LES NOMBRES REELS DANS LA TRANSITION COLLEGE – LYCEE :

RAPPORTS INSTITUTIONNELS ET MILIEUX POUR L'APPRENTISSAGE

Alain Bronner

IUFM de Montpellier, Équipe ERES, Université Montpellier II

Dans la période actuelle, et de manière plus générale, les travaux numériques de la classe de Sixième se fondent sur des nombres décimaux, et cela dès l'usage de la division ; en Géométrie, dès la classe de quatrième, l'utilisation du théorème de Pythagore conduit à des nombres irrationnels ; les équations du second degré en algèbre dans la classe de troisième font surgir des racines carrées irrationnelles, en Analyse on travaille implicitement sur des intervalles de **R** et en statistiques et probabilités certains modèles font intervenir des irrationnels. Dans toutes les organisations mathématiques mettant en jeu ces objets, soit les tâches et les techniques portent directement sur des irrationnels (calcul d'approximations de π par exemple), soit les tâches et les techniques font intervenir inévitablement des irrationnels. Ainsi les travaux mathématiques dans l'enseignement secondaire nécessitent d'introduire des nombres non décimaux et même non rationnels, autrement dit un espace numérique plus large que l'ensemble des nombres rationnels. Dans ce contexte, je me propose d'étudier la nature de cet espace numérique, et notamment la présence de l'objet « nombre réel », ainsi que la manière de le traiter ou de l'éviter dans les curricula. Le moment institutionnel de la transition collège–lycée me servira de point d'entrée pour analyser les rapports, actuels ou anciens, à l'objet nombre réel dans l'enseignement secondaire et pour étudier les organisations didactiques (Chevallard 1998), tout au moins les milieux possibles, permettant la mise en place de ces organisations mathématiques. J'examinerai la place et le rôle des nombres décimaux et des nombres rationnels dans ces praxéologies (Chevallard 1998). Mon propos sera notamment de montrer les fluctuations importantes des choix quant à cette place à certaines périodes et de mettre en évidence la péjoration de l'ensemble des nombres des décimaux dans ces organisations, malgré son rôle important à certains moments du temps de l'institution scolaire.

I. UN REGARD SUR L'ENSEIGNEMENT DU NUMERIQUE DEPUIS UN SIECLE ET DEMI

On peut voir l'étude présentée dans cet article comme celle de l'histoire de l'institution de l'enseignement mathématique secondaire aux prises avec divers obstacles et celle de ses errements dans les choix des organisations mathématiques à propos du Numérique. Je porterai un regard sur l'enseignement du Numérique depuis un siècle et demi à travers ce qui fait la ***mémoire de l'institution : les programmes, instructions et les manuels.*** Si cette histoire nous était contée par *le sujet noosphérien* de l'institution (Chevallard 1985), il pourrait dire, selon les conditions du moment, nous allons organiser la structure du Numérique :

- à l'aide d'un environnement technologico-théorique (Chevallard 1998) se fondant sur une théorie de la mesure et des grandeurs incommensurable, et ce sera la période classique (1854-1947)
- à l'aide de l'algèbre et des structures algébriques, pendant la période (1947-1968)
- à l'aide d'un ensemble structuré à partir des développements décimaux comme pendant la réforme des mathématiques modernes (1968-1978)
- ou encore un ensemble flou ou un ensemble « fourre-tout », contenant tout nombre se présentant dans le travail, comme dans les périodes suivant la réforme des mathématiques modernes (de 1978 À 1996).

Et nous verrons les choix de ce sujet noosphérien pour la structure du Numérique dans la période de actuelle dont les nouveaux programmes ont été mis en place en Sixième en 1996, puis en Lycée en 2000 (pour la classe de Seconde).

L'institution d'enseignement, l'Enseignement Mathématique Secondaire, se distingue par sa régularité à proposer des réformes des programmes depuis cent cinquante ans. Je ferai référence dans ce texte à cinq grandes périodes délimitées par les dates de ces réformes :

- La période classique (1854-1947) ;
- Les périodes de préparation de la réforme des mathématiques modernes qui correspondent à deux réformes (1947-1958) et (1958-1968) ;
- La période des mathématiques modernes (1968-1978) ;
- La période de fermeture de la réforme des mathématiques modernes comprenant deux réformes, l'une en 1978, l'autre en 1985 ;
- La période actuelle qui commence en 1996 et qui est toujours en vigueur au moment de la publication de ce texte.

Dans toutes les périodes, le Numérique a un habitat principal : à l'époque classique c'était l'arithmétique, puis l'algèbre aux périodes suivantes et maintenant il est engendré par les

« travaux numériques ». Je montrerai que ces changements induisent, au-delà des modifications des intitulés de chapitres des programmes ou des manuels, des évolutions significatives de l'organisation mathématiques du numérique.

II. LA PERIODE CLASSIQUE (1854-1947)

Les objets du Numérique sont stabilisés à cette époque et ont pour adresse « L'Arithmétique ». Une organisation assez rigide apparaît avec seulement quelques variations sur la place de certains thèmes. Les auteurs de « traités d'Arithmétique » suivent une progression relativement identique comme le montrent les sommaires des ouvrages de cette époque[42]. *Le temps de l'institution* sera rythmé par l'introduction d'objets du Numérique en lien à des secteurs, thèmes et sujets (Chevallard 2001) dans l'ordre suivant :

> Entiers, la numération décimale et les quatre opérations, la divisibilité → Fractions ordinaires et opérations → Fractions décimales, opérations et le système métrique → Racines carrées → Racines cubiques et les racines $n^{\text{èmes}}$ → Les nombres incommensurables → Rapports de deux nombres ou deux grandeurs et applications de l'arithmétique → Logarithme.

Ce que ne laisse pas apparaître cette ossature, c'est la construction et le ciment de l'organisation mathématique de cette période. En fait, elle va se fonder sur « une théorie » de la mesure des grandeurs. À la période classique, une problématique de la mesure est sous-jacente à la construction du Numérique, affichée en général en début des ouvrages d'arithmétique :

« Mesurer une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît. [...] Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'exprime par un nombre. » (Guilmin 1855)

Elle aboutit à trois éventualités en lien avec certains types de nombres ou de grandeurs :

- des nombres entiers « quand une grandeur se compose exactement de l'unité répétée un certain nombre de fois » ;

---

[42] On trouve notamment cette organisation dans les manuels suivants :

Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges, A. Guilmin,Auguste Durand, Paris, 1855

Traité d'Arithmétique,R.P. Faton,Gauthier-Villars, Paris, 1866

Cours d'Arithmétique théorique et pratique à l'usage des lycées et collèges, F. Girod,E. André Fils, Paris, 1903

Cours d'Arithmétique à l'usage des écoles primaires supérieures, des écoles normales, et des candidats aux écoles nationales d'arts et métiers, H. Neveu, Masson, Paris, 1915

- des nombres fractionnaires « quand une grandeur se trouve composée d'un certain nombre d'unités, plus une fraction moindre que l'unité » ;
- quand une grandeur ne rentre pas dans l'un des deux cas précédents, « on dit alors que la grandeur est incommensurable avec cette unité : elle ne peut être mesurée qu'approximativement avec cette unité ».

En fait cette problématique fait à la fois partie de l'organisation mathématique, tout autant que de l'organisation didactique, elle va permettre la constitution de milieux pour la construction des nombres. Elle sera toujours présente en « toile de fond » à cette époque. Par exemple, pour le traitement des nombres fractionnaires, Neveu (1915) y fera constamment référence :

> « On peut toujours supposer qu'un nombre fractionnaire, quelle que soit la nature qui lui a donné naissance, soit la mesure d'une longueur »

ou encore

> « Deux nombres fractionnaires sont égaux lorsqu'ils mesurent la même longueur ou des longueurs égales, ces longueurs étant mesurées avec la même unité ».

La dernière éventualité évoquée dans la définition de la problématique va donner naissance aux nombres incommensurables par l'intermédiaire d'un autre objet : la racine carrée. À partir de l'espace ancien constitué par les nombres fractionnaires, l'objet « racine carrée » s'impose sous la forme d'un algorithme analogue à celui de la division, technique permettant d'obtenir des valeurs approchées de racines carrées, dite « méthode d'extraction ». Cet objet conduit à une première extension de l'espace numérique sous les traits des *racines carrées incommensurables* :

> « Quand la racine carrée d'un nombre entier, tel que 42, n'est pas un nombre entier, elle n'est pas non plus un nombre fractionnaire [...]. $\sqrt{42}$ est ce qu'on appelle un nombre incommensurable, c'est-à-dire qu'il n'a pas de commune mesure avec l'unité. Une pareille racine ne peut être évaluée que par approximation. » (Guilmin 1855)

Pour produire l'extension recherchée de l'espace numérique en complétant l'espace des nombres fractionnaires par *les nombres incommensurables*, une autre signification de la racine d'un nombre A est obtenue : $\sqrt{A}$ limite des racines carrées $\frac{a_n}{n}$ approchées à 1/n près (C.Vacquant et A. Macé de Lépinay[43] 1917) :

[43] Éléments de Géométrie, C.Vacquant et A. Macé de Lépinay, Masson, 1917.

$$\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 \leq A < \left(\frac{a_n+1}{n}\right)^2 \text{, où } a_n \text{ est entier.}$$

Cette signification va être généralisée à d'autres mesures, par l'intermédiaire d'une droite graphique pour introduire des nombres incommensurables, qui correspondent à des longueurs n'ayant aucune commune mesure avec l'unité (Girod 1903). On utilisera même cette signification pour étendre aussi les opérations. On peut avancer que cette signification faisait davantage partie du rapport au numérique de l'enseignant que de celui de l'élève. H. Lebesgue (1932) avait déjà critiqué cette présentation des opérations sur les irrationnels :

> « Jadis, la possibilité, et même la signification de ces opérations résultaient de la "généralité de l'analyse" ; dans ma jeunesse, nous passions "à la limite". Je crois que, pour nos élèves de l'enseignement secondaire, il n'y a rien de changé ; que tout se réduit encore à l'emploi de quelques paroles magiques quand il s'agit de passer des opérations sur les nombres commensurables aux opérations sur les nombres quelconques. »

Les techniques correspondant aux cinq opérations de l'arithmétique ne seront pas vraiment élaborées, mais on montrera quelques exemples dans le cadre d'une pratique de calcul approché :

> « On peut avoir à effectuer sur les nombres incommensurables, les mêmes opérations que sur les nombres entiers ou fractionnaires, que l'on appelle par opposition aux premiers, nombres commensurables » (Girod, 1903)

Ainsi les auteurs proposent des approximations rationnelles ou décimales de nombres irrationnels comme :

$x^n + y^n = z^n$ ou $\sqrt{23+\sqrt{32}} = 5{,}35$ à moins de $\frac{1}{100}$ près (Girod 1903).

Ils s'en tirent par une déclaration en rapport à l'approximation. Et c'est bien là en pratique tout le problème :

> « En vertu de ces définitions, le calcul des nombres incommensurables se ramène toujours à un calcul de nombres commensurables et ne présente d'autres difficultés que la question d'approximation » (Girod 1903).

L'organisation du Numérique n'aboutit pas à la construction d'un système de nombres englobant tous les types de nombres et sur lequel on dispose d'opérations internes qui vont agir indépendamment de la nature des nombres. On a plutôt ici une réunion de familles de nombres, l'ensemble des entiers, l'ensemble des rationnels positifs inférieur à l'unité (appelés parfois fractions), l'ensemble des nombres rationnels positifs non entiers (appelés parfois nombres fractionnaires) et une autre famille contenant les racines incommensurables. L'unification, au sens d'un système de nombres présentant une signification commune et sur lequel des opérations font l'objet d'une même définition n'est pas réalisée comme dans les constructions de Descartes ou de Stevin.

Ainsi l'idée de nombre à cette époque s'appuie sur celle de *mesure d'une grandeur*, appuyée par une approche analytique pour introduire les *nombres incommensurables*. Malgré une adaptation numérique aux évolutions des savoirs des mathématiciens, on peut souligner ici la filiation avec l'exposé euclidien des *Eléments* dont les traces remontent à plus de vingt-trois siècles.

III. Les periodes de preparation de la reforme des mathematiques modernes (1947-1958 et 1958-1968)

Les nouveaux programmes de 1947 se présentent comme la première étape dans l'évolution du Numérique qui conduira à la réforme des mathématiques modernes. La mesure des grandeurs ne constitue plus la seule *technologie* supportant le Numérique. Le programme de la classe de mathématique (classe de Terminale) précise les limites du rapport institutionnel au Numérique à travers trois axes, la notion de mesure, l'irrationnalité, et le calcul approché :

> « La notion de mesure des grandeurs sera introduite au moment le plus opportun : on réservera pour une étude ultérieure tous les problèmes qui nécessitent la connaissance des nombres irrationnels. La définition seule des valeurs approchées et des erreurs est au programme de la classe. » (Programme du 24 juin 1948)

En classe de quatrième, la notion de fraction est étendue à celle de rapport de deux nombres (entiers, décimaux ou fractionnaires), défini comme quotient exact. Le lien avec les rapports de grandeurs et les mesures se réalise dans l'habitat des grandeurs proportionnelles, « le rapport de deux grandeurs est égal au quotient exact des nombres qui mesurent ces grandeurs avec la même unité » (Lebossé et Hémery 1947), conduisant à une assimilation complète entre les quotients des mesures et les rapports de grandeurs (implicitement commensurables). Cette organisation à propos des proportions et des grandeurs proportionnelles montre que la théorie des rapports n'est pas encore prête à s'éteindre, mais l'organisation mathématique de la période précédente est modifiée. C'est le Numérique qui fournit les outils pour le travail sur les proportions et les grandeurs ; les fonctions n'apparaissent pas encore pour les problèmes de mathématisation. Le cadre de travail numérico-géométrique ainsi mis en place dans les classes de

Cinquième et Quatrième constitue *la technologie* à partir de laquelle les auteurs vont introduire les calculs métriques en géométrie dans les classes ultérieures. Il est implicite que ce cadre s'adapte naturellement aux rapports de grandeurs incommensurables qui seront rencontrés dans l'étude métrique des triangles rectangles. Une dialectique subtile entre grandeurs et nombres permet ainsi de mettre en place un espace de nombres pour travailler sur les grandeurs rencontrées à partir de la Cinquième : les grandeurs donnent accès aux nombres fractionnaires (par l'aspect opérateur), lesquels se généralisent par la notion de quotient exact, et en retour permettent de mettre en rapport les grandeurs, de les mesurer et de traiter les problèmes pratiques et géométriques rencontrés.

Les nombres vont naître dans une problématique numérico-algébrique amenant parfois dans les manuels des incohérences mathématiques. Par exemple, dans le manuel emblématique de Lebossé et Hémery (1947), les rationnels se présentent comme : « les nombres qui ne contiennent pas de radicaux », tandis que les irrationnels sont « les nombres qui comprennent un ou plusieurs radicaux ». $2 + \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont cités comme exemples prototypiques de nombres irrationnels.

Dans la réforme suivante (1958-68), l'organisation mathématique classique s'effondre complètement. On voit apparaître une construction basée sur une problématique plus algébrique au collège et au début du lycée, puis progressivement sur une problématique formelle, notamment en classe de Terminale, et cela bien avant la réforme des mathématiques modernes. Les structures formelles et les extensions successives des systèmes de nombres remplacent la construction des nombres par adjonction de la période classique. On relève, non seulement des indices, mais bien des preuves irréfutables de mutations vers les « mathématiques dites modernes ». En effet, les ensembles structurés de nombres font leur apparition bien avant la dite réforme. Dans un manuel pour la classe de Troisième (Marville et Adam 1961), la première page introduit « les trois ensembles fondamentaux de l'algèbre :**N**, **Z** et **Q** ». Les propriétés de ces ensembles vont être énumérées selon les structures de l'algèbre moderne. Dans les deux ouvrages précédents, les notions de racine carrée et d'irrationalité justifient le saut dans un ensemble dit des nombres réels. L'adaptation se réalise de la façon suivante chez Monge et Guinchan (1966):

> « Ensemble $\mathbf{R}^+$ des réels positifs. Lorsque A n'est pas le carré d'un entier naturel ou le carré d'un rationnel, le symbole $\sqrt{A}$ permet donc de définir un nombre irrationnel positif. Il existe d'autres nombres positifs non rationnels, qui ne sont égaux ni à un entier, ni à un décimal, ni à une fraction arithmétique. […] La réunion des rationnels positifs et des irrationnels positifs forme un ensemble que l'on appelle ensemble des réels positifs et que l'on désigne par la notation $\mathbf{R}^+$. »

Les auteurs s'inscrivent pleinement dans une *problématique algébrique* : certaines racines carrées sont adjointes à l'ensemble des rationnels, et plus généralement d'autres nombres – les irrationnels – permettant d'obtenir un ensemble noté **R**. Le prolongement des opérations s'appuie sur *le principe de permanence algébrique* :

> « Nous admettons que toutes les opérations que nous avons définies dans l'ensemble **Q** des nombres rationnels peuvent aussi être définies dans l'ensemble **R** des nombres réels, et qu'elles possèdent dans l'ensemble **R** les mêmes propriétés que dans l'ensemble **Q** » (Monge et Guinchan 1966)

L'ensemble **R** est alors déclaré « le quatrième ensemble fondamental de l'algèbre » après **N**, **Z**, et **Q**, tandis que l'ensemble **D** des nombres décimaux est complètement oublié dans la problématique précédente.

Les programmes de la classe de Mathématiques Élémentaires (classe de Terminale de l'époque) sanctionnent une évolution déjà significative en classe de Seconde et confirment la place des structures dans l'enseignement secondaire. L'institution exprime le souhait de donner des « indications sommaires » sur le mode de construction de **R**. Ce souhait laisse la porte ouverte à de nombreuses variations sur le mode de construction de **R** et le niveau d'approfondissement de l'exposé comme on peut le voir dans quelques manuels :

- une construction basée sur les suites de Cauchy chez Monge et Ruff (1962) ;
- une construction dite des sections ouvertes commençantes chez Bréard C. (1963), en lien avec les coupures de Dedekind ;
- une construction basée sur les limites d'une suite de nombres rationnels et la droite chez Lespinard et Pernet (1962).

Si les premiers auteurs se placent dans une *problématique formelle* et proposent des constructions complètes analogues à celles des ouvrages universitaires de l'époque, Lespinard et Pernet présentent effectivement des « éléments » qui semblent plus conformes aux injonctions des instructions officielles. Cet ouvrage se démarque aussi des deux précédents par l'intervention de la géométrie que voulaient absolument éviter les mathématiciens de la sphère savante de la fin du 19ème siècle. L'institution scolaire de cette époque a ainsi conduit les auteurs de manuels devant un problème didactique difficile apportant des traitements assez différents. J.Lelong-Ferrand (1964) résume le problème de la façon suivante :

« Les nouveaux programmes de Mathématiques Élémentaires, qui proposent de donner des indications sommaires sur la définition des nombres réels, placent donc le professeur devant une situation embarrassante ; car, quelle que soit la méthode adoptée, il n'est pas possible d'en donner un exposé rigoureux sans lui consacrer plusieurs leçons, au détriment du reste du cours. Les méthodes fondées sur la théorie des limites présentent, de plus, l'inconvénient de retarder la définition des nombres réels jusqu'à ce qu'on ait exposé le cours dans un ordre peu naturel à ce niveau. »

Après la théorie des rapports de la période classique, l'organisation mathématique du Numérique trouve un environnement technologico-théorique plus proche du savoir savant, mais qui n'apporte pas une solution didactique satisfaisante. Cette période contient les conditions d'un changement à venir, plus radical que les précédents, et elle porte déjà des éléments importants de cette « modernité » qui sera publiquement annoncée à la période suivante.

IV. LA PERIODE DE LA REFORME DES MATHEMATIQUES MODERNES (1968-1978)

Cette période sanctionne une évolution de la constitution du Numérique dans l'institution en réduisant le plus tôt possible et au plus près la distance avec le savoir mathématique de référence. Elle s'inscrit dans un courant structuraliste plus général.

L'organisation mathématique du Numérique va être bâtie sur de nouvelles fondations dont le socle, lui-même, est constitué par les nombres décimaux. L'institution met en scène un objet, peu présent dans les périodes précédentes : l'idécimalité. J'ai proposé ce néologisme pour désigner le caractère non-décimal de certains nombres comme on le fait depuis des siècles pour l'irrationalité. Il s'agissait aussi de pointer ce caractère particulier de la construction du Numérique de cette époque qui conduit à donner un rôle fondamental à des nombres qui restent souvent dans l'ombre : les nombres non-décimaux que j'appelle *les nombres idécimaux*.. En effet, ces nombres vont vivre dans cette époque un destin particulier dans la mise en place des nombres réels, dès la classe de quatrième, sous la forme des suites décimales illimitées. C'est une caractéristique de *l'environnement technologico-théorique* du Numérique et de l'organisation didactique, qui restera original dans cette épistémologie scolaire du Numérique.

Les nouveaux programmes (arrêté du 22 juillet 1971) demandent d'introduire les nombres réels dès la classe de Quatrième en suivant un plan précis d'enseignement. Avant d'aborder les propriétés structurelles de l'ensemble des réels (dont la notion de quotient), nous relevons :

- la consolidation de l'étude de l'anneau ordonné des nombres décimaux ;

• un travail d'approximation, basé sur les encadrements par des décimaux « successifs » des différents ensembles de décimaux $\mathbf{D_p}$, de sommes, produits, inverses et racines carrées de décimaux ;

• l'introduction des suites décimales illimitées ;

• l'étude des propriétés structurelles de l'ensemble des réels (dont la notion de quotient).

L'institution Enseignement Mathématique Secondaire se démarque des constructions savantes à l'honneur à cette époque - à savoir les suites de Cauchy dans l'esprit de la construction de Cantor ou les coupures de Dedekind. Elle propose une voie qui semble plus naturelle par rapport à l'idée d'approximation et par rapport aux fondations basées sur l'ensemble des décimaux. Il est ainsi suggéré de montrer la nécessité d'introduire des nombres idécimaux. Cette nécessité est notamment motivée par deux problèmes :

a) Le premier est celui de la recherche de l'inverse d'un décimal strictement positif dans le cas où cet inverse n'est pas décimal. Par exemple, le manuel de la collection Queysanne-Revuz[44] propose le problème de la recherche de l'inverse de 12 et de 0,37 et aboutit à la conclusion : « il n'existe pas de décimal x tel que : 12x=1. La division avec virgule de 1 par 12, poursuivie indéfiniment, fournit *une écriture décimale illimitée* : 0,083333… ». Ce problème permet aux auteurs d'introduire la suite décimale illimitée 0,083333… .

b) Le second problème suggéré par le programme est celui de l'existence de la racine carrée de certains nombres décimaux. Les auteurs précédents proposent la recherche *des racines carrées à 10^{-n} respectivement par défaut et par excès* du nombre 6. Cette activité conduit à mettre en évidence, d'une part *une écriture décimale illimitée* (dont les auteurs demandent d'admettre qu'elle n'est pas périodique), et d'autre part *une suite d'intervalles emboîtés qui n'ont en commun aucun point de* $\boldsymbol{D}$.

Les deux problèmes sont réunis pour une cause commune, la motivation à faire émerger de nouveaux nombres : les nombres idécimaux. Les auteurs du manuel précité assument totalement ce choix comme en témoigne le titre de l'un des paragraphes : « Introduction de nombres non décimaux ». Un nombre réel est alors un objet représenté par une suite décimale illimitée et doit être conçu comme une limite de nombres décimaux - notion non formalisée et intuitive à ce niveau : « Une écriture décimale illimitée qui n'a pas pour période 0 ni 9 ne représente pas un nombre décimal. Nous convenons de dire qu'une telle écriture représente un “nouveau nombre“ ». Cette organisation se conclut par la définition suivante de l'ensemble des

[44] Mathématiques, Classe de Quatrième, collection Queysanne-Revuz, Série rouge, Nathan, 1973.

nombres réels : « Les nombres qui peuvent être représentés, au moins d'une façon, par une écriture décimale illimitée s'appellent les nombres réels (ou plus simplement les réels) ». Les nombres idécimaux deviennent ainsi un objet fondamental dans la constitution mathématique et didactique du Numérique. On notera que le premier problème n'est pas suffisant pour motiver l'introduction d'un ensemble plus vaste que **Q**. Le problème de la recherche de racine carrée suffit alors et est toujours prêt à servir cette « cause ».

Les deux problèmes ne permettent pas cependant de justifier l'extension jusqu'à **R**. En effet, en se plaçant dans des corps quadratiques, ou plus largement dans des corps contenant **D** et stables par racine carrée - le corps des nombres constructibles ou encore le corps des nombres algébriques par exemple - les deux problèmes sont résolus. Par contre la nécessité d'étendre **D**, au-delà des corps précédents et jusqu'à **R**, va apparaître si l'on veut avoir des propriétés topologiques comme l'axiome de Dedekind-Cantor des intervalles emboîtés. Dans la revue de l'APMEP[45], Dehame, co-auteur du manuel Queysanne-Revuz, explicite ses intentions qui s'inscrivent dans la perspective que je viens d'énoncer :

> « Cette différence fondamentale entre **D** et **R** ne peut être énoncée dans toute sa généralité en Quatrième. Mais il ne faudra pas manquer de la faire ressentir à propos des exemples proposés par le programme (recherche de l'inverse et de la racine carrée). »

Ainsi les auteurs vont prendre en compte ce problème, autant que faire se peut à ce niveau, et aller au-delà des problèmes de nature algébrique précisés par le programme. Pour Dehame, la représentation graphique des décimaux par les points d'une droite ne peut suffire à faire percevoir de façon intuitive ces lacunes topologiques. De plus, il ajoute qu'une introduction de **R** basée exclusivement sur des problèmes de mesure (au sens physique) ne peut que donner des idées fausses ou incomplètes. Il est clair qu'une représentation graphique ne permet pas de différencier véritablement **R** et **D**. L'obstacle de la commensurabilité est ici remplacé par celui de la *décimalité* et la solution didactique proposée est une formalisation extrême à l'aide des suites décimales illimitées. Chez l'auteur précédent, l'enjeu est clair : « [...] il faut que l'élève sente qu'au moment où l'on introduit les réels, on fait un nouveau pas dans l'abstraction, dans l'idéalisation [...]. » Dans cette organisation mathématique du Numérique, la racine carrée, est toujours présente. Elle est reliée au quotient pour faire « découvrir » des nombres idécimaux. Néanmoins son rôle est minoré.

[45] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, bulletin numéro 279, Paris.

Ainsi, dans cette période des mathématiques modernes, l'institution propose une nouvelle épistémologie scolaire des nombres réels basée sur *la complémentarité décimal/idécimal* et sur une présentation des nombres réels sous forme de suites décimales illimitées. Cette problématique est bien différente de celle de toutes les périodes précédentes : **R** se construit, non plus par rapport à **Q**, mais en opposition à **D**, tout en le prolongeant. La complémentarité rationnel/irrationnel des périodes précédentes s'efface pour laisser la place à une opposition décimal/idécimal, ou, du moins, à une extension du système des nombres décimaux. Les choix de cette période conduisent à une construction des nombres idécimaux. La plupart des manuels de Troisième ne citent même plus le terme « irrationnel » dans la séquence sur la racine carrée, mais se placent dans le nouvel environnement technologico-théorique mis en place pour les réels : les approximations décimales et les écritures décimales illimitées.

V. LES PERIODES DE FERMETURE DE LA REFORME DES MATHEMATIQUES MODERNES (1978-1985 ET 1985-96)

À partir de 1978, année à partir de laquelle se « refermait » la réforme des mathématiques modernes, se dessinait déjà un changement de problématique modifiant complètement le rapport de l'institution au Numérique. La réforme de 1978 s'inscrit dans un mouvement général de recul de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des structures. Le symptôme de ce changement se situe en classe de Quatrième dans laquelle le Numérique apparaît sous le domaine « Calcul numérique ». Le long paragraphe des programmes de 1971 intitulé « Nombres décimaux et approche des réels » est remplacé par un paragraphe exigu laissant apparaître la lapidaire expression « pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels » (Arrêté du 16 novembre 1978). Pour ce qui est spécifique des réels, la seule instruction se réduit à la description suivante :

> « Pour **R** il suffit que les élèves sachent qu'il s'agit, suivant la présentation adoptée, d'un sur-ensemble de **D** ou de **Q** sur lequel l'addition, la multiplication, la relation d'ordre se prolongent en disposant des mêmes propriétés, et que tout élément positif de **R** admet une racine carrée. »

Les conséquences de cette évolution du Numérique, évidé en quelque sorte, conduit à observer dans les manuels une grande variété d'organisations mathématiques. L'objet « nombre réel » est notamment présenté sous des rapports très différents selon les manuels :

- Introduction par les développements décimaux illimités dans la continuité de la période précédente avec un formalisme moindre (Monge, 1978) ;

- Introduction par la problématique de la mesure des longueurs où le nombre apparaît comme le résultat d'une mesure (Maugin 1979) ;
- Introduction s'appuyant sur la droite graduée où les nombres sont utilisés pour repérer les points d'une droite ((Deledicq 1983).

Dans la période suivante, la réforme commencée en classe de Sixième à la rentrée 1986 (Arrêté du 14 novembre 1985) va « diluer » le Numérique dans le domaine, étiquetée par l'institution « Travaux numériques », reléguant à l'histoire la traditionnelle répartition arithmétique - algèbre. Le Numérique est construit à travers une perspective essentiellement algébrique dissociée de la mesure des grandeurs. Le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres décimaux est déclaré avec un statut de nombre à partir de la définition comme « le nombre qui multiplié par b donne a » (B.O. du 30-7-87). L'objet racine carrée s'inscrit dans ce cadre comme algorithme de calcul - « touche de la calculatrice » - en quatrième, puis comme opérateur algébrique (lié à l'opérateur carré) et comme symbole « radicaux » permettant de traduire des relations entre des nombres. L'étude de la nature des racines carrées, ainsi que ceux de l'irrationalité et de l'idécimalité sont absents des programmes comme de la plupart des manuels. La problématique d'extension des systèmes de nombres, apparue dans les années soixante, disparaît dans cette période. Il est ainsi assez rare en classe de Troisième de voir le mot « irrationnel » dans la séquence sur l'objet « racine carrée ». Il peut figurer mais il est rarement institutionnalisé et prend plutôt un caractère exotique. En fait, au lieu de traiter vraiment ces problèmes de nature arithmétique, les agents - auteurs de manuels - vont les déplacer vers un autre problème, différent mais intimement lié, celui de la différenciation « valeur exacte/valeur approchée ». Un symptôme peut être remarqué dans n'importe quel manuel de Troisième de cette époque. Quand une propriété est énoncée comme « Quels que soient les nombres a, b et c : si a   b alors a + c   b + c » (Bonnefond 1989), elle est formulée sans domaine de référence et sans faire intervenir la nature des nombres. Implicitement les auteurs laissent circuler l'idée que ces propriétés peuvent s'appliquer à tous les nombres rencontrés et en particulier aux racines carrées.

La classe de Seconde, au lycée, confirme le peu d'attention aux systèmes de nombres « S'ajoutent en Seconde [...] les notations **N**, **Z**, **Q**, **R** ; sur ces différents points, il s'agit d'un simple vocabulaire et aucun développement n'est au programme » (arrêté du 25 avril 1990). Dans les manuels, l'ensemble **R** apparaît comme *« un grand fourre-tout »*[46] qui s'élabore sur une notion préconstruite de « nombre » indépendant de sa nature arithmétique, et pour lequel les

[46] Selon l'expression des auteurs du manuel Hachette pour la classe de Seconde (1994).

règles de calcul vont être officialisées une fois pour toutes, la nature des nombres étant mise à l'écart. L'unité de ce réservoir de nombres que constitue **R** est obtenue à l'aide de la représentation par la droite numérique : « nous pouvons représenter géométriquement tous les nombres réels : ce sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée » (Terracher et al, 1994).

VI. LA PERIODE ACTUELLE (1996-2002)

Dans les nouveaux programmes, mis en place à partir de la sixième en 1996, en passant par la Seconde en 2000 et qui trouveront leurs termes en Terminale en 2002, un timide retour de l'Arithmétique en Troisième (1999) peut être repéré par l'intermédiaire d'un thème nouveau « Nombres entiers et rationnels » et des objets « diviseurs communs à deux entiers » et « fraction irréductible ». L'organisation de ce thème n'est pas sans surprendre avec la présence, voire l'opposition, de deux blocs : un bloc pratico-technique bien identifié autour des types de tâches :

> « Déterminer si une fraction est irréductible ;
> Simplifier une fraction ;
> Déterminer si deux entiers sont premiers entre eux. »

et un bloc technologique constitué autour de la nature des nombres qui semble relever de la culture :

> « une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. »

ou encore :

> « À côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché. »

Il s'agit d'une suggestion plutôt qu'une injonction forte de développement sur la nature des nombres et la structure des ensembles de nombres. Ces conditions nouvelles, offertes à l'enseignement du Numérique, conduisent actuellement à peu de changement sur le domaine numérique et aucune variation effective sur les organisations mathématiques et didactiques ne peut être repérée. En effet, la plupart des auteurs de manuels répondent aux injonctions institutionnelles en rajoutant, à la suite de la progression stabilisée depuis 1978, un chapitre qui est nommé « Arithmétique » (Delord et Vinrich 1999 et Bonnefond 1999) ou tout simplement

« Nombres entiers. Nombres rationnels » (Malaval et al 1999 et Serra et al 1999). L'espace est envahi par une praxéologie locale constituée par les types de tâches citées précédemment et une technologie basée sur les propriétés des notions de « diviseurs communs à deux entiers » et de « PGCD ». Le travail évoqué sur la nature des nombres ou les ensembles de nombres se résume souvent en une activité dirigée à propos de l'irrationalité du mythique nombre $\sqrt{2}$ ou en une annonce culturelle sur l'histoire de ce nombre. Les manuels de Troisième laissent ainsi apparaître une conformité des plus strictes avec les programmes.

En classe de Seconde, l'institution demande un travail à propos du Numérique qui ne résume pas aux simples notations des systèmes de nombres, lesquelles fixaient les limites de l'étude des périodes de fermeture de la réforme des mathématiques modernes (1978 - 1996). Si l'objectif affiché par les programmes est d' « Approfondir la connaissance des différents types de nombres », on ne précise cependant qu'un seul thème d'étude « Nature et écriture des nombres », sans expliciter la praxéologie correspondante. Le seul type de tâches qui est explicité est de savoir « distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées » avec comme élément technologique : « On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite ». L'évolution technologique aidant, l'institution suggère aussi un travail en lien avec la calculatrice, sur les représentations des nombres dans une calculatrice et les limites de celle-ci. Comme pour la classe de Troisième, ces changements ne vont pas bouleverser la structure de l'organisation mathématique du Numérique en classe de Seconde, mais deux thèmes nouveaux viendront se greffer dans l'organisation ancienne autour des deux types de tâches : « reconnaître la nature d'un nombre » et « distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées ». Les praxéologies ne seront pas très développées comme on peut le voir dans la plupart des manuels. Une technique pourra être ébauchée parfois : « Pour reconnaître la nature d'un nombre, on commence par l'écrire le plus simplement possible » (Malaval et al, Math 2^e^ , Hyperbole, Nathan, 2000, p 49). La technologie se limite en général aux définitions des différents types de nombres, de sorte que ces types de tâches devraient rester problématiques pour les élèves.

VII. LE VIDE DIDACTIQUE INSTITUTIONNEL ET LA PLACE DE L'ENSEMBLE D

Cette analyse des organisations du Numérique de 1850 à nos jours m'a amené à proposer la notion de *vide didactique institutionnel* (A. Bronner 1997) pour caractériser les périodes de fermeture de la réforme des mathématiques modernes relativement au problème de l'extension de l'ensemble des nombres et du calcul des nombres décimaux ou rationnels aux nombres réels. Alors qu'un plan précis d'enseignement et une signification précise de la notion de nombre réel étaient proposés pendant la période des mathématiques modernes, on ne trouve guère d'instruction à propos des nombres réels dans les périodes suivantes.

L'ensemble **D** n'a jamais eu une place centrale dans les programmes d'après la réforme des mathématiques modernes, il est même oublié dans les programmes des périodes de fermeture. On peut trouver une origine de ce phénomène dans la place que tiennent les décimaux dans les institutions universitaires, et de ce fait, il en est de même pour les idécimaux. En effet c'est l'opposition rationnel/irrationnel qui structure le Numérique, héritage lointain de la Grèce Antique et toujours présent. Malgré les apports des Babyloniens, des mathématiciens arabes et de Stevin sur les décimaux et les développements décimaux illimités, les nombres idécimaux n'ont pas le même poids culturel, et n'imposent pas une complémentarité analogue dans l'étude du Numérique, au niveau de l'enseignement supérieur. La « qualité » de **Q** d'être un corps contrairement à **D**, peut être aussi une des raisons de cette péjoration de l'étude et de la place des nombres décimaux dans l'institution universitaire, et par voie de conséquence, dans l'institution d'enseignement secondaire. L'introduction précoce à l'école élémentaire[47], l'utilisation importante des décimaux dans les pratiques sociales et dans les applications numériques de divers domaines scientifiques et sociaux n'en font plus un objet sensible d'enseignement en fin de collège et au lycée.

Sur une idée assez vague de « nombre » et sur les fondations structurées autour des nombres décimaux, l'organisation du Numérique est mise en place selon une problématique que j'ai qualifiée d'algébrique. La période (86-96) amplifie le phénomène de *vide didactique institutionnel à* l'objet « nombre réel » : la quête des réels qui était un but dans l'organisation de la période classique - sous les traits des incommensurables, puis un fondement dans la période des mathématiques modernes, n'apparaît plus au collège comme au Lycée. Je fais l'hypothèse que les effets de la réforme des mathématiques modernes ont été tels que les agents didactiques « auteurs de programme » ont été conduits à produire ce *vide didactique institutionnel* dans l'institution Enseignement Mathématique Secondaire à propos de l'objet « nombre réel ». Les problèmes d'enseignement et d'apprentissage engendrés par la réforme sont réglés par ce vide, laissant aux enseignants la responsabilité complète d'une transposition des nombres réels en classe. C'est la nouvelle réponse au difficile problème d'enseignement des nombres réels.

Nous avons perçu des indices d'une évolution possible du Numérique à partir de 1996. On peut se poser la question de savoir quelles sont les raisons d'être de ces nouveaux thèmes d'études à propos des nombres dans la période actuelle. Est-ce la perception d'un vide sur le Numérique

[47] Officiellement en classe de CM1 en France (élèves d'âge moyen de 9 ans).

par rapport aux besoins mathématiques ? Et il s'agirait alors de combler une partie du vide institutionnel que j'ai pointé dans les périodes de fermeture de la réforme. Est-ce une motivation liée à l'utilisation des moyens de calcul, et notamment l'utilisation de la calculatrice, qui est soulignée dans les trois colonnes du bandeau de programme ? Il s'agirait alors de proposer une technologie permettant de traiter les thèmes liant nombres, calcul et calculatrices. Les documents d'accompagnement insistent d'ailleurs largement sur ce sujet (mars 2001).

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau G. (1983) *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, RDM Vol 4.2, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau G. (1986), *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques* RDM Vol. 7/2, La pensée sauvage.

Brousseau G. (1990), *Le contrat didactique : le milieu*, RDM Vol. 9/3, La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique*, La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1988-89), *Le concept de rapport au savoir*, Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique, Université J.Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique* , RDM Vol 12/1, La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1996), *La fonction professorale : Esquisse d'un modèle didactique*, Actes de la VIIIème d'été de didactique des mathématiques, IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard Y. (1998), *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : l'approche anthropologique*, Actes de l'université d'été, La Rochelle, IREM de Clermond-Ferrand

Chevallard Y. (2001), *Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions*, Cours de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques, La pensée sauvage, Grenoble

Lebesgue H. (1975- nouvelle édition), *La mesure des grandeurs*, Éditions Albert Blanchard.

Lelong-Ferrand J., Arnaudiès J.M. *Cours de mathématiques* (1976), Dunod.

Lelong-Ferrand J. (1964), *Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*, Armand Colin.

Manuels utilisés classés par ordre chronologiques

Guilmin A., (1855), *Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges*, Auguste Durand, Paris

Faton R.P.,(1866), *Traité d'Arithmétique*, Gauthier-Villars, Paris

Girod F., (1903*), Cours d'Arithmétique théorique et pratique à l'usage des lycées et collèges*, André Fils, Paris

Neveu H., *Cours d'Arithmétique à l'usage des écoles primaires supérieures, des écoles normales, et des candidats aux écoles nationales d'arts et métiers*, Masson, Paris

Lebossé et Héméry, (1947), *Mathématiques*, classe de Troisième, Nathan

Maillard et Millet, (1954),*Classe de Mathématiques* , Arithmétique, Hachette

Marvillet et Adam, (1961), *Mathématique*, 3ème, 1961, librairie Armand Colin.

Monge et Ruff, (1962), *ensembles et nombres*, Librairie Belin

Bréard C. (1963), *Mathématiques, classe de mathématiques élémentaires,* Tome 1, Editions de l'Ecole

Lespinard et Pernet, (1962), *Arithmétique, Classe de mathématiques élémentaires*, Editions André Desvigne

Monge et Guinchan, (1966),*Mathématiques*, 3ème, librairie Belin

Dehame et al, (1973), Mathématiques, Classe de Quatrième, collection Queysanne-Revuz, Série rouge, Nathan

Monge M., Begot M., Hautcœur S., (1978), *Mathématiques, Quatrième*, Collection Monge, Belin

Fauvergue F., Jeanmot, Rieu R., (1979), *Mathématiques, Quatrième*, Collection Mauguin, Istra

Deledicq A., Lassave C ., Missenard C et D., (1983) *Faire des mathématiques, Classe de Quatrième,* Cedic

Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., (1989), *Mathématiques,* Troisième, collection Pythagore, Hatier

Terracher P.H. et al, (1990), *Mathématiques, Seconde* , Hachette

Delord R. et Vinrich G., (1999), *Cinq sur cinq*, Math 3è, Hachette

Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., (1999), Pythagore 3è, Hatier

Serra et al, (1999), *Math* 3è, Bordas

Malaval et al (1999), *Math 3è*, Nouveau Transmath, Nathan

Malaval et al, (2000), *Math 2e* , Hyperbole, Nathan