

VERS UNE ARTICULATION

THEORIE DES SITUATIONS / THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Annick Flückiger³⁴

Université de Genève

Ce texte reprend, dans ses grandes lignes, notre travail de thèse intitulé "**Genèse expérimentale d'une notion mathématique: la notion de division comme modèle des connaissances numériques**". La méthode utilisée dans la recherche conduite est expérimentale, au sens d'une mise à l'épreuve des faits, d'une vérification des hypothèses formulées. Il s'agissait, dans le cadre d'une classe de cinquième primaire, d'étudier, à la lueur de la théorie des situations, les phénomènes observés lors de la genèse provoquée de connaissances numériques. La question théorique sous-jacente est celle de la pertinence, dans les analyses, de l'articulation de la *Théorie des Champs Conceptuels* de Vergnaud avec la *Théorie des Situations* de Brousseau, cette dernière servant de cadre de référence à la mise en place expérimentale. La notion de schème - telle qu'elle est définie à la suite de Piaget par Vergnaud - en lien avec celle de *classes de situations* est au cœur des analyses faites. Le concept de *contrat didactique* dans son articulation avec le *contrat de recherche*, ainsi que le concept de *mémoire didactique* sont travaillés ici avec une centration sur le *sous-système élève*, point d'entrée privilégié de notre étude du système didactique.

Après avoir explicité quelque peu la logique sous-jacente à cette recherche, nous préciserons les questions et modèles travaillés. La deuxième partie permettra de décrire la mise en place expérimentale. Enfin, après avoir fait état des analyses et résultats obtenus, nous proposerons de questionner, à propos de la construction des connaissances numériques, la modélisation faite par Brousseau du fonctionnement des connaissances en situation a-didactique.

I. LOGIQUE GENERALE DE LA RECHERCHE

Il s'agissait pour nous dans cette recherche, de s'intéresser à la construction des connaissances, à l'élaboration d'une rationalité mathématique à propos du numérique à l'école

³⁴ annick.fluckiger@pse.unige.ch

primaire. Nous sommes dans une perspective didactique, la centration se fait donc sur les conditions de l'apparition et de l'évolution des connaissances et ce, dans le cadre scolaire, donc en référence à des savoirs organisés, socialement identifiés. Le choix fait a été celui de la division, division qui ne sera approchée dans cette expérience que du seul point de vue numérique; donc sans problème formulé avec des mots et/ou faisant référence à des situations concrètes. Les élèves de cette expérience, élèves de cinquième primaire d'une école genevoise, n'ont pas reçu préalablement d'enseignement spécifique quant à un algorithme de division. L'entrée est celle de la définition d'une opération inverse de la multiplication; ce n'est bien sûr pas formulé dans ces termes aux élèves, ceux-ci "savent" par exemple que douze divisé par quatre égal trois parce que trois fois quatre égal douze. Il est clair que même sans avoir scolairement étudié un algorithme de division, les élèves ne sont pas culturellement ignorants de son existence, et en particulier la forme du diagramme usuel, présent dans les manuels scolaires, ne leur est pas totalement étrangère.

Etudier, pour les élèves, la *notion* de division (au sens étymologique de *apprendre à connaître*) à partir de la problématisation de son calcul, et étudier à travers cela, du point de vue du chercheur, la construction des connaissances numériques dans le champ conceptuel de la division, tel est, sommairement résumé, le double objectif de la mise en place expérimentale.

1. Pourquoi la division?

Trois raisons peuvent être invoquées. La première tient à la richesse même de cette notion mathématique qui contient en elle-même la possibilité de retravailler l'ensemble des connaissances numériques abordées antérieurement à l'école primaire, qu'il s'agisse des différents algorithmes déjà étudiés mais aussi bien sûr, de la numération, des propriétés de décomposition des nombres, des propriétés des opérations... La division offre également une entrée privilégiée pour questionner l'univers numérique; notons que cette année de cinquième primaire est, en Suisse romande, l'année d'un travail spécifique sur les nombres décimaux. Relativement aux connaissances numériques, penser la division comme "modèle" est à la fois comme pour tous les modèles, producteur et réducteur car ne présentant qu'un certain point de vue. En tant que condensé des connaissances numériques, la division et son calcul vont permettre de se centrer sur une problématique exclusivement numérique sans faire référence à priori, à des pratiques sociales externes.

La deuxième raison motivant ce choix est l'extrême richesse des travaux déjà faits³⁵, qu'il s'agisse de travaux à connotation historique ou de travaux didactiques. L'analyse à priori se trouve enrichie de l'apport de ces travaux. Nous adhérons là à l'importance de la capitalisation des résultats de recherche et sommes dans une logique de continuité et non d'originalité quant au thème choisi; c'est également ce que nous allons mettre en évidence dans le point suivant.

Le troisième motif ayant conduit à travailler la notion de division, peut s'exprimer en termes de filiation relativement aux travaux initiés par une recherche FNRS (Fonds National de Recherche Scientifique), recherche effectuée de 1989 à 1991 à Genève sous la responsabilité de Brun, avec Conne et Retschitzki. Ces recherches ont permis d'étudier les caractéristiques propres à l'algorithme de division. Brun et Conne ont ensuite analysé les erreurs des élèves lors de l'effectuation d'un calcul écrit de division, mettant en évidence l'existence d'erreurs systématiques, et proposant une classification de ces erreurs. Cette classification est faite en regard de la notion de *schème*. En analysant les erreurs comme des formes transitoires de connaissances, Brun et Conne ont été amenés à penser les erreurs comme des traces de la construction progressive d'un "schème-algorithme". Ils ont mis en évidence que les erreurs manifestent une connaissance à l'œuvre et sont les produits de certains fonctionnements des schèmes; ils ont par là ouvert la voie d'une analyse des productions des élèves en regard du concept de schème tel qu'il est défini dans la théorie des champs conceptuels par Vergnaud.

C'est cette filiation là et les apports de ces travaux qui nous ont permis de penser notre recherche, de penser l'analyse des productions d'une classe d'élèves en regard du concept de schème, productions recueillies dans une mise en place expérimentale se référant à la théorie des situations.

2. Questions et modèles travaillés

Notre étude est centrée sur le sous-système élève. Bien sûr, la perspective systémique qui est celle de la didactique des mathématiques exclut que ne soient pas analysés les deux autres pôles du triplet modélisant usuellement le système didactique, à savoir le savoir et le pôle enseignant. Nous centrer sur le pôle élève, dans une recherche effectuée sur une longue durée dans une classe entière, signifie une analyse des données restituant toute l'importance de la classe en tant qu'entité d'échanges, de débats, d'interactions à propos du savoir en jeu. C'est la force de la théorie des situations de permettre cela. La prise en compte du cognitif en didactique, objet de

³⁵ Nous faisons là référence aux travaux de Brousseau bien sûr, à ceux de Guinet (1978 & 1979) concernant l'"*Histoire des techniques opératoires*" ainsi qu'à différentes thèses, en particulier celles de Mopondi 1986, Banwitiya 1993, Guinet 1994. Les travaux de Brun et Conne à Genève sont traités spécifiquement dans le paragraphe suivant

débat dans la communauté didactique, nous semble quant à nous essentielle à la compréhension des phénomènes de conceptualisation en situation didactique; cela implique bien sûr une mise en relation constante avec les conditions didactiques initiatrices de ces phénomènes. En résumé, la théorie des situations charpente conceptuellement cette recherche, la théorie des champs conceptuels avec la notion de schème est au cœur des analyses centrées sur le sous-système élève. La pertinence de cette articulation est une des hypothèses de cette recherche.

Cette double approche permet une entrée dans la question du sens des connaissances qui rompt avec la dichotomie habituelle opposant sens de la division lié à des problèmes "concrets" et algorithme de calcul. Il est d'usage, à l'école primaire, d'attribuer au travail sur les algorithmes de calcul écrit, une fonction de "drill" lui déniait par là un intérêt dans la formation des connaissances mathématiques. Nous centrer sur le numérique à l'exclusion de problèmes formulés avec des mots et montrer, de par les analyses, la pertinence à l'intérieur de l'univers mathématique, des questionnements initiés par les élèves, la variété des invariants mis en jeu, la richesse des objets rendus sensibles par les élèves ... permet de mettre en évidence un aspect du "sens" trop souvent négligé dans l'enseignement primaire. Au nom de la préservation du sens, il y a nous semble-t-il un aplatissement entre sens et référence à des situations de la vie courante, aplatissement dommageable relativement aux questions internes aux mathématiques. L'hypothèse faite est la suivante, la théorie des situations qui, depuis l'origine, se veut une théorie des rapports entre sens et situation (Artigue, 1988) est suffisamment puissante pour qu'une ingénierie adéquate soit productrice de sens y compris là où on l'attend le moins, dans le travail des algorithmes de calcul à l'école primaire. Notons que la problématique même de l'algorithmisation d'un calcul est une problématique tout à fait intéressante, non travaillée à ce niveau de l'enseignement, mais nous ne nous sommes pas donnés ici les moyens de la traiter réellement. Nous reprenons de Brousseau (1988) la définition du sens d'une connaissance en tant que tissu de raisonnements et de preuves, de reformulations et de formalisations, de modèles implicites qui lui sont associés. Dans le sens d'une connaissance, sont incluses, dit Brousseau, les questions auxquelles cette connaissance aide à répondre et celles qu'elle permet de poser. C'est dans cette perspective qu'est travaillée la question du sens dans cette recherche.

II. ASPECTS METHODOLOGIQUES

Au plan méthodologique deux caractéristiques doivent être soulignées; d'une part, la durée (il s'agit d'une étude longitudinale sur une année scolaire en ce qui concerne le corpus principal analysé), d'autre part, le type de collaboration établi avec l'enseignant.

1. Mise en place expérimentale

Après une année d'observations préalables nous permettant de nous familiariser avec l'épistémologie personnelle du maître, l'expérimentation proprement dite porte sur une classe entière de cinquième primaire. Les élèves sont alors confrontés à des problèmes exclusivement numériques de division, calculs proposés avant tout enseignement d'un algorithme adéquat, alors que les élèves ne connaissent, scolairement parlant, que l'équivalence entre multiplication et division dans les cas simples relevant des tables³⁶.

Les observations concernent la totalité des séances consacrées à la notion de division, soit près de cinquante séquences de classe³⁷. Le corpus d'analyse est constitué des protocoles des séances observées et enregistrées, ainsi que de l'ensemble des traces écrites du travail effectué, qu'il s'agisse des productions des élèves ou de celles du maître qui écrit au tableau. Les séances sont de diverses natures: séance de calcul, journal, débat, tournoi. Sans entrer dans le détail de chacune de ces séances, il semble utile de préciser que les séances dites "de calcul" sont de loin les plus nombreuses et que les séances dites "journal" font référence au dispositif mis en place par Sensevy dans son travail de thèse à propos des fractions. Ce dispositif que nous avons intégré et transformé pour l'articuler à notre problématique "division" s'est avéré robuste, et particulièrement pertinent quant à la prise en charge par les élèves de l'avancée du temps didactique; il a, de fait, été décisif dans notre expérimentation. Ce dispositif a, dans son articulation avec les autres séances, rendu possible, *dans la durée*, la mise en oeuvre du processus de dévolution indispensable à l'élaboration d'une "macro-situation a-didactique". Même si cette expression est quelque peu abusive en regard de la théorie des situations, elle est significative des caractéristiques essentielles que nous voulions voir émerger dans cette recherche, en particulier le fait que tout au long de l'année, le maître ne validera ni n'invalidera, à propos des divisions, les résultats obtenus par les élèves. Cela ne signifie en aucun cas que le maître renonce à enseigner, cela ne signifie pas que l'évolution des connaissances mises en jeu est laissée à la seule inventivité des élèves, mais cela signifie, et c'est le pari fort qui est fait, que la mise en place d'une situation a-didactique sur le très long terme est possible par le seul jeu de variables didactiques. Cela signifie qu'un choix judicieux de ces variables et une gestion des séances adéquate permettent que les élèves soient eux-mêmes producteurs de questions mathématiques pertinentes relativement au savoir mathématique en jeu.

³⁶ "table" (de multiplication...) en France, "livret" en Suisse Romande.

³⁷ Voir en annexe la liste des séances enregistrées en 5^{ème} primaire.

Les variables didactiques en question sont ici les variables numériques déterminées sur la base des travaux antérieurs notamment ceux concernant les algorithmes de division, ce sont aussi les variables de commande modifiant, sur la base d'analyses des procédures des élèves, la nature des séances proposées: séance de calcul, séance d'écriture dans le "Journal", séance de débat à partir d'une question antérieurement rendue sensible, tournois de méthodes.

Les décisions quant à l'activation des différentes variables sont prises en fonction des analyses faites des séances précédentes: cette articulation est un élément méthodologique important, nous y reviendrons dans le point suivant. Les séances de calcul constituent en elles-mêmes des "micro - ingénieries" pensées et temporellement structurées relativement à la théorie des situations . Il s'agit dans chaque cas de proposer un calcul de division et de faire en sorte, de par les conditions didactiques mises en place, que ce calcul devienne pour l'élève ce que nous appellerons une "*division-problème*". Ce qui apparaît, dans un premier temps, comme un simple calcul pour lequel il s'agit de trouver un nombre résultat, doit progressivement s'inscrire dans un processus de recherche d'un algorithme, dans un processus d'élaboration de connaissances concernant le numérique. La théorie des situations met en avant l'importance, pour que l'élève donne du sens à son activité mathématique, de faire d'abord surgir le besoin d'une nouvelle notion, d'un nouveau concept, avant d'enseigner des solutions à des problèmes non encore existants pour l'élève. A l'expression "résoudre des problèmes" Brousseau préfère celle de "s'occuper de problèmes" précisant l'importance du questionnement produit par celui qui travaille le problème.

«Savoir des mathématiques ce n'est pas seulement apprendre des définitions et des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer; nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe des problèmes mais on oublie parfois que résoudre un problème n'est qu'une partie du travail; trouver les bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions» (Brousseau 1986/1994, p49).

Les problèmes qui vont nous intéresser dans cette recherche vont être présentés aux élèves sans texte, uniquement par la donnée de deux nombres et d'un signe de division inscrit entre ces deux nombres, données problématisées par l'environnement didactique. De même que le sens n'est pas contenu tout entier dans un problème "concret" aussi emblématique soit-il, le sens dans le cas qui nous occupe n'est pas issu des seules données numériques mais de l'ensemble de la situation incluant les schèmes activés dans le milieu co-construit - pour reprendre la formulation de Mercier - par le maître et les élèves. Il est aussi conditionné par le contrat didactique bien sûr, mais aussi par le contrat de recherche existant de par l'expérimentation. Nous reviendrons ultérieurement sur cet aspect. C'est donc bien une analyse intégrant les conditions mises en place dans la situation didactique et non pas un relevé des procédures relativement aux seules données numériques qu'il s'agira d'effectuer.

2. Une gestion collaborative de la recherche

Rappelons qu'il ne s'agit en aucun cas d'initier ou de valider une quelconque méthode d'enseignement de la division. La mise à l'épreuve de constructions théoriques nécessitant la présence en classe des chercheurs sur une longue durée, ne peut se faire valablement sans une prise en compte, dans les analyses, des contraintes institutionnelles de l'enseignant et de son épistémologie personnelle. Cela suppose également, quand il s'agit d'un sujet comme celui ici choisi de la division et pour lequel l'impact culturel ne peut être négligé, que soient informées les familles de l'existence d'une recherche dans la classe ; ce qui a été fait.

Concernant les contraintes de l'enseignant, il s'agit à la fois d'être suffisamment familier avec le fonctionnement habituel de ce dernier en classe, pour lui laisser l'opportunité de gérer sa classe pendant les séances observées et ce, en combinant contraintes de la recherche (notamment quant au savoir au jeu) et gestion usuelle pour lui. Notre choix a été de commencer la recherche en classe par une première séance relativement familière à l'enseignant, à la fois quant à son contenu et quant à sa forme.

séance 1

- | | | |
|----|--|--|
| 1 | LE MAÎTRE- j'ai déjà eu / j'ai déjà eu plusieurs fois l'habitude de vous
montrer des ... de vous mettre quelque chose au tableau et de vous
laisser vous débrouiller aujourd'hui on va faire de même | |
| 2 | LE MAÎTRE - je mets ça | |
| 3 | STE- je sais déjà la réponse | |
| 4 | LE MAÎTRE- [qui peut lire ? | |
| 5 | STE- lire? | |
| 6 | LE MAÎTRE- qui peut lire ce qui est écrit/// STE | |
| 7 | STE- neuf cent nonante divisé par neuf | |
| 8 | LE MAÎTRE- est-ce que quelqu'un peut lire / ou veut lire d'une autre
manière / a envie de lire ceci d'une autre manière/es | |
| 9 | ES- gé gé zéro | |
| 10 | (rires) | |
| 11 | ES- ça ressemble | |
| 12 | LE MAÎTRE- dans les préliminaires j'ai dit qu'on faisait une recherche
de quoi? | |
| 13 | élèves- de mathématique | |
| 14 | LE MAÎTRE- de mathématique/ alors ça ressemble à des g mais ce n'est
pas des g // est-ce qu'on est d'accord avec ce que propose STE? | |

990 : 9

D'autres aspects des contraintes qui pèsent sur l'enseignant sont à prendre en compte par les chercheurs: les contraintes du curriculum, le suivi des élèves individuellement dans leurs apprentissages notamment en ce qui concerne les élèves en difficulté, etc.. En ce qui concerne la division, tous ces aspects seront traités collectivement par l'équipe de recherche, équipe qui, pendant la durée de la recherche inclut le maître de la classe.

L'organisation générale de l'expérimentation fait se succéder des boucles hebdomadaires comprenant, tout au long de l'année, séances en classe (une, deux ou trois) et séance de concertation entre enseignant et chercheurs. Le maître doit être à la fois enseignant pendant les séances faites en classe, et chercheur lorsque, de façon hebdomadaire, les analyses des productions des élèves sont faites "on line" en vue de décider du contenu et de l'organisation des séances suivantes. C'est en effet au cours de ces séances qu'il est décidé, en collaboration, d'activer telle ou telle variable.

Le contrat de collaboration établi entre maître et chercheur pour la durée de la recherche peut être synthétisé comme suit³⁸ (voir figure 1):

Phases de la recherche		Chercheur	Enseignant
<i>Temps de l'expérimentation</i>			
Séances hebdomadaires de concertation enseignant - chercheurs	↗ choix - décisions-anticipations ↑↓ ↘ analyses "on line"	Collaboration et décisions communes Diffusion des savoirs didactiques Diffusion des savoirs d'expérience de l'enseignant	
Séances en classe	Calcul - Journal - Débats...	Le chercheur est observateur	L'enseignant est interprète des décisions prises
<i>Temps des analyses</i>			
Travail d'analyse final	Analyse de l'ensemble des données	Le chercheur est théoricien	

Figure 1

Associé en tant que chercheur pendant les séances de concertations hebdomadaires et les analyses "on line", le praticien-enseignant interprète, pendant le déroulement des séances en classe, les résolutions prises en commun par l'équipe de recherche. Il est alors amené à prendre des décisions propres à la gestion de la classe, décisions qui seront elles-mêmes ensuite, prises en compte dans les analyses. Ce n'est que pendant les analyses faites après-coup, lorsque l'ensemble

³⁸ N'apparaît pas dans ce tableau le travail préalable fait avant que soit mise en place l'expérimentation proprement dite. Notons que dès les observations préalables le maître a été associé au projet par le biais de réunions régulières de concertation.

du corpus est rassemblé, lorsqu'il s'agit d'analyser la totalité du corpus constitué, lorsqu'il s'agit de confronter les données recueillies aux modèles étudiés, que l'enseignant est absent du processus.

Les séances faites en classe sont conçues, nous l'avons dit, comme des micro-ingénieries. La théorie des situations sert de cadrage théorique et la gestion de ces séances prend en compte les différents fonctionnements des connaissances modélisés par Brousseau. Il s'agit donc pour le maître de gérer le déroulement des séances en rendant possibles des phases d'action et de communication, phases qu'il s'agira de repérer en termes de situations d'action, de formulation et de validation. La clôture des séances est un moment délicat pour le maître puisqu'il s'agit alors de permettre que la macro-situation didactique garde un caractère a-didactique et que le processus de dévolution ne soit pas rompu. Ceci s'avère d'une gestion délicate compte tenu de la pression exercée par les élèves qui s'attendent au moins en fin de séance, et conformément au contrat usuel, à ce que le maître valide ou invalide les résultats obtenus. C'est dans la durée que doit se construire, pour les élèves, à partir de l'enchaînement des "divisions-problèmes" et des autres séances du dispositif, un questionnement pertinent relatif à la division.

III. LES RESULTATS DES ANALYSES

Procédures élaborées par les élèves et interactions en classe forment le corpus d'analyse, le schème est l'unité d'analyse privilégiée pour étudier les productions des élèves. Ces productions sont interprétées en terme de procédures relativement aux conditions didactiques de leur émergence. Après avoir traité du rôle du maître, nous présenterons, sans entrer dans le détail des analyses faites, les résultats obtenus quant à la question du contrat de recherche et de son articulation avec le contrat didactique, ainsi que quelques apports clés de la notion de schème dans une lecture didactique d'une situation d'enseignement. Un dernier point sera consacré à la notion de mémoire didactique relativement au sous-système élève.

1. Gestion du maître

Le tableau d'ensemble des séances faites en classe est donné en annexe. Il apparaît que, très rapidement, au bout de quelques séances de calcul, les procédures des élèves stagnent, se figent, chacun se spécialisant, en fonction des nombres donnés, dans un traitement reproduit plus ou moins à l'identique: décomposition des nombres donnés, transformation en multiplication "à trou", etc. Cela montre, s'il en était besoin, que la seule inventivité des élèves ne suffit pas à faire avancer le temps didactique et que ce sont bien les conditions faites de par l'activation de

variables adéquates, de par la gestion de la situation par le maître qui peuvent rendre l'élève *chronogène* ainsi que le montre Sensevy dans ses travaux (Sensevy 1994,1996).

Dans l'analyse du rôle du maître, deux dimensions sont à prendre en compte, l'une concerne les prises de décision avant la séance, l'autre la gestion de la classe pendant le déroulement de la séance. La première relève dans notre cas du dispositif expérimental puisque les décisions, nous l'avons dit, sont prises par l'équipe de recherche (incluant le maître) sur la base du projet initial et des analyses des procédures des élèves antérieurement relevées. Il s'agit alors de déterminer le type de séance à mettre en œuvre: division-problème (et avec quelles données numériques), activité d'écriture dans le journal de division, débat ascendant, tournoi des méthodes. La gestion de la classe même relève du rôle usuel du maître qui enseigne, et nous retrouvons là les caractéristiques de l'action du maître dans sa classe³⁹. Que fait le maître dans le cas qui nous occupe?

Sur l'ensemble de la macro-situation, les traits essentiels à relever sont ceux de durée, de répétition et de dévolution. Dans le texte de son ouvrage, "LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE", Chevallard met en évidence que "la distinction de l'enseignant et de l'enseigné s'affirme [...] spécifiquement, non par rapport au savoir, *mais par rapport au temps comme temps du savoir*⁴⁰" (Chevallard, 1985, p 72) ; ils ont, dit-il, des rapports différents à la durée, ce qui les constitue comme tels en tant que maître et élève. Le dispositif de la recherche est conçu pour travailler cette dimension du rapport au temps didactique des élèves. Le maître, par ses indications, fait en sorte que l'élève soit légitimé à anticiper et à relire le passé; la notion de schème qui inclut relecture du passé et anticipations, va permettre de lire en quoi les élèves deviennent progressivement initiateurs dans l'avancement du temps didactique.

Dès la première séance, le maître met en place une structure temporelle d'action: un calcul est donné, des réponses sont proposées puis discutées à la fois du point de vue du *résultat* produit et du point de vue de la *méthode* utilisée. Le débat est le point d'ancrage de la dévolution de l'avancée du temps didactique, c'est un point clé, et le maître, dès la première séance, donne des indices des règles du jeu qui doit être joué tout au long de l'année.

séance 1

35	<i>LE MAÎTRE- si / si vous avez // là l'idée on est bien d'accord c'est que ES montre comment elle a fait son raisonnement / donc on voit // et si vous avez des remarques par rapport à son raisonnement // dans la mesure où vous n'avez pas compris / euh... vous avez le droit de le faire</i>
----	--

³⁹ A ce sujet, voir l'identification des gestes et la modélisation de l'action du professeur dans Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000.

⁴⁰ En italique dans le texte

savoir / vous levez la main et vous dites tiens là j'ai pas compris pourquoi tu fais comme ça [...]

- 147 élève- il y en a beaucoup qui n'ont pas répondu
 148 NA- je dis pas 110
 149 LE MAÎTRE- NA elle a le droit de dire // je veux dire ça c'est aussi une réponse NA elle dit moi je dis pas 110 / j'ai rien à proposer mais je dis c'est pas 110 / pour moi c'est aussi une réponse parce que on peut dire / ben pour moi je sais que ça c'est pas juste / on a le droit de dire ...j'ai pas eu le temps de finir mais je sais que ... il faut pas se fermer la porte/ vous avez le droit de lever la main même si vous n'avez pas quelque chose de précis à me dire /vos impressions sont déjà importantes //si elle pense que c'est pas juste elle a le droit de le dire et c'est aussi une réponse/ on n'est pas obligé de déboucher sur un nombre comme réponse

A cette occasion le maître précise un élément important: ce qui est demandé c'est l'expression, la communication et non uniquement le résultat comme il est d'usage de le penser dans une situation qui, à priori, se présente comme une situation de calcul. Pour ce faire, il définit un nouveau but, il donne ainsi des indications sur le contrat didactique à l'œuvre dans cette "recherche". La situation d'action est finalisée par la recherche d'un résultat "combien ça fait", la situation de communication est finalisée elle, par l'explicitation de sa propre action ou par le jeu des questions, ou des évaluations adressées à autrui.

Progressivement, par la structuration temporelle donnée par le maître ainsi que par des indications topogénétiques et chronogénétiques, le maître permet l'élaboration d'un milieu adéquat. Par ses relances, le maître conduit les élèves à se questionner mutuellement, il met en évidence des contradictions (par exemple en affichant la liste des différents résultats obtenus et annoncés) et dévolue aux élèves la responsabilité de gérer ces contradictions.

séance 1

- 145 AL- moi je suis plutôt d'accord avec ES
 146 LE MAÎTRE- tu es plutôt d'accord avec ES // bon /// vous avez vu qu'on a deux réponses possibles alors

De par son refus à valider une réponse, une prise de position, il élabore un contrat didactique inhabituel en ce qui concerne le champ de la division; les élèves jouent volontiers le jeu pendant cette première séquence mais la résistance et la pression exercée par les élèves se font plus fortes à l'issue de la première division-problème lorsque les élèves réalisent que, même en fin de séance, le maître ne tranchera pas.

séance 1

- 150 élève- c'est quoi le vrai résultat
 151 LE MAÎTRE- pardon?
 152 élève- c'est quoi le vrai résultat
 153 LE MAÎTRE- pourquoi tu dis le (la voix appuie) vrai résultat
 154 élève- le vrai résultat de la division
 155 LE MAÎTRE- ben si j'en crois le tableau c'est 109 ou 110 // c'est ce que vous m'avez dit en tout cas

Notons que cela conduira ultérieurement à un débat, inhabituel à ce niveau d'enseignement et fort intéressant, sur l'unicité des résultats dans les calculs.

Le maître n'est pas absent, et de par la gestion qu'il fait, il restreint le champ des investigations en intervenant, comme au tout début de la première séance, pour que l'étude reste dans l'univers mathématique, ou en validant explicitement ce qui n'appartient pas à l'objet de l'étude en cours. Par exemple, en validant l'exécution d'un algorithme de multiplication il indique à la fois que :

- le but de la recherche ne concerne pas l'algorithme de la multiplication, la connaissance visée n'est pas celle-ci, la multiplication en tant que schème-algorithme est considérée comme disponible puisque pour cet objet là, le maître abandonne sa posture dévoluant,
- chronogénétiquement la question de la multiplication est dépassée il est donc possible de s'appuyer sur cette connaissance pour en faire émerger de nouvelles,
- topogénétiquement l'algorithme de la multiplication est dans le champ des connaissances à mettre en œuvre puisque le maître lui-même est prêt à jouer le rôle de personne - ressource concernant cette question, est prêt à reprendre la position classique du maître qui dit le vrai d'une réponse.

Il balise ce faisant, le champ d'investigation des élèves, indiquant en négatif ce qui n'est pas l'enjeu de la recherche.

Nous l'avons dit, l'unité d'analyse privilégiée pour étudier les productions des élèves est le schème. Vergnaud donne du schème différentes définitions. L'une d'elle, donnée au cours de la VIII^{ème} école d'été de didactique des mathématiques à Saint-Sauves d'Auvergne (août 1995) bien qu'annoncée comme «le plus souvent inutilisable» par l'auteur nous semble quant à nous judicieuse pour penser l'adaptation du sujet-élève à la situation en l'occurrence didactique. C'est celle d'une «fonction temporalisée de l'espace des informations possibles dans l'espace des actions possibles» (Vergnaud, 1996b, p177). C'est bien sur cette dualité informations disponibles - actions possibles, que le maître joue pour mettre en place le milieu adéquat à l'étude visée.

Notons également que, au cours des débats, c'est le maître seul qui garde la maîtrise du tableau et donc de l'uniformisation des symboles attachés aux procédures de calcul décrites par les élèves.

séance 1

- 129 LU- après en bas j'ai mis 90 divisé par 9 / 10 et puis en bas j'avais fait
0 divisé par 9
- 130 LE MAÎTRE- et ça fait ?
- 131 LU- 0 //après j'ai additionné le 100 et le 10
- 132 LE MAÎTRE- 0 tu laisses tomber /// j'écris comme
ça tout le monde comprend?// d'accord///
-
- 160 LE MAÎTRE- moi je sais rien je suis juste un bras
qui transcrit retranscrit vos actions et ma tête est

$900 : 9 = 100$	$\searrow$	110
$90 : 9 = 10$	$\nearrow$	
$0 : 9 = 0$		

Cette expression écrite des procédés verbalisés sert de point d'appui lors des débats mais, bien que constituant un support privilégié, ce n'est pas l'unique référence commune; les élèves font preuve d'une mémoire redoutable des propos échangés et toute modification de position est immédiatement mise en évidence, nous reviendrons sur cet aspect dans le paragraphe concernant la mémoire didactique.

Le jeu du maître est repéré au travers d'interventions qui sont centrées essentiellement sur le but de l'activité, la structuration temporelle de la séquence, les règles du jeu du débat, l'espace des informations disponibles et donc des actions possibles. L'élève est entraîné dans une dynamique qui valorise les échanges entre pairs. Ces échanges sont centrés sur deux dimensions qui vont intervenir dialectiquement tout au long de la recherche, travail du résultat, travail du procédé de calcul. Cette dialectique constitue le fondement de l'élaboration des connaissances numériques en situation didactique.

2. Schèmes et classes de situations

En lien avec la dialectique familier / nouveau, dialectique fondamentale dans le processus d'acquisition des connaissances, Vergnaud élabore une définition du schème en dualité totale avec la notion de situation. Il le définit, dans la théorie des champs conceptuels comme *totalité dynamique fonctionnelle et organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée* (Vergnaud 1990/1996a, 1996b). Il précise que l'invariance dont il est question est celle de l'organisation et non pas celle de l'activité qui elle, dépend des variables de situation et qui de fait sont, pour l'élève, contingentes. Une définition analytique et plus opératoire mentionne quatre composantes du schème:

- un but
- un processus génératif de la conduite qui peut être analysé comme un ensemble de règles d'action, de prise d'information et de contrôle
- un système de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte qui permettent de prélever l'information pertinente et de la traiter.
- des possibilités d'inférence en situation (ajustements, régulations et révisions étant possibles au cours du déroulement de l'activité)⁴¹

Si la notion de *schème* renvoie à celle de *situation*, celle d'*invariant opératoire* (concepts et théorèmes en acte) renvoie aux *objets mathématiques*, à leurs propriétés et relations. A travers les notions de *concept-en-acte* et de *théorème-en-acte* sont différenciés deux critères, celui de la *pertinence* et celui de la *vérité*. Les concepts-en-acte sont tenus pour pertinents et permettent de

⁴¹ Nous reprenons là la formulation de Vergnaud 1999. D'autres versions de la même définition peuvent être relevées notamment dans Vergnaud 1990/1996a et 1996b

sélectionner l'information appropriée compte tenu de la situation, les théorèmes-en-acte sont, dans l'action, tenus pour vrais.

a) Classification des procédures

L'approche en termes de schème permet de prendre en compte la notion de stratégie qui renvoie aux invariants rendus opératoires et aux inférences faites. Cette lecture a permis l'identification de deux grandes classes de procédures fondées sur le traitement initial mis en œuvre en situation par les élèves. L'action initiale peut porter sur le traitement du diviseur, du dividende (ou des deux), c'est la première catégorie des procédures qui engagent le calcul par le traitement des nombres donnés. Les traitements des nombres relevés sont identifiables en tant que décomposition additive, traitement chiffre par chiffre, séquençement du dividende en fonction de sa régularité par exemple. La deuxième grande classe des procédures relevées opère une transformation, non sur les nombres, mais prioritairement sur l'opération. Il peut s'agir d'un tâtonnement multiplicatif, d'une multiplication "à trou", d'une transformation en additions ou soustractions, de l'utilisation d'un algorithme de division.

Nous ne détaillerons pas plus avant cette classification, notons cependant que, compte tenu de l'entrée mathématique choisie, la soustraction n'apparaît pas dans les objets mathématiques rendus sensibles par les élèves. Cela souligne le fait que la soustraction n'est pas d'évidence associée à la division et que son émergence dans le champ conceptuel de la division est étroitement lié aux conditions didactiques de cette introduction. Dans le cas qui nous occupe qui initie le travail de division à partir de la multiplication, c'est l'addition qui émerge comme liée à la multiplication et donc à son opération inverse la division, la soustraction n'intervient dans le champ de la division que par le détour de l'addition

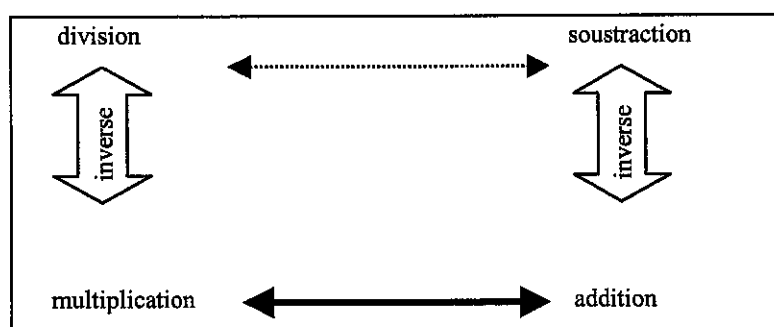


Figure 2

b) Classification des procédures

Les analyses faites mettent en évidence l'existence de deux grandes classes de situations; l'une correspond à une *situation de calcul du quotient* l'autre à une *situation de vérification / invalidation*.

Dans le cas de la *situation de calcul*, deux nombres et une opération sont donnés, le but est de fournir un nombre résultat, ainsi qu'une réponse minimalement verbalisée. Les invariants en jeu sont alors essentiellement ceux liés à la numération de position qui permet la décompositions des nombres ainsi que tous les invariants associés à la multiplication. Les ensembles de nombres (entiers, décimaux, non décimaux, négatifs) sont questionnés ainsi que la nature, l'existence, l'unicité du quotient, la pertinence de la notion de reste, etc.

Dans le cas de ce que nous appellerons *situation de vérification / invalidation*, les élèves ont à disposition la liste des résultats proposés par leurs pairs (ou leur unique résultat tant qu'il s'agit de la phase de recherche individuelle) et il s'agit d'attribuer une valeur de vérité à chacun de ces résultats. Dans ce cas les théorèmes en acte permettant d'invalider le résultat en fonction de l'ordre de grandeur, du dernier chiffre..., deviennent centraux. Vérifier ou invalider par la seule multiplication ou par une combinaison de multiplication et addition devient un point d'appui pour rendre sensible la différence entre quotient exact et quotient euclidien.

Le dialogue entre ces deux situations qui, temporellement, se conjuguent en permanence au cours des séances, va être au cœur de la conceptualisation des connaissances numériques dans cette recherche. Ces deux situations aux caractéristiques mathématiques différentes activent des schèmes différents. La notion de schème avec ce qu'elle implique d'emboîtements, de réorganisations permanentes rend compte du travail de conceptualisation des élèves.

c) Restes et retenues

Outre la confirmation des résultats antérieurs obtenus par Brun et Conne, nous avons pu mettre en évidence une difficulté propre à l'algorithme de division à partir de la question des "retenues".

Dans le déroulement de l'algorithme usuel, la division de type "division euclidienne" est présente immédiatement. En ce qui concerne la division, et contrairement à ce qui se passe dans tout algorithme antérieurement étudié, les calculs partiels ne sont pas nécessairement exécutés sur la quantité totale en jeu. Pour une addition, une soustraction ou une multiplication, le calcul est effectué, le résultat écrit par le biais d'un jeu de retenue si nécessaire. La retenue est alors utilisée pour mettre en attente une partie du résultat obtenu lors du calcul précédent celui-ci ayant été effectué dans sa totalité.

Par exemple

- pour calculer 943×7 le premier calcul partiel à faire dans l'algorithme traditionnel est $7 \times 3 = 21$, 1 est écrit et 2 est noté (ou non) en tant que "retenue" et sera réintroduit lors du calcul partiel suivant 7×4 , le système de numération jouant là pleinement son rôle dans l'exécution de l'algorithme de calcul écrit: la totalité du nombre 3 utilisé dans le premier produit partiel a été multipliée

- dans le cas de la division $943 / 7$ le premier quotient $9 / 7$ donne 1 reste 2, ces deux centaines (prises comme unité dans la division partielle de 9 par 7) ne sont pas divisées, elles ne le seront que réintroduites dans le calcul partiel suivant $24 / 7$.

Il y a là une différence fondamentale entre les algorithmes d'addition, soustraction, multiplication d'une part et division d'autre part.

Conformément aux observations déjà faites par Brun (1996), en situation d'inventivité à propos des algorithmes de calcul, les élèves réactualisent dans le nouvel algorithme de calcul les schèmes familiers concernant les retenues. Nous avons pu, par exemple, relever les productions suivantes:

Dans les productions ci-dessous chaque dividende partiel est divisé dans sa totalité

8 divisé par 2 donne 4
 3 divisé par 2 donne 1,5 (et non 1 reste 1)
le 5 est reporté à l'ordre de grandeur suivant
 2 divisé par 2 donne 1 plus la "retenue" 5
 soit 6
le même procédé est utilisé avec
 7 divisé par 2 donne 3 et 5 de retenue
 8 divisé par 2 donne 4 ajouté à 5 de retenue soit
 9

5 divisé par 2 produit 2,5 et non pas 2 reste 1
 s'il y a report c'est le report de la partie non entière du quotient
 ici il s'agit de cinq dixièmes de l'ordre considéré à savoir les unités de mille
Dans ce cas pour résoudre son problème, l'élève met en défaut la numération de position introduisant deux virgules permettant de signaler des dixièmes quelle que soit la position du chiffre considéré.

Face à un obstacle, les élèves puisent, dans le répertoire des schèmes disponibles, et ce, en fonction des caractéristiques de la situation qui font intégrer la situation nouvelle à une classe de situations connues. Ceci a mis en évidence pour nous que le principe même de la division euclidienne qui consiste à décomposer le dividende (éventuellement partiel) en somme du plus grand multiple possible du diviseur et d'un reste est présent dès l'entrée dans l'algorithme traditionnel de division. Le reste ainsi isolé ne sera pas divisé mais réintroduit dans le dividende partiel suivant lors du déroulement de l'algorithme. Ceci représente un saut conceptuel important. C'est une caractéristique essentielle de l'algorithme de division en regard des algorithmes précédemment étudiés, cette difficulté doit être didactiquement traitée lors de l'enseignement de l'algorithme de division.

3. Contrat

S'il est possible dans cette recherche de voir à l'œuvre une créativité mathématique analysable en termes de schèmes c'est, nous l'avons dit à plusieurs reprises, de par les conditions de la situation didactique mise en place. Dans ce cas, du point de vue des élèves aussi bien que du point de vue du maître, contrat de recherche et contrat didactique sont interdépendants. Nous avons mentionné l'existence d'un contrat explicite de collaboration entre maître et chercheurs. L'importance de la prise en compte dans les analyses de l'existence d'un contrat de recherche entre enseignant qui participe à une expérimentation et chercheur a été mise en évidence par Schubauer-Leoni (1986) puis retravaillée dans des contextes différents par Portugais (1995) et Leutenegger (1999). Nous voudrions quant à nous mettre en évidence la dimension de ce contrat de recherche qui concerne, non plus le maître, mais le sous-système élève. L'analyse des débats montre clairement que le fonctionnement du système didactique est surdéterminé par l'existence d'un contrat de recherche. L'existence d'une dimension de ce contrat propre à la classe est attestée à la fois par des remarques formulées par écrit dans les cahiers - notamment le journal - et pendant les débats.

séance 2 division 4

EST- on peut faire de deux manières

ER- non sinon tout le monde aurait tous les résultats

[...]

ER- c'est-à-dire si on utilise la méthode, la vraie méthode quoi, ça sert à rien que ces gens là ils viennent

Dans cet exemple extrême, ER s'interdit (et veut interdire) l'utilisation d'une forme connue d'algorithme puisque pour lui, l'existence de la recherche (et donc la présence des chercheurs) sous-entend la création de procédures originales. Pour cet élève la dialectique ancien - nouveau exclut dans le cadre de la recherche que le nouveau ne soit pas, de plus, de l'original par rapport aux connaissances scolaires. La classe dans son ensemble a d'ailleurs empêché le maître venu faire un remplacement de "montrer comment on fait la division" pour que la recherche puisse continuer à exister.

Du point de vue des élèves également, le contrat de recherche se traduit par la constitution d'un réseau de contraintes et d'attentes qui surdétermine les contraintes et attentes réciproques liées au contrat didactique usuel. Le poids relatif des contraintes institutionnelles, des contraintes liées au contrat didactique, et de celles liées au contrat de recherche, ce poids est variable au fur et à mesure du déroulement de l'année. S'articulent en fait un contrat didactique local au cours d'une séance, contrat surdéterminé par le contrat de recherche mais ce contrat de recherche est lui-même dépendant du contrat didactique général qui régit en particulier les rapports des élèves aux connaissances officielles et dont le poids se fait plus apparent en fin d'année.

4. Diffusion des procédures et mémoire didactique de l'élève

Un autre résultat qui émerge de l'analyse des données faite au travers du concept de schème concerne la mémoire didactique. Le concept de *mémoire didactique* a été travaillé par Brousseau et Centeno (1991) puis Centeno (1995) dans le cadre de la théorie des situations. Il s'agit de la mémoire du système didactique plus spécifiquement travaillée relativement à l'enseignant. La mémoire du maître lui permet, en utilisant des informations contextualisées, d'activer, par le biais de rappels, des connaissances non encore transformées par les élèves en savoir décontextualisé.

Dans notre recherche, les analyses centrées sur le sous-système élève font une large place à la notion de schème. Cela implique une prise en compte des retours en arrière et des anticipations, il n'est donc pas étonnant qu'aient été mis en évidence des phénomènes relevant de la mémoire didactique des élèves. Celle-ci se manifeste par le biais *de rappels initiés directement par les élèves*, sous différents aspects et avec différentes fonctionnalités. Il est clair que les conditions didactiques mises en place dans cette recherche et gérées avec bonheur par le maître sont favorables à l'émergence de ce phénomène. Elles laissent aux élèves l'opportunité d'être initiateurs de la relecture du passé, et les autorise à surseoir aux décisions, toutes choses constitutives de la notion de mémoire. Diffusion des procédures et donc augmentation du répertoire des résultats et procédés de calcul, aide à la transformation d'une situation de verbalisation en une situation de formulation, telles sont les fonctionnalités de cette mémoire didactique du sous-système élève que nous avons pu relever. La constitution de classes associées à un schème, à la fois source et objet de la conceptualisation, apparaît comme étroitement lié à ce phénomène de mémoire didactique.

a) *Augmentation du répertoire disponible*

C'est l'aspect le plus immédiatement observable. Compte tenu de la constitution sur la durée d'une macro-situation, les élèves s'autorisent à réutiliser des résultats antérieurement validés collectivement, même si ces résultats n'ont pas été formellement institutionnalisés.

LU explicite comment, après décomposition additive du dividende il a trouvé 120 en divisant 600 par séance 22 division n°37 [205 650 :5]

LU – en premier 5 fois 100 égal 500 il restait 100 alors 5 fois 20

ME- je viens de me rappeler 6 divisé par 5 c'est 1,2

ER- moi aussi je me suis rappelé ça / comme il faut une centaine en plus ça fait 120

Dans cet exemple « 600 divisé par 5 » est rapporté à « 6 divisé par 5 » dont le résultat est connu. L'extension du répertoire des résultats permet de traiter de nouveaux problèmes. Le schème d'action qui à partir des données numériques « six » et « cinq » produit le résultat « un virgule deux » devient une routine qui peut être intégrée à une nouvelle combinaison de schèmes.

Ce ne sont d'ailleurs pas les seuls résultats qui sont rappelés mais aussi les procédés de calcul. C'est la cas de FR qui questionne par le biais du Journal, lieu et moyen d'expression privilégiés de la mémoire didactique de l'élève, une méthode utilisée avec succès par un autre élève lors d'une séance précédente:

FR questionne par écrit:

"Pourquoi la division ci-dessous ne marche pas, cette division a été faite par LU : $826 : 14$ "

Il réécrit alors l'intégralité du calcul de son camarade

(les opérations sont effectuées en colonne):

$80 \times 10 = 800$; $6.5 \times 4 = 26$; $800 + 26 = 826$; $86.5 \times 14 = 1211$

Pour comprendre cet étonnement il faut se référer à la division n°33 [345: 23] faite lors d'une séance antérieure et au cours de laquelle le même élève LU avait proposé: " $20 \times 15 = 300$; $3 \times 15 = 45$ " comme justification de son quotient 15, quotient alors validé par la communauté classe. Lorsque LU propose 86,5 comme quotient de [826:14] avec le même type apparent de calcul, aucun invariant n'est disponible à ce moment pour traiter de la différence des deux situations de calcul. Cette question restera –provisoirement- comme une question non résolue, vrai questionnement mathématique, initié par les élèves eux-mêmes dans l'univers des divisions.

b) Constitution de classe associée à un schème

Un élément constitutif des phénomènes de conceptualisation peut être rapporté à l'identification voire la création par les élèves de nouvelles classes de situation.

Lors du débat concernant la division n°52 [147 097 : 7] l'élève VI propose comme solution

" là il faut faire virgule neuf jusqu'à l'infini comme celui de LI c'est-à-dire cent divisé par trois"

Cet élève reconnaît alors dans la situation débattue, une situation analogue à celle antérieurement rencontrée avec cent divisé par trois, et qu'elle a associé à la production d'un quotient de type "suite illimitée de neufs après la virgule". C'est à partir de ce schème qu'elle construit et produit sa réponse. Certains indices de la situation sont traduits en termes que concepts pertinents pour traiter cette situation et à partir de cette identification, la situation problématique est rapportée à une classe connue pour laquelle un schème est disponible. Dans le cas ci-dessus, l'élève montre qu'elle a identifié une division dont les caractéristiques la font s'apparenter à la division « cent divisé par trois » déjà débattue. Sans même pouvoir produire un résultat, elle montre qu'elle peut associer ce calcul à une catégorie de calculs qui produisent une suite décimale illimitée ce qui pour elle, à ce moment de l'élaboration de ses connaissances, ne peut être qu'une succession de chiffres "neuf".

c) Passage d'une phase de verbalisation à une phase de formulation

Le dernier point ayant trait aux rappels initiés par les élèves concerne la mise en évidence par les élèves eux-mêmes de contradictions. Nous l'avons souligné, la mise en place de la recherche dans la classe et la gestion faite par le maître favorisent les débats contradictoires, le maître lui-même, lors de la mise en place de la macro-situation les suscite. Le processus de dévolution est conduit sur le long terme et les phénomènes de mémoire se multiplient de par l'enchaînement de situations toutes inscrites dans la macro situation de recherche.

La séance n°21 qui traitera de la division "six divisé par cinq" sera cruciale et l'objet de nombreux rappels. En effet au cours de cette séance une élève nouvellement arrivée SAN, défend la réponse "un reste un", résultat qu'elle appuie par la validation classique conjuguant multiplication du diviseur par le quotient entier et addition du reste. Ceci est une nouveauté pour le reste de la classe. Le débat entre les réponses "un virgule deux " et "un reste un" n'a bien sûr pas pu être tranché par les élèves et les deux résultats ont été conservés. Ce n'est que plusieurs semaines plus tard que resurgit cette problématique sous diverses formes, par exemple sous forme de la proposition de "0 reste 167" pour diviser 167 par 8. Nous ne rentrerons pas ici dans le détail des débats concernant la question du reste et autour de laquelle se sont progressivement articulées toutes les questions sensibles. Ce qu'il nous intéresse de souligner ici est la mise en évidence par les élèves de positions contradictoires d'un pair. Dans un premier temps la proposition de SAN a été massivement rejetée , "c'est de la flemme" a été un argument fréquemment utilisé pour caractériser le traitement d'une division en "laissant" un reste. Progressivement, de par les variables mises en jeu, des élèves ont été amené à se positionner différemment par rapport à cette question.

séance 21 division n°36 [6:5]
| SAN propose 1 reste 1

séance 36 division n°52 [147 097 : 7]
| Cette division donne lieu à un débat sur les restes, le résultat "21013 reste 6" est argumenté ce qui provoque la réflexion suivante de FR
| *FR- c'est facile si on ajoute des petits bouts // alors ce que SAN avait fait c'était juste / elle avait mis des restes*

séance 37 division n°53 [25:2]
| Dans la division suivante [25:2], STI propose "17 virgule reste 1", LI proteste voyant là de la part de STI un changement de position non justifié; lui aussi fait référence à la division [6 : 5]
| (en fait STI traite de 35 divisé par 2 ce qui ne gêne en rien le débat)
|
| *LI- 2 fois 17 ça fait 34/ quand SAN avait fait la même chose il était contre*
| *LE MAITRE- quand SAN avait fait quoi?*
| *LI- 6 divisé par 5 // l'autre résultat il est juste par SAN ou par nous? SAN avait trouvé 1 virgule reste 1 et nous 1 virgule 2*

LI s'appuyant sur l'incohérence des décisions de STI s'autorise alors à questionner directement le maître pour qu'il valide un résultat, qu'il prenne position, alors que depuis longtemps il est clair que dans le contrat existant, le maître n'intervient pas sur la validité des résultats.

Dans ces exemples, apparaît la mise en évidence de contradictions par les élèves eux-mêmes. Soit il s'agit d'un changement personnel de position, un élève rend publique une évolution topogénétique qui le concerne, soit il y a mise en évidence du changement de la position d'autrui ce qui peut conduire, dans le jeu des interactions, à une demande de justification de cette évolution. Il y a là potentiellement les conditions du passage d'une situation de simple verbalisation à une situation de formulation. En effet, ce qui caractérise une situation de formulation est la prise de décision dans le jeu de communication à propos des connaissances. Face à une mise en demeure de justifier un changement de position, un élève ne peut rester dans la simple verbalisation de son procédé de calcul il est amené à faire un choix, à décider de la position que finalement il adopte, il doit faire état, le cas échéant, de l'évolution de ses connaissances du point de vue de la topogénèse de ces connaissances.

IV. CONCLUSION

La mise en place d'une recherche collaborative a permis de faire vivre dans la durée une situation didactique où se trouve partagée l'intention d'enseigner entre maître et élèves. L'existence d'un contrat de recherche dont la dimension propre au sous-système élève est attestée, permet que perdure l'a-didacticité de la macro situation mise en place à propos de la division. Les analyses faites en terme de schème, outre la classification des procédures qu'elles ont permis, enrichissent la compréhension des phénomènes de conceptualisation en situation a-didactique. La notion de classe de situations associée à celle de schème s'avère être féconde quant à la compréhension de l'élaboration du champ conceptuel de la division. L'identification d'une dialectique entre situation de calcul et situation de vérification/ invalidation, le dialogue entre résultat d'une part et procédé de calcul d'autre part, sont des éléments clés de l'évolution du réseau des connaissances numériques. Ces dialectiques sont à l'œuvre quand il s'agit de passer d'une situation de formulation à une situation de validation.

Dans ce contexte didactique, les élèves sont initiateurs de l'émergence d'objets mathématiques nouveaux relativement à la genèse de leurs connaissances et pertinents dans le champ conceptuel de la division. En particulier, le phénomène de mémoire didactique, analysé du point de vue de l'élève permet de pointer le fait que, placé dans des conditions didactiques adéquates, les élèves peuvent eux-mêmes être à l'origine de situations de rappel propres aux

évolutions topogénétiques attendues, propres aux transformations nécessaires des connaissances. Dans la perspective qui est celle de la théorie des situations, s'intéressant au fonctionnement des connaissances, il s'avère que la mémoire didactique de l'élève, est un point d'appui de la transformation d'une situation de simple verbalisation de l'action - que nous rattachons aux situations d'action - en une situation de formulation.

BIBLIOGRAPHIE

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9.3, 281-308.
- Banwitiya, Y. (1993). *L'ingenierie du sens en mathématiques: la division dans N , Q et D à l'école primaire*. Thèse de doctorat, Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1972a). La division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen. In A.P.M.E.P. (Ed.), *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 267-278). Paris: APMEP
- Brousseau, G. (1988). Représentations et didactique du sens de la division. In G. Vergnaud, G. Brousseau, & M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. (Actes du colloque de Sèvres, mai 1987) Grenoble: La Pensée Sauvage Editions
- Brousseau, G. (1996). Les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique, *Actes de VIIIème Ecole d'Eté, 1995*, Saint-Sauves d'Auvergne: IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Clermont-Ferrand.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.
- Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11.2-3, 167-210.
- Brun, J. (1996). *Algorithmes et schèmes dans les calculs écrits*. Texte présenté au Symposium Concepts pragmatiques et scientifiques dans le fonctionnement et le développement des schèmes : Conférence Vygotsky - Piaget, Genève.
- Brun, J. (1997). *De l'adaptation au jeu: la théorie des situations et les rapports enseignement et apprentissage*. Premières journées de didactique des mathématiques de Montréal 2-5 juin 1997, Université de Montréal (à paraître).
- Brun, J., & Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, 3, 260-286.
- Brun, J., & Conne, F. (1991). L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques, *PME XV*, Assisi: Fond National de la Recherche Scientifique (recherche menée par Brun, J., Conne, F., Retschitzki, J. & Schubauer, R.
- Brun, J., Conne, F. (1993). Calculs et erreurs systématiques. *Journal de l'enseignement primaire*, Genève, 43, 29-31.
- Brun, J., Conne, F., Lemoyne, G., & Portugais, J. (1994). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit, *Cahiers de la recherche en éducation* (pp. 117-132).
- Brun, J., Conne, F., & Flückiger, A. (à paraître) Algorithme de division et schèmes numériques
- Centeno, J. (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant (thèse posthume inachevée: textes établis par C. Margolinas)*. Bordeaux: LADIST.

- Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, Editions.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12.2/3, 221-270.
- Conne, F. (1993). Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie: une démarche caractéristique en didactique des mathématiques. In U.D. Sherbrooke (Ed.), *Sens des didactiques et Didactique du sens* (pp. 205-261). Québec, Canada: Editions du CRP, Faculté d'Education, Université de Sherbrooke
- Conne, F., & Brun, J. (1991). Les débuts d'un apprentissage: où placer les routines? Journée du COED, Marseille 1990. *Cahiers Interaction didactiques n°12, mai 1991* pp 53-88
- Conne, F., Lemoyne, G. (Ed.).(1999). *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal: Presses de l'Université de Montréal.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques- une réalisation dans tout le corpus scolaire*: Université Paris VII.
- Flückiger, A. (1999). Une étude de cas: une collaboration entre enseignant et chercheur. In Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des mathématiques (CIEAEM) (Ed.), *Les liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques. Actes de la CIEAEM 50. Neuchâtel Suisse 2-7 août 1998* (pp. 167-172). Neuchâtel, Suisse
- Flückiger, A., & Maisonneuve, L. (1999). Sens et Algorithmes, *Journées Nationales de Gérardmer*, APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public). Vol. 428 (pp. 367-371)
- Guiet, J. (1994). Algorithmes et schèmes: cas de la division. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavnigot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 225-230): Grenoble
- Guinet, R. (1979). La division. *GrandN*, 17, 21-37.
- Leuteneger-Rhis, F. (1999). *Contribution à la théorisation d'une clinique pour le didactique. Trois études de cas en didactique des mathématiques*, Thèse de Doctorat en Sciences de l'Education, Université de Genève.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Mopondi, B. (1986). *Problème de sens dans la négociation didactique en vue de l'institutionnalisation d'un algorithme: notion de proportionnalité au cours moyen*. Thèse de Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux I.
- Perrin-Glorian, M.J. (1995). Sens , algorithmes et représentations symboliques, *Mathématique et langage*. Paris: Hachette Edition
- Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Berne: Peter Lang.
- Rouchier, A. (1991). *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérativo- récursives, institutionnalisation*. Thèse de doctorat d'Etat, Université d'Orléans.
- Saada-Robert, M., & Brun, J. (1996). Les transformations des savoirs scolaires: apports et prolongements de la psychologie génétique, *Perspectives*, Vol. XXVI n°1 (pp. 25-37).

- Schubauer-Leoni, M.L. (1986). *Maître-élève-savoir : Analyse psychosociale du jeu et des enjeux de la relation didactique*. Thèse de doctorat, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève.
- Schubauer-Leoni, M.L. (1996). Entre théories du sujet et théories des conditions de possibilité du didactique: quel cognitif?, *VIIIème Ecole et Université d'Eté de Didactique des Mathématiques (22-31 août 1995)* (pp. 174-185), Saint-Sauves d'Auvergne: IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Clermont-Ferrand.
- Sensevy, G. (1994). *Institutions didactiques, Régulation, Autonomie. Une étude des fractions au cours moyen*. Thèse de doctorat, Université de Provence Aix Marseille I.
- Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques, étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris: PUF.
- Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20-3, pp263-304.
- Tièche-Christinat, C. (1997). *Algorithmes..., réunion du groupe d'appui de COROME*, Neuchâtel: (non publié).
- Vergnaud, G. (1996a). La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (pp. 197-242). Lausanne: Delachaux & Niestlé. (Republié de *Recherche en didactique des mathématiques*, 10, (2-3) 133-170, 1990)
- Vergnaud, G. (1996b). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, *VIIIème Ecole et Université d'Eté de Didactique des Mathématiques (22-31 août 1995)* (pp. 174-185), Saint-Sauves d'Auvergne: IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Clermont-Ferrand.
- Vergnaud, G. (1999). Un point de vue de psychologue. In G. Glaeser (Ed.), *Une introduction à la didactique expérimentale* (pp. 209-213). Grenoble: La Pensée Sauvage éditions

ANNEXE

LISTE DES SEANCES

séance	division			
n°	n°	dvd	dvs	q
1	d1	990	9	110
	d2	1818	9	202
2	d3	2546	2	1273
	d4	2592	6	432
3	d5	345	23	15
4	d6	720	20	36
	d7	426	2	213
5	d8	425	5	85
	d9	175	14	12,5
6	d10	180	15	12
	d11	427	7	61
7	d12	4500	150	30
	d13	633	3	211
8	d14	8 645 834	2	4322917
9	d15	35 787	3	11929
10	J1	Journal 1ere occurrence		
11	d16	8 324 782	2	4162391
	d17	645 357	3	215119
12	d18	405	45	9
	d19	315	45	7
	d20	3780	45	84
13	d21	2000	16	125
14	J2	Journal 2eme occurrence		
15	d22	3618	18	201
16		débat ascendant		
17	d23	4 824 266	2	2412133
	d24	4 962	2	2481
	d25	645 354	6	107559
18		nouvelle consigne : affiche		
	d26	525 575	5	105115
	d27	124 892	4	31223
	d28	35 792	2	17896
19	d29	8 324 782	2	4162391
	d30	55 155	5	11031
	d31	12 143	1	12143
20	d32	816 328	8	102041
	d33	345	23	15
	d34	71	71	1
		nouvelle élève: SAN		

séance	division			
n°	n°	dvd	dvs	q
21	d35	826	14	59
	d36	6	5	1,2
22	d37	205 650	5	41130
	d38	465	155	3
23	d39	17	5	3,4
	d40	4 854 816	4	1213704
24	d41	14 497	7	2071
	d42	301 725	5	60345
25	J3	Journal 3eme occurrence		
26	d43	304515	5	60903
	d44	369	246	1,5
27	d45	1268148	4	317037
	d46	1545005	5	309001
	d47	180	12	15
28	d48	100	3	33,33...
		(reprise réponse de j3)		
29		liste des divisions "en suspens"		
30		liste des divisions 1 a 25		
31		idem travail collectif		
32		liste des méthodes (collectif)		
		trier liste d1-d20 individuel		
33	d49	65724	2	32862
	d50	3780	90	42
	d51	3612	12	301
34		Tournoi des Méthodes n°1		
35		Tournoi des Méthodes n°2		
36		TM2 suite même liste		
	d52	147097	7	21013,8...
37	J4	Journal 4eme occurrence		
	d53	25	2	12,5
38	d54	81822	3	27274
	d55	995	9	110,55...
39		débat/ reste		
40				
41	d56	6412	8	801,5
42	d57	3615	12	301,25
	d58	224	7	32
43	d59	167	8	20,875
44	d60	75035	25	3001,4

	dispositif du vert pour vérifier sur le cahier
--	---

<i>dx</i>	<i>division n°x</i>
<i>dvd</i>	<i>dividende</i>
<i>dvs</i>	<i>diviseur</i>

45	d61	266	4	66,5
46	d62	2186	5	437,2
	d63	801	20	40,05
	d64	375	12	31,25
	d65	368	7	52,5714..