LA MESURE DES GRANDEURS : LE NUMERIQUE ET L'ANALOGIQUE

Guy Brousseau

DAEST, Université de Bordeaux II

I. INTRODUCTION

La mesure des grandeurs est passée depuis l'origine pour le but et la matière principale des mathématiques. L'évolution de la science a déplacé leur étude vers les autres disciplines et aujourd'hui l'enseignement est écartelé entre le désir de s'ajuster sur les connaissances du monde savant et celui de s'adapter aux attentes culturelles et aux nécessités génétiques du développement de l'homme.

Cette évolution rapide est accompagnée d'un très grand nombre de bouleversements technologiques et sociaux qui rendent très difficiles les analyses et encore plus complexe les recherches de solutions et d'ingénierie.

La disparition feutrée de nombreuses pratiques scolaires laisse souvent les enseignants désarmés devant des lacunes inexpliquées et irrattrapables de leurs élèves.

Déjà pourtant une réaction s'est amorcée contre ce que certains attribuent au mouvement des mathématiques modernes. Les tentatives de réintroduire des secteurs mathématiquement isolés ou négligés sont faites avec un certain succès (et quelques excès) comme pour la géométrie. Mais l'évolution n'est ni arbitraire ni réversible, et la mécanique rationnelle est bel et bien sortie des préoccupations des mathématiciens...

Plutôt que de restaurer pieusement les vestiges de temples anciens qui ont cessé d'être fréquentés, il vaut mieux s'attaquer courageusement aux problèmes actuels. Si les mathématiciens veulent continuer à jouer convenablement le rôle qui leur est échu dans la formation fondamentale des citoyens, il leur faut assumer les obligations que cela comporte et faire en sorte que la connaissance des grandeurs reste un objectif gérable de l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire. Cela implique une présence dans la formation des professeurs aussi bien du secondaire que du primaire, et donc un ancrage dans la science elle même à l'université.

Mais l'évolution des techniques n'obéît plus aux besoins de la science et de son enseignement. Et il est très difficile de restaurer artificiellement des conditions favorables à un apprentissage. Par exemple la généralisation de la numérisation des appareils de mesure et l'usage des ordinateurs ou des calculettes tend à faire disparaître chez les élèves toute une expérience des représentations topologiques et d'ordre que nous étions accoutumés à utiliser avec eux.

Pour la commodité du propos nous reprendrons l'opposition désormais classique entre les deux « cultures » habituellement complémentaires en mathématiques mais déjà clairement distinguables : celle du numérique (et de l'algébrique) par opposition à celle du topologique (et des structures ordonnées). Nous qualifierons même cette dernière « d'analogique » pour marquer l'importance du rôle que nous voulons donner aux grandeurs dans cette étude. Pendant un certain temps il a existé deux types concurrents de calculateurs (électroniques ou autres) : des *calculateurs « numériques »* qui traitaient des nombres et des lettres, des *calculateurs « analogiques »* qui opéraient directement sur des grandeurs physiques. La puissance et la souplesse des calculateurs « numériques » l'a rapidement emporté.

De nombreux pédagogues, sensibles à ces difficultés réintroduisent dans les manuels l'étude des grandeurs, d'autres étudient les « représentations » graphiques, iconiques etc. et cherchent à en développer l'usage comme instruments de pensée autonome.

Mais l'arithmétisation et l'algébrisation généralisée des connaissances mathématiques découlent à la fois de l'usage des machines, de la structuration des mathématiques, de la formation des professeurs, des modèles pédagogiques et didactiques dominants et tout cela conduit ces modèles à ne plus être vraiment utilisés. Il est impossible de renverser ces tendances. Alors la réintroduction isolée de quelques notions risque de ne trouver aucun usage, sinon dans le reste des programmes, mais dans les usages fréquents et habituels, et par conséquent elle risque de charger inutilement l'enseignement sans réel profit pour la formation des élèves.

« L'évolution est irréversible » ne veut pas dire qu'il est impossible de pallier à certains de ses effets, mais il faut le faire avec des moyens adaptés à cette évolution sans chercher à maintenir artificiellement les parties obsolètes ou mortes. C'est pourquoi nous voudrions attirer l'attention des didacticiens sur une possibilité : il était d'usage de prendre la connaissance des grandeurs comme une source primitive de connaissances et de problèmes pour apprendre ensuite les nombres (en particulier les nombres denses) et l'algèbre. Ne pourrait-on pas développer l'étude des grandeurs comme une modélisation « analogique » des relations et du calcul « numérique », comme un moyen d'utiliser le calcul numérique préalablement appris ?

II. LES DIFFERENTS UNIVERS DES GRANDEURS ET DE LA MESURE : SITUATIONS FONDAMENTALES[1]

Pour comprendre le rôle d'une leçon comme «le poids d'un récipient » il est utile de la replacer dans son contexte pédagogique[2] et scientifique. Comment passer du projet d'enseigner une notion mathématique aussi complexe que «la mesure » à un projet d'ensemble, un processus, puis à une situation plus ou moins générique et enfin à une leçon ?

La théorie des situations didactiques semble relativement adaptée à la conception ou à la description d'un dispositif d'apprentissage et d'enseignement d'une connaissance assez bien délimitée, pouvant fonctionner pendant un court moment à un niveau scolaire assez précis. Elle fournit des éléments pour analyser des successions de leçons et les dépendances qu'elles peuvent présenter, mais elle ne paraît pas donner d'instruments pour «découper » des grands objets d'enseignement et pour réaliser effectivement des restructurations et des processus d'ensemble.

Il n'existe pas, dans ce domaine, d'algorithme produisant un résultat unique, mais seulement une série de critères pour comparer entre elles des propositions envisagées et pour éventuellement les améliorer. La réduction d'un gros objet comme la mesure en une suite de situations aura nécessairement un caractère dialectique : l'adéquation des situations au processus et celle du processus aux situations disponibles ne peut être, du moins pour l'instant, jugée qu'après coup. Mais cette réduction n'est pas non plus un tâtonnement erratique. Le chercheur l'entreprend armé d'un répertoire de connaissances mathématiques, didactiques, épistémologiques, historiques, psychologiques, pédagogiques etc. dont il fera usage au moment opportun.

Nous allons indiquer très superficiellement le cheminement qui a été suivi dans l'exemple choisi. Il commence par l'étude mathématique de la notion visée, se poursuit par le regroupement des questions et des conditions qu'il convient de prendre en considération pour constituer des « univers »[3] présentant une cohésion problématique raisonnable. Ces « univers » permettent ensuite d'identifier un petit nombre de situations suffisamment fondamentales qui peuvent s'articuler en processus d'ensemble. Les études locales peuvent alors commencer sous les

---

[1] Ce paragraphe reprend sous une forme nouvelle des idées déjà exprimées différemment dans l'article « Le poids d'une récipient. Etude des problèmes de mesurage en CM » Guy et Nadine BROUSSEAU dans Grand N N° 50 1991-1992

[2] Voir «la mesure au CM1 » de Nadine BROUSSEAU, IREM de Bordeaux 1987

[3] Le terme d' « univers » doit être compris comme une simple métaphore précédant une modélisation plus précise en terme de milieux. Les tentatives de définitions du concept de milieu interdisent pour l'instant son usage naïf. Il en est de même pour la concept de « cadre », qui de plus évoque des isomorphismes plus forts.

conditions du maintien des divers équilibres - par exemple entre la quantité de concepts nouveaux intelligibles construits et la fréquence et la variété de leur utilisation dans le champ des exercices et des leçons ménagés dans le cursus - de façon à rendre les notions visées « apprenables » par les élèves. Il est utile de préciser qu'il faut distinguer pour une même notion mathématique son usage en tant que moyen, sa reconnaissance et son expression et enfin son étude et celle de la place qu'elle tient en tant que savoir. Les situations qui permettent ces distinctions sont différentes et le plus souvent ne se présentent pas en même temps dans une même activité et ne sont pas l'œuvre des mêmes institutions. Nous considérerons toutefois qu'elles appartiennent au même univers si la situation d'action (le milieu « objectif ») de ces différentes situations est le même, donc si elles se réfèrent à la même situation d'action.

1. Définition mathématique, les trois «univers »

Partons d'une définition assez répandue de la notion de mesure, un peu simple, mais qui dérive assez convenablement de la théorie moderne de la mesure.

Une mesure (il en existe plusieurs sortes) est une application d'un ensemble muni d'une structure adéquate (espace mesurable) dans l'ensemble des réels positifs, cette application ayant des propriétés particulières.

i) Un ensemble est mesurable s'il est composé de parties qui sont elles-mêmes des ensembles, (y compris l'ensemble vide) et s'il est tel qu'on peut trouver toujours en lui les intersections et les réunions d'un nombre quelconque de ses parties

ii) Une application mesure, attribue à chaque partie de cet ensemble mesurable un (unique) nombre réel positif.

iii) Cette application est une mesure si, et seulement si, elle est de plus additive : le nombre associé à la réunion de deux parties disjointes quelconques est la somme des nombres associés à chacune des parties (et si la mesure de l'ensemble vide est zéro).

La question de savoir ce qui se passe lorsqu'on considère la réunion ou l'intersection d'une infinité de parties est aujourd'hui tout à fait fondamentale, mais il n'est pas nécessaire de l'envisager pour notre propos : la mesure dans la scolarité obligatoire. Ce choix est toutefois une hypothèse didactique (presque évidente) qui pourrait se discuter.

Retenons que pour concevoir une mesure il faut au moins trois notions : l'une pour décrire la structure de la chose à mesurer, une pour décrire la structure numérique qui mesure la chose, une qui décrit le moyen de faire correspondre un objet à mesurer et le nombre qui la mesure.

Les trois notions de base ne sont pas indépendantes : elles sont les composantes nécessaires aux situations d'action spécifiques de la mesure. Par contre leurs études constituent des secteurs de savoir différents et relèvent de problématiques distinctes. L'histoire montre comment il a fallu séparer progressivement et perfectionner alternativement ou conjointement l'une ou l'autre de ces notions.

Chacune de ces notions a son *univers* propre, c'est à dire ses structures, son champ de problèmes théoriques ou d'application.

- **L'univers des objets mathématiques mesurables (1)**

La définition des propriétés des *espaces mesurables* est apparue tardivement et aujourd'hui encore la langue vernaculaire ne distingue pas toujours clairement un objet et sa mesure (exemple : la longueur et la largeur d'un rectangle sont des segments, la mesure de la longueur s'appelle aussi longueur). Mais elle est indispensable pour passer de l'univers des exemples de mesure à une définition catégorique de cette notion. C'est un autre postulat de la théorie des situations : les éléments fondamentaux d'une notion sont présents, au moins implicitement dans les situations qui la caractérisent, même si les acteurs de la situation n'en prennent pas conscience (ou plutôt connaissance).

- **L'univers des procédés de définition de l'application-mesure (2)**

Les moyens effectifs par lesquels les fonctions mesures peuvent attribuer une valeur numérique à un objet sont par exemple les méthodes d'intégration. La théorie de l'intégration et celle de la mesure sont deux exposés d'une même théorie mathématique.

- **L'univers de la structure numérique d'arrivée (3)**

Du côté des ensembles des nombres, la construction des fractions a répondu au besoin de disposer d'un ensemble plus dense que les naturels pour «mesurer » des grandeurs non discrètes, et la construction des réels, au besoin de disposer de nombres pour «mesurer » les longueurs ou les aires obtenues par les méthodes d'intégration.

Nous allons prendre cette «définition » mathématique comme modèle de ce qu'est une mesure. Elle est définie par un triplet : une «chose à mesurer », un «moyen de mise en correspondance », et une « structure numérique positive » exprimant la mesure. Il s'agit de trouver les fonctions de cette pratique ou de cette connaissance et de les représenter par des « jeux formels » qui nous permettront d'identifier ou de concevoir les apprentissages qui nous intéressent. Par contre, nous n'allons pas nous limiter à ce que les mathématiciens assignent actuellement comme champ à cette notion et nous allons explorer des domaines plus larges, qui permettraient de discuter ce point de vue mathématique et peut être de l'expliquer.

2. Un exemple : la mesure des ensembles finis

Le choix de l'ensemble numérique d'arrivée est crucial pour la détermination de ce que l'on pourra mesurer ou non. Ainsi l'utilisation des fractions ne permet pas d'exprimer en même temps la longueur du côté d'un carré et celle de sa diagonale.

La mesure la plus simple est celle d'un ensemble fini. A chacune de ses parties, cette mesure (ou dénombrement) fait correspondre, un **nombre naturel**, celui de ses éléments. Le procédé effectif de correspondance est celui du comptage ou de la correspondance terme à terme avec un ensemble de cardinal connu. Le procédé de comptage ne dépend pas en théorie des objets comptés ou de leur nombre, mais la réalisation effective si, et il existe de ce fait un très grand nombre de techniques de comptage. La situation «fondamentale » de l'apprentissage du dénombrement est bien connue.[4]

La situation fondamentale du dénombrement.

Considérons la situation suivante qui peut être traduite en instructions adaptées aux enfants de 5 à 6 ans :

"Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher des pinceaux dans la pièce voisine. Quand tu reviendras tu devras en mettre un seul dans chaque pot. Et il faudra qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Tu devras porter tous les pinceaux en un seul coup, si tu te trompes, tu devras reprendre tous les pinceaux, tu les ramèneras là-bas et reviendras pour essayer à nouveau.

Tu sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots".

L'enfant saura aussi « nombrer » autrement dit, dire le nom des nombres, lorsqu'il pourra jouer les deux rôles suivants : *demander* (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement *fournir* à la demande la quantité voulue.

Il saura compter quand il sera capable de détecter et d'argumenter sur une erreur commise à son insu. Il connaîtra « le nombre naturel » beaucoup plus tard.

[4] « les mathématiques à l'école » G. BROUSSEAU Bulletin de l'APMEP n° 400)

L'univers de l'ensemble des objets mathématiques mesurables par les naturels, celui des ensembles finis, est lui aussi bien connu. Sa structure est celle d'une algèbre de Boole. Mais il faut bien distinguer l'identification, la désignation, et l'énumération des ensembles, du comptage et de la récitation de la suite des nombres. L'énumération est l'instrument de l'exploration des collections, ce qui permet le dénombrement lui même. Ce concepts n'avait pas d'existence culturelle jusqu'à ce que la théorie des situations ne la révèle, comme le montre l'atelier de M. BRIAND[5]

Cette situation possède des propriétés qui lui donnent un caractère fondamental.

i) Elle permet de définir cette mesure comme connaissance, c'est à dire comme moyen de solution de cette situation.

ii) Les concepts de nombre ou de comptage n'apparaissent pas dans l'énoncé de cette situation qui peut être comprise par un élève ne sachant pas compter

iii) Elle permet de développer progressivement la connaissance des nombres comme réponse «spontanée» et évolutive à une suite de situations engendrées par la première, par des variantes reconnues (entre autres, augmentation du nombre d'objets, communication, écriture de nombres plus grands, perfectionnement des méthodes d'énumération)

iv) Les variantes et les variables «didactiques» peuvent être facilement envisagées «dialectiquement» par les élèves eux-mêmes.

v) Toutes les situations de dénombrement se déduisent de son schéma par simple modification des éléments terminaux et par des variables cognitives.

Il se présente alors une conjecture intéressante qui va nous guider dans notre quête : puisque le comptage est une forme de mesurage, la situation fondamentale du comptage ne pourrait-elle pas être un cas particulier d'une (hypothétique) situation fondamentale définissant une mesure en général ?

3. L'univers des objets et des usages (4)

Un oiseau n'est pas mesurable, mais on peut le suspendre à un peson ou étaler ses ailes pour les placer devant une règle graduée – la technique pour ne pas estropier l'animal ne permet pas n'importe quel résultat. Nous observons ici toute une chaîne de concepts - de l'oiseau, à son

---

[5] « L'énumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement de la transposition didactique » Joël Briand (thèse, Université Bordeaux 1)

poids ou à son envergure, puis à l'élongation du peson ou au segment déterminé par l'envergure sur la règle - qui s'interposent entre l'oiseau et les nombres finalement retenus, 20 centimètres ou quinze grammes. Chaque concept relève d'un *univers* différent. Tous les objets matériels sont susceptibles de donner lieu à mesure suivant les usages dans lesquels ils entrent. Ces usages sont essentiels pour déterminer la finalité la nature et les modalités des mesures.

Considérons des situations où les comparaisons permettent seulement des échanges (dans une même classe) mais n'aboutissent même pas à un ordre. Tous les objets qui peuvent se substituer dans un usage déterminé deviennent *équivalents* d'un certain point de vue Par exemple, je suis le propriétaire de l'oiseau et je cherche à l'échanger, mais pas contre de l'argent. Tous les objets avec lesquels je peux l'échanger constituent une classe d'équivalence déterminée par la pratique sociale du troc. Le « prix » de cet oiseau est une classe d'objets. La modélisation de ces usages en termes de situations permet de préciser les classes d'équivalences qu'elles déterminent. La classe des objets remplaçables les uns par les autres dans une situation donnée deviendra celle des objets qui se voient attribuer la même valeur dans la mesure correspondante. S'il n'existait pas de situation qui permette de substituer une classe à une autre, notre triplet comprendrait l'ensemble des objets équivalents et leur application sur une même classe, ou sur son nom. Il s'agirait d'une **situation de tri** (suivant une classification donnée) ou **de classification** (s'il s'agit de créer la classification).

Considérons maintenant une classification telle que deux classes différentes d'objets peuvent être distinguées et *ordonnées*. Il est nécessaire pour cela qu'il existe au moins une **situation de comparaison** effective où ces classes d'objets entrent ensemble. Supposons de plus qu'il n'est pas possible de déterminer l'objet qui correspond à la somme de deux valeurs de mesure par une opération sur les objets eux-mêmes (comme par exemple pour les températures). La connaissance associée à ce type de situation est alors celle d'une **«grandeur »**, au sens vulgaire de chose susceptible de devenir plus grande ou plus petite, mais cette « grandeur » bien qu'exprimée par des nombres (des rangs) n'est pas mesurable.

Dans un troc chaque partie a une préférence pour un des objets échangés. L'équivalence est une hypothèse sociale qui explique après coup pourquoi l'échange a eu lieu. Tout le commerce vit sur ce jeu entre la fiction d'une équivalence globale et la réalité d'une préférence locale.

Pour qu'une grandeur soit mesurable, il est nécessaire en plus qu'une certaine opération sur les objets (ou classes d'objets) qu'elle mesure corresponde à l'addition des mesures : mettre les segments bout à bout et alignés pour obtenir un segment somme, par exemple. C'est à cette dernière situation que nous réserverons le nom de **situation de mesure.**

Dès lors que je constitue la classe des objets que je peux échanger contre cet oiseau par leur prix commun, j'entre dans une situation de mesure.

En conclusion, l'univers des objets matériels peut ainsi être structuré en classes par des situations. Ces classes elles-mêmes peuvent être regroupées par d'autres situations en variables : nominales (simplement distinctes), ordinales, d'échelles (les différences de rang peuvent être additionnées) ou en mesures (à tout couple de classes on peut assigner une classe somme, l'association présentant les propriétés de l'addition).

Remarquons que nous conservons néanmoins notre triplet de départ : structuration de l'ensemble de départ, procédé d'attribution (à une classe à un rang) et structure d'arrivée (ensemble amorphe, ensemble ordonné). Aujourd'hui, l'ensemble des objets matériels ou théoriques susceptibles d'être mesurés ne cesse de s'agrandir ainsi que les méthodes et que les formes de mesure.

4. L'univers des grandeurs et des mesures analogiques (5)

Ne pourrait-on pas faire l'économie de cette structure numérique d'arrivée ainsi que celle de l'application ? Quelle serait « la » situation fondamentale de ce type d'étude ?

L'envergure ou le poids d'un oiseau ne sont plus des objets matériels. Quelles situations peuvent définir ces concepts?

Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Appliquons la méthode utilisée ci-dessus: les choses qui peuvent se remplacer dans une même situation sont d'un certain point de vue équivalentes. Par exemple ce qui peut se comparer à l'aide des mêmes instruments. Les deux actions (mettre sur le peson et plaquer contre une règle), aboutissent à un même univers, celui des segments de droites. Mais si on examine l'effet des instruments, les classes d'objets obtenus seront différentes : la taille et le poids ne rangent pas les objets de la même façon. Les « grandeurs » sont donc aussi a priori différentes. Remarquons qu'ici encore pour déterminer une mesure, une situation doit associer la somme à la comparaison. A chaque grandeur sont associées des méthodes spécifiques pour effectuer la somme. La somme de deux vitesses ne se reconnaît pas facilement, celle des probabilités de deux événements non plus.

Il est possible de différentier ainsi les types de grandeurs par les situations (physiques, sociales commerciales etc. où elles s'utilisent). L'usage d'une balance au lieu d'un peson peut paraître définir la même grandeur dans certaines circonstances, mais il en existe qui différencient le poids de la masse.

Remarquons qu'il est nécessaire d'avoir bien en tête le concept d'envergure et probablement celui de segment pour savoir quoi faire avec l'oiseau, mais cela ne permet pas de conclure qu'il faut « apprendre » l'un avant l'autre. Les situations de comparaison permettront peut être de provoquer de façon dialectique l'émergence conjointe des situations et des connaissances nécessaires. Par exemple, une des situations de base de la mesure du hasard a sans doute été la notion d'équiprobabilité.

La définition des grandeurs par des classes d'équivalences d'objets donne l'idée qu'il devrait exister une mesure intrinsèque de ces objets, c'est à dire indépendante de la façon dont elle s'exprime numériquement. Un segment aurait ainsi une longueur quelle que soit l'unité utilisée pour exprimer sa mesure. Cette conception conduit à des raisonnements intuitifs, assez souvent économiques et féconds mais elle s'est heurtée à des difficultés qui ont conduit à l'abandonner presque partout dans la formalisation scientifique. En mathématique, au contraire, on ne s'est intéressé bientôt qu'aux procédés indépendants de l'expression numérique des mesure, et donc on a fait disparaître l'usage des unités.

L'idée de représenter une grandeur par une autre vient en partie de cette conception des grandeurs intrinsèques et de la possibilité très commune de mesurer une grandeur par l'intermédiaire d'une autre. Cette possibilité s'enracine dans les dispositifs matériels eux-mêmes comme dans le peson. Un tel système constitue alors une mesure analogique. Le triplet fondamental n'a pas disparu : l'un des espaces mesurables sert d'ensemble de mesure à l'autre et le procédé de mise en correspondance assure le rôle de fonction mesure. Cette possibilité a été utilisée pour essayer de tourner la nécessité d'expressions numériques des mesures.

L'exploration des propriétés des espaces mesurables est indispensable. Celle des transformations définies sur les objets d'études qui laissent invariantes certaines mesures (par exemple l'étude des isoméries en géométrie) est possible sans que jamais ces mesures soient exprimées numériquement. Cette approche a ouvert de très riches champs d'études mais elle a montré très vite ses limites. Notamment avec les problèmes de quadrature puis d'intégration. Depuis l'époque de LEBESGUE, l'étude directe des grandeurs est sortie du domaine des mathématiques.

Concrètement, diverses situations fondamentales de divers mesurages, calquées sur celle donnée plus haut pour les nombres naturels ont été expérimentées avec un certain succès (pour les mesures de longueur, d'aire ou d'angle par exemple)[6]. La genèse de la notion de fréquence et de probabilité a fait l'objet d'études plus originales[7].

5. L'univers des unités et des changements d'unités (6)

La nécessité de recourir à une mesure numérique viendra donc des avantages matériels qu'elle procure ou du rejet de la possibilité d'utiliser une mesure analogique. Le partage d'un segment en sept segments égaux est possible (par exemple avec un bon réseau de parallèles équidistantes), mais le partage géométrique d'un cône (un tas de grains) en sept cônes égaux présente quelques difficultés !

Formellement, dans cet univers, **la mesure** dite parfois **concrète d'un objet lui fait correspondre un couple formé d'un nombre et d'une unité.** Les problèmes qui vont se poser dans cet univers seront des problèmes de choix et de changement d'unités ou des problèmes de correspondance entre des mesures de différentes variables ou grandeurs (équations aux dimensions). En ce sens tout système de numération est déjà un système de mesure d'un cardinal à l'aide d'une unité auxiliaire (ou de plusieurs).

Nous trouverons ici aussi tous les problèmes liés aux systèmes de mesure et en particulier au système métrique, avec à l'opposé les fractions et leur système complet d'unités intermédiaires.

Nous y trouverons aussi l'étude des divers procédés de construction des mesures, les mesures produits (qui correspondent à des intégrales multiples) comme l'aire, le volume… ou les mesures dérivées (vitesse, densité, débit, etc.).

Nous y trouverons, bien qu'un peu à part, les « **grandeurs scalaires** » ou à condition d'échelle : pourcentage, fréquence, probabilité, qui apparemment n'ont pas d'unité mais ou

---

[6] Articles de A. BESSOT, M. ARTIGUE, M.J. PERRIN, M.H. SALIN et René BERTHELOT

[7] Statistiques et probabilités au CM. C.R. de la *** rencontre de la CIEAEM à Bordeaux. (1974)

justement l'unité est « le tout ». Les grandeurs « physiques » et les « grandeurs scalaires » s'opposent au moins autant par les conceptions heuristiques qu'elles activent que par leur nature.

Dans cet univers encore, nous trouverons des problèmes liés à des conceptions heuristiques de la mesure : les unes correspondent à l'idée de mesurer quelque chose de grand avec quelque chose de petit, avec toutes les méthodes pour se ramener à ce schéma. les autres à l'idée de mesurer quelque chose avec une autre chose à peu près aussi grande par commensuration (exemples de situations : la mesure de l'épaisseur des feuilles de papier dans N.& G. BROUSSEAU [8]).

Les situations fondamentales pour cet univers sont représentées par celle qui est utilisée par Nadine BROUSSEAU[9] au début du processus. Les élèves doivent communiquer des renseignements pour faire équilibrer exactement divers objets par des quantités de sable convenables en les plaçant sur les plateaux d'une balance ROBERVAL. Cette leçon due à François COLMEZ conduit les élèves à utiliser divers objets unités « identiques » disponibles en grand nombre (des clous, des plaquettes...) mais qui ne sont pas des multiples simples les unes des autres.

6. L'univers du mesurage, métrologie, erreurs et approximations (7)

A un objet réel, la réalisation effective d'une mesure ne fait correspondre en fait un nombre déterminé que si les conventions sociales le déclarent. Dans des situations où cette convention n'existe **pas l'image d'un objet est** en fait **un intervalle** (erreur, tolérance, intervalle de confiance), **ou plus précisément une distribution** (de probabilité par exemple). Nous avons donc un triplet fondamental différent.

Ce modèle mathématique est plus complexe mais plus « réaliste » que les autres. L'univers qui lui est associé est celui de l'art du mesurage et de toutes les méthodes « pratiques » inventées pour mesurer commodément , et son étude est la métrologie, et celle des arts et des métiers. L'adaptation de la taille des unités aux caractéristiques de l'homme et de ses tâches, conduit à l'étude des propriétés ergonomiques des uns et des autres. Sous quelle forme se présentent les unités effectives ? les étalons ?

La situation du verre d'eau a montré aux élèves que pour gagner en « vérité », pour dire des choses plus indiscutables, il faut souvent qu'elles soient moins précises.

---

[8] Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, N.& G. BROUSSEAU, IREM de BORDEAUX (1986)

[9] « La mesure au CM1 » ouvrage cité

7. L'univers de la taille des mesures, de leur rareté et des ordres de grandeurs (8)

Mesurer un objet dans un des sens introduits ci-dessus, (un nombre, un nombre et une unité, un nombre et un intervalle de confiance ou une tolérance, ou une « erreur type » etc.) épuise-t-il complètement la question de savoir s'il est grand ou petit ? peut être que oui, si le destinataire possède une culture et des informations suffisante, mais en général non.

Par exemple

- Mon éléphant mesure deux mètres au garrot
- c'est un petit éléphant !
- mais il n'a qu'un ans
- alors c'est un jeune géant car 95% des éléphants de cet âge sont plus petits.

La question peut être cruciale lorsqu'il s'agit d'interpréter des mesures qui sont des indices importants (« votre vitesse de sédimentation est de 75 », est-ce que ça signifie que je suis malade ? ma culture dans ce domaine est nulle ! quelle vitesse de sédimentation pour les gens bien portants ? la moyenne risque de ne pas suffire quelle mesure pour l'écart ? seulement tant pour cent ont une vitesse supérieure à tant. Votre vitesse est trop élevée, il est plus vraisemblable que vous avez une inflammation par exemple peut être un rhumatisme articulaire). Il ne s'agit pas de donner l'intervalle de confiance d'une mesure, mais de comparer une valeur à une distribution qui indique avec quelles fréquence on trouve des valeurs supérieures. Ce système permet de comparer la taille d'une souris de 12 cm au garrot (énorme) avec celle de mon éléphant (moins « grand » parce que moins extraordinaire).

Mesurer un objet en mesurant son expression, sa mesure : nombre de chiffres pour les naturels (avec les décimaux le nombre de chiffres significatifs doit mesurer la qualité de la mesure) l'échelle des ordres de grandeur...Linéariser pour mesurer : les puissances sonores...

8. En conclusion

Il est clair que chaque univers est caractérisé par des préoccupations et des problèmes différents. Pour les identifier, il a fallu évoquer des situations différentes bien qu'elles dérivent toutes de même schéma général de la mesure. Il a fallu dire en quoi le jeu de l'homme à l'éléphant est différent de celui des enfants avec leurs clous, ou de ceux avec leur double décimètre pour mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier ?

Ce n'est pas la théorie des situations qui le dit, ce sont les mathématiques. La théorie est essentiellement un instrument de conversion des connaissances en situations sur lesquelles peuvent s'appuyer des raisonnements économiques et écologiques.

Il s'agit maintenant de les organiser en un processus didactique qui permette les apprentissages successifs. Cette question est évoquée dans le paragraphe suivant.

III. L'ENSEIGNEMENT « CLASSIQUE » DES GRANDEURS ET DES MESURES

1. Importance du système métrique

A la fin du XIX siècle l'enseignement de « l'arithmétique élémentaire » atteint en France une sorte de classicisme, une forme qui va être conservée presque immuable pendant plus d'un siècle. Les premières connaissances visées sont évidemment celle des nombres, naturels puis décimaux, et celles de leurs opérations (+, -, x, / , la racine carrée fera une entrée furtive et une sortie rapide). Mais toute l'étude est axée sur la connaissance du système métrique, qui permet de préparer, d'appuyer, et d'illustrer merveilleusement l'étude de la numération décimale.

Dans les pays qui conservent les anciens systèmes non décimaux, l'étude des changements d'unités pour les grandeurs physiques ou économiques doit être repoussée après l'étude des opérations dans les naturels, et doit faire l'objet d'études répétées et spécifiques de chaque grandeur. Il est possible d'étudier les grandeurs non discrètes en même temps que les cardinaux mais avec seulement une seule unité, ce qui limite fortement l'éventail des mesures et des nombres que l'on peut considérer. Pour trouver un équivalent dans l'enseignement français, il faut considérer l'étude des mesures du temps. Le retard par rapport aux autres mesures est considérable.

Dans les pays qui ont adopté le système métrique au contraire, l'étude de la numération décimale peut s'accompagner de celle des différentes unités multiples de l'unité légale. Il y a des raisons politiques et historiques d'ailleurs pour que l'enseignement mette en évidence les avantages que lui procure l'usage du système métrique. De plus les conceptions psychologiques et didactiques de l'époque renforcent cette tendance. D'abord l'analogie est un (et même « le ») générateur indispensable des variétés de leçons et d'exercices relatifs à une même notion. Les enseignants utilisent systématiquement les analogies pour activer les mêmes explications, répéter les « mêmes » exercices, pour « renforcer » la signification des opérations et des termes. Ces dispositions s'appuient naturellement sur les formes vulgarisées des théories gestaltistes de la connaissance et sur les théories empiristes de l'apprentissage en cours à cette époque.

De plus la plupart des élèves étaient familiarisés avec toutes sortes de mesurages de différentes sortes de grandeurs familières à l'aide d'appareils de mesure « montrant » les propriétés fondamentales de la mesure. Il semblait même que la comparaison de deux valeurs de grandeurs « continues » comme les longueurs de deux baguettes ou la capacité de deux récipients, étaient plus « évidentes » et donc plus précocement apprises que les comparaisons de quantités discrètes...

Il n'est donc pas étonnant de trouver très tôt dans la scolarité l'étude concomitante de différentes mesures de grandeurs : prix, longueurs, masses, capacités en parallèle parfait avec l'étude des cardinaux, des rangs et des mesures discrètes. Par exemple, au cours préparatoire l'enseignant illustrera l'étude du nombre trois avec trois jetons, le dessin de trois oiseaux, en faisant frapper trois fois dans les mains, en faisant réaliser trois francs, en repérant le troisième, en mesurant trois centimètres etc. L'étude de la dizaine ne sera jamais très loin de l'usage du décimètre.

Cette disposition générale conduit à donner un grande importance au « système métrique » qui occupe environ 1/5 des leçons dans toute la scolarité primaire.

2. Stabilité des notions et des pratiques

A notre avis, l'étude systématique de « tous » les manuels de 1850 à 1970 pour les différents niveaux scolaire renforceraient les conjectures suivantes :
Les notions sont toutes introduites à partir des mêmes définitions mathématiques, empruntées à un « même » ouvrage « supérieur ». Ces ouvrages de référence se succèdent à intervalles très éloignés. Ils sont peu nombreux et très peu différents sur les questions d'étude du nombre et du mesurage, de sorte que l'organisation des notions n'évolue pratiquement pas pendant toute la période évoquée. L'ordre d'introduction et les regroupements de notions en leçons seront donc tout à fait similaires.

D'autre part l'organisation générale de l'étude des nombres et des grandeurs reste presque identique d'un niveau à un autre (et naturellement entre livres du maître et manuels des élèves). Ainsi le ratio de 1/5 n'évolue pas au cours de la scolarité « primaire » et il reste à peu près le même aussi dans les ouvrages destinés à ce qui correspondait à notre collège actuel. Il est vrai qu'alors, ces ouvrages déterminaient ce qui était considéré comme « la norme » de l'enseignement obligatoire des connaissances communes. Le tableau ci-après indique la répartition des pages entre les trois secteurs des mathématiques dans 9 manuels du XX siècle. Il illustre notre propos.

Année	Destination	Nbre Pages Nbre exerc.	Arithmétique	Système métrique	Géométrie	Observations Autres
1889	Livre du maître[10] Primaire et sup Chaumeil	154p 1000 pb	66,5 %	17,5 %	16 %	Compléments: racines, problèmes, Règles, déf. quest. Devoirs
	Alix Bazenant CM et Sup	184 p , 416 p avec sup	72,2 %	13,6 %	14,1 %	Même organisation
1921	Livre du maître Jacquemard	303 p 314p	92,6 %	7,4 %	0 %	Plus près d'un ouvrage de maths (Tombeck)
1923	Livre de l'élève CM et sup Brouet	91 p + dev 350 p avec suppléments	51,6 %	31,8 %	16,4 %	Même org. qu'en 1889
1923	Leçons et devoirs (Bresteau)	96 p + pb 254 p	43,75 %	23 %	33,3 %	Problèmes introductifs Plus de règles ni définitions
1945	Cours moyen Joly	305 317 p	81 %	13,5 %	5,5 %	Décompositions didactiques

Ces pourcentages peuvent être comparés à ceux qui ressortent de trois manuels pris après la réforme de 1970

1987	CM1 Eiler	191 p	50,6	25,3 %	24 %	Activités et rien
1995	Transmath Malaval 5ième	256 p	43 % Numérique	0 %	57 % Géométrique	Soutien
1996	Delord Vinrich 5ième	272 p	50 %	0 %	50 %	Luxuriance des contrats didactiques, bilans

3. Evolution des options didactiques et pédagogiques (Esquisse)

Pour avoir une idée de ce qu'était l'enseignement des grandeurs et de la mesure à cette époque il faut aussi examiner les options pédagogiques et didactiques.

Les leçons étaient organisées de manière assez différentes de ce qu'elles sont aujourd'hui. L'idée que les élèves avaient l'occasion de voir manipuler et de manipuler eux mêmes toutes

[10] Il faut remarquer que si le livre contient plus d'informations que le livre de l'élèves il ne s'en distingue ni par le langage, ni par les conceptions, ni par la présentation didactique et pédagogique de sorte qu'il semble que le savoir des maîtres soit un simple complément en prolongement « naturel » des connaissances du primaire. Cette observation justifie la présentce de ce type d'ouvrage dans le tableau.

sortes de mesurages (surtout à la campagne, milieu auquel appartenaient 80% de la population, conduisait à négliger en classe les réalisations effectives, difficiles à préparer, longues à effectuer, coûteuses en matériel scolaire, d'une efficacité incertaine etc. malgré les objurgations des mathématiciens et des inspecteurs qui recommandaient dès le début du siècle de multiplier les expériences en proposaient à cet effet des compendiums scolaires appropriés.

Parallèlement les restes des méthodes scolastiques conduisaient les enseignants à faire grand cas des formulations produites par les élèves. Autant que les notions introduites et leur usage, ils enseignaient un discours sur ces notions, par des jeux de questions et de réponses.

Jusqu'à la fin du XIXe siècle la forme standard des cours prend la forme d'une suite de questions et de réponses du genre :

Q :« qu'appelle-t-on grandeur ? »

R : « on appelle grandeur ou quantité tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme une somme d'argent, un nombre d'arbre, la hauteur d'un mur »

Q :« qu'est que l'unité ? »

R : « l'unité est une quantité connue qui sert à mesurer ou à évaluer toutes les quantités de la même espèce qu'elle »

Q :« Qu'est-ce qu'un nombre ? »

R : « un nombre est le résultat obtenu en comparant une quantité à son unité, il est concret si... »

Cette méthode détermine le savoir par ce que l'élève doit dire « par cœur » en réponse à une question conventionnelle précise. Même l'exécution des algorithmes fait parfois l'objet d'une description verbale complète : la règle. (cf H. Neveu, Arithmétique, Masson 1921)

A la fin du XIXe siècle une structure de leçon aux activités beaucoup plus variées tend à se substituer à la précédente. Nous en donnons le détail car il est intéressant d'observer le type et la quantité de travail effectué par l'élève. Ces paramètres interviennent autant que l'organisation mathématique et épistémologique des connaissances.

	Travail	Durée
a	Correction du devoir du soir au tableau (par le maître, ou par un élève)	0 05
b	Calcul mental (procédé La Martinière), ou interrogation orale	0 05
c	Cours : Règle et définition, exemple	0 10
d	Questions orales pour vérifier la compréhension du texte	0 05
e	Exercices sur l'ardoise ou au brouillon,	0 05
f	Correction des exercices au tableau par un(e) élève ou par le maître	0 05
g	Problème :	0 20 :
	lecture et explication de l'énoncé	*0 03*
	résolution individuelle	*0 06*
	présentation de la solution sur le cahier du jour	*0 04*
	correction collective au tableau	*0 05*
	copie des corrections par les élèves. (pendant que le professeur note les cahiers du jour	*0 02*
h	le soir donnée des devoirs : exercices et petit problème	

Cette structure se modifie suivant quelques modalités didactiques :

i) L'enseignement d'une notion nouvelle comprenait essentiellement les parties: a, b, c, d, e, f, g ;

ii) L'enseignement d'un algorithme : a, c, b, d, e, f, g ;

iii) Une révision : a, b, e, f, d, c, g ;

iv) L'étude d'une application : a, c, g, d, b, e, f ;

Ainsi en un mois, l'élève faisait environ 75 exercices de calcul mental , 90 exercices écrits (dont 30 à la maison) et 30 problèmes « assez fermés (dont 15 à la maison et 1 sur le « cahier mensuel »).

Il répondait environ à 7 questions orales.

Les manipulations effectives autres que les calculs, étaient le plus souvent enfermées dans la phase « cours » du professeur. La participation des élèves à ces manipulations était nécessairement extrêmement réduites. Elles n'étaient pas un but mais un moyen supposé faciliter la compréhension et l'apprentissage. Mais ces moyens paraissaient bien douteux et bien coûteux en efforts matériel et en temps devant une « bonne » formulation, explication, répétition des calculs etc.

Par la suite, d'autres formules sont apparues sous la poussée des mouvements pédagogiques. Leur étude est rendue difficile par la variété (théorique au moins) des pratiques et par toute une série d'objurgations parfois contradictoires :

Les professeurs doivent faire des leçons personnelles (ne pas reproduire) originales (innovation), ne pas utiliser le manuel (sinon pour les exercices), mais échanger leurs méthodes avec leurs collègues (ce qui augmente la dispersion), faire travailler les enfants sur des fiches etc., avec du matériel...

Les élèves doivent comprendre plutôt qu'apprendre (par les procédés répétitifs) mais les élèves doivent être actifs et le professeur parler peu. Il doit « exploiter » les événements que ses dispositifs font naître plutôt que conduire les élèves à sa guise... Mais ils doivent évaluer tout ce qui a été appris (sans qu'on sache toujours ce qu'il faut faire en cas de difficultés excessives) et rester modeste, n'enseigner que ce qui peut être appris...

Toutes ces mesures augmentent l'instabilité du déroulement des leçons. Elles tendent à dissimuler leurs caractères communs effectifs aux yeux même des professeurs, et ceci au bénéfice de caractères qui apparaissent plus idéologiques que scientifiques et pratiques.

4. L'évolution de la structure des leçons sur la mesure des grandeurs

Au début du siècle, le traitement des grandeurs dans les manuels est purement descriptif et verbal, mais il s'appuie sur des pratiques sociales très répandues et familières. Le texte des manuels évoque donc essentiellement :

a) un exposé de savoirs (à apprendre par cœur) par le professeur, essentiellement

i) une ou des techniques de mesurage. La variété des problème de métrologie liés aux mesurages effectifs, des techniques (double pesée), aux instruments (bascule, romaine, vernier...)

ii) la définition et l'usage des unités (pratiques, effectives réelles, légales etc.)

b) en ce qui concerne le travail de l'élève : des calculs

i) Dans le système métrique et les transformations d'unités,

ii) et sur quelques problèmes « spécifiques » qui permettaient d'explorer implicitement des propriétés de l'espace mesuré, quelques exemples « d'exercices propres aux grandeurs » et spécifiques (EPG) tels que :

- longueurs : intervalles et bornes, périmètres de surfaces, relation d'ordre, échelles,
- masses : tare et récipients, comparaisons transformations d'expressions numérique, changements d'unités à cause de la maniabilité d'une grande échelle d'ordres de grandeur → alliages
-capacités : relations avec les volumes (→ débits, robinets)
- aires, augmentation, intersections, faces de solides,
- temps : bases (→ vitesses, moyennes, trains,) etc.

La réforme de 1905 met l'accent sur l'expérience (laboratoires de mathématiques) surtout au sens de la *démonstration* par le professeur. Ces activités ne portent guère que sur les

EPG qu'elles ont à charge d'illustrer et de faire comprendre. En fait c'est surtout l'ostension qui est réalisée dans les classes et suggérée dans les manuels. Par la suite, l'activité des élèves est mise en avant, d'abord collective puis à partir des années 30, puis individuelle (manipulation de matériels : baguettes etc.). Mais la production de matériel individuel se heurte à des difficultés économiques et leur usage à des difficultés pédagogiques presque insurmontables. Echec des valises et des compendiums individuels de calcul. Remplacement par des fiches.

Les années 70 voient apparaître des leçons spécifiques sur les grandeurs considérées comme espaces mesurables : leçons pour poser les principaux problèmes des grandeurs (masses : François Colmez, angles : M. Artigue, M.H. Salin et R. Berthelot, aire : Régine Douady, Marie Jeanne Perrin, capacités et autres : N. et G. Brousseau... et bien d'autres). Mais ces propositions n'aboutissent semble-t-il qu'à une très faible diffusion.

5. Le rôle de l'analogie dans l'enseignement « classique » des grandeurs

Le caractère épistémologique et didactique à mes yeux le plus important est probablement le suivant : l'analogie était « naturelle » elle s'imposait, elle n'était pas mise en relief. Elle était supposée tellement « naturelle que les professeurs exigeaient des élèves qu'ils les produisent comme un évidence. L'addition de deux longueurs ou l'addition de deux masses étaient définies de la même façon : c'est l'opération matérielle qui satisfait aux propriétés des nombres qui les mesurent. De ce fait les différences entre les opérations dans les grandeurs étaient complètement effacées. Les exemples abondent. Nous en donnons un plus bas.

IV. L' ENSEIGNEMENT « ACTUEL » DES GRANDEURS

1. Difficulté de la description

Il est difficile de donner une description de l'enseignement actuel des grandeurs, car après une disparition assez prononcée des leçons et des pratiques scolaires relatives aux grandeurs, disparition « naturelle » ou du moins explicable, des voix se sont élevées pour s'alarmer des difficultés des élèves à manier les mesure des grandeurs physiques, les changements d'unités, et de façon générale la conception des grandeurs même élémentaires.

Des travaux de recherche ont signalé les difficultés que les élèves ont à se « représenter » les relations non strictement numériques entre les nombres et insistent sur la nécessité de développer des « représentations » de différentes sortes, notamment « iconiques » pour toutes sortes de notions mathématiques[11]. Certains préconisent même d'en faire un enseignement spécifique, comme jadis on avait proposé un enseignement des méthodes du problem solving.

Alors on voit réapparaître en ce moment dans les programmes des objurgations à s'intéresser aux grandeurs et dans les manuels des exercices et quelques leçons qui reprennent les anciennes pratiques et conceptions didactiques. Quelles sont les chances de ces leçons de remplir assez facilement leur office ?

Ces mesures pourraient peut être suffire si la disparition des exercices sur les grandeurs et sur la mesure étaient l'effet de décisions didactiques malheureuses, d'une sorte d'inadvertance des mathématiciens, de bêtise des responsables, d'incompétence de la part des enseignants ou même de malveillance caractérisée de la part d'on ne sait quels novateurs. C'est d'ailleurs ce que répètent avec obstination certains refondateurs qui préfèrent trouver des boucs émissaires que chercher à comprendre la nature profonde des phénomènes didactiques. C'est ce que laisserait entendre implicitement l'abandon hédoniste et nostalgique au retour aux anciennes pratiques. J'ignore si la réintroduction forcenée de la géométrie du triangle à tous les niveaux aura les effets escomptés sur la valeur mathématique des élèves mais je crois qu'on ne pourra pas remplacer ce que l'environnement socio-culturel des siècles derniers donnait aux enseignements sur les grandeurs dans la scolarité obligatoire.

A mon avis pour espérer redresser la barre et tirer parti de l'évolution au lieu de la subir et de la combattre, il faut d'abord la comprendre, ensuite chercher à l'utiliser pour réaliser avec des moyens nouveaux et adaptés les objectifs que le passé nous commande de conserver ou que l'avenir nous demande de nous donner.

Une des plus grandes difficultés que ce genre d'étude présente aujourd'hui c'est d'abord le terrible rabattement de tous les problèmes de didactique sur des variables psychologiques, comme si toutes les causes des difficultés de l'enseignement étaient d'ordre psychologique, (difficultés des élèves ou des professeurs) et ensuite l'absorption des études de psychologie par la nébuleuse des « sciences cognitives » sous le manteau desquelles toutes les naïvetés épistémologiques, scientifiques et sociologiques sont permises et encouragées, avec des effets destructeurs sur les pratiques sociales autour de l'enseignement et sur les recherches authentiques.

Dans le cadre de cette communication, il ne m'est pas possible d'aller plus avant dans l'étude, je me contenterai donc de me livrer à quelques propositions. Mon but est plus de vous

[11] Les deux volumes du numéro 17 de « the Journal of Mathematical Behavior », donnent un aperçu assez étendu de ces travaux, Gerald Goldin & Claude Janvier guest editors, Ablex Publishing Corporation Stamford Connecticut 1998

encourager à entreprendre des recherches sur ces propositions que de vous convaincre prématurément et indûment de leur validité.

2. Quelques conjectures

Voici quelques conjectures :

a) l'enseignement rampant et précoce de l'algèbre est inéluctable avec des professeurs qui ne connaissent que les mathématiques didactiques des mathématiciens actuels et pas de didactique et qui restent entièrement soumis à leurs opinions spontanées et à leurs modes ;

b) la perte de pratique et de motivation effective (culturelle) au calcul numérique humain, écrit ou mental est la conséquence inéluctable du développement des calculettes ;

c) l'usage généralisé des affichages numériques fait disparaître la pratique des relations topologiques au profit des numériques ce qui a des conséquences importantes et négatives sur l'apprentissage et la connaissance de l'analyse et de la topologie ;

d) la disparition de la vigilance scolaire sur les concepts mathématiques de base, conjuguée avec des injonctions pédagogiques peu soucieuses de la qualité objective de la pensée et de son expression chez les élèves, laisse la porte ouverte aux usages populaires les plus confus.

3. Phénomènes

L'introduction du traitement automatique de l'information et du calcul, et le développement de l'algèbre au sens large ont profondément modifié les pratiques mathématiques de toute la société. Ils devraient constituer une partie essentielle des mathématiques de la scolarité obligatoire. Mais l'influence de cette évolution sur l'enseignement dans la scolarité obligatoire n'est ni maîtrisée, ni même conçue de façon rationnelle: Seule son importance est reconnue.

Mais des connaissances mathématiques spécifiques, y compris certaines qui sont sorties des préoccupations actuelles des mathématiciens, restent indispensables au développement et à la formation des élèves, notamment ceux de la scolarité obligatoire. Elles forment les « mathématiques didactiques ». Leur contenu et leur signification doivent être l'objet d'études et de négociations culturelles et sociales appuyées sur une connaissance scientifique du fonctionnement des systèmes didactiques. En particulier une partie de l'étude des grandeurs et de leur mesure ne peut pas être pratiquement exclue de l'école primaire sous prétexte que cette étude ne fait plus partie des mathématiques actuelles. Le renvoi de leur étude aux autres disciplines pourrait être souhaité mais il se heurte à des difficultés didactiques bien plus grandes. Le point de départ se trouve dans les programmes de mathématiques eux-mêmes.

Pour la société, l'étude des mathématiques dans la scolarité obligatoire reste en bonne partie celle de « la grandeur ».

Quelques mises au point dont voici l'inventaire seraient suffisantes et éviteraient de rompre une définition multimillénaire.

- Distinction entre la grandeur (les structures) et les grandeurs (physiques, économiques, etc.)
- Intégration de la grandeurs des grandeurs (ordres de grandeur, rareté dans une distribution…)
- Intégration de la grandeur discrète : « cardinal d'un ensemble » *argumentation*
- Intégration des grandeurs ordonnées non mesurables : étude de leurs structures
- Intégration des « grandeurs » discrètes finies : probabilités, validité (logiques modales)
- Intégration de la classification et des hiérarchies non ordonnées (logique booléenne)

On peut y gagner beaucoup de clarification dans les rapports avec le public.

Le partage entre :

- l'étude mathématique : celle des structures de départ et d'arrivée (divers espaces, intégration, structures numériques et autres,
- la conception des grandeurs pertinentes à une étude donnée,
- et la métrologie (méthodes de mesurage, systèmes d'unités)

est affaire d'histoire des sciences (la mesure d'Hausdorff et son application aux fractals ne fait pas encore partie de la physique par ex.).

Mais dans la scolarité obligatoire les professeurs de mathématiques ne peuvent pas s'aligner sur les pratiques des mathématiciens.

Le plus important serait donc l'étude à moyen terme d'un programme de « mathématiques didactiques » prenant en compte à la fois les programmes de l'école primaire et leurs « conséquences » aux niveaux supérieurs – et pas seulement l'inverse (comme s'il suffisait de savoir pour pouvoir…) envisagé dans la perspective d'une mise en œuvre progressive et concertée. Le plus urgent serait de commencer les études nécessaires et la mise en œuvre d'un véritable programme de recherches en didactique des mathématiques.

4. Obstacles (et quelques vaticinations)

L'idéologie de la refondation totale de la société et de la culture par le moyen de l'école est une illusion totale et une utopie dangereuse. Le négationnisme à l'égard de la transposition et des problèmes de didactique aussi.

L'influence des dérives « naturelles », en tout cas extrascolaires, dans les usages des mathématiques est devenue aussi importante que celle de la transposition volontaire.

L'acceptation de ce compromis transpositif est probablement impossible sans un consentement de la communauté des mathématiciens et un tel consentement paraît impossible à obtenir dans les conditions actuelles.

L'idée que puisqu'il existe une culture littéraire et une culture scientifique, il existerait des élèves à l'esprit scientifique et des élèves « à l'esprit littéraire » est une « foutaise socio-médiatique », une de ces idées reçues sans discussion comme des évidences par des intellectuels peu soucieux de précision hors de leur domaine. Dans la grande majorité de la population les deux formes de connaissances sont fortement corrélées. La corrélation ne devient négative que par l'effet des formes d'examens utilisés dans les sélections.

Sur un échantillon de plus de 5000 titulaires de diverses licences candidats à l'IUFM, j'ai observé une très forte corrélation entre les résultats en français et en mathématiques.

Par contre en étudiant les résultats aux mêmes épreuves, mais seulement sur les quelque 400 élèves retenus, j'ai observé une bonne corrélation négative. C'est sur la base de cette corrélation que les recrutés fondent leur opinion au sujet de soi disant littéraires et scientifiques, et qu'ils l'imposent par leur influence à toute la société. Or il ne s'agit que d'un effet mécanique du mode de détermination des reçus. Considérons que le nuage des élèves placés dans le plan cartésien suivant leurs notes en français et en mathématiques a en gros la forme d'une ellipse allongée, la note décisive est obtenue en faisant la somme des deux notes. La droite qui discrimine les reçus et les collés est donc parallèle à la deuxième bissectrice, et elle découpe dans ce nuage une lunule allongée le long de cette droite, la corrélation négative est d'autant plus forte que la sélection est plus sévère.

Si on recrutait les élèves qui ont une note supérieure à un seuil donné, indépendamment, dans chaque discipline, on supprimerait cet effet imbécile.

Qu'en est-il pour les illettrés ? Mon analyse ne fonctionne par pour eux. Il y a même des raisons de penser que suivant la cause de l'illétrisme, le rapport entre les compétences linguistiques et les compétences mathématiques peut varier profondément.

Ce qui s'est produit depuis les années 70 : les structures d'abord puis la géométrie ont absorbé des durées d'enseignement et des ressources didactiques considérables au détriment de la connaissance des grandeurs.

A l'école primaire par exemple, le professeur doit enseigner des sujets qui sont indispensables à la formation des élèves et des citoyens, mais qui sortis du champ des préoccupations des mathématiques sans pour autant rentrer dans celle des autres disciplines (pour autant qu'elles soient représentées), et même si elles le sont elles ne se chargent plus de leur partie mathématique.

V. SUGGESTIONS : L'ANALOGIQUE ET LE NUMERIQUE

1. Conditions

L'histoire ne revient pas en arrière. Il est donc inutile de proposer le retour de l'enseignement des grandeurs tel qu'il a pu se donner depuis un siècle et demi. On ne mettra plus sous les yeux et dans la main des enfants la pesée de chaque sac de blé, au pied des batteuses fixes, avec des bascules au mécanisme apparent et avec des masses marquées. Ils n'auront plus besoin de rechercher « continûment » l'équilibre en changeant au besoin de levier et d'échelle de déplacement. Ils ne chercheront plus l'explication dans la pesée d'un lapin à la balance romaine... Tout ce que l'école n'avait pas à enseigner parce que cela faisait partie du milieu ne pourra pas entrer dans la classe, ni à travers quelques discours, si habiles soient-ils, ni avec quelques activités aussi « fondamentales » qu'elles paraissent, et encore moins par quelque symbolique magique, serait-elle merveilleusement audio-icono-cinétique et informatique. Les quelques suggestions qui suivent n'ont pas cet objet.

Pour les notions que l'on veut enseigner, il faut recréer des « milieux » adaptés à la fois aux possibilités scolaires, toujours très limitées, et aux ressources – bien appauvries il faut s'en convaincre - de l'environnement extra scolaire. Créer un milieu dans ces conditions suppose une maîtrise extraordinaire

- de la nature des situations et des exercices et de leur rendement cognitif et affectif
- du temps nécessaire à chaque rencontre,
- de la typologie des rencontres et de leurs interactions
- de la redondance dans le processus, à la fois indispensable et dangereuse. L'absence de contrôle et de reconnaissance de la redondance didactique est la cause principale des échecs des professeurs et de leurs élèves.

Examiner les rapports que chaque « leçon » et que chaque exercice entretient avec l'ensemble des autres est une nécessité absolue pour économiser.

L'ordre axiomatique et a fortiori toutes les suggestions de nature seulement pédagogiques sont insuffisants pour assurer la nécessaire utilisation optimale du temps nécessaire à la création des milieux indispensables à la compréhension de ce que nous considérons encore – a tort peut être – comme des conditions nécessaires à la formation des citoyens.

Il faut proposer des solutions nouvelles ou qui semblent nouvelles. Pour cela nous devons reprendre la conception de l'enseignement de toute « l'arithmétique élémentaire ». L'introduction précoce de l'algèbre doit aussi être étudiée sérieusement pour améliorer la proximité culturelle des professeurs et des élèves et pour limiter les effets de l'ignorance ou de l'enthousiasme excessif.

2. Le numérique ou l'arithmétique ?

Beaucoup de professeurs considèrent aujourd'hui l'arithmétique élémentaire comme de l'algèbre sans lettres : Lorsqu'un élève écrit 3 + 4 = 7 il écrirait une *égalité « numérique »*, c'est à dire une égalité au sens de l'algèbre et par opposition à une 'égalité' du genre PA + B = PV qui serait une *égalité « littérale »*.

Cette conception leur permet de proposer aux élèves des exercices directement inspirés de l'algèbre comme par exemple :

- des exercices à trous ' 3 + … = 7' ou '5 + … = 3 + 4' (« quelle valeur convient ? » ce qui veut dire « quelle valeur rend l'égalité suivante vraie ? »),

- des calculs sur des parenthèses

ou d'exprimer des « théorèmes d'arithmétique comme $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ etc.

Elle ne permet évidemment pas de donner un statut à toutes les écritures que les élèves pourraient imaginer et la règle implicite est qu'il faut se conformer aux habitudes du professeur.

Ce point de vue faussement formaliste (car il n'est pas conforme à la théorie des langages mathématiques formels) brouille complètement le sens de l'arithmétique et celui de l'algèbre.

Comme le montre Dominique BROUIN-FERGUSON dans sa thèse[12] l'arithmétique élémentaire se distingue de l'algèbre d'abord par son objet et par ses objets. Les objets sont des *quantités*, c'est à dire de valeurs de grandeurs, exprimées par des mesures, et la construction d'*expressions de quantités* par le moyen des opérations arithmétiques élémentaires. Du point de vue de l'algèbre ce sont des termes. Les données, les valeurs calculées sont des termes. Les relations algébriques dans lesquelles ces termes entrent comme argument (et notamment l'égalité) ne sont pas formalisées. Elles ne sont même formulées que de façon très allusive dans les énoncés. Ainsi '3 + 4' est un programme de calcul et il est bien connu qu'au niveau élémentaire '3 + 4 = 7' ne signifie pas pour les élèves que les termes '3 + 4' et '7' désignent le même objet (sens

[12] « Arithmétique et Algèbre Elémentaires Scolaires », Université Bordeaux, 2002, à paraître

algébrique) mais au contraire qu'une certaine activité – un calcul – permet de passer du terme '3 + 4' au terme '7'. On devrait écrire quelque chose comme '3 + 4 → 7 '

De même le dédoublement des lois additives en lois, l'une interne, et l'autre externe (et formant un ensemble dual) a été abondamment montré par les travaux de Vergnaud : non seulement la multiplication « simple » exprime l'application d'un opérateur (une nombre abstrait 3, comme 3 fois) à un vecteur (la mesure d'une grandeur, un nombre concret) mais l'addition aussi est souvent considérée sous les deux angles (somme de vecteurs et translation abstraite d'un vecteur. Dans ce cas l'écrasement de ces distinctions par les notations algébriques rend plus difficile la nécessaire conception des constructions effectives des termes et leur gestion. Certes on peut oublier ces distinctions et passer au quotient pour bénéficier des propriétés d'algèbre des ensembles numériques, mais peut-on les comprendre sans passer par cette étape ?

S'il faut se plier à la nécessité de rattacher les connaissances des élèves à celles de leurs professeurs il est non moins nécessaire d'adapter celles des professeurs à la réalité des opérations qu'ils proposent. Acceptons le terme « numérique » mais convenons qu'on ne construit dans un premier temps que des termes ou mieux des **programmes de calcul**. Les élèves peuvent apprendre

- à traduire des manipulations ou des transformations de grandeurs par des programmes de calcul,
- à effectuer ces programmes,
- à les concaténer en programmes plus complexes,
- à y faire figurer des lettres

L'écriture des résultats des programmes de calcul peut si c'est vraiment nécessaire utiliser des symboles spécifiques. Mais on ne gagne rien à utiliser trop tôt l'égalité si c'est en lui donnant un sens « faux ».

La comparaison des programmes de calcul, qui suppose implicitement l'emploi de quantificateurs peut alors être détachée et enseignée le moment venu.

3. Le numérique et l'algébrique

L'algèbre « avec des lettres » peut servir explicitement à des élèves très jeunes pour écrire ou interpréter des programmes de calcul (des formules au sens populaire), que l'on connaisse les données ou non au moment de l'écriture du programme, à la condition que les calculs envisagés soient des modèles *vérifiables* de manipulations réelles (qu'elles soient effectivement réalisées ou seulement imaginées au moment du calcul : il ne sert à rien de s'enfoncer dans les arcanes de la manipulation effective dans chaque emploi de connaissances acquises).

Si l'égalité est introduite ce doit être avec son sens exact : elle exprime une relation d'identité entre deux objets. Et ce doit être dans des circonstances qui la rendent utile, par exemple si l'identité n'est pas évidente a priori, si cette identité était évidente pourquoi l'écrire ? Elle peut être introduite pour exprimer que deux programmes donnent *toujours* le même résultat, c'est à dire qu'elle prend le sens de ce qu'on appelait autrefois l'identité. En fait l'égalité n'est vraiment utile qu'à partir du moment où on veut manipuler des relations et non plus des termes (ou des expressions). Les raisons de manipuler les relations n'ont plus rien à voir avec leur sémantique et celle des objets sur lesquels elles portent. Elles sont justifiées par le projet de résolution et la méthode que l'on utilise et légitimées par des théorèmes de logique ou de mathématiques qui peuvent ne pas être concrètement significatives. Il y a là un saut qu'il y a intérêt à rendre explicite et à expliquer. On pourrait dire aux enfants sur le mode culturel « l'algèbre sert à écrire des « théorèmes », des déclarations toujours vraies comme par exemple « 2 a plus 3 a est toujours égal à 5 a » puis pus tard leur demander d'inventer d'autres théorèmes comme « 347 x 58 = 20 126 » et identifier ainsi le calcul arithmétique dans un cadre directement algébrique. J'ai l'expérience du fait qu'ils « comprendraient » le discours mais je ne crois pas que l'on gagne grand chose à le tenir ainsi.

L'algèbre peut aussi à la rigueur servir à écrire des devinettes, la solution étant acceptée quels que soient les moyens employés pour l'obtenir, en particulier par tâtonnement ou par exhaustivité. L'étude de raisonnements (arithmétiques) permettant de court-circuiter ces recherches erratiques prend alors un « sens nouveau ».

4. L'ordre et la topologie numérique ?

Le principal inconvénient du traitement numérique des grandeurs est la disparition dans le modèle - c'est à dire dans les nombres - des possibilités de traitement *direct* des propriétés topologiques et des propriétés d'ordre des ensembles numériques et donc des grandeurs elles-mêmes. Pour savoir si 3,07 est voisin de 3,8 les élèves, tout comme les machines doivent « calculer » et rien ne vient secourir à un niveau sensoriel familier les moyens formels de contrôle de ce calcul. La numérisation généralisée des appareils de lecture des mesures et des calculateurs, l'automatisation des mesurages et des capteurs ou des senseurs de toutes sortes fait disparaître la pratique familière des modèles topologiques. Faut-il restaurer de tels modèles, et comment ?

5. Nombres et grandeurs

Avant de construire un système formel il faut se préoccuper de sa sémantique. Il est classique de considérer que la sémantique des nombres à l'école primaire, ce sont les collections et les grandeurs. Nous allons adopter ce point de vue mais auparavant je voudrais rappeler le fait suivant. Caleb Gattegno, sur la fin de sa vie, sans doute sensible aux critiques que l'on adressait au formalisme avait conçu un enseignement des nombres totalement détaché de toute sémantique au sens de Carnap. Les enfants apprenaient à compter en n'utilisant qu'un seul objet : une page de livre présentant les écritures des 100 premiers nombres (de 0 à 99), en dix rangées de dix nombres. L'enfant explorait les relations entre les nombres par toute une série de jeux et d'exercices. Comme il s'agissait de nombres « petits » et de relations utiles au calcul mental on ne devait écrire formellement ces relations qu'un peu plus tard. La sémantique des nombres était donc leurs relations et non pas des classes d'ensembles d'objets. Ce procédé était en un sens à l'opposé de ceux qui utilisaient tout un arsenal de matériel : cailloux, jetons, baguettes etc. et en particulier assez différent de celui de Cuisenaire, qui avait inspiré ses premières tentatives didactiques. Or le nouveau procédé de Caleb Gattegno a très bien marché. Ce qui suffit à relativiser nos hypothèses.

Si nous voulons travailler sur les grandeurs que nos nombres mesurent, ce n'est pas parce que nous y sommes obligé pour faire comprendre les nombres, c'est pour familiariser les élèves avec les univers des grandeurs et des mesures dont on fait usage dans la vie courante et dans la vie scientifique.

6. L'analogique

Nous avons vu dans le paragraphe 2 que la mesure permet de « modéliser » certaines propriétés des espaces mesurables, des grandeurs et des objets qui les portent par des nombres et des propriétés numériques. Cette modélisation permet de prévoir le résultat d'opérations matérielles complexes à l'aide de simples calculs numériques. Cette modélisation de grandeurs par des nombres connaît une expansion et un succès sans précédent du fait de l'apparition de puissants moyens de calcul automatique numérique.

Mais pendant un certain temps il est apparu des calculateurs fondés sur une modélisation inverse : la *modélisation analogique.*

Le mesurage fait correspondre à toute valeur d'une grandeur, un nombre, et à la grandeur elle-même une structure numérique déterminée. *La modélisation analogique est l'inverse du mesurage.* Elle consiste à faire correspondre à un nombre, une valeur physique dont il est la mesure[13]. Elle fait donc correspondre à une structure numérique, une grandeur physique et par le choix d'une unité, à tout nombre, une valeur de cette grandeur.

[13] Par exemple le nombre 3 était représenté par un courant de 3 volts, ou bien de 3 milliampères ou par une résistance de 3 ohms. Ensuite les opérations arithmétiques étaient effectuées par des opérations physiques qu'elles représentaient, elles-mêmes réalisées par des montages adéquats. Les sommes et les intégrations pouvaient être représentées par la

Les calculateurs basés sur ces principes s'appelaient calculateurs « analogiques » en référence au fait qu'ils représentaient les réels par des grandeurs continues, du continu par du continu, c'est à dire par une structure numérique par une structure topologique analogue, tandis que les calculateurs numériques sont fondamentalement discrets[14].

Attention le terme « analogique » ne fait ici aucune référence aux « analogies didactiques » qui utilisent les isomorphismes de mesures et dont nous reparlerons plus loin, mais seulement à la structure topologique de l'ensemble numérique considéré.

Il ne s'agit pas de ressusciter ces étranges machines mais d'inverser le point de vue didactique qui consiste à penser que les nombres « représentent des grandeurs » pour enseigner aux élèves comment les nombres peuvent structurer les grandeurs.

Tout de suite après avoir appris les premiers nombres naturels les enfants peuvent chercher à les utiliser pour résoudre certains problèmes de mesurage de diverses grandeurs comme il est d'usage, mais ils peuvent aussi chercher la réponse à certains questions sur les nombres en utilisant des grandeurs comme modèles. Par exemple en utilisant deux doubles décimètres pour faire une machine à additionner.

De même les élèves peuvent être conduits à chercher quelles sont les manipulations de différentes grandeurs qui correspondent à la somme ou au produit.

Nous avons présenté ce problème sous cette forme à des élèves de CM2 à propos des rationnels : si nos fractions sont des épaisseurs de feuilles de papier, qu'est-ce qui correspondrait à la somme de deux épaisseurs ? alors comment faut-il définir la somme de deux fractions ?[15] Ce procédé a été fructueux à plus d'un titre mais principalement les enfants ont eu l'impression d'utiliser leurs connaissances mathématiques pour se rendre maîtres d'une règle mystérieuse et en connaître la raison et le sens.

Il serait possible d'étudier parallèlement le sens et l'usage des nombres et des opérations dans plusieurs types de grandeurs, pas seulement pour « constater » ce qu'elles ont en commun mais aussi pour observer ce qui les différencie. Par exemple si je possède une barre de trois carrés de chocolat et une barre de quatre carrés de chocolat : pour représenter la somme 3 + 4, je peux les mettre côte à côte si je pense à la quantité de chocolat, à sa masse mais si je pense à des longueurs, je dois les mettre bout à bout.

---

charge progressive d'un condensateur, les dérivations par les effets d'une self, l'état stationnaire d'un circuit pouvait représenter ainsi la solution d'une équation différentielle...

[14] . Ces calculateurs étaient plus rapides et plus simples pour des programmes fixés une fois pour toute. Mais chaque changement de programme demandant des interventions matérielles coûteuses sur la grandeur représentante, leur souplesse était presque nulle.

[15] Nadine et Guy Brousseau « Rationnels et Décimaux » IREM de Bordeaux 1986

Evidemment il faut ajuster les projets à l'âge des enfants. Je me souviens avoir suggéré ce procédé dans mon premier livre (et dernier manuel, en 1964) pour le cours préparatoire. J'y montrais plusieurs personnages qui cherchaient à résoudre la même devinette, qui avec des écritures de nombres, qui avec les baguettes de longueurs différentes, qui avec de la monnaie, qui avec des collections de jetons, qui avec la pesée de masses marquées. Bonne idée mais succès médiocre : la considération simultanée de deux grandeurs différentes n'était pas accessible à cet âge, alors quatre ou cinq ! Les sommes de capacités, de volume, de temps, de vitesses, ont toutes leurs spécificités que l'on peut ainsi explorer.

L'introduction systématique de modélisations analogiques pourrait permettre de réintroduire toute une série de questions et d'exercices classiques sur les grandeurs avec un sens nouveau et un rôle épistémologique et didactique adaptés, et surtout sans trop consacrer de temps à restaurer des environnements perdus de toute façon. Elle permettrait aussi de réexaminer une nouvelle cohérence des représentations réclamées par certains avec l'enseignement nécessaire des structures mathématiques elles-mêmes.

7. Pourquoi ?

La considération, par les professeurs et donc sans doute finalement par les élèves, de **modélisations analogiques** et à côté de leur inverse **les mesurages ou modélisations numériques**, réintroduit l'usage didactique d'analogies au sens ordinaire de la rhétorique et de la pédagogie classique. Pourquoi introduire ce concept nouveau et ne pas rester sur la ligne ancienne qui étudiait « simplement » les différentes mesures ?

Si on pouvait faire cette introduction dans le cadre d'une réelle refonte en profondeur de l'organisation des connaissances mathématiques à l'élémentaire, et des situations utilisables par les élèves et par les professeurs, avec la possibilité de mener cette mise en place de façon assez lente et progressive... Alors oui, il serait préférable de modifier la formulation pour marquer cette différence.

Cette nouvelle dénomination serait nécessaire pour cadrer convenablement le sens de la réapparition des grandeurs sans contredire l'évolution des mathématiques et en s'adaptant à une évolution vers une introduction précoce mais précautionneuse de l'algèbre. Elle devrait permettre de faire ces analogies dans un esprit tout différent et de pallier en partie du moins à des défauts bien connus.

Mais je reconnais là des espoirs qui m'ont été familiers dans les années 60-70, ne risque-t-on pas de créer une nouvelle mode, un de ces nouveaux instruments didactiques séduisants et mal définis avec lesquels les professeurs jouent aux novateurs et qui finalement contribuent plus à rompre un peu plus avec des pratiques éprouvées ? Si bien sûr. Et c'est pour cela qu'il faut d'abord que les didacticiens travaillent, et plutôt dans l'ombre avant de lancer des idées trop séduisantes.

BIBLIOGRAPHIE

BARBUT M. et MONJARDET, B. 1970 *Ordre et classification, Algèbre combinatoire, 1 et 2,* Librairie Hachette Paris

BESSOT, A. et EBERHARD, M. (1983) Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en Didactique des mathématiques,* **4.3,**

BOULEAU, N., (1999) *Philosophies des mathématiques et de la modélisation du chercheur à l'ingénieur,* Paris : L'harmattan

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération, *Recherches en Didactique des mathématiques,* **19**.1. 41-75,

BROUSSEAU Nadine, *La mesure au CM1*, IREM de Bordeaux, 1987

BROUSSEAU N. et G. *Rationnels et Décimaux*, IREM de Bordeaux, 1986

BROUSSEAU N. et G. (1992) Le poids d'un récipient ou l'étude par des élèves de problèmes de mesurage, *Grand N,* **50**, 65-87

BROUSSEAU G. " Les univers de la mesure "

CHEVALLARD Yves, (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques,* **19**.2, 221-266.

COLMEZ, F. (1995) Place et rôle des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques de l'Ecole Primaire au Lycée *Contribution aux journées de la commission Inter-IREM " premier Cycle "*

DHOMBRES J., (1978) *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire,* Paris, CEDIC/ Fernand Nathan

DOUADY, R., (1986) Jeux de cadres et dialectique outil objet, *Recherches en Didactique des mathématiques,* **7**.2.

DOUADY, R, et PERRIN-GLORIAN, M.-J., Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, Educational Studies in Mathematics **20**.4, 387-424

FREUDENTHAL H, (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures,* Reidel Dordrech

GUITEL G., (1975) *Histoire Comparée des Numérations écrites* " Paris, flammarion

KAZIN, M. et KOTCHARIAN, M. Dimensionnelle (analyse et similitude) *Encyclopaedia universalis* **7**. 497b

LEBESGUE, H. (1931) *La mesure des grandeurs,* Genève : L'enseignement mathématique

LICHNEROWICS, A., (1994) Géométrie et relativité, in Jean Paul Pier, ed. *Development of Mathematics 1900-1950* Basel : Birkhäuser

LIZCANO, E. (1993) *Imaginario colectivo y creacion matemàtica* ", Barcelona : gedisa ed

Rapports " Géométrie " et " Calcul " de la commission KAHANE

REVUZ, H, Intégration et mesure, Encyclopaedia universalis

ROUCHE N., (1992) Le sens de la mesure Paris : Didier Hatier

ROY, M. F., Géométrie algébrique réelle, in Jean Paul Pier ed. *Development of Mathematics 1950-2000* Basel : Birkhäuser

WHITNEY HASSLER, (1968), The Mathematics of Physical Quantities, Part II : Quantities srtuctures and dimensional analysis, The American Monthly.

ANNEXE

TABLEAU DES GRANDEURS LES PLUS SOUVENT EVOQUEES DANS LA VIE COURANTE

Unidimensionnelles non scalaire (I)	Cardinal fini Longueur et distance Valeurs et monnaies Masses et poids Temps Capacités
Unidimensionnelle Scalaire (II)	Rapports naturels
Multidimensionnelle : Mesures produits	Aires planes Volumes
Multidimensionnelle : Mesures dérivées	Vitesses Débits (volumes, masse) Prix Masses Volumiques
Multidimensionnelles mixtes	Energie, travail, puissance intensité Information
Grandeurs bornées (Mesures à condition d'échelle)	Pourcentages (scalaires) Angles Statistiques Probabilités Taux
Mesures à Echelle exponentielle	Puissance sonore
Mesures sur R (positives ou négatives)	Translations numériques, Altitudes, profondeurs Puissance, Travail Tension électrique

Grandeurs non mesurables (ordres)	Température Rangs Echelles géophysiques (tempêtes, séismes)
Grandeur de « grandeurs »	Ordres de grandeur Rareté relative