TROIS REGISTRES D'EXPRESSION, DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE, POUR L'ENSEIGNEMENT DES RATIONNELS A LA FIN DE L'ECOLE ET AU DEBUT DU COLLEGE.

Robert Adjiage

IUFM d'Alsace

I. INTRODUCTION

La thèse (Adjiage, 1999) que je vous présente aujourd'hui a pour origine le pointage d'obstacles liés à l'expression fractionnaire à la charnière école / collège, c'est à dire à l'usage de fractions (donc de couples d'entiers, séparés par une barre, et auxquels il est légitime d'appliquer un certain nombre de traitements spécifiques) pour exprimer la raison commune ou le rapport commun entre deux suites de données entières.

Cette thèse s'est ensuite développée autour de la :

- tentative de comprendre et d'expliquer la nature de ces obstacles ;
- conception et de la mise en œuvre d'un dispositif d'enseignement au cycle 3 des écoles destiné à :
  - ◊ confirmer les liens entre ces obstacles et les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des rationnels à ce niveau de la scolarité,
  - ◊ tester un certain nombre de réaménagements dans l'enseignement des rationnels.

Ce dispositif repose essentiellement sur le développement et l'exploitation, dans une classe, des vingt didacticiels de la série ORATIO (Adjiage & Heideier, 1998) que j'ai conçus pour ce projet.

II. LES TROIS VISEES

Enonçons trois visées à l'origine de l'activité mathématique ou, dit plus simplement, trois bonnes raisons de « faire des mathématiques » :

visée 1. modéliser un problème de physique (ou d'économie ou de biologie...) afin de permettre des prédictions et / ou des explications ; le point de départ peut être une expérience (de physique par exemple), au cours de laquelle l'expérimentateur rencontre les limites de ses instruments de mesure, élabore un modèle mathématique pour dépasser ces limites et donc faire des prédictions et donner des explications (exemple, modéliser l'action du pantographe, G & N.Brousseau, 1987, p. 333-345) ;

visée 2. modéliser une expérience sensible, bien qu'irréalisable, comme le retournement de la sphère ou, à un niveau plus élémentaire, comme l'encerclement de la Terre par un grand ruban que l'on serre autour de l'équateur ; après avoir rajouté 60 cm au ruban, on reforme un cercle uniformément distant de la Terre. Et on demande une prévision sur la taille de l'organisme susceptible de passer alors sous le ruban (du virus au chat) ;

visée 3. interroger, généraliser... les mathématiques par et pour les mathématiques, comme dans le cas du théorème de Fermat ($x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solutions entières pour $n > 2$) ou de la recherche, qui s'étale sur des siècles, de solutions, **exprimables par radicaux,** d'une équation de degré *n*.

Je pointe tout de suite qu'en ce qui concerne les deux exemples de la visée 3, on constate que c'est une forme d'expression des mathématiques qui est chaque fois à l'origine et à l'horizon du problème posé. L'invariant repérable, entre $x^2 + y^2 = z^2$, qui admet des solutions entières, et $x^n + y^n = z^n$ qui n'en admet pas, est bien une certaine forme d'expression. Quant au deuxième exemple de la visée 3, il témoigne d'une volonté des mathématiciens de considérer comme **solutions acceptables à leur problème celles liées à une forme d'expression,** les radicaux, alors que par ailleurs ils développaient des méthodes d'analyse numérique fort efficaces pour exprimer et approcher les solutions de ce type d'équations – ce qu'a entrepris notamment Newton.

III. L'ACTIVITE MATHEMATIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

1. La visée 1 est prépondérante pour l'introduction aux notions, en raison de la rareté du matériel mathématique à interroger

C'est la voie suivie par la quasi totalité des didacticiens (Pitkethly et Hunting, 1996) et, notamment en France, par Guy et Nadine Brousseau (1987) ou Régine Douady et M-Jeanne Perrin-Glorian (1986).

C'est aussi la voie que, dans un premier temps, j'ai suivie moi-même pour la formation des professeurs des écoles, ce qui m'a amené à observer maintes fois le type de séquences évoqué en annexe 1 et tiré de *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. J'ai alors régulièrement pu établir le constat contradictoire suivant :

2. L'obstacle de l'expression fractionnaire

L'habileté rhétorique avec laquelle nombre d'élèves traitent de ces problèmes rationnels ; la difficulté qu'ils éprouvent à décrire, interpréter, résoudre le même type de problèmes dès lors qu'ils sont amenés à remplacer les mots de la langue naturelle par le symbolisme des fractions. Certains semblent même désapprendre, lors de ce passage, les acquisitions pourtant non négligeables – recherche de référents communs (60 feuilles partout), encadrements entiers (plus de 8 feuilles au mm pour X contre 3 feuilles au mm pour A), comparaison à des proportions simples comme 1/2 ou 1/3 (7 c'est moins que un tiers de 60) – de la phase rhétorique.

3. Conséquences de ces observations

- Le symbolisme des fractions n'est pas transparent même si sa découverte est précédée d'un travail minutieux ;
- une rupture dans le mode d'expression des objets mathématiques peut entraîner une rupture de compétence ;
- l'effort d'enseignement porte plus sur la conception des objets rationnels que sur leur expression symbolique, alors que des difficultés majeures sont observées de côté-là.

4. L'expression fractionnaire n'est pas la seule notion dont l'introduction se heurte à un obstacle lié à l'expression

Ainsi, lors de l'apprentissage de la numération décimale au cycle 2, il n'est pas rare d'observer des enfants capables de procéder à des regroupements, notamment par dizaines, pour comparer deux grandes collections, mais qui ne parviennent pas à fournir une expression chiffrée décimale du cardinal d'une collection à dénombrer.

IV. DEUX TYPES D'ARGUMENTS POUR UNE TENTATIVE D'INTERPRETATION DE L'OBSTACLE LIE A L'EXPRESSION FRACTIONNAIRE

Deux arguments, l'un de nature cognitive et renvoyant à la théorie des registres de Raymond Duval (1995, 1996), l'autre de nature didactique.

1. Un argument de nature cognitive : l'obstacle du « 2 pour 1 »

Les élèves ont tendance à voir deux nombres dans une fraction là où le professeur n'en voit qu'un, si bien que $\frac{a}{b}$ est plus l'expression d'une double cardinalité (*a* parts parmi *b*) que l'expression d'un lien de *a* à *b*. De façon plus précise :

- la barre de fraction introduit une **rupture** entre les deux termes de la fraction ;

- il est dès lors très délicat de suivre la progression du discours fractionnaire, d'égalité en inégalité, puisque ces dernières portent **sur un lien** (de 1 à 3, de 20 à 60, de 7 à 60 – cf annexe 1) rompu par les barres de fraction, tandis que la séquentialité du discours (implicite ou explicite) en langue naturelle, assortie des connecteurs usuels, favorise la prise en compte des mêmes liens : "*Si 3 feuilles de A font 3 mm, 60 feuilles de A feraient bien plus de 7 mm –* cf annexe 1".

Dit plus brièvement : les conversions entre le registre de la langue naturelle et le registre des expressions fractionnaires ne sont pas congruentes au sens de Duval (1995, pp. 47-59).

2. Un argument de nature didactique : l'absence de nécessité motivant l'adoption de l'expression fractionnaire

L'expression fractionnaire est souvent introduite au terme de situations comme celle rappelée par l'annexe 1, situations bien maîtrisées par le seul recours à la langue naturelle. Les élèves ne perçoivent dès lors pas l'intérêt qu'il y a à renoncer à une forme d'expression qui fonctionne bien pour lui substituer une forme d'expression plus complexe qu'ils ont du mal à faire fonctionner.

Or la nécessité d'une expression symbolique apparaît lorsque les rationnels sont mobilisés comme arguments d'opérations (somme ou produit/dilatation) car, à ce moment, les contraintes du discours sont telles que le seul recours à la langue naturelle devient extrêmement coûteux. Est-ce à dire qu'il faut attendre ce moment bien avancé dans le cursus pour introduire une forme d'expression symbolique des rationnels ? Ce n'est pas la solution que j'ai retenue.

V. LES HYPOTHESES

Elles s'appuient sur les constats et idées précédemment développés. L'activité mathématique s'organise autour de trois domaines :

- domaine 1 - l'expérience physique ;
- domaine 2 - le modèle mathématique sous-jacent ;
- domaine 3 - les moyens d'expression sollicitables pour développer le modèle.

Le domaine 3 sollicite des formes d'expression hétérogènes (langue naturelle, fractions, dessins géométriques, droites graduées, décimaux...) d'où l'importance des articulations (entre ces trois domaines d'une part et entre les divers modes d'expression mobilisés par le domaine 3 d'autre part) ; mais pour articuler, il convient auparavant de bien séparer afin de ne pas rabattre les uns sur les autres les enjeux (ce que m'apprend l'expérience physique, ce que je déduis du modèle), les méthodes (ici je mesure, là je calcule, ici je contrôle avec un instrument, là je prouve et je contrôle par un raisonnement ...), les spécificités (si j'augmente un terme d'une fraction, est-ce que la fraction est plus grande ? Et si j'augmente la partie décimale d'un nombre à virgule ?).

Une fois bien établis ces principes de séparation / articulation, je formulerai actuellement mes hypothèses de la façon suivante :

- **hypothèse 1** : l'expression fractionnaire est peu adaptée à une introduction aux nombres rationnels ; il est possible d'introduire les rationnels au moyen d'activités menées dans un registre géométrique unidimensionnel (qui sera introduit un peu plus loin) ;

- **hypothèse 2 (dite de séparation)** : l'apprentissage des nombres rationnels passe par une identification claire des trois domaines susceptibles de les mobiliser et, à l'intérieur du domaine 3, de registres différents susceptibles de les exprimer ;

- **hypothèse 3 (dite d'articulation)** : des activités systématiques d'articulation entre ces trois domaines d'une part, entre les différents systèmes sémiotiques du domaine 3 d'autre part sont déterminantes pour l'acquisition de la notion de nombre rationnel.

VI. LES IDEES CLES DU DISPOSITIF D'ENSEIGNEMENT

Puisque c'est le recours à un système d'expression fractionnaire qui pose avant tout problème, j'ai choisi, en accord avec la visée 3 de l'activité mathématique (voir p. 102), de faire de ces problèmes mes situations-problèmes.

Comme l'expression fractionnaire se révèle peu adaptée à une introduction, j'ai choisi de poser ces problèmes, dans un premier temps, au moyen d'un autre registre d'expression des rationnels, avant de retrouver les expressions numériques fractionnaires et décimales usuelles.

Les différentes formes d'expression disponibles des rationnels, et les problèmes que les passages d'une forme d'expression à l'autre soulèvent, sont alors la source de nouvelles situations-problèmes.

La résolution de problèmes liés aux grandeurs traverse l'ensemble du dispositif suivant des modalités d'articulation aux divers systèmes d'expression que je décrirai plus loin.

Pour préciser l'avant-dernier point, je me suis fixé, conformément aux principes de séparation et d'articulation, trois objectifs principaux relatifs à l'acquisition des systèmes sémiotiques permettant de développer un modèle des nombres rationnels abouti :

- identifier / différencier les spécificités de chaque système d'expression (la manière d'orienter la prise d'information – l'information renvoyée par 22 et 7 n'est pas de même nature dans 22/7 et dans 22,7) ;
- identifier, d'un système d'expression à un autre, des invariants permettant une objectivation du représenté (par exemple pour 3,14, rapport entre le 3, la virgule, le 1, le 4 de 3,14 et les actions de report et de subdivision, assorties de zooms à divers niveaux de profondeurs, pour déposer ce nombre sur droite graduée) ;
- relier les spécificités de chaque système à des aspects différents des objets représentés (par exemple, absence de point isolés dans Q, plongement de N dans Q en ce qui concerne les droites graduées et la vision globale de Q à laquelle elles renvoient ; quotient ou rapport de *a* à *b* en ce qui concerne les écritures fractionnaires de la forme *a/b* ; facilités d'encadrements et d'approximations permises par les écritures décimales et la vision locale de Q à laquelle elles renvoient) ;

VII. Quel registre pour l'introduction ?

Il restait à déterminer quels systèmes sémiotiques exprimant les nombres étaient les plus adéquats à la réalisation de ces objectifs. Si les systèmes fractionnaires et décimaux paraissent incontournables car ils sont un produit remarquablement adapté – une fois maîtrisés – de l'évolution des mathématiques, il convenait en revanche de s'interroger sur le choix du système servant à l'introduction de ces nouveaux nombres. Le cahier des charges (Adjiage et Pluvinage, 2000, § 2.4 et 2.5) se devait de respecter les différentes visées, hypothèses ainsi que les principes évoqués plus haut.

1. Ce système devait permettre une articulation des trois domaines (domaine physique, domaine du modèle, domaine sémiotique) ; cette exigence orientait vers un système géométrico-

physique qui a l'avantage d'expliciter les opérations de reports et de subdivisions, fondatrices de la notion ;

2. Ce système devait avoir le statut de registre, car nous devions disposer d'un système d'expression :

◊ à part entière, véritable concurrent des systèmes fractionnaire et décimal, permettant les premières expressions rationnelles à lui tout seul, ce qui élimine l'idée même d'une simple illustration des systèmes numériques usuels ;

◊ ayant des articulations avec les systèmes numériques suffisamment robustes pour qu'il puisse exercer des fonctions d'annonce de ces systèmes puis de leur contrôle, une fois ces derniers introduits.

Ce système ne pouvait en conséquence se réduire à un mode de représentation d'une double quantification (comme les classiques parts de tarte) ; il devait exprimer des nombres, au moyen d'unités signifiantes ayant leurs équivalents dans les registres fractionnaire et décimal.

3. Ce système devait se prêter à un vaste champ d'expériences, offrant aux utilisateurs l'occasion de formuler des hypothèses et de les valider.

4. Le support de ce système devait être familier aux élèves.

5. Je me suis enfin refusé à recourir à un système transitoire, pour ne pas ajouter aux difficultés de son appropriation celles de sa liquidation ; je lui ai donc préféré un système dont l'utilité resterait incontestable bien au-delà de la phase d'apprentissage.

Ce cahier des charges en cinq points a orienté mon choix vers un système de droites graduées ne mobilisant que des signes spécifiques (intervalles, tirets, nombres entiers...) et des opérations de report, de subdivision et de zoom.

L'ensemble n'a été rendu possible, notamment pour vérifier le point 3 du cahier des charges ci-dessus, qu'en recourant à un environnement informatique et à un ensemble de logiciels spécialement développés à cet effet (Adjiage et Heideier, 1998). Ces logiciels ouvrent la voie à une démarche de type essai / erreur, favorisée par le couple personnalisé action / rétroaction, démarche dont le coût, rédhibitoire dans un environnement papier / crayon (effacer, recommencer, resubdiviser...), est rendu acceptable grâce aux ressources du système : essentiellement saisir un entier par lequel sous-graduer, étiqueter certaines graduations par des entiers. Cette démarche repose sur une analyse, menée par l'utilisateur, du fonctionnement et des dysfonctionnements perçus du système, suivie de décisions à risque – elles ont un coût, quantifiées par un score – susceptibles d'aboutir à la mise au point de méthodes (voir un exemple significatif en annexe 2).

VIII. Reflexion sur le travail de conceptualisation dans ce dispositif et dans le champ des rationnels

Ce travail repose sur :

- un primat sémiotique ;
- une mise en œuvre totale de l'activité mathématique (les trois visées) ;
- les deux principes de séparation et d'articulation.

Concrètement je distingue, conformément aux principes de séparation et d'articulation, trois moments forts du travail de conceptualisation.

1. **Un premier moment important du travail de conceptualisation** sera lié à des interrogations et traitements internes à un registre.

Exemple 1 : équivalence des deux expressions suivantes de trois quarts (un quart de trois et trois fois un quart)

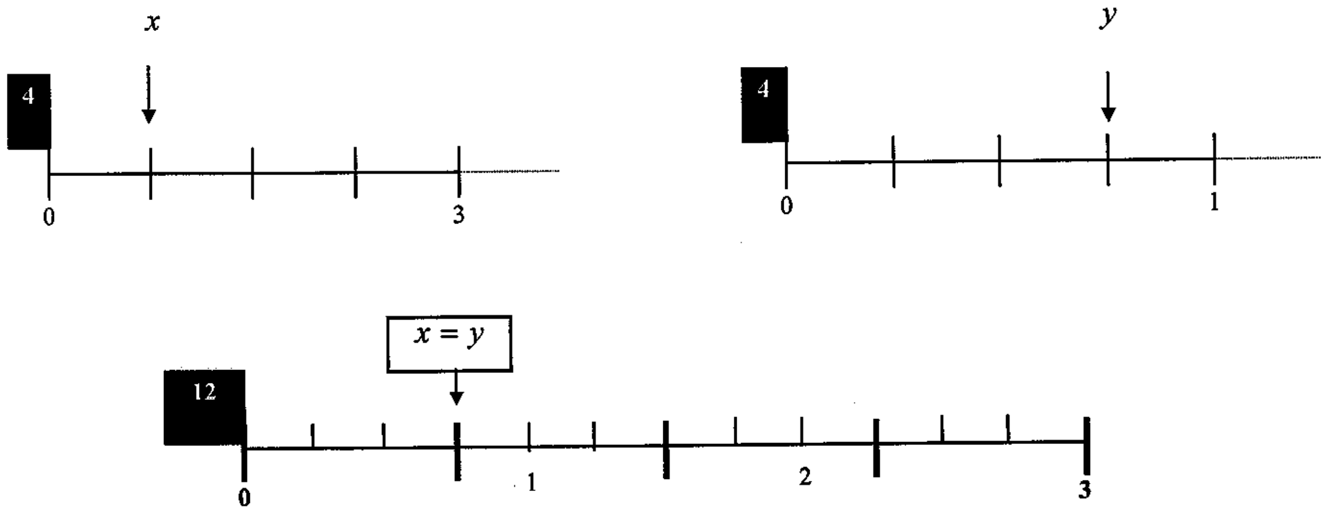


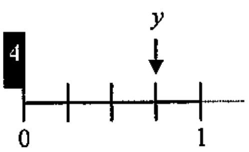
Figure 1 : Un quart de trois et trois fois un quart réfèrent au même nombre

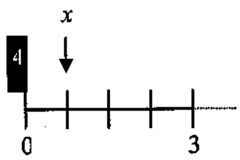
On notera que l'égalité de x et de y ne s'obtient pas suite à un simple constat de coïncidence visuelle mais comme conséquence de décisions procédurales, dont le moment fort est **le choix, par l'utilisateur, du nombre** 3 comme resubdiviseur, qui permet de comprendre pourquoi il y a 4 nouveaux intervalles entre 0 et 1 ($4 x 3 : 3 = 4$), et pourquoi x se trouve sur la 3ème nouvelle graduation, comme y (on a resubdivisé chaque intervalle en 3 et donc la 3ème nouvelle graduation coïncide avec la première ancienne). Ces procédures sont reproductibles, généralisables, et donc à forte valeur explicative.

Exemple 2 : voir le point 2 de l'annexe 3

2. **Un deuxième moment fort sera celui du détachement de la notion de son inscription initiale dans le premier système de représentation** (les droites graduées par exemple) par la prise en compte d'une inscription concurrente dans un autre système sémiotique.

Exemple 1 : on se reportera à la Figure ci-dessous. Chaque unité signifiante (4, 0, 1, 3, nombres d'intervalles...) de l'expression sur droite graduée a-t-elle un équivalent dans l'expression fractionnaire ? Quelles répercussions aura, sur l'expression fractionnaire, la variation d'un des constituants de l'expression sur droite graduée ?





$$\frac{3}{4}$$

Figure 2 : trois expressions concurrentes de trois quarts

Exemple 2 : voir le point 3 de l'annexe 3.

3. **Un troisième moment fort sera celui posé par la question de savoir en quoi l'une ou l'autre de ces formes d'expression interprète et permet de résoudre un problème rationnel,** par exemple l'agrandissement d'un puzzle (Brousseau G. & N., 1987, pp. 137-144) dont un extrait est présenté en annexe 3.

Remarque sur le troisième moment

Précisons tout d'abord qu'au cours du moment 1 l'élève aura résolu le même problème, sans référence physique explicite, posé dans un registre d'expression symbolique, celui des droites graduées par exemple (voir le point 2 de l'annexe 3) ; l'enseignant se gardera bien entendu de signaler cette analogie. En ce qui concerne le troisième moment :

◊ l'élève peut se livrer à des expériences physiques qu'il estime utiles, par exemple, dans le cas du problème rappelé en annexe 3, mesurer la longueur d'un côté ou d'un angle, vérifier des superpositions (deux des pièces mises côte à côte recouvrent exactement une troisième pièce)... ;

◊ il est ensuite invité à résoudre le problème mathématique suscité par le problème physique (par exemple de l'agrandissement) au moyen d'une procédure et d'un mode d'expression de **son choix** ;

◊ à ce stade, certains élèves reconnaissent dans ce problème mathématique le problème déjà posé dans un registre symbolique (par exemple celui des droites graduées), d'autres doutent qu'il s'agisse du même problème, cette divergence donnant l'occasion d'ouvrir un débat scientifique ;

◊ le problème qui est alors posé n'est plus celui de l'agrandissement d'une figure, déjà résolu, mais un **problème d'explicitation du lien** entre une expérience physique, une forme d'expression de ce problème et le modèle qui s'en dégage.

C'est au prix de ce travail spécifique sur le couple séparation / articulation que les droites graduées pourront devenir, à la longue, une aide à la résolution de problèmes.

IX. REMARQUES ET COMMENTAIRES SUR LE DEBAT QUI A SUIVI L'EXPOSE

L'idée centrale est qu'une investigation spécifique de la droite graduée donne l'occasion de remonter à la racine d'une vaste classe de problèmes rationnels. Il est en outre possible, notamment par le biais de l'informatique, d'équiper la droite gradée en un registre permettant le traitement de tous ces problèmes. Dans cette optique, le travail sur droite graduée apparaît comme le paradigme de l'ensemble des activités rationnelles, ce qui permet de réaliser des économies substantielles de temps et de moyens. Il évite aussi de se disperser dans la prise en compte de toutes sortes de grandeurs et des divers problèmes qui s'y rattachent. La droite graduée constitue donc, dans mon dispositif, l'outil privilégié de l'articulation entre un fonctionnement physique et un fonctionnement sémiotique.

Mon dispositif d'enseignement des rationnels est la conséquence de trois renoncements par rapport aux ingénieries antérieures :

1. renoncer à l'expression fractionnaire pour **introduire** les rationnels ;

2. renoncer aux références exclusivement physiques pour **introduire** les problèmes rationnels ;

3. renoncer aux rationnels-mesures pour **introduire** les premiers objets rationnels.

Les deux premiers points ont été amplement justifiés lors de la conférence. Le troisième a été remarqué par nombre d'auditeurs.

Il s'agit en effet d'un choix fondamental, les rationnels étant introduits, au moyen des droites graduées, comme des rapports et non comme des mesures, ainsi que le montrent les exercices de Gradu4 d'ORATIO (Figure 9, annexe 4).

Trois types de justifications permettent de valider ce choix.

Justification théorique

La diversité des acceptions d'un rationnel (mesure – comme dans 3/4 l –, rapport scalaire – comme dans l'agrandissement d'une figure par 7/4 –, rapport exprimé au moyen d'unités composées – vitesse, débits, mélanges...) relève de la **physique** de la notion, pas de sa **mathématisation** qui produit un unique objet, un nombre rationnel, exprimable au moyen de divers registres. Conformément aux principes de séparation / articulation, il importait donc de proposer l'étude d'un tel objet, non édulcoré pour la circonstance, dans un système permettant des articulations avec l'univers physique et la totalité des problèmes rationnels qu'on y rencontre (voir ci-dessus). Il se trouve que la droite graduée, à condition d'y inscrire des rapports et non des mesures, permet de transcrire tous ces problèmes dans leur spécificité et de les résoudre. Ainsi entendue (moyen d'expression de rapports) la droite graduée est donc bien un outil privilégié de la mise en œuvre des principes de base (séparation et articulation) de notre dispositif.

Justifications empiriques

La rapidité (deux mois après le début de notre enseignement en ce qui concerne l'évaluation papier / crayon évoquée en annexe 5) avec laquelle de bons à de très bons résultats ont été obtenus, tant lors des passations logicielles (annexe 4) que lors des évaluations papier / crayon (annexe 5), établissent la faisabilité d'un tel projet.

Justification "physique"

Une introduction des rationnels par les mesures (de longueurs en l'occurrence) n'est pas concevable dans un système d'expression géométrico-physique. Dans un tel système, sitôt une unité commune choisie, la possibilité de comparer (et la comparaison occupe une place privilégiée dans mon protocole d'investigation des registres rationnels) physiquement deux rationnels en comparant les longueurs des segments à l'extrémité desquels ils s'inscrivent, shunte les procédures de comparaison basées sur les opérations fondatrices de reports et de subdivisions, les seules qui soient reproductibles et généralisables, et donc porteuses du sens de la notion. Lors de passations sur Gradu4, j'ai vu des élèves tenter d'utiliser leur règle graduée, pour comparer des rationnels en comparant des longueurs à l'écran de leur ordinateur, avant d'y renoncer suite à la prise de conscience qu'une telle procédure est dénuée de sens dans un système où les objets ne sont pas vus à la même échelle. Ces mêmes élèves ébauchaient, dans de ce renoncement, leur conception d'invariance par changement d'échelle.

BIBLIOGRAPHIE

Adjiage R. & Heideier A. (1998), *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.

Adjiage R. (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse ULP Strasbourg 1, IREM, 7 rue René Descartes 67084 Strasbourg.

Adjiage R. et Pluvinage F. (2000), *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM Vol 20/1 n° 58, pp. 41-87, Éditions la Pensée Sauvage, 38002 Grenoble.

Brousseau G. (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.

Brousseau G. et N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM, Bordeaux.

Douady R. et Perrin-Glorian M.J., (1986), *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

Duval R. (1996), *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, pp. 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

Pitkethly A. & Hunting R. (1996), *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, (pp. 5-37) , Cambridge.

Streefland L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education : A Paradigm of Developmental Research*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

ANNEXE 1 : TRAITEMENT RHETORIQUE ET FRACTIONNAIRE D'UN MEME PROBLEME RATIONNEL

Les élèves comparent l'épaisseur de deux feuilles de papier, chacune issue d'un tas différent, connaissant l'épaisseur et le nombre de feuilles de chaque tas (dans un tas donné, les feuilles sont de même épaisseur). Ce problème est destiné à la construction, par les élèves, de la notion de rationnel-mesure.

Un traitement rhétorique du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

Propos d'un élève (cité par Guy Brousseau, thèse,1986, p. 141) à propos d'un papier X :

« 60 f[euilles] ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A [*un des types de papier étudiés auparavant*], on avait trouvé pour A (3f ; 1 mm) » – sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm".

Un traitement fractionnaire du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

$\frac{1}{3}=\frac{20}{60}$ or $\frac{20}{60}>\frac{7}{60}$ donc $\frac{1}{3}>\frac{7}{60}$

ANNEXE 2 : GRADU5 ET LA DEMARCHE EXPERIMENTALE

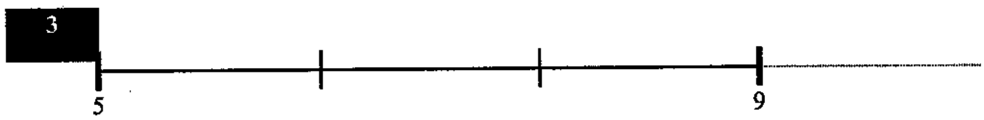


Figure 3 : déposer 8 dans un contexte peu favorable

Ressource principale : saisir un nombre par lequel on souhaite subdiviser chaque intervalle initial (ci-dessous par 3).

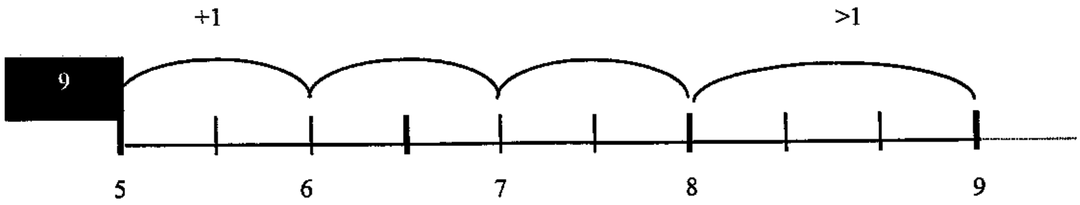


Figure 4 : une tentative qui échoue mais ouvre la voie d'un nouvel essai : modifier soit le regroupement unitaire, soit la resubdivision

Possibilité ouverte d'une évolution vers un constat du type : ce serait plus simple d'attraper le pas unitaire si le nombre total de sous-intervalles était un multiple de **4** (4 = 9 – 5)

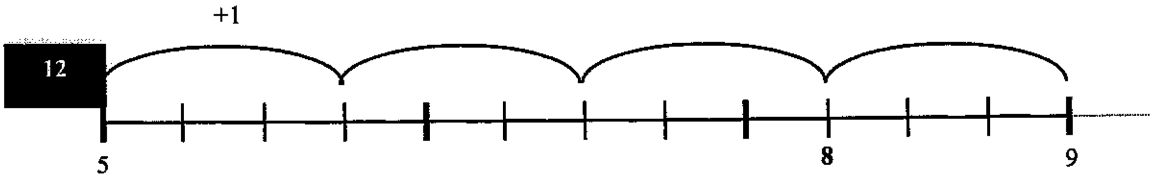


Figure 5 : la procédure experte pour déposer 8

ANNEXE 3 : AGRANDISSEMENT D'UN PUZZLE

1. **Énoncé du problème dans le registre de la langue naturelle** : Agrandir chaque pièce d'un puzzle, sachant qu'un segment de 4 cm du modèle devra mesurer 7 cm sur la reproduction.

2. **Énoncé et traitement d'un sous-problème (calcul de l'image de 5) dans le registre des droites graduées** :

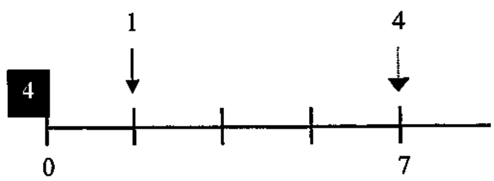


Figure 6 : une expression, sur droite graduée, de la dilatation définie par f(4) = 7

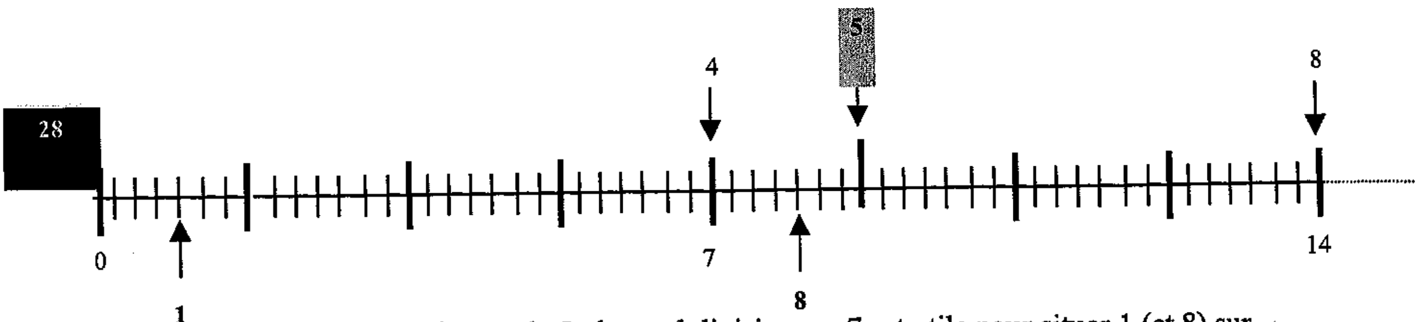
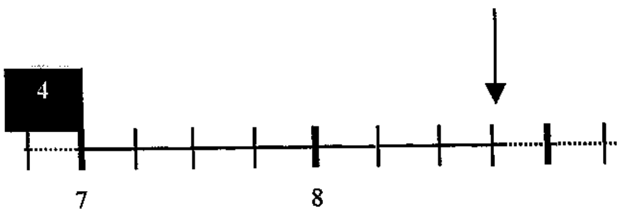
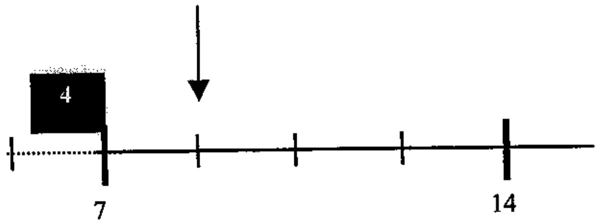


Figure 7 : recherche de l'image de 5 ; la resubdivision par 7 est utile pour situer 1 (et 8) sur l'échelle du bas



L'image de 5 dans le repère [7 ; 8]



L'image de 5 dans le repère [7 ; 14]

Figure 8 : la figure de gauche est un extrait agrandi de la Figure 7; la figure de droite ne nécessite aucune resubdivision et peut donc s'obtenir directement à partir de la Figure 6

3. Une expression fractionnaire de l'image de 5

$$8+\frac{3}{4}=\frac{32}{4}+\frac{3}{4}=\frac{35}{4}$$

Une expression fractionnaire de l'image de 5, obtenue par conversion à partir de l'expression sur droite graduée

ANNEXE 4 : PASSATIONS SUR GRADU4

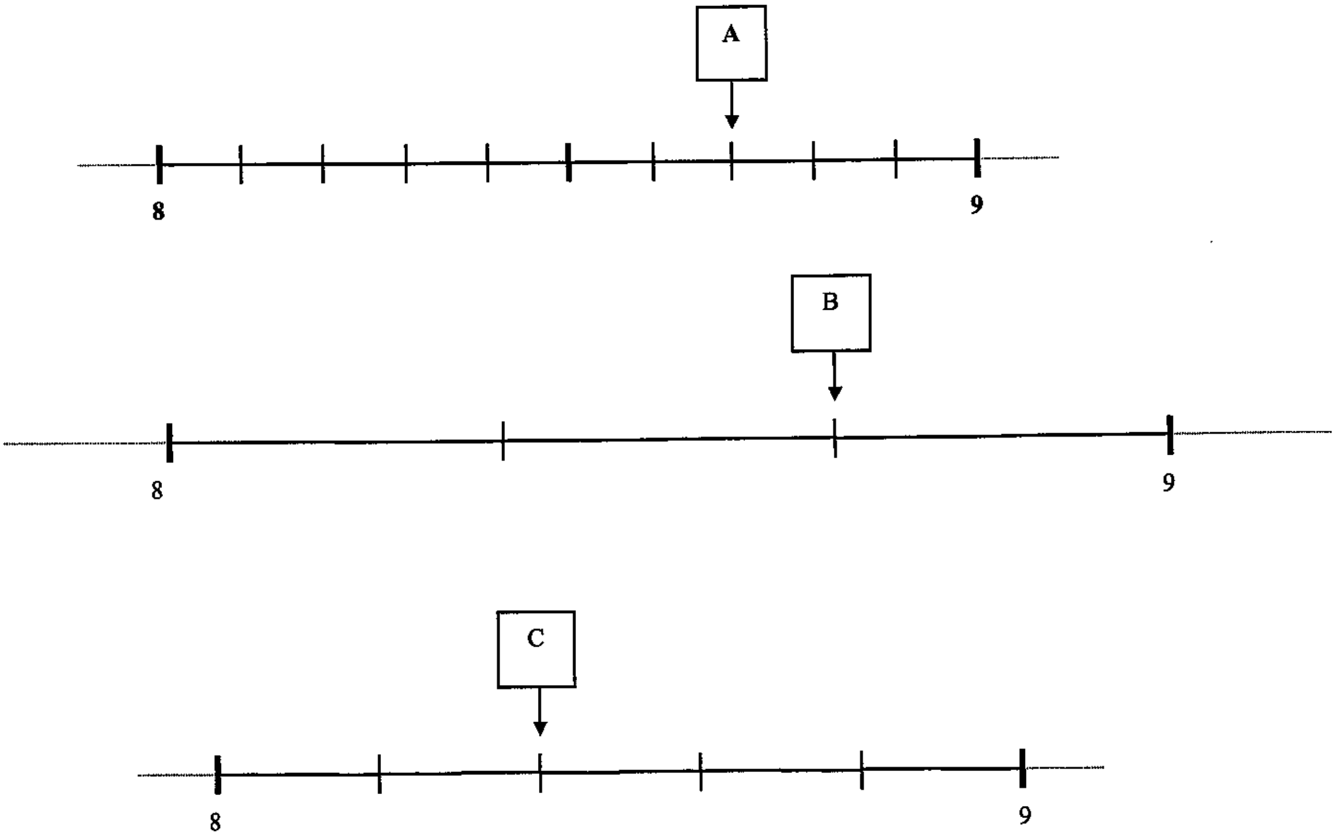


Figure 9: un exemple d'exercice posé par Gradu4, "*ranger A, B, C, du plus petit au plus grand*"

	Réussites	Echecs	TMoy	TMin	TMax
Anjusa	39 **(70%)**	17	36''	19''	1'41''
Jedafa	28 **(82%)**	6	1'3''	14''	3'17''
Joguima	48 **(89%)**	6	44''	18''	1'50''
Laechaje	49 **(79%)**	13	36''	16''	1'7''
Nasej	37 **(80%)**	9	48''	16''	1'49''
Nimajub	19 **(95%)**	1	1'13''	34''	2'5''

Olietc	44 (79%)	12	40''	17''	1'48''
Vicora	22 (92%)	2	1'26''	26''	4'12''

Tableau 1 : résultat des passations sur Gradu 4 du 26/09/97 (Début du CM2)

ANNEXE 5 : UN ITEM EXTRAIT DES EVALUATIONS PAPIER / CRAYON

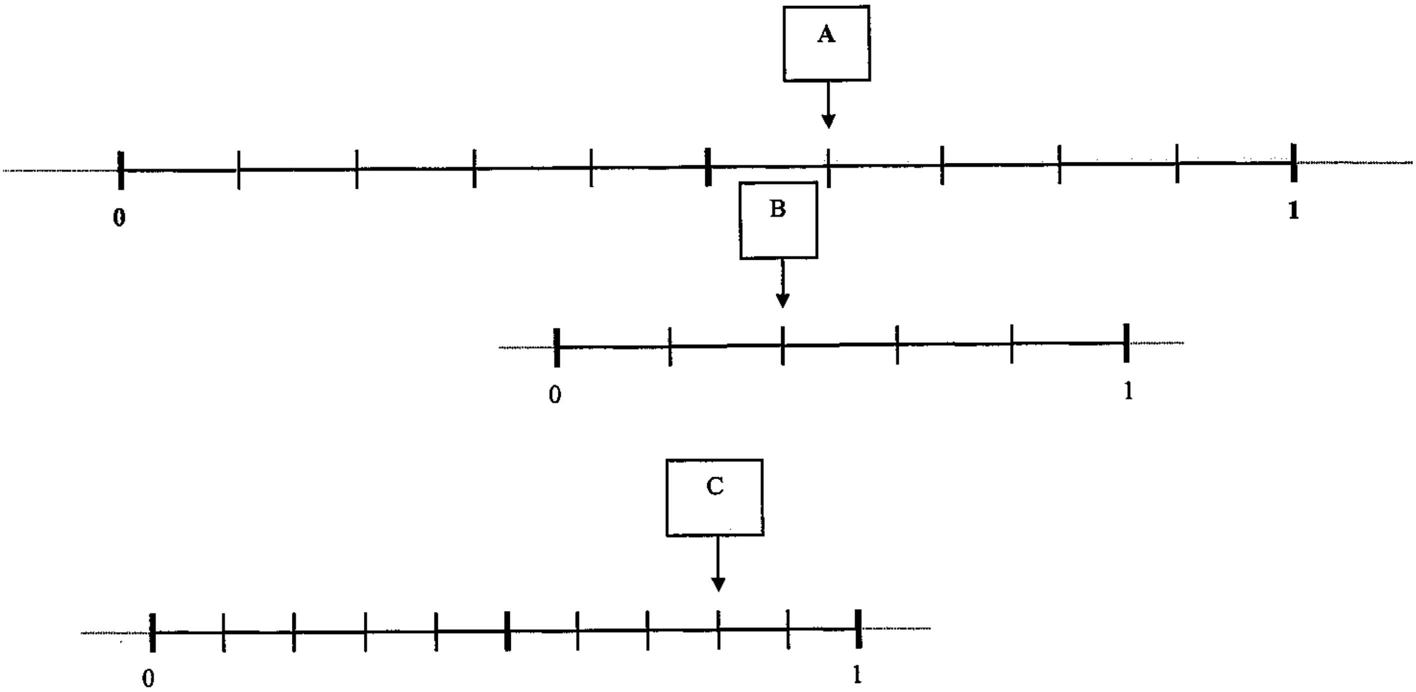


Figure 3 : extraite de l'évaluation papier / crayon 97 (fin CM1, 75% de réussite)