pratique, nous utilisons dans nos dispositifs d'enseignement et de recherche les *narrations de recherche* telles qu'elles sont décrites dans les travaux de l'IREM de Montpellier (Sauter, 2000).

Sur un plan plus théorique, remarquons que Sensevy, dans son 'journal des fractions', mettait en place un dispositif qui tend vers ce même but d'introduire une temporalité personnelle et de mettre les élèves en situation de réfléchir sur leur activité mathématique (Sensevy, 1996).

2. Analyse du dispositif avec les outils de la théorie CESAME.

Pour les étudiants de MASS, se mettre en projet d'écrire quelque chose pendant P2, sous l'effet de la consigne, leur permet de se rendre compte qu'il y a eu des changements pour eux, de faire la différence entre : avant, un jour, maintenant. Le deuxième partiel, et la consigne qui l'accompagne, donne aux étudiants l'occasion d'écrire des récits de ce type dans lesquels ils vont s'informer et informer les correcteurs des progrès qu'ils ont faits et de la conscience qu'ils en ont. Nous pouvons donc prévoir, dans la préparation du deuxième partiel et dans sa passation, que certaines connaissances seront conscientisées par les étudiants, même si nous ne savons pas à propos de quelle connaissance cela va se passer.

Pour l'expérimentation sur le caractère de nécessité des énoncés mathématiques, nous avions créé un dispositif *ad hoc*. Ici, pour le deuxième partiel, cela s'est fait dans le feu de l'action des professeurs. Nous trouvons des traces de connaissance d'ordre II sur la définition dans les copies de P2 parce que l'enseignement a été anticipé avec la théorie CESAME comme fil directeur et parce que nous avons des outils théoriques pour en voir les traces écrites.

---

[35] Au sens de "vécu". L'anglais est une langue commode pour exprimer cette idée dans la mesure où il fait la différence entre "to experience" et "to experiment". Il ne faut pas confondre ces deux sens des mots 'faire l'expérience' avec l'expression 'avoir de l'expérience' telle qu'on l'utilise dans la langue courante.

[36] Comme le dit Jérôme Bruner dans son ouvrage " Car la culture donne forme à l'esprit " : les histoires n'arrivent qu'à ceux qui savent les raconter.

Une fois que nous avons identifié les conditions pour que puisse émerger, à travers expérience et récit, la connaissance d'ordre II, nous pouvons préparer un dispositif expérimental sur cette connaissance et étudier comment l'institutionnaliser.

3. La consigne, rappel du contrat général

La consigne de P2 n'est pas vraiment une nouveauté pour les étudiants. Les étudiants ont fait ce travail réflexif parce qu'ils savaient le faire, ils avaient eu l'occasion de s'y entraîner. Pendant le premier semestre, ils ont suivi un enseignement dit de 'Raisonnement Scientifique'[37] où il leur était demandé, à la fin de chaque séance, de faire un compte-rendu de la séance du point de vue de *ce qui s'était passé d'important pour eux.* Ces comptes-rendus annotés leur étaient ensuite rendus. L'évaluation de cet enseignement s'est faite de la même manière, avec un mémoire où ils devaient exposer ce qu'ils avaient appris en mathématiques mais surtout ce qu'ils avaient appris de leur façon de faire des mathématiques. Ce travail les a conduits à mettre en place une activité de pensée qui ne leur était à l'origine ni familière, ni spontanée. Le contrat didactique qui a géré l'ensemble des enseignements de cette première année a permis la mise en place progressive d'un travail réflexif et la production d'écrits sur ce travail.

La consigne de P2 est volontairement vague. Notre expérience de chercheurs et des études théoriques[38] nous ont montré qu'une consigne trop précise entraîne soit une résistance du sujet, soit des réponses qui ne sont pas fiables. Celui-ci risque de se sentir contraint dans un cadre qui n'est pas forcément le sien et dans lequel il risque de donner la réponse qu'il croit que le professeur attend. Ainsi, si on demande : " qu'avez-vous appris sur les relations entre $o(x)$ et $o(x^2)$? ", on n'obtiendra pas forcément la découverte faite par certains que x^2 est un $o(x)$. Mais si on demande : " Est-ce que x^2 est un $o(x)$? ", on risque fort d'induire des réponses qui ne correspondent pas à la réalité de la réflexion des étudiants.

Le caractère ouvert ne signifie pas pour autant que ce dispositif est analogue à un questionnaire très ouvert où tout ce qui est dit est intéressant à prendre. Il s'agit bien ici d'un dispositif d'enseignement qui se donne pour objectif de guider l'activité de pensée des étudiants. La dévolution de ce travail réflexif n'est pas triviale. Il faut que les étudiants soient preneurs. Dans le cadre de P2, les professeurs les intéressent par leur proposition d'améliorer

[37] Voir brochure de la Commission Inter Irem Université (*L'expérience de Nice,* à paraître).
[38] En particulier celles menées au sein du GREX (Groupe de Recherche sur l'Explicitation).

les notes, les étudiants font par contrat le travail réflexif et ce faisant, ils font des mathématiques, à l'ordre I et à l'ordre II.

Que pouvons-nous dire très globalement des résultats du deuxième partiel ? Les étudiants ont manifesté leur satisfaction d'avoir eu l'occasion de bien faire et d'améliorer leurs notes, ce qui était important pour eux ; les professeurs, de leur côté, ont constaté que les étudiants avaient travaillé, qu'ils s'étaient posé des questions intéressantes et qu'ils avaient fait sur leur copie des commentaires prouvant un réel travail de compréhension. Ce sont certains de ces commentaires que nous analysons maintenant.

4. Analyse de quelques réponses d'étudiants

Dans ces copies, nous trouvons des indices de travail en compréhension (Sackur & al. 1997) effectué grâce au retour au texte mathématique et aux définitions. Non seulement ils appliquent des règles mais ils donnent leurs raisons d'appliquer ces règles. Nous y trouvons aussi des traces de temporalité.

J.T.

Dans P2, l'étudiante fait le calcul exact puis donne des arguments pour expliquer sa certitude. Après son calcul, elle écrit :

Or on peut montrer qu'un $o(x^2)$ est *un* $o(x)$,

$o(x^2)=x^2.eva$

$=x.x.eva$

$=x.eva$

$=o(x)$

mais il est impossible de montrer qu'un $o(x)$ *est un* $o(x^2)$, *car c'est faux.*

O.M.

Pour cet exercice aussi[39], *je pense avoir fait des progrès : en effet, lors du dernier partiel, j'ai appliqué la formule de Taylor sans réfléchir, alors que cela me donnait des résultats monstrueux. Depuis, j'ai appris à me servir d'autres formules, comme la substitution par exemple.*

Plus loin : *Ce qui est pratique avec les DL, c'est qu'on peut les intégrer.*

[39] Ce commentaire concerne l'exercice 3 du partiel, exercice que nous n'analysons pas ici.

Elle critique ce qu'elle a fait dans son apprentissage : elle avait retenu une méthode qu'elle pensait universelle (la méthode de Taylor). Elle découvre l'intérêt d'autres méthodes qui ne l'avaient pas intéressée lorsqu'elles ont été traitées en cours. Ainsi, elle réorganise son expérience personnelle et elle prend conscience du fait qu'elle sait plus de choses et des choses qui lui seront utiles. Son commentaire a une forme de récit avec des indicateurs langagiers de temporalité : " *Lors du dernier partiel ..., depuis...*"

S-H.B.

On trouve ici d'autres indicateurs langagiers : " *Au départ..., maintenant...* "

> *Au départ, je pensais que comme le développement limité de α était à l'ordre 1, il fallait faire des développements limités à l'ordre 1 pour α^2 et pour $(1+\alpha)^2$. Je comprends maintenant que la question n'a plus beaucoup de sens s'il s'agit de faire seulement ça, et que ce qui est intéressant ici est de voir jusqu'à quel ordre on peut pousser le développement limité.*

A.L.

Chez cette étudiante, nous trouvons les trois temps : " *Lors du premier partiel..., jusqu'à ce que..., Dès lors...* "

> *Lors du premier partiel, je ne faisais pas trop le rapprochement, et j'avais du mal à mettre en relation les o(x) et les eva. Jusqu'à ce que j'apprenne que o(x) = eva.x. Dès lors, je sus dérouler les développements limités de base.*

M.W.

M.W. revit son expérience comme si elle y était :

> *C'est pour la deuxième expression que j'ai eu des problèmes. J'ai fait un développement correct, j'ai obtenu :*
>
> $(1 + \alpha)^2 = (1 + x + o(x))^2 = (1 + x)^2 + 2(1 + x)o(x) + (o(x))^2 =$
>
> $= 1 + 2x + x^2 + 2o(x) + 2xo(x) + (o(x))^2$
>
> *A ce moment là, je me suis dit : on ne m'a pas demandé le DL à un ordre précis, je trouve des termes en x^2, alors je vais faire ce DL à l'ordre 2. Ce qui ne s'est pas avéré très judicieux* (suivent des explications et le résultat exact*). Je pense maintenant avoir cerné le raisonnement de ce type d'exercice.*

VI. Le lien avec l'institutionnalisation

Nous venons de décrire un dispositif qui propose aux étudiants de se mettre en position réflexive et qui permet à certains de retrouver le déroulement temporel de leur apprentissage. Nous avons montré que ce dispositif a fait émerger une connaissance d'ordre II, qu'il faut maintenant institutionnaliser. Il est très difficile d'institutionnaliser ces connaissances, dans la mesure où un simple discours du professeur ne peut évidemment pas suffire. Pour ce faire, nous proposons de mettre les étudiants en situation de vivre une expérience : autrui et la réalité mathématique fournissent les rétroactions nécessaires à l'établissement du vrai et du faux, et l'expérience vécue se prête à un retour réflexif ; le sujet peut s'arrêter pour regarder ce qu'il a fait, mettre à jour les connaissances inscrites dans ces actions et retenir l'histoire de ce qui s'est passé. C'est bien ce qu'ont fait les étudiants entre P1 et P2, nous en avons montré des traces dans leurs copies.

Le couple (copie virtuelle, partiel réflexif) a fait émerger la connaissance d'ordre II pour un grand nombre d'étudiants. Une fois qu'elle a émergé, le maître peut l'institutionnaliser. Ce dispositif permet d'envisager l'extension de la notion de milieu. Le couple (copie virtuelle, partiel réflexif) constituerait alors un milieu pour une connaissance d'ordre II sur la définition.

Ce travail n'était pas un travail expérimental. Le cours d'analyse était terminé après P2, la suite de l'enseignement étant consacré à l'algèbre linéaire. Mais on peut imaginer à partir de là un dispositif didactique pour l'enseignement de cette connaissance : P1, copie virtuelle, P2, et débat en classe suivi de l'institutionnalisation de deux connaissances, l'une d'ordre I, la définition de $o(x)$ entre autres, et l'autre d'ordre II : " une définition définit comme elle est censée définir et c'est utile pour faire des mathématiques qui soient des mathématiques ".

VII. Conclusion

Tout le monde sait qu'une définition définit et qu'en mathématique il y a des définitions et qu'il faut les connaître pour faire des mathématiques. Or nous constatons que la grande majorité des étudiants ne connaît pas l'énoncé exact des définitions et ne s'en servent pas de façon explicite ni même de façon implicite. Dans P1, 65 étudiants ont répondu à l'exercice, 6 donnent une définition du type $o(x^n)=x^n.eva$ et 3 donnent une réponse exacte, pas forcément en utilisant explicitement la définition. Dans P2, 60 étudiants ont refait l'exercice, 50 donnent une définition et, ainsi que nous l'avons montré, nous avons pu différencier leurs réponses. La nature des explications données en P2 montre que certains étudiants ont appris quelque chose sur la définition au-delà de son énoncé pur et simple.

Qu'est-ce qu'apporte le modèle des ordres de connaissances ? Si nous restons dans l'ordre I, nous pouvons nous tromper sur ce qui pose problème aux étudiants. Nous apportons des réponses inadaptées, et nous leur apportons des aides qui ne les aident pas. La modélisation qui distingue les connaissances d'ordre I de celles d'ordre II permet de comprendre que les connaissances d'ordre I ne sont pas les seules à acquérir pour faire des mathématiques. Nous identifions clairement ici d'autres connaissances indispensables pour faire des mathématiques et nous pouvons dès lors réfléchir à des situations qui permettront de les faire émerger et ensuite de les institutionnaliser.

Après notre travail sur le caractère nécessaire des énoncés mathématiques, le travail que nous venons de présenter est un deuxième exemple de l'utilisation de ce modèle.

BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T., SACKUR C. & MAUREL M. (1998): CESAME: The Personal History of Learning Mathematics In the Classroom. An Analysis of Some Students Narratives, in I. Schwank (Ed.), European Research in Mathematics Education I (texte repris dans PoME 11, http://www.ex.ac.uk/~PErnest/).

CESAME (1997), Présentation de travaux. *Actes de la IXème École d'Été de Didactique des Mathématiques,* Houlgate, 70-75.

LEONARD F. & SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 10(2/3) 205-240.

MAUREL M. (2001), Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-IREM* 42 83-114

RICŒUR P. (1983), *Temps et Récit.* Seuil

SACKUR C. & MAUREL M. (2000), Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x*53 5-26.

SACKUR C., DROUHARD J-PH., MAUREL M. & PECAL M. (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire?, *Repères-IREM.* 28 37-68.

SAUTER M. (2000), Formation de l'esprit scientifique par les narrations de recherche au collège. *Repères-IREM.* 39 7-20.

SENSEVY G. (1996), Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 16/1 7-46.

VERMERSCH P. (1994), *L'entretien d'explicitation*, Paris, ESF.