***R**ECONNAITRE INSTITUTIONNELLEMENT CERTAINES CONNAISSANCES SUR LE FONCTIONNEMENT MATHEMATIQUE COMME DES ENJEUX D'APPRENTISSAGE POUR LES ELEVES ?*

Corine Castela

Équipe Didirem (Paris) et IUFM de Haute-Normandie

L'objectif de cet exposé n'est pas de répondre à la question posée en titre – dans l'état actuel de mon travail je ne le pourrai pas – mais d'en préciser le sens et d'évoquer très succinctement dans quelles directions je me propose de travailler au plan empirique pour étudier le problème didactique que j'aurai défini.

I. PRESENTATION DU PROJET DE RECHERCHE

1. Les origines de la recherche

Le travail que j'ai entrepris s'inscrit dans le cadre des recherches sur la résolution de problèmes en mathématiques. Plusieurs observations réalisées à des niveaux différents d'enseignement m'ont conduite à considérer que la question de l'acquisition des connaissances en jeu dans la résolution de problèmes constitue encore, malgré les travaux déjà réalisés, une question vive pour la didactique des maths.

De quelles observations s'agit-il ? Quelles questions soulèvent-elles ?

* Premier domaine d'observation : la préparation à la deuxième épreuve orale du Capes, épreuve dite sur dossier, officiellement considérée comme ayant un caractère professionnel. Rappelons qu'il s'agit pour le candidat de constituer une liste d'exercices de niveau Enseignement Secondaire illustrant un thème donné puis d'exposer au jury les motivations du choix effectué. Sauf exceptions très rares, les thèmes sont centrés sur un type de problèmes, éventuellement croisé avec un concept considéré dans sa dimension outil. De nombreux formateurs ont, je pense, été confrontés comme moi aux difficultés des étudiants

face à cette épreuve, tout particulièrement au niveau de l'explicitation des motivations du choix. La nature de cette épreuve comme les observations évoquées rapidement ici soulèvent plusieurs questions dont certaines sont dans la perspective de la réforme du Capes, tout à fait d'actualité :

A quelles attentes de l'institution « Education Nationale » cette épreuve correspond-elle ? Quelles sont les connaissances qui y sont en jeu ? Pourquoi sont-elles, au moins implicitement, considérées comme nécessaires pour les enseignants ? Pourquoi font-elles défaut à une proportion élevée d'étudiants licenciés ?

* Le deuxième domaine d'observation que j'aborderai s'inscrit toujours dans le cadre de la préparation au Capes[19] ; dans un module centré sur les savoirs de géométrie figurant au programme des lycées, je constate depuis des années que, malgré une révision préalable des savoirs en question, les étudiants éprouvent de très grandes difficultés à les utiliser de manière autonome dans des problèmes non guidés dont on trouve l'équivalent dans certaines questions des problèmes de l'écrit du Capes centrés sur la géométrie (Castela et Eberhard 1999).

En quels termes analyser cet écart entre la connaissance du savoir savant en jeu et sa mise en fonctionnement dans un problème « brut » ? Comment préparer les étudiants à traiter de telles questions dans le contexte d'une épreuve écrite de concours ?

* On pourrait penser que ce questionnement est tout à fait spécifique de l'enseignement supérieur. Or, en tant que chercheur (mais de manière encore trop peu systématique pour prétendre en tirer des résultats), j'ai analysé un certain nombre d'énoncés de problèmes ou d'exercices à l'aide de la grille d'analyse élaborée par Aline Robert, grille centrée sur les différents niveaux de mise en fonctionnement d'une connaissance (voir Pian 1999 p. 9 ; Robert 1997 p.165-166) ; j'ai relevé le fait suivant qui ne devrait étonner personne mais dont la portée est peut-être sous-estimée : dans un énoncé de niveau n, centré sur un objet sensible, apparaissent des sous-tâches non guidées nécessitant que l'élève mobilise seul des connaissances portant sur des objets d'enseignement des années précédentes supposés non sensibles (avec la terminologie d'Aline Robert, on reconnaît la notion de connaissances disponibles, ce fait pourrait également être formulé en utilisant les notions de milieu et de

[19] Capes : concours de recrutement des professeurs intervenant dans le second degré.

topos de la théorie anthropologique). Or, c'est une expérience largement partagée, me semble-t-il, par les enseignants de lycée, que, pour de nombreux élèves, le passage à la mise en fonctionnement autonome des connaissances soit un cap difficile à franchir.

Est-il possible d'apporter sur ce point une aide, sinon aux élèves vraiment faibles, du moins à une partie des élèves fragiles ? Par quels dispositifs ?

Ces observations, ces questions m'ont conduite à formuler un certain nombre d'interprétations, de réponses, qui à la fois motivent le projet de recherche et orientent la définition de la problématique. Quelles sont-elles ?

- En premier lieu, j'interprète les difficultés rencontrées par les élèves et les étudiants dans la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques en principe non sensibles en termes de manque, manque de certaines connaissances « parallèles » qui ne relèvent pas toutes, loin de là, du savoir savant.

- Dans les années antérieures, ces connaissances « parallèles » n'ont majoritairement pas été objets d'enseignement ; néanmoins, les exercices et problèmes proposés par l'enseignant ainsi que (surtout dans l'enseignement supérieur) les démonstrations du cours ont permis à certains élèves de construire certaines de ces connaissances.

- Les connaissances que ces élèves sont susceptibles de construire sont très dépendantes du corpus des problèmes choisis par l'enseignant. L'absence d'explicitation institutionnelle de ces enjeux d'apprentissage peut être source d'une grande variabilité d'un enseignant à l'autre, d'une classe à l'autre ; ainsi peuvent s'ouvrir des vides, des discontinuités au sein de ce que l'on peut considérer comme un curriculum caché.

- Par ailleurs, d'autres élèves ignorent la fonction cachée d'apprentissage des tâches mathématiques auxquelles ils sont confrontés ou en perçoivent mal le contenu et échouent à y satisfaire par leur travail personnel (on rejoint ici l'idée avancée par plusieurs sociologues d'une inégale efficacité du travail personnel des lycéens, avec des différenciations selon l'origine sociale, voir Bautier 1995, Barrère 1997).

L'hypothèse selon laquelle il existe un curriculum caché et cependant nécessaire au déroulement du curriculum affiché, discontinu, très instable suivant les enseignants et ignoré d'une partie des élèves, me conduit à vouloir étudier la possibilité de faire émerger en tant qu'enjeu d'apprentissage institutionnellement reconnu une partie au moins des connaissances en jeu.

2. La problématique de la recherche

Précisons d'abord quelques éléments qui définissent le cadrage général de la réflexion. Je considèrerai l'enseignement de mathématiques dans sa dimension « formation à une pratique, la résolution de problèmes ». Il ne s'agit pas bien entendu d'adopter la perspective d'une formation ciblée qui se contenterait de chercher à rendre les élèves systématiquement capables de résoudre certaines catégories précises de problèmes pour lesquelles ils devraient posséder des méthodes de résolution assurément efficaces. Une telle approche aurait pour conséquence de rendre très difficile, sinon impossible, l'usage didactique que nous attribuons à la résolution de problèmes dans la construction des connaissances. Celui-ci nécessite que soit préservée la dimension créative, la part d'incertitude de la recherche d'un problème, j'y suis attentive. Mes hypothèses sont les suivantes : **à partir du lycée au moins**, premièrement certaines des connaissances que je vais définir dans la suite doivent être acquises pour que dans les problèmes posés à un niveau donné la partie de création soit raisonnablement accessible et deuxièmement la possession de ces connaissances ne réduit pas à néant la dimension recherche des problèmes qu'il est possible de poser au niveau considéré.

Le point de vue « Formation à une pratique » me conduit à m'intéresser à des connaissances spécifiques, qui sont prises en compte dans plusieurs domaines de recherche sous une dénomination assez variable, connaissances **opérationnelles** (ergonomie cognitive, voir par exemple le numéro 123 *d'Education permanente,* 1995-2) ou **pragmatiques** (par ex, F.Conne 1992). Ces connaissances sont **orientées vers l'action**, leur critère de validation est **l'efficacité** en situation (et non l'effectivité, assurance de réussite en un nombre fini de pas), elles vivent en général sous le régime du **souvent**. Elles se différencient donc nettement du savoir savant mathématique, validé sur un critère de **vérité** établi de manière interne, placé sous le régime du **toujours/jamais.**

Est-il possible de faire vivre ces deux systèmes de connaissances dans la même institution d'enseignement sans que l'un pervertisse l'autre ? Cette question est un élément central de la problématique que je définis ici, elle constitue certainement un point de débat dans la communauté des didacticiens français des mathématiques : chacun connaît par exemple la position de G.Brousseau sur ce sujet pour les connaissances heuristiques : « Les indications de type heuristique seront demandées, données et reçues au sein d'un malentendu, suggestions incertaines pour l'un, connaissances comparables aux algorithmes pour l'autre »

(Brousseau 1986, p.61). J'expliquerai un peu plus loin (III.1.), quand j'aurai défini le domaine particulier de connaissances en jeu, sur quelles bases je pense possible d'instaurer, à partir d'un certain niveau d'enseignement au moins, un contrat didactique spécifique des connaissances opérationnelles. Rappelons dès maintenant que les expérimentations menées par A.Schoenfeld aux Etats Unis (1985), I.Tenaud en France (1991) plaident en faveur de cette hypothèse.

Dans ce cadre général, **la problématique de la recherche** est la suivante :

A. Définir un domaine de connaissances

- qui soient susceptibles d'outiller efficacement la résolution de problèmes et en particulier de favoriser la mise en fonctionnement des connaissances strictement mathématiques,

et

- qui vérifient certaines conditions a priori favorables à l'émergence officielle des connaissances en question en tant qu'enjeux d'apprentissage au sein de l'enseignement de mathématiques, ce que je traduirai de la façon suivante :

  * **du point de vue cognitif** : l'objet de ces connaissances, du fait de son mode d'existence, est accessible au sujet cognitif selon des voies indisponibles lorsque l'objet est une pratique.
  * **du point de vue institutionnel** : ce domaine de connaissances est explicitement présent dans certaines institutions de la recherche mathématique et peut donc être reconnu par la communauté des mathématiciens comme dotées d'une légitimité.

Ce domaine de connaissances étant défini, il s'agit alors

B. d'étudier sous quelles formes il vit dans le système d'enseignement post-obligatoire actuel,

C. d'expérimenter des dispositifs faisant officiellement apparaître une partie de ces connaissances en tant qu'enjeu d'apprentissage pour les élèves dans le cadre de l'enseignement de mathématique ou pour le moins dans des systèmes didactiques institutionnels relevant de l'Education Nationale ; l'effet recherché dans ces dispositifs est l'amélioration des capacités des élèves à mobiliser de manière autonome leurs connaissances en situation de résolution de problèmes.

II. ANALYSE DU DOMAINE DE CONNAISSANCES CONSIDERE

1. Une première définition, exemples et contre-exemples

Puisqu'il s'agit de former à la résolution de problèmes en mathématiques, je m'intéresserai aux connaissances qui ont pour objet cette pratique, en me restreignant à celles qui peuvent être construites à partir des produits finis de la pratique considérée, autrement dit, je considèrerai en première approximation comme objets de connaissance les problèmes résolus et les textes qui expriment une réponse considérée comme mathématiquement valide aux questions énoncées dans le problème, ce que j'appellerai des textes de solutions (le terme « solution » étant distingué de « résolution » réservé à la pratique de recherche d'un problème). Ces solutions sont acceptées dans une institution donnée (recherche, classe d'un niveau donné) et dépendent des savoirs reconnus dans cette institution. Les connaissances susceptibles d'être construites à partir de ces textes sont donc directement conditionnés par l'environnement institutionnel. Les exemples présentés ci-dessous illustreront cette remarque. Pourquoi focaliser la réflexion sur ces connaissances précisément ? Je donnerai des éléments de réponse à cette question dans la suite, précisons dès maintenant qu'il s'agit de prendre en compte la deuxième condition énoncée dans le point A ci-dessus, sur les plans cognitif et institutionnel.

a) Exemples des connaissances considérées :

- Fonction « outil » d'un objet mathématique

Il s'agit là d'une catégorie bien connue de connaissances dont les exemples sont nombreux au sein même du texte du savoir savant, je passerai donc rapidement :

* Grâce à la multiplicité de ses expressions ainsi qu'à sa bilinéarité, le produit scalaire est un outil possible pour le calcul de longueurs et d'angles, pour démontrer une orthogonalité...

- Techniques (méthodes)

* Pour démontrer une égalité A = B, on peut partir de A et arriver à B, partir de B et arriver à A, transformer à la fois A et B en un même C, montrer que la différence est inférieure à tout nombre réel positif...

* Pour calculer une longueur, on peut dans certains cas utiliser le théorème de Thalès (si parmi les objets du problème figurent des droites parallèles), le théorème de Pythagore (si on dispose d'hypothèses d'orthogonalité)... Ces connaissances peuvent

amener à mobiliser le théorème de Thalès ou de Pythagore, à extraire une sous-figure de la configuration, voire à introduire des éléments nouveaux.

* Pour démontrer que trois droites sont concourantes, on peut introduire le point d'intersection de deux d'entre elles et montrer qu'il appartient à la troisième ou montrer qu'un point appartient aux trois droites ou ... Ceci peut conduire, pour le concours des hauteurs d'un triangle par exemple, à substituer à un problème de concours un problème d'alignement puis d'orthogonalité et à mobiliser le produit scalaire.

Mais aussi

* Dans le théorème de Ménélaüs, une solution utilise la partie directe pour démontrer la réciproque, cette démarche fonctionne car il y a unicité du point divisant un segment dans un rapport donné.

Par cet exemple, je tiens à marquer l'importance de connaissances construites à partir d'un exemple précis, que l'on va dans un premier temps hésiter à retenir comme techniques mais qui semblent trouver une place non négligeable chez de très bons étudiants de Mathématiques Spéciales sous la dénomination « **Astuces** »[20] : une astuce est une façon de faire dont la généralité n'est pas établie mais qui s'est révélée au moins une fois suffisamment habile pour qu'on ait envie de la retenir, au moins provisoirement, une astuce est un espoir de technique.

Donnons maintenant quelques exemples de connaissances que je considère comme exclues du domaine auquel je veux restreindre la recherche.

b) Contre-exemples

Voilà quelques contre-exemples :

* Dans un problème de construction géométrique, pour construire une figure d'étude dans une phase d'analyse, on peut modifier l'ordre d'introduction des objets imposé par le problème.

* Pour établir une conjecture, on peut regarder des cas particuliers, des cas limites.

* Pour repérer une erreur dans le traitement d'une équation, on peut vérifier si le nombre que l'on a trouvé satisfait à l'équation posée.

* Pendant la recherche d'un problème, il est préférable de s'arrêter régulièrement pour voir l'état d'avancement du travail ; si on est bloqué, on peut faire le bilan des hypothèses déjà utilisées.

Comme on le voit, ces contre-exemples sont des connaissances heuristiques, elles concernent le déroulement de la résolution, l'activité du chercheur, il n'est pas possible de les construire à partir de la seule solution écrite, **sauf si la façon de trouver est aussi la façon de prouver** comme c'est par exemple le cas de la phase d'analyse dans le raisonnement par analyse-synthèse dans le cas où il s'agit de trouver toutes les solutions d'un problème de construction.

D'autres connaissances ne relèvent pas du domaine envisagé ici, citons : les connaissances spatiales étudiées par M-H Salin et R. Berthelot (1992), les connaissances en jeu dans l'énumération (J.Briand,1993), dans le raisonnement (Pilar Orus Baguéna, 1992) ; par contre, pour reprendre le travail de J.Briand, « dans un problème de dénombrement, représenter bijectivement l'ensemble à dénombrer par un ensemble plus facile à compter », est une connaissance sur les solutions de problèmes de dénombrement, c'est la base de la démarche de modélisation par un univers qui apparaît explicitement à partir d'un certain niveau.

2. Les spécificités de l'accès aux textes de solutions. Deuxième définition du domaine de connaissances : les connaissances sur le fonctionnement mathématique.

Venons maintenant aux raisons qui président au choix de restreindre la recherche aux connaissances concernant les problèmes et les textes de leurs solutions. La première réside dans l'hypothèse suivante : ces connaissances vivent officiellement dans certains dispositifs au sein de la communauté des mathématiciens et jouent un rôle dans le développement des mathématiques, ce qui peut conférer une certaine légitimité à leur prise en compte dans l'enseignement. Je ne développerai pas ce point dans le cadre de cet exposé (voir Castela 2000 pour plus de précisions), me contentant (avec beaucoup de légèreté, je le reconnais) d'invoquer pour appuyer ma position les développements qu'Y.Chevallard consacre à la notion de praxéologies mathématiques (voir par exemple les cours d'Y.Chevallard aux écoles d'été de 1995 et 2001).

La seconde raison se situe au plan cognitif et concerne la construction des connaissances considérées dont la spécificité, par rapport aux connaissances sur la pratique en général, tient au mode d'existence écrit des objets en jeu. Je vais m'intéresser aux ressources

[20] Cette allusion réfère à un travail que j'ai consacré aux objets du travail personnel en mathématiques dans l'enseignement post-baccalauréat (classes préparatoires, université) à paraître dans les cahiers de Didirem.

dont dispose un sujet qui veut connaître un texte de solution, sujet qui peut occuper deux positions, chercheur-rédacteur ou lecteur [une troisième posture est éventuellement possible : rédacteur seul], par comparaison aux deux postures possibles par rapport à une pratique, acteur ou observateur. Je m'appuie ici sur les analyses que Raymond Duval (1998) a consacrées aux modes d'expression écrite et orale (je transfère aux pratiques les éléments appliqués au mode d'expression orale, il est clair que dans le cas de la résolution de problèmes, ce transfert ne conserve pas l'intégralité des propriétés en question du fait de la forte dimension écrite de l'activité mathématique).

La première de ces facilités de connaissance est liée à la propriété suivante : un écrit est à chaque instant présent dans son intégralité (**simultanéité** qui s'oppose à la **séquentialité**), ceci permet à qui veut le connaître tous les arrêts, tous les retours en arrière et tous les délais nécessaires à la réflexion (**intermittence** : possibilité de différer l'appréhension de ce qui suit, opposé à la **fluence** du discours oral). L'acteur ou l'observateur d'une pratique ne dispose pas de ces ressources puisqu'une partie au moins des actes accomplis s'évanouit à mesure que l'action progresse. Remarquons cependant que dans le cas de la résolution de problèmes, la fluence est partielle : pendant la résolution, les traces écrites sont nombreuses et essentielles puisque opératoires, elles permettent à celui qui cherche une certaine auto-interaction avec ses actes, avec ses pensées objectivées par l'écrit. Il s'agit là d'un élément particulièrement favorable au contrôle et à la régulation de l'action.

Quoiqu'il en soit, la simultanéité de l'écrit ouvre des possibilités qui me paraissent propices à la construction de connaissances, ces facilités sont disponibles tant aux lecteurs qu'à l'auteur de la solution. Ceci ne veut pas dire que les deux positions sont équivalentes. Selon le point de vue adopté en didactique sur l'apprentissage, l'inventeur d'une solution est dans une position a priori plus favorable puisqu'il a lui-même dans le cours de la résolution pris les initiatives efficaces, j'ajouterai que le travail de rédaction finale est pour lui une occasion privilégiée de nouer un rapport réflexif avec ses propres créations.

Les caractéristiques que je viens de rappeler s'appliquent à l'ensemble des écrits, ce n'est pas le cas des éléments que je vais aborder maintenant lesquels sont plus spécifiques des textes mathématiques, ils offrent au lecteur un deuxième niveau de ressources favorables à l'étude. Je les résumerai de la façon suivante : **effacement de l'auteur, interaction directe du lecteur avec le monde mathématique**.

Je m'explique : lorsqu'il écrit un texte de solution, l'auteur s'efforce de supprimer toute référence personnelle c'est-à-dire qu'il s'applique à délivrer au public cible un contenu précis que les lecteurs pourront déterminer en étudiant le texte à partir des seules connaissances mathématiques qu'ils sont supposés posséder, sans recourir à une quelconque connaissance de l'auteur lui-même (ceci n'est pas nécessairement vrai pour les textes d'élèves ni pour les travaux de chercheurs réputés, du moins dans les premiers niveaux de la communication entre mathématiciens). Le lecteur d'une solution n'est donc pas confronté comme l'est l'observateur d'une pratique à la **médiation d'autrui**, avec l'inévitable **opacité** de l'objet étudié qui en résulte[21]. En mathématiques, il l'est d'autant moins que contrairement à d'autres textes scientifiques, un texte de solution non seulement évoque le réel de référence mais en fait il le convoque, jeu de mots qu'il faut comprendre dans le sens suivant : le lecteur d'un texte de solution par ses connaissances mathématiques établit un rapport personnel direct avec les objets mathématiques qui lui sont présentés dans le texte sous couvert de leurs représentations symboliques, il est en situation d'agir sur ce réel autant que l'auteur du texte l'a été, la **prédominance de la littéralité** dont parle R.Duval atteint en mathématiques un paroxysme que l'on ne retrouve pas dans d'autres sciences.

Ces différents éléments me conduisent à proposer une deuxième caractérisation des connaissances envisagées : à travers la production mais aussi l'étude de textes de solutions peuvent se construire des rapports de connaissance avec un objet que j'appellerai **le fonctionnement mathématique** et que je définirai de la façon suivante : c'est l'ensemble des modalités d'intervention des différents objets mathématiques dans les solutions de problèmes ou sous une forme qui me paraît finalement préférable car plus symétrique : **l'ensemble des rapports entre les objets mathématiques et les problèmes mathématiques.** C'est donc finalement **aux connaissances sur le fonctionnement mathématique** et à leur transposition au niveau scolaire que je restreindrai mon travail.

[21] V.Durand-Guerrier a contesté ce point de vue pendant les débats qui ont suivi mon exposé : ses travaux la conduisent à relativiser la dimension « effacement de l'auteur », certains textes de mathématiciens fonctionnant sur un ensemble d'implicites important qui constitue pour un public d'étudiants par exemple un obstacle à la rencontre personnelle avec les objets mathématiques évoqués. Si j'ai bien compris ses objections, elles ne me semblent pas contradictoires avec mes analyses dans la mesure où je considère que l'auteur ne s'efface que pour un public cible qu'il s'est donné, caractérisé par un certain corps de connaissances. Peut-il en être autrement : la réalité du monde mathématique ne saurait être conçue indépendamment des connaissances que doivent posséder les membres d'une certaine communauté pour que les objets mathématiques accèdent à une certaine forme d'existence objective au sein de la communauté en question.

3. Pourquoi les connaissances sur le fonctionnement mathématique sont-elles susceptibles d'outiller utilement la résolution de problèmes ?

Le travail a consisté jusqu'à présent à mettre en avant et à explorer la distinction solution/résolution ? Répondre à la question qui fait le titre de cette partie suppose de s'interroger au contraire sur les liens existant entre texte et pratique.

Je ne m'étendrai pas sur ce point qui ne me semble pas problématique. Certes le texte de la solution n'est pas une narration de recherche, on n'y trouvera aucun détail sur les erreurs, les difficultés qui ont marqué la recherche, les mécanismes de pensée qui ont débouché sur la réussite. Cependant, le texte définitif montre au lecteur, en tout cas au lecteur averti qui se positionne comme futur résolveur, toutes les initiatives efficaces prises par celui qui a trouvé la solution. De quelles initiatives est-il ainsi rendu compte ? Je citerai par exemple, l'introduction d'objets nouveaux, le changement de cadres, la reformulation d'une expression ou d'une propriété, le choix d'un outil, d'une méthode ou d'un théorème etc. Dans une certaine mesure, **le texte de la solution est donc une évocation de la résolution qui l'a produit, une représentation** qui informe sur la pratique mais a l'avantage d'être plus facile d'accès que la pratique elle-même. Les connaissances sur le fonctionnement mathématique qui peuvent être construites à partir des textes de solution d'un certain ensemble de problèmes ont donc une dimension outil, elles disent aussi comment il est possible de faire (voir les exemples).

Cependant ces connaissances n'ont guère d'intérêt si elles ne peuvent être réinvesties avec une certaine efficacité, moyennant des adaptations plus ou moins grandes, dans la résolution d'autres problèmes ; autrement dit, sur le long terme, ce sont essentiellement les connaissances mettant en jeu des ensembles de problèmes qui vont émerger de la totalité des connaissances sur les problèmes. Pour désigner ces ensembles, j'utilise le terme de type de problèmes (ce qui n'a évidemment rien de nouveau) lorsque les problèmes sont rapprochés sur la base d'un trait commun, mais on ne peut pas exclure, au niveau du sujet cognitif au moins, que se constituent des conglomérats beaucoup plus hétéroclites qui correspondent à la notion de complexe chez Vigotski. **Les types de problèmes sont des connaissances essentielles sur les problèmes,** ce qu'avec Pastré (1995) on pourrait considérer comme **des concepts pragmatiques :** ils jouent un rôle fondamental dans la mise en relation de l'expérience antérieure avec l'activité présente ou future ; introduisant une certaine économie au sein des connaissances construites dans la production et l'étude de solutions, ils sont par essence orientés vers la résolution de nouveaux problèmes ; à ce stade, ce sont des outils d'analyse et de mobilisation de connaissances opérationnelles.

Les connaissances sur le fonctionnement mathématique sont donc dotées d'une double organisation : autour des concepts et théorèmes mathématiques, autour des types de problèmes. Ces deux organisations ne sont pas identiques car en général plusieurs concepts sont utilisables pour un même type de problèmes et un même concept est outil dans plusieurs types de problèmes.

Dans l'espoir d'éviter certains malentendus, évoquons quelques points que je ne développerai pas (voir pour plus de précisions, C.Castela 2000) :

- Les types de problèmes sont d'abord des constructions cognitives qui s'élaborent dans la succession des activités de résolution : lorsqu'il cherche un nouveau problème, le sujet va, selon des mécanismes divers que je ne cherche pas à expliciter, rapprocher ce problème d'un autre ; si ce rapprochement est efficace c'est-à-dire si certaines des connaissances sur la solution de l'ancien sont utiles pour le nouveau, on peut penser que sur la durée les associations d'abord fortuites se pérennisent (et éventuellement des astuces deviennent des techniques).
- Ceci étant dit, les types de problèmes ne constituent pas seulement une modélisation de l'activité du sujet cognitif, ils apparaissent en tant qu'objet aussi bien dans la recherche mathématique qu'au niveau scolaire.
- Les types de problèmes construits dépendent du corpus des problèmes rencontrés (il est clair que cela a des conséquences au niveau scolaire).
- Les types de problèmes sont des objets évolutifs tant au niveau cognitif que dans les différentes institutions où ils peuvent vivre, en particulier dans la recherche mathématique.

III. LES DIRECTIONS DE RECHERCHE

Dans la double perspective d'étudier la place occupée par les connaissances sur le fonctionnement mathématique dans l'institution scolaire et de concevoir des dispositifs didactiques visant leur apprentissage par les élèves, j'envisagerai trois modes de vie d'une connaissance dans une institution.

1. Sous forme de savoir institué dans un texte

Il s'agit là de la forme classique analysée notamment par A.Rouchier (1991) qui résulte du processus d'institutionnalisation dans lequel les connaissances sont explicitées, dépersonnalisées, décontextualisées et enfin légitimées par l'institution via un texte qui constitue un objet institutionnel.

Je n'exclus pas du tout a priori d'envisager l'émergence d'une partie des connaissances sur le fonctionnement mathématique, à partir du lycée au moins, sous cette forme instituée, en tant qu'enjeux institutionnels d'enseignement, ne serait-ce que comme une solution pour construire chez les élèves le fonctionnement mathématique en tant qu'objet de connaissances dont ils devront cependant acquérir seuls l'essentiel (il est clair qu'une faible partie seulement de ce curriculum caché peut être intégré aux programmes officiels sous peine d'empêcher une progression raisonnable dans le texte du savoir savant).

Dans cette perspective, il ne s'agit pas d'appliquer à ce savoir un mode d'enseignement différent de celui que nous prônons pour le savoir mathématique, autrement dit, il ne s'agit pas de donner directement ces connaissances ou bien de les faire découvrir par une forme de maïeutique. Mais ce point de vue conduit à interroger les travaux de didactique des mathématiques ; jusqu'à quels points nous outillent-ils pour élaborer un enseignement lorsque les savoirs en jeu sont des savoirs opérationnels ? Quelles questions nouvelles les spécificités de ces savoirs nous posent-elles ? Cette problématique n'a guère été abordée jusqu'à présent me semble-t-il, pourtant sa pertinence n'est pas limitée aux connaissances sur le fonctionnement mathématique, j'ai par exemple retrouvé des questions tout à fait identiques à celles que je me pose dans l'exposé de J-J. Dupin sur la modélisation à l'Ecole d'été de 95.

Puisqu'il est ici question d'enseigner explicitement des connaissances sur le fonctionnement mathématique, je voudrai revenir sur des affirmations tenues dans la partie I.2. : premièrement, il est possible selon moi de faire cohabiter dans une classe des savoirs savants mathématiques et des savoirs opérationnels sans que les élèves identifient les seconds aux premiers ; deuxièmement, l'enseignement envisagé ne réduit pas nécessairement la résolution de problèmes à l'application quasi automatisée d'algorithmes, autrement dit, il est compatible avec la préservation d'un territoire de créativité dans le topos des élèves.

Ceci suppose un choix adapté des savoirs qui sont pris comme enjeux didactiques. Il faut éviter qu'une technique enseignée s'avère à tout coup efficace pour les problèmes abordables à un niveau donné, autrement dit, puisque selon la coutume en vigueur tout problème posé doit pouvoir être résolu, il convient de s'intéresser à des types de problèmes pour lesquels il existe, au niveau d'enseignement considéré, différentes techniques qui ne possèdent pas le même domaine d'efficacité. Les élèves doivent rencontrer la responsabilité de sélectionner une technique parmi celles qui sont disponibles, ils doivent être confrontés à l'inadéquation de certains choix. Par ailleurs, il convient de choisir des techniques non algorithmisées dont l'application efficace dans un problème donné nécessite encore un réel travail de la part de l'élève. Mon hypothèse est que l'on devrait ainsi préserver dans la classe une conception de la résolution de problèmes qui inclut pour les élèves la responsabilité d'inventer, d'adapter. J'ajouterai que, pour entretenir la dévolution d'une telle activité de recherche, il est peut-être préférable de poser souvent des problèmes dans lesquels la connaissance sur le fonctionnement mathématique que l'on vise à faire construire n'est pas incontournable mais seulement notablement plus efficace (et l'on retrouve l'idée d'astuces).

Remarquons que les conditions décrites ci-dessus ne sont pas automatiquement réalisées. Il est possible qu'on ne puisse trouver à l'école primaire et au début du collège des types de problèmes répondant aux contraintes énoncées. Par ailleurs, les différentes techniques envisageables pour un type de problèmes mettent souvent en œuvre des outils relevant de chapitres différents dans le texte du savoir enseigné ; confronter les élèves à la responsabilité de choisir une technique plutôt qu'une autre suppose donc de s'émanciper de l'organisation usuelle de la progression en termes de concepts et de théorèmes mathématiques, des types de problèmes suffisamment larges doivent apparaître comme des objets institutionnels de connaissances. Il s'agit donc de mettre sur pied une double définition du programme, en termes de concepts d'une part, de types de problèmes d'autre part, en veillant à ce que les élèves aient rencontré suffisamment tôt dans l'année plusieurs techniques différentes. Ce n'est en général pas le cas des types abordés dans les rubriques « Travaux Pratiques » des classes de lycée ; il est vraisemblable qu'une telle optique impose souvent de choisir des types de problèmes mettant en œuvre des connaissances rencontrées séparément les années précédentes, ceci est tout à fait possible à tous les niveaux du lycée (citons seulement pour illustrer le propos les problèmes de comparaison de nombres et d'alignement).

En résumé, il me semble qu'à partir de la seconde au moins, il est possible de faire émerger dans le curriculum officiel certains savoirs sur le fonctionnement mathématique choisis de façon à minimiser les risques de glissement contre lesquels G.Brousseau nous a constamment mis en garde, semblant parfois postuler qu'ils étaient inévitables, dès qu'il s'est agi d'enseignement de méthodes et de méta (par exemple, Brousseau 1986).

2. A l'opposé de l'hypothèse précédente, systèmes institutionnels de connaissances non reconnues dans l'institution

Je reprends ici une expression utilisée par Y.Chevallard (1992, p.107) pour désigner ce que sont, dit-il, à peu près les « savoirs pratiques » de Bourdieu. Dans ce cas, j'aurai recours comme outil d'analyse à la notion « d'exercices structuraux » introduite par Bourdieu pour penser l'organisation sociale de la transmission de ces savoirs pratiques : « Entre l'apprentissage par simple familiarisation [...] et la transmission explicite et expresse par prescriptions et préceptes, toute société prévoit des exercices structuraux tendant à transmettre telle ou telle forme de maîtrise pratique » (Le sens pratique p. 126)

Je me demande si on ne peut pas interpréter comme de tels exercices structuraux certaines tâches forgées par la tradition qui auraient, auraient eu ou auraient encore dans certaines classes favorisées comme fonctions non explicitées ou en tout cas comme effets d'assurer l'apprentissage de certaines connaissances sur le fonctionnement mathématique (voir peut-être la notion d'assortiment didactique proposée dans sa thèse par Florence Génestoux). Etudier les formes de présence des connaissances sur le fonctionnement mathématique dans l'enseignement passe par la recherche de telles tâches, hier et aujourd'hui, dans différentes classes, dans différentes institutions d'enseignement. Je pense en particulier que le corpus des problèmes proposés joue un rôle déterminant : sur quels points fournit-il aux élèves l'occasion de rencontrer l'ignorance (Mercier 1995) ? Par exemple, en seconde, trouve-t-on et dans quelle proportion des énoncés dans lesquels les élèves doivent eux-mêmes décider de la méthode à utiliser pour comparer deux nombres ? Il faut corrélativement s'interroger sur l'existence de dispositifs dans lesquels ce type de problèmes a des chances d'apparaître, par exemple, devoirs à la maison, phases de révision en début d'année dans lesquelles l'enseignant s'autorise à changer de niveau de mise en fonctionnement, séances de recherche en groupe sur des problèmes non guidés... Pour ces différents dispositifs, on pourra se demander ce qui dans les tâches proposées est susceptibles de favoriser, toujours implicitement, l'apprentissage des élèves. Je pense par exemple ici au rôle qui me semble très important de la rédaction soignée d'une solution (voir pour une expérience en ZEP, Assude, Lattuati, Léorat, 2000).

Cette direction du travail se résume ainsi : mettre en évidence des dispositifs qui ont disparu ou ne vivent que sous des formes affaiblies dans les classes ordinaires et dont on pense a priori qu'ils peuvent déboucher sur l'apprentissage de connaissances sur le fonctionnement mathématique sans jamais expliciter cet enjeu aux élèves, expérimenter la réapparition d'un tel dispositif et tester ses effets en terme de mise en fonctionnement des connaissances qui est le but véritable.

Mais cette approche ne tient pas compte de l'inégale perception par les élèves des enjeux d'apprentissage, elle ne s'interroge pas non plus sur la mise en œuvre des dispositifs évoqués dans l'enseignement ordinaire par des enseignants non avertis des enjeux visés. Ceci me conduit à envisager un troisième mode de vie des connaissances dans une institution, intermédiaire entre les deux précédents, c'est ce par quoi je vais conclure.

3. Connaissances reconnues institutionnellement : savoirs de sujets

Voici une hypothèse : une institution peut reconnaître la nécessité pour certains de ses sujets de posséder, d'utiliser, d'apprendre ou de faire apprendre selon les cas dans le cadre de leurs activités institutionnelles une connaissance sans que cette connaissance ne fasse l'objet d'une institutionnalisation dans le texte du savoir de cette institution. Cette connaissance pourra apparaître publiquement et officiellement dans l'institution via les sujets de l'institution. Je dirai que les connaissances en question sont officialisées ou reconnues institutionnellement en tant que savoirs de sujets dans l'institution en question[22].

J'ai dit que la connaissance officialisée n'était pas mise en texte, ceci ne veut pas dire qu'aucun savoir institué n'est en jeu dans la reconnaissance institutionnelle mais que ce savoir n'est pas l'explicitation décontextualisée de la connaissance.

Des exemples :

* Dans le journal « L'Humanité » du 3 Juillet 2001, dans une interview consacrée à la torture en Algérie, M.Rebérioux dit : « La torture n'a pas été universelle, ni même, au sens propre du mot, générale. Ce fut, en revanche, un phénomène institutionnalisé, intégré dans un ensemble. La torture était couverte, implicitement ordonnée à travers le recours à des formules du type « mettez fin au terrorisme par tous les moyens » qu'utilise le ministre résident à Alger, Robert Lacoste ». Pour reprendre la terminologie que j'ai introduite, je dirai qu'aux yeux de

[22] Ceci peut correspondre à ce qu'A.Rouchier désigne comme une forme faible d'institutionnalisation, je préfère pour ma part n'utiliser ce terme que dans son sens fort, rappelé au III.1.

M.Rebérioux, la torture était pendant la guerre d'Algérie une pratique **officialisée** par l'état français **pour** certains au moins de **ses sujets militaires.**

* A un niveau beaucoup moins dramatique, la notion de savoir-faire, de compétence sert précisément en général à officialiser des connaissances qui ne sont finalement évoquées qu'à travers les situations qu'il s'agit de maîtriser. La reconnaissance par l'institution (par exemple, une branche professionnelle) se fait à partir d'un savoir institué qui dans ce cas consiste en une description des tâches à accomplir positivement.

* Dans une institution d'enseignement, une connaissance peut être reconnue à partir d'un savoir didactique, je pense ici par exemple au travail de M-H.Salin et R.Berthelot sur les connaissances spatiales. Voilà comment j'en ai compris la ligne directrice : certaines connaissances spatiales pourraient apparaître comme enjeux d'apprentissage dans l'enseignement primaire à travers un certain nombre d'objectifs exprimés sous forme de savoir-faire et une suite de situations d'enseignement communicables aux enseignants. Le fait que ces situations dans certaines conditions « garantissent » l'acquisition des connaissances spatiales visées est un savoir didactique dont on voit bien qu'il n'a rien à voir avec une institutionnalisation des connaissances spatiales. De plus, c'est également à partir d'un savoir didactique que les enseignants pourront mettre en œuvre les situations d'enseignement dans les conditions qui les rendent efficaces et entre autres choses reconnaître les comportements, les difficultés, les apprentissages de leurs élèves. Dans ces conditions, les connaissances spatiales pourraient apparaître comme des enjeux d'apprentissage pour les élèves, enjeux reconnus institutionnellement, sans jamais être elles-mêmes institutionnalisées, les apprentissages des élèves étant dans la classe reconnus en termes de savoir-faire.

* Dernier exemple lié aux connaissances sur le fonctionnement mathématique.
Dans certaines classes, ces connaissances sont publiquement utilisées par le professeur dans ses commentaires, par exemple au moment des corrections, sans que ces connaissances soient jamais institutionnalisées comme savoirs de la classe. On peut penser que pour de nombreux élèves ces connaissances ne sont pas identifiées comme relevant de leur topos. Je fais l'hypothèse que, pour qu'elles le deviennent, il faudrait créer un dispositif institutionnel qui reconnaisse ces connaissances comme des savoirs pour les élèves aussi. Un tel dispositif pourrait prendre place dans le cadre des aides à l'étude, j'interprète également en tant que tel

les dispositifs expérimentés par Paquelier[23] en classe lesquels visent à faire dévolution aux élèves du travail réflexif sur les activités mathématiques passées dans une perspective d'avenir.

Cette perspective soulève donc notamment la question des savoirs qui sont la base de la reconnaissance, au niveau de l'institution, au niveau des enseignants ainsi que celle des dispositifs dans lesquels peuvent vivre officiellement les connaissances sur le fonctionnement mathématique.

Ainsi se dessinent à propos du domaine de connaissances qui a été défini par son objet, le fonctionnement mathématique, un programme de recherche comprenant trois directions de travail qui peuvent être utilisées pour l'étude de l'existant comme pour l'expérimentation. Les perspectives ouvertes dépassent les forces d'un seul chercheur et sont bien évidemment ouvertes à chacun mais elles rencontrent d'ores et déjà des travaux menés tout à fait indépendamment, comme ceux de Matheron sur la mémoire ostensive qu'on trouvera évoqués dans ces Actes.

BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T., LATTUATI M., LEORAT N. (2000), L'écriture au quotidien dans une classe de mathématiques. *Petit x.* 54 5-28.

BARRERE A. (1997), *Les lycéens au travail. Tâches objectives, épreuves subjectives.* Paris : PUF.

BAUTIER E. (1995), *Pratiques langagières, pratiques sociales.* Paris : L'Harmattan.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse, Université Bordeaux 1

BOURDIEU P. (1984), *Le sens pratique.* Paris : Éditions de Minuit.

BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement dans la transposition didactique* . Thèse, Université Bordeaux 1.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 7(2) 33-115.

[23] Ces travaux ont été réalisés dans le cadre des recherches du groupe CESAME de Nice, exposés au Séminaire Didirem mais ils n'ont pas encore donné lieu à publication.

CASTELA C., EBERHARD M. (1999), Quels types de modifications du rapport aux mathématiques en vue de la possibilité de quels gestes professionnels ? In *Actes de la X[e] École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 164-172). Houlgate : ARDM

CASTELA C. (2000), Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique.

*Recherches en Didactique des Mathématiques.*20(3) 331-380.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 12(1) 73-112.

CHEVALLARD Y.(1995), La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In Noirfalise R, Perrin M.-J. (eds) *Actes de la VIII[e] École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.

CONNE F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 12(2/3) 221-270.

DUPIN J-J. (1995), Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques. In Noirfalise R, Perrin M.-J. (eds) *Actes de la VIII[e] École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 247-257). Clermont-Ferrand : IREM.

DUVAL R. (1998), Écriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In *Actes du colloque « Produire et lire des textes de démonstration »* (pp. 79-98). Rennes : IREM.

GENESTOUX F. (2000) *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques.* Thèse, Université Bordeaux I.

MERCIER A. (1995), Approche biographique de l'élève et des contraintes temporelles de l'enseignement : un cas en calcul algébrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 15(1) 97-142.

ORUS BAGUENA P. (1992), *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique : effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire.* Thèse, Université Bordeaux 1

PASTRE P, SAMURÇAY R. (1995), La conceptualisation des situations de travail dans la formation des compétences. *Éducation Permanente.* 123 13-32.

PIAN J. (1999), *Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES. Vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels.*

Cahier de Didirem 34. Paris : Université Paris 7

ROBERT A. (1997), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*. 18(2) 139-190.

ROUCHIER A. (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation.* Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, UFR Sciences fondamentales et appliquées.

SCHOENFELD A. (1985), *Mathematical Problem Solving.* Orlando : Academic Press.

TENAUD A. (1991), *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthodes de travail en petits groupes.* Thèse d'université. Paris : Université Paris 7.