

UN NOUVEAU CONCEPT POUR PENSER LE PROGRES EN ARITHMETIQUE
ELEMENTAIRE : CELUI DE CONCORDANCE / DISCORDANCE ENTRE LA
REPRESENTATION INITIALE D'UN PROBLEME ET L'ECONOMIE DE SA RESOLUTION
NUMERIQUE

Rémi Brissiaud

IUFM de Versailles

Laboratoire CNRS Cognition et activités finalisées - ESA 7021

Considérons ces énoncés de problèmes M1 et M2 :

M1 : Un enfant achète 3 chocolats à 50 cruzeiros l'un. Quel est le prix total ?

M2 : Un enfant achète 50 chocolats à 3 cruzeiros l'un. Quel est le prix total ?

Non seulement ils appartiennent à la même catégorie au sein du "champ conceptuel" des problèmes multiplicatifs (Vergnaud, 1983), mais ils utilisent les mêmes mots et comportent les mêmes nombres. Et pourtant, lorsque ces problèmes sont proposés à des sujets qui n'ont pas étudié la multiplication, le taux de réussite est de 75% environ pour le premier, alors qu'il est de 0% pour le second (Schliemann et al, 1998) ! Dans ce texte, nous voudrions :

1°) Avancer une explication théorique de ce phénomène : la résolution d'un problème nécessite d'abord de se représenter la situation décrite dans l'énoncé, puis de déterminer la solution numérique. Suivant les problèmes, ces deux phases s'articulent différemment chez le débutant et, dans le cas de M1, il y a concordance entre la représentation initiale du problème et l'économie de sa résolution numérique alors que dans celui de M2, il y a discordance. L'étude de ce phénomène conduit donc à envisager une nouvelle "variable didactique" : la concordance vs discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. Cette variable rend compte de la façon dont la sémantique des énoncés et la taille des données numériques interagissent au cours de la résolution d'un problème par un débutant. Elle est donc différente de celle que Duval appelle congruence vs non-congruence entre l'organisation rédactionnelle d'un

énoncé et les traitements arithmétiques requis, parce que la variable didactique étudiée par Duval ne concerne d'aucune façon la taille des données numériques (Duval, 1991).

2°) Montrer que les problèmes du type M2 sont intéressants du point de vue didactique non seulement en début d'apprentissage mais aussi en cours d'apprentissage.

3°) Montrer que le phénomène de discordance est tout à fait général et qu'il se retrouve concernant tous les concepts arithmétiques élémentaires.

4°) Montrer que son analyse permet d'avancer des éléments de réponses à des questions telles que :

- Comment caractériser un apprentissage réussi ?
- Quels sont les principaux processus psychologiques en jeu dans la conceptualisation arithmétique ?
- Quelles situations favorisent cette conceptualisation ?

I. LA RESOLUTION DE CE TYPE DE PROBLEMES AVANT TOUT APPRENTISSAGE : L'EXEMPLE DE LA MULTIPLICATION

Les sujets de l'étude de Schliemann et al (1998) qui échouent massivement le problème M2 (*50 objets à 3 cruzeiros*), ont 9 ans. Bien qu'ils ne soient pas scolarisés, ils ont des pratiques numériques parce qu'ils vendent des confiseries dans les rues de Récife. Chez des enfants scolarisés du même âge, la même étude montre que le taux de réussite est de 75% environ pour les deux problèmes. Il est donc crucial d'aller à l'école pour réussir M2, mais non M1. Expliquons ce phénomène.

Rappelons d'abord un résultat bien établi : avant l'apprentissage des signes "+", "-", "x" et ":", dès l'école maternelle, les enfants sont susceptibles de résoudre une grande variété de problèmes relevant de ces opérations, par des procédures d'ajouts ou de retraits successifs qui simulent les actions décrites dans l'énoncé. Les anglo-saxons parlent de "modeling strategies" (voir par exemple Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993). C'est la sémantique de l'énoncé qui détermine la nature de la "modeling strategy" activée : cette procédure correspond à *la représentation initiale du problème*. Dans le cas du problème M1, une "modeling strategy" consiste à calculer 3 fois 50 cruzeiros et, dans le cas de M2, 50 fois 3 cruzeiros. Cependant, le calcul de $50 + 50 + 50$ (3 fois 50) en comptant de 50 en 50 est très facile alors que celui de $3 + 3 + 3 + 3 + \dots$ (50 fois 3) en comptant de 3 en 3 ne l'est pas du tout.

Dans le cas de M1 (*3 chocolats à 50 cruzeiros l'un*), la représentation initiale induit d'emblée une procédure de calcul économique : $50 + 50 + 50$. Il n'est nullement nécessaire

d'avoir appris la multiplication pour calculer cette addition réitérée, et donc pour réussir ce problème. En revanche, dans le cas de M2 (*50 chocolats à 3 cruzeiros l'un*), la représentation initiale induit le calcul de "50 fois 3" alors que la résolution numérique économique de ce même problème, consiste à calculer "3 fois 50". Il y a, dans ce problème, discordance entre la représentation initiale et l'économie de sa résolution numérique (Brissiaud, 1994, parle de "conflit"), parce qu'elles n'induisent pas la même procédure. Il est clair qu'en dehors d'un apprentissage scolaire, cela n'a rien d'évident que 50 fois 3 F soit égal à 3 fois 50 F. D'où l'échec massif.

Avec Richard (1990, pp. 177-180), nous pensons que les équivalences entre procédures de cette sorte ("50 fois 3 est égal à 3 fois 50", par ex.), de par l'économie cognitive qu'elles procurent (remplacer le calcul de "50 fois 3" par celui de "3 fois 50", par ex.), *fondent les concepts arithmétiques*. L'école a pour mission d'aider les élèves à s'approprier ces équivalences pour qu'à terme, ils réussissent les problèmes comme M2, dans lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie de la résolution numérique, en remplaçant la "modeling strategy" par une procédure économique qui lui est équivalente.

Montrons que les problèmes de type M2 peuvent être le point de départ d'une démarche didactique favorisant la conceptualisation de la commutativité de la multiplication. Considérons ce problème M'2 : *Sur la façade d'une tour, il y a 3 fenêtres à chaque étage. La tour a 50 étages. Combien y a-t-il de fenêtres sur cette façade ?*

Le calcul de $3 + 3 + \dots$ ne menant pas à la solution numérique, les élèves peuvent être invités à amorcer une schématisation des fenêtres en dessinant 3 fenêtres, puis 3 autres en dessous, etc. Ce qui met à leur disposition un codage spatial de la collection sous la forme d'un quadrillage ou du moins, parce qu'il n'est pas nécessaire de dessiner les 50 lignes de fenêtres, cela met à leur disposition un codage spatial d'une partie de la collection. L'important est que les élèves puisse ainsi accéder à un autre mode d'énumération des unités : dans l'image prolongée, il y aurait 50 fenêtres à gauche, 50 fenêtre à droite et 50 au milieu. Grâce à ce codage spatial des données du problème, les élèves mobilisent donc une équivalence entre schèmes de parcours des unités d'une collection et *c'est cette équivalence qui fonctionne comme preuve et confère un statut d'évidence à la solution*.

Résumons : les problèmes dans lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie de leur calcul créent un échec massif lorsqu'ils sont proposés avant tout enseignement. En revanche, lorsqu'on aide les élèves à réorganiser l'énumération des unités en jeu dans le problème, on les amène à découvrir en acte l'équivalence entre procédures qui fonde le concept et, donc, à progresser vers la conceptualisation.

II. LA RESOLUTION DE CE TYPE DE PROBLEMES EN COURS D'APPRENTISSAGE : L'EXEMPLE DE LA SOUSTRACTION

Evoquons une recherche qui concerne la soustraction et, plus précisément, l'équivalence : "chercher ce qu'il faut ajouter au nombre b pour avoir a , équivaut à chercher a moins b ". Les deux problèmes suivants s'analysent comme M1 et M2 :

S1 : Julie a 51 bonbons et Odile a 47 bonbons. Odile veut avoir le même nombre de bonbons que Julie. Combien doit-elle en acheter ?

S2 : Pierre a 63 bonbons et Paul a 4 bonbons. Paul veut avoir le même nombre de bonbons que Pierre. Combien doit-il en acheter ?

En effet : 1°) Leurs énoncés utilisent les mêmes mots. Dans les deux cas, la représentation initiale conduit à s'interroger sur la valeur d'un ajout. 2°) Dans le cas de S1, cette représentation (47 et combien, font 51 ?), active une procédure qui conduit de manière économique à la solution numérique. Souvent les jeunes enfants "comptent au-dessus de 47" : 47, 48 (1), 49 (2), 50 (3) et 51 (4). En revanche, ce n'est pas le cas avec S2 : il est beaucoup plus économique de compter à rebours que de "compter au-dessus de 4" pour déterminer : "4 et combien font 63 ?". Dans le problème S2, il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie du calcul.

On dispose de résultats empiriques qui montrent que chez des enfants de C.P. n'ayant reçu aucune instruction sur la soustraction, S2 provoque un échec quasi-total alors que S1 est assez bien réussi (Brissiaud 2002). En revanche, la situation se présente très différemment lorsque ces problèmes sont proposés à des élèves qui ont déjà appris à calculer une soustraction. En effet, le problème S1 ne nécessite d'aucune façon l'emploi de la soustraction : sa représentation initiale est celle d'un ajout et la simulation de cet ajout conduit d'emblée à la solution numérique. Le problème S2, en revanche, incite vraisemblablement à l'abandon de la procédure d'ajout correspondant à la représentation initiale, pour adopter celle qui correspond à un calcul économique (calcul d'une soustraction).

Brissiaud (1994) l'a vérifié en proposant ces deux problèmes à des élèves de CE1. Ceux-ci n'avaient pas encore appris la soustraction en colonnes mais on leur avait enseigné les deux grandes stratégies du calcul mental d'une soustraction. D'une part, ils avaient appris le calcul de $102 - 6$ (cas où on retire très peu) par retraits successifs : 102 moins 2, 100 ; et encore moins 4, ça fait 96. Et d'autre part, celui de $102 - 94$ (cas où on retire presque tout), par compléments successifs : 94 pour aller à 100, il faut 6 ; et encore 2 pour aller à 102, ça fait 8. Notons que cela revient à enseigner que la soustraction $a - b$, selon les valeurs de ces nombres, se calcule soit par retrait, soit par complément, c'est-à-dire à enseigner l'équivalence de ces deux procédures.

Conformément à l'hypothèse de départ, on observe 51% d'emploi de la soustraction avec le problème S2 contre 12% avec le problème S1.

Au début de ce texte, nous avons vu que les problèmes dans lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie du calcul, lorsqu'ils sont présentés avant tout enseignement, provoquent un échec massif. En revanche, lorsqu'ils sont proposés après un premier enseignement d'une des équivalences qui fondent les concepts arithmétiques, ils constituent des contextes privilégiés pour que les élèves abandonnent, au cours de leur résolution, la procédure correspondant à la représentation initiale, pour adopter celle qui correspond à un calcul économique, c'est-à-dire pour que les élèves *transfèrent* à de nouveaux contextes, l'usage des équivalences qui leur ont été enseignées. En termes vygotskiens, cela peut s'exprimer de la manière suivante (Brissiaud, 1994, 2002) : les problèmes qui présentent des cas de discordance entre leur représentation initiale et l'économie de leur résolution constituent des situations privilégiées pour repérer les élèves chez qui un premier enseignement a réussi à créer une zone de proche développement.

III. D'UNE EQUIVALENCE ENTRE PROCEDURES A L'INVENTION D'UN PROBLEME POUR LEQUEL IL Y A DISCORDANCE... : L'EXEMPLE DES FRACTIONS

Tous les concepts arithmétiques, avons-nous dit, peuvent s'analyser en termes d'équivalences entre procédures. Comme les phénomènes de discordance trouvent leur origine dans les difficultés d'appropriation de ces équivalences, on devrait pouvoir, pour chaque concept arithmétique, produire des phénomènes de concordance / discordance.

Pour étayer cette idée d'une généralité du cadre théorique proposé ici, la démarche suivante va être développée avec un nouveau concept arithmétique : celui de fraction. Il s'agira

- 1°) De mettre en évidence des équivalences entre procédures qui fondent le concept de fraction.
- 2°) De montrer comment, à partir de l'une de ces équivalences, on peut construire un problème pour lequel il y a discordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution numérique.
- 3°) De montrer que la résolution de ce problème favorise, chez le débutant, la conceptualisation des fractions.

IV. DES EQUIVALENCES ENTRE PROCEDURES QUI FONDENT LE CONCEPT DE FRACTION.

Il existe diverses façons d'accéder aux différents sens que peuvent prendre les fractions (pour une synthèse, voir : Carpenter, Fennema & Romberg, 1993). Comme ce type de nombres a été inventé pour résoudre des problèmes de mesure, la façon la plus simple de procéder à une telle analyse sémantique est vraisemblablement de " distribuer " des unités de mesures (des litres, des

grammes ...) aux différentes places possibles dans l'écriture d'une fraction (au-dessus de la barre, à droite du numérateur ; à droite de la barre de fraction ; etc.) et d'écrire les problèmes ainsi créés (selon les cas, l'écriture a/b doit se lire " a divisé par b " ou " a *bième*" ou encore " a pour b "). En utilisant la fraction $3/4$, c'est ce qui a été fait dans la figure 1. Celle-ci montre que l'on peut distinguer quatre sens ou manières principales de référer les fractions à des contextes (il est facile de vérifier que les autres façons de "distribuer" les unités ne produisent pas de sens) :

- deux sens où les fractions renvoient à une division : il s'agit d'une part de la division – partition d'une pluralité (3 unités sécables partagées équitablement en 4 parts) et d'autre part de ce qu'on appelle habituellement la division – quotient (en 3 combien de fois 4 ?) ;
- un sens où les fractions renvoient à un fractionnement d'une unité (prendre les 3 quarts d'une unité sécable) ;
- un sens où elles renvoient à une proportion (3 pour 4).

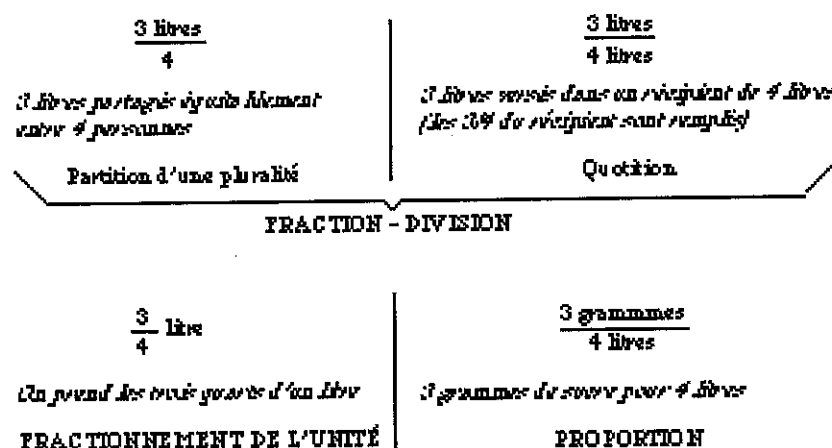


Figure 1: Les différents sens de la fraction $3/4$

Parmi toutes les équivalences entre procédures qu'il serait possible d'envisager, intéressons-nous à l'équivalence entre *la partition d'une pluralité* et *le fractionnement d'une unité* (colonne de gauche dans la figure 1) : il est équivalent de partager a unités en b parts égales (partition d'une pluralité) et de partager une seule unité en b parts égales (ce qui produit 1 *bième*), à condition de prendre ensuite a exemplaires du *bième* obtenu, c'est-à-dire a fois 1 *bième* (fractionnement d'une unité).

Cette équivalence est loin d'aller de soi : dans le premier cas, pour mettre en œuvre une stratégie de simulation, il faut commencer par imaginer a unités différentes avant de les partager en b parts égales alors que dans le second, il faut imaginer d'abord *une seule unité* pour la fractionner ! D'emblée les actions correspondantes ne portent pas sur les mêmes objets et les deux situations n'ont *a priori* que peu de traits communs⁴⁸. Il devrait donc être possible, à partir de cette équivalence entre partition d'une pluralité et fractionnement d'une unité, de construire des énoncés de problèmes pour lesquels il y a discordance entre leur représentation initiale et l'économie de leur résolution numérique.

V. D'UNE EQUIVALENCE ENTRE PROCEDURES, VERS L'ECRITURE D'UN PROBLEME POUR LEQUEL IL Y A DISCORDANCE...

Intéressons-nous maintenant à l'effet de valeurs numériques précises sur l'interprétation des fractions. Il semble plus difficile de concevoir $3/4$ sous la forme "3 divisé par 4" que de concevoir $21/4$ comme "21 divisé par 4". Il semble donc plus difficile d'évoquer le partage d'une pluralité lorsque le numérateur est plus petit que le dénominateur (c'est-à-dire lorsque la valeur d'une part est plus petite que 1) que dans le cas contraire (lorsqu'elle est plus grande que 1). L'origine de cette différence est vraisemblablement la suivante : dans le *curriculum* scolaire, l'enseignement de la division avec reste (cas d'unités non sécables) précède de beaucoup l'enseignement des fractions. Or, dans le cas d'une division avec reste, la valeur d'une part est pratiquement toujours supérieure à 1. Il est rare, par exemple, de proposer un problème de partage de billes où il est impossible d'en donner au moins une à chacun ! C'est ce qui explique que le partage d'une pluralité soit plus facilement évoqué avec les valeurs numériques 21 et 4 qu'avec 3 et 4 (Ce type de phénomène qui relève de la création d'un "obstacle didactique" a été bien étudié en didactique des mathématiques ; en psychologie, Fischbein, 1994, en donne de nombreux exemples).

A la suite de cette analyse, considérons les deux problèmes suivants :

F1 : *J'ai 21 pizzas et je les partage entre 4 personnes.*

Quelle est la part d'une personne ?

F2 : *J'ai 3 pizzas et je les partage entre 4 personnes*

Quelle est la part d'une personne ?

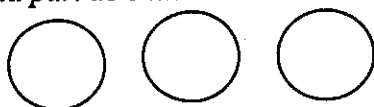
⁴⁸ Remarquons cependant que dans le cas particulier des fractions unitaires : $1/2$, $1/3$... $1/n$, l'équivalence entre partition d'une pluralité et fractionnement de l'unité va de soi : il est clair que "1 divisé en n ", c'est aussi " 1 $n^{\text{ième}}$ ".

L'énoncé de F1 décrit la partition d'une pluralité et c'est donc cette procédure qui sera activée par la représentation initiale de ce problème. De plus ses données numériques sont 21 et 4. Ces nombres, eux aussi, favorisent la partition d'une pluralité : pour partager 21 unités en 4, il faut en donner 5 à chacun (division entière) et il faut encore partager l'unité restante. Comme ce reste est 1, il est facile à fractionner. Dans ce problème, il y a donc vraisemblablement concordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution numérique.

L'énoncé F2 décrit lui aussi une partition d'une pluralité. Mais les données numériques y sont 3 et 4 qui, contrairement à 21 et 4, ne favorisent pas la partition d'une pluralité. On pourrait penser alors qu'il y a dans ce problème F2, discordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution numérique et qu'il conduit, par conséquent, à un échec massif lorsqu'on le propose avant tout enseignement des fractions. Or ce n'est pas le cas. Le problème suivant de type F2 a été proposé à des élèves de CM1 avant que les enseignants n'aient abordé les fractions en classe (Brissiaud 1998 ; 2000) :

F2 : *On veut partager équitablement 3 pizzas entre 4 enfants : Alain, Bernard, Christian et Denis qu'on notera par leurs initiales : A, B, C et D.*

Quelle sera la part de chacun ?



(Tu peux dessiner les parts en utilisant les lettres A, B, C et D)

On observe 65 % de réussite et les enfants, très majoritairement, résolvent ce problème ainsi (Kieren et al, 1985, obtiennent des résultats similaires) :



Le taux de réussite observé n'est guère compatible avec l'existence dans ce problème, d'une discordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution (avant tout enseignement, ce type de problème devrait conduire à un échec massif). Outre ce taux de réussite élevé, la procédure utilisée par les élèves laisse, elle aussi, penser que ce problème ne correspond pas un cas de discordance. En effet, contrairement aux apparences, il se peut que l'enfant qui

partage ainsi chaque pizza, n'utilise pas l'équivalence : 3 partagé en 4, c'est 3 quarts de 1. En effet, sa procédure est la même que s'il partageait équitablement une pizza, une quiche et une tarte. Rien n'assure que les parties prélevées sur chacune des trois pizzas soient considérées comme équivalentes et formant alors ensemble les 3 quarts d'une seule pizza. L'enfant exprime la solution à partir de la partition d'une pluralité d'unités qui ne sont pas nécessairement considérées comme équivalentes et non à partir d'un fractionnement de l'unité.

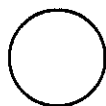
Pour être certain qu'un sujet a effectivement utilisé ou découvert *hic et nunc* l'équivalence cruciale, il convient de transformer cet énoncé de la manière suivante (Brissiaud 1998 ; 2000) :

F'2 : 3 pizzas sont dans le four. Elles vont être partagées équitablement entre 4 frères.

L'un des enfants a un entraînement de foot et il doit manger avant les autres.

Sa mère lui dit : " Sors une pizza, prend ta part et remets le reste dans le four ".

Quelle part doit-il découper ?



(Dessine cette part sur la pizza sortie mais ne dessine pas les autres pizzas.)

Dans ce cas, avant tout enseignement des fractions, le taux de réussite n'est que 5 % ! (Brissiaud, 2000). En obligeant les sujets à exprimer la solution sur une seule pizza, ce nouvel énoncé crée réellement une discordance entre la représentation initiale du problème (qui parle de la partition de 3 pizzas) et l'économie de sa résolution (il faut exprimer la solution à partir du fractionnement d'une seule pizza).

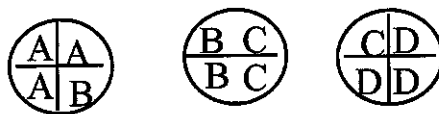
Un concept arithmétique étant donné, il est donc possible de trouver des problèmes pour lesquels il y a discordance entre leur représentation initiale et l'économie de leur résolution, comme nous venons le faire pour les fractions. La démarche qu'il convient d'adopter est la suivante : 1°) Procéder à une analyse *a priori* des différentes significations du concept et sélectionner une équivalence entre deux procédures qui le fonde 2°) Une signification étant choisie, qui active l'emploi de l'une des deux procédures en jeu dans l'équivalence précédente, choisir les données numériques pour que ce soit l'autre procédure qui permette d'accéder à la solution de manière économique. Comme dans l'exemple précédent, il convient éventuellement de procéder à quelques adaptations de l'énoncé pour que la résolution de ce problème mette réellement en jeu l'équivalence entre procédures qui fonde le concept.

F'2 est donc un authentique problème pour lequel il y a discordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution. Nous allons voir qu'il présente le même intérêt didactique

que ses homologues M2 et S2 et, en étudiant sa résolution par des débutants, nous expliciterons une première forme d'abstraction qui accompagne le processus de conceptualisation des opérations arithmétiques.

VI. UNE PREMIERE FORME D'ABSTRACTION QUI ACCOMPAGNE LE PROCESSUS DE CONCEPTUALISATION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES

Lorsque le problème F'2, où les élèves ne peuvent opérer que sur une seule pizza, est présenté d'emblée à des novices, nous venons de voir que l'échec est massif. En revanche, lorsqu'on leur présente d'abord le problème F2 où les 3 pizzas sont dessinées et où les élèves peuvent opérer dessus, et ensuite F'2, la solution de ce dernier problème est facilement comprise au sein d'une classe (Brissiaud 1998). Cela s'explique aisément. Dans les deux problèmes, le but de la tâche est le même : trouver la valeur d'une part lorsqu'on partage 3 unités sécables en 4 parts égales. Il apparaît donc immédiatement aux élèves que la procédure utilisée pour résoudre le premier problème serait pertinente pour résoudre le second. Or le fait d'avoir résolu le premier problème donne accès à un codage spatial de la collection de tous les quarts de pizzas résultant du partage de chacune d'elles. La comparaison des problèmes F2 et F'2 donne ainsi aux élèves l'idée de la solution : “ pour prélever 3 quarts, je peux prendre un quart dans chaque pizza, mais je peux aussi les prendre tous dans une seule, celle qui est sortie dans le second problème ”. Les élèves ont souvent besoin de s'assurer qu'un partage où l'on commence par prélever 3 quarts sur la pizza sortie, peut se poursuivre de sorte que chacun des 4 enfants ait une même part. Ils le poursuivent le plus souvent de la manière suivante :



Ils sont ainsi amenés à énumérer différemment la collection des “ quarts de pizzas ”. Comme dans le cas de la multiplication, *c'est ainsi une équivalence entre schèmes de parcours des unités d'une collection qui fonctionne comme preuve et confère un statut d'évidence à la solution.*

De plus, remarquons que cette équivalence entre schèmes de parcours conduit l'enfant à considérer de manière plus abstraite les quarts de la pizza qui est sortie du four dans le second problème : ils ne sont plus seulement des quarts de cette seule pizza, mais des représentants d'une unité numérique abstraite, susceptible d'être prélevée sur n'importe quelle pizza : le “ quart de pizza ”. Et ce qui vient d'être dit des quarts de pizza pourrait tout aussi bien l'être concernant les pizzas elles-mêmes : la pizza sortie du four dans le second problème devient elle-même une pizza

abstraite représentante de la classe qu'elle forme avec les deux autres pizzas dans la mesure où, considérée comme substituable partie par partie à chacune des deux autres pizzas, elle l'est nécessairement dans son entier⁴⁹. On voit bien sur cet exemple que le processus de conceptualisation arithmétique s'accompagne d'un processus d'abstraction d'unités numériques.

La même analyse peut être conduite concernant le problème M'2 (*Sur la façade d'une tour, il y a 3 fenêtres à chaque étage. La tour a 50 étages..*). Cet énoncé invite à énumérer les unités en prenant d'abord en compte toutes les unités d'un groupe de 3 avant de s'intéresser à celles d'un autre groupe de 3, etc. Le nouveau processus énumératif qui conduit à la solution, nécessite un cheminement différent dans la prise en compte des unités (les 50 fenêtres de gauche, etc.). L'adopter, c'est exprimer que deux unités qui n'apparaissaient pas contiguës dans la manière de compter qui est décrite dans l'énoncé sont équivalentes. Or, concernant le nombre, des unités abstraites sont des unités substituables dans le processus énumératif de la totalité. L'enfant qui réorganise son énumération des fenêtres, procède en acte à une telle substitution d'unités, il atteint le niveau d'abstraction des unités qui est nécessaire pour résoudre ce problème.

De manière générale, il est possible de montrer que lorsqu'un problème présente un cas de discordance entre sa représentation initiale et l'économie de la résolution numérique, la représentation de l'énoncé qui conduit à la réussite s'accompagne toujours d'un processus d'abstraction : c'est parce que les unités sont considérées à un niveau plus général que l'activité du sujet est moins contrainte et qu'il est susceptible de réorganiser son schème d'énumération (Brissiaud, 2002).

VII. UNE SECONDE FORME D'ABSTRACTION QUI ACCOMPAGNE LE PROCESSUS DE CONCEPTUALISATION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES

Pour qu'un élève s'approprie un concept arithmétique comme la multiplication, il ne suffit évidemment pas qu'il sache résoudre le problème : "*Sur la façade d'une tour, il y a 3 fenêtres à chaque étage. La tour a 50 étages..*". Cette résolution exige seulement qu'il s'aide d'un codage spatial de la collection de fenêtres pour abstraire les unités nécessaires à la réorganisation de leur

⁴⁹ Souvent les enseignants ont du mal à comprendre que dans une situation donnée, une pizza puisse être considérée de manière "plus abstraite" que dans une autre situation. Pour eux, ce qui est matériel, ne saurait être "abstrait" parce que seul ce qui ressort du monde des idées pourrait être qualifié ainsi. Les psychologues, comme les philosophes d'ailleurs, n'utilisent pas le mot "abstrait" comme ces enseignants en tant que synonyme d'"idéal", c'est-à-dire dans une opposition binaire à ce qui peut être qualifié de "matériel". Les psychologues font un usage *relatif* du mot "abstrait". Pour eux, une même entité (matérielle ou non) est considérée de manière plus ou moins abstraite selon les propriétés qui en sont retenues : plus celles-ci sont nombreuses, moins l'entité est considérée de manière abstraite.

énumération. Mais, pour accéder à l'opération arithmétique, il est nécessaire que l'élève "réfléchisse" cette réorganisation sans quoi, il y a peu de chance que la réussite au problème précédent assure la réussite à un problème du type : " *Quel est le prix de 50 objets à 3 F l'un ?* ".

Il est important que les élèves comprennent que le calcul de a fois b unités discrètes est équivalent à celui de b fois a unités, quelque soient par ailleurs les autres éléments de contexte. Pour favoriser cette seconde forme d'abstraction, les pédagogues associent souvent l'écriture $a \times b$ au dénombrement des cases d'un quadrillage de a lignes et b colonnes parce que les deux modes de calcul dont il s'agit de favoriser l'équivalence, dans ce cas, correspondent à des schèmes d'énumération dont les enfants savent qu'ils conduisent au même résultat : ceux du dénombrement ligne par ligne et colonne par colonne, des cases d'un même quadrillage. D'une façon générale, le symbolisme arithmétique joue un essentiel dans cette seconde forme d'abstraction quelque soit le type d'opération arithmétique (" $\times$ ", "-", ":", etc.).

Il faut en effet souligner que la première abstraction (celle d'unités numériques substituables) et la seconde (celle qui correspond à la prise de conscience de l'équivalence entre schèmes d'énumération) sont de nature différente. Alors que la première est guidée par un codage spatial des unités des collections impliquées dans le problème, la seconde conduit à un affranchissement de ces éléments contextuels parce qu'elle trouve son origine dans la coordination des actions énumératives de l'enfant. Cette coordination, lorsqu'elle est effective, fonctionne même en l'absence du modèle du quadrillage qui n'est qu'un codage temporaire favorisant le "réfléchissement" des actions énumératives. En termes piagétien, la première abstraction est plutôt de type empirique alors que la seconde est une abstraction "réfléchissante".

La même analyse peut évidemment être conduite concernant les fractions : il ne suffit pas qu'un enfant sache partager 3 pizzas en 4 parts égales en prenant les 3 quarts de l'une d'elles, pour être sûr qu'il a conceptualisé les fractions. Il faut de plus que l'enfant prenne conscience que, de façon générale, la procédure activée par la représentation initiale du problème qu'il vient de résoudre et celle qui lui a permis d'accéder à sa solution, sont équivalentes. Dans tous les cas, l'opération arithmétique constitue la solution de ces problèmes à un niveau plus abstrait que celui correspondant aux premières résolutions que nous avons décrites. Dans tous les cas, l'accès à l'opération arithmétique dépend d'une abstraction "réfléchissante".

VII. CONCLUSION

L'analyse des phénomènes de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique permet d'avancer des réponses à

quelques unes des principales questions qui, de façon générale, se posent à quiconque étudie l'apprentissage dans un domaine de connaissances enseignées à l'école.

Une première question est d'ordre épistémologique : comment caractériser l'apprentissage réussi ? Existe-t-il une classe de situations qui seraient critiques du point de vue de la connaissance, au sens où le comportement du sujet après l'apprentissage, s'y différencie clairement de celui qu'on observe avant. Chez des sujets non-scolarisés, les problèmes pour lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie de la résolution, créent un échec massif, ce qui, de notre point de vue, assoit l'idée que ces problèmes mettent en jeu des aspects cruciaux de la connaissance : les équivalences entre procédures qui fondent les concepts arithmétiques.

Une seconde question concerne la nature d'un enseignement qui favorise l'appropriation par les élèves de ces aspects cruciaux de la connaissance. Il s'agit notamment de penser l'articulation entre ce que l'élève sait faire avant tout enseignement (résoudre les problèmes M1, S1, F1) et ce qu'il doit apprendre (résoudre les problèmes M2, S2, F'2). La résolution de ce second type de problèmes au sein de la classe peut être le point de départ d'un processus d'appropriation par les élèves du concept arithmétique concerné. Ces derniers problèmes sont en effet bien compris (Cf. le taux de réussite élevé à la résolution de M1, S1 et F1 dont les énoncés utilisent les mêmes mots que M2, S2 et F2) mais dans le même temps, ils nécessitent que les élèves "s'adaptent" (sinon, ils conduisent à un échec massif). La clef du processus d'adaptation est le suivant : 1°) le passage "en acte" de la procédure activée par la représentation initiale du problème à celle qui permet la solution numérique et 2°) la prise de conscience, l'explicitation et la généralisation de l'équivalence entre ces procédures.

Au départ, c'est le plus souvent en favorisant un codage spatial des données de l'énoncé que le pédagogue permet aux élèves de réorganiser leur schème d'énumération des unités en jeu dans le problème. C'est l'équivalence entre des schèmes de parcours d'une collection d'unités qui sert de preuve et donne à la solution son caractère d'évidence. Et cette réorganisation correspond toujours à un processus d'abstraction d'unités numériques. Cela a été montré ici concernant la multiplication et les fractions, on trouve une démonstration analogue concernant la soustraction dans Brissiaud (2002) et concernant la division euclidienne dans Brissiaud (1996).

Puis se pose le problème du transfert d'apprentissage et de la généralisation : c'est un processus d'abstraction "réfléchissante" qui est alors visé. Concernant la soustraction, on a suggéré ici que les problèmes correspondant à un cas de discordance entre la représentation initiale et l'économie de la résolution numérique sont également susceptibles d'avoir un intérêt didactique majeur lors de cette étape du progrès car ils permettent aux enseignants de repérer les élèves qui

ont commencé à s'approprier à titre personnel les équivalences cruciales (voir aussi Brissiaud, 1994).

A ce moment du progrès, le symbolisme arithmétique (les signes "-", "x", ":", etc.) est susceptible d'être un appui majeur pour ce processus d'abstraction : c'est évidemment le cas s'il émerge en classe comme symbole de l'équivalence. Il importe cependant de remarquer qu'un usage précoce du symbolisme arithmétique est tout autant susceptible de freiner le progrès que de l'accélérer. Supposons en effet qu'on enseigne la résolution des problèmes du type M2 comme suit : on entraîne les élèves à reformuler "*Quel est le prix de 50 objets à 3F l'un ?*" sous la forme : "Il faut chercher 50 fois 3", on les entraîne à traduire cette phrase par l'écriture : " 50×3 " et on leur dit, sans le justifier, qu'ils "ont le droit" d'effectuer ce calcul dans le sens qu'ils veulent. A terme, les élèves sauront résoudre ce type de problèmes. En général, ils le sauront même assez vite. Mais ces "réussites" ne résultent pas, alors, de la conceptualisation de la commutativité (i.e. de l'appropriation d'une équivalence entre schèmes), elles sont la conséquence de l'enseignement d'une "souplesse d'usage" du signe "x". Avant de présenter le signe "x" aux élèves, une démarche didactique comme celle qui est décrite dans ce texte, apparaît très souhaitable : l'enseignement des mathématiques ne vise pas seulement l'appropriation de moyens permettant d'obtenir les solutions numériques de quelques "problèmes-types", il vise le progrès dans la résolution de problèmes en général et, pour y parvenir, il doit être une éducation au raisonnement.

Au total, il semble bien que le concept de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution peut jouer un rôle crucial pour penser la première phase du progrès des élèves dans la conceptualisation arithmétique. Une théorisation du rôle du symbolisme arithmétique est vraisemblablement tout aussi cruciale pour penser la suite de l'histoire. Une question devrait être au cœur des débats futurs : est-il préférable, comme nous l'avons suggéré (Brissiaud, 1996), d'introduire le symbolisme arithmétique dans un sens non-typique, c'est-à-dire lorsqu'il n'est pas une simple abréviation sténographique du langage ordinaire ? Par exemple : vaut-il mieux introduire le signe ":" de la division euclidienne dans une situation de "division-quotition" (en a combien de fois b ?) plutôt que dans une situation de "division - partage" (où l'on cherche la valeur d'une part) ? Ou encore : vaut-il mieux introduire la barre de fraction dans une situation de "division-partition" (a partagé en b parts égales) plutôt que dans une situation de fractionnement (prendre a fois 1 $b^{\text{ième}}$ de l'unité) ?

La première rencontre avec le symbolisme arithmétique est un phénomène didactique qui a été peu étudié jusqu'ici et c'est dommage parce qu'il apparaît clairement que la signification privilégiée lors de cette première rencontre, bénéficie d'une sorte de "prime à l'apprentissage". Ne conviendrait-il pas d'accorder cette "prime à l'apprentissage" aux significations les moins

typiques ? Par ailleurs, lorsqu'on joue trop sur cette variable (lorsqu'on introduit le symbolisme arithmétique avec une signification non-typique mais de manière très précoce), est-on certain de favoriser au mieux la conceptualisation ? De nombreuses recherches sont encore nécessaires avant de pouvoir répondre à ces questions.

BIBLIOGRAPHIE

- Brissiaud, R. (1994). Teaching and Development : Solving "Missing Addend" Problems Using Substraction. In Schneuwly & Brossard (Eds) : Learning and development: contributions from Vygotsky. *European Journal of Psychology of Education*, 9 (4), 343-365.
- Brissiaud, R. (1996) *J'apprends les mathématiques, CE2., Livre du maître*. Enseigner le calcul mental d'une division et d'une soustraction. Paris : Retz, .
- Brissiaud, R. (1998). Les fractions et les décimaux au CM1. Une nouvelle approche. *XXV Colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres* . COPIRELEM – Loctudy, mai 1998 (pp 147-171).
- Brissiaud, R. (2000) Apprendre l'arithmétique élémentaire : les cas de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. *Actes des Journées Internationales d'Orsay de Sciences Cognitives (JIOSC 2000)*, décembre 2000 (pp. 105-110).
- Brissiaud, R. (2002). Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds) : *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, 265-291. Paris : Hermes
- Carpenter T. P., Ansell E., Franke M. L., Fennema E. & Weisbeck L. (1993). Models of problem solving : a study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 428-441.
- Carpenter, T. P., Fennema & Romberg, T. A.(1993) *Rational Numbers. An Integration of Research*, Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum.
- Duval, R. (1991) Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 4, 163-196.
- Fischbein, E. (1994). Tacit models. In D. Tirosh (Ed.), *Implicit and explicit knowledge: An educational approach* (pp. 97-109). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Kieren, T., Nelson, D. & Smith, G. (1985) Graphical algorithms in partitioning tasks. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 25-36.

Richard J.F. (1990). *Les activités mentales*. Paris : Armand Colin.

Schliemann A. D., Araujo C., Cassundé M.A., Macedo S. & Nicéas L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435.

Vergnaud G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New-York : Academic Press.