

**L'ENTREE DANS LE CHAMP CONCEPTUEL DE L'ANALYSE :
REFORMES CURRICULAIRES, RECHERCHES DIDACTIQUES,
OÙ EN EST-ON ?**

*Michèle Artigue³³
DIDIREM, Université Paris 7*

I. INTRODUCTION

L'enseignement des débuts de l'analyse est aujourd'hui un secteur d'enseignement déstabilisé, en crise, partout dans le monde, en dépit des différences institutionnelles et culturelles. Le symposium organisé à Genève en octobre 2000, pour commémorer les cent ans de la revue « l'Enseignement Mathématique », qui a consacré une demi-journée de ses travaux à cet enseignement, retraçant son histoire au fil du siècle et essayant de penser ses perspectives futures, l'a bien mis en évidence³⁴.

En quoi les connaissances didactiques acquises dans ce champ nous aident-elles à analyser et comprendre cette déstabilisation, à penser des futurs possibles pour cet enseignement ? C'est à ces questions qu'est consacré ce texte. Elles en induisent immédiatement d'autres : quelles sont, au vu, tant de l'évolution des recherches didactiques que des questions que nous renvoie le système éducatif, les questions cruciales dans le champ de la didactique de l'analyse ?

Dans ce texte, après avoir en quelque sorte planté le décor, en resituant la déstabilisation actuelle dans une histoire de l'enseignement des débuts de l'analyse, nous essaierons de pointer, dans une seconde partie, ce qu'apportent les recherches didactiques à la réflexion sur les questions qui se posent. Nous évoquerons ensuite, dans une troisième partie, les liens entre recherche didactique et réformes curriculaires, en prenant un exemple étranger : celui des USA, où le mouvement de réforme du Calculus, au niveau collégial, a eu une ampleur toute particulière. Nous essaierons enfin, en conclusion, de pointer un certain nombre de questions

³³ artigue@gauss.math.jussieu.fr

³⁴ On pourra se référer sur ce point aux actes de ce symposium qui seront publiés dans un numéro spécial de la revue l'Enseignement Mathématique.

qui nous semblent aujourd'hui des questions clefs pour la recherche didactique dans ce domaine.

II. UNE DESTABILISATION QUI EST LE PRODUIT D'UNE HISTOIRE

Pour comprendre la situation actuelle de l'enseignement des débuts de l'analyse, il nous semble nécessaire de percevoir l'enseignement actuel comme le produit d'une histoire et de s'intéresser donc à son évolution. C'est à travers cette histoire, qui est marquée par des caractéristiques culturelles et institutionnelles particulières, que se sont en particulier forgées des valeurs pour cet enseignement, au fil des continuités et des ruptures. Ce sont des valeurs qui nous sont, partiellement au moins, devenues transparentes, qui se sont naturalisées, mais pour comprendre la situation actuelle, pour penser des futurs possibles, il est nécessaire de les considérer comme des objets problématiques. Le regard historique va nous y aider, comme le fera, dans un registre différent, le regard sur d'autres cultures et d'autres choix d'enseignement que nous développerons, à travers l'exemple des réformes aux USA.

Lorsque l'on se penche sur l'histoire de l'enseignement des débuts de l'analyse en France, on ne peut manquer d'être frappé par le contraste saisissant entre la situation du début du siècle, que nous qualifierions volontiers d'idyllique, et la situation actuelle. C'est ce contraste que nous allons interroger, en distinguant dans l'histoire de l'enseignement au cours du siècle quatre périodes principales : la période qu'amorce la réforme de 1902 et qui couvre toute la première moitié du siècle, la période de la réforme des mathématiques modernes qui s'amorce avec la réforme des années 60, la contre-réforme des années 80 et, enfin, la situation actuelle.

1. La situation idyllique du début du siècle : l'entrée du calcul différentiel et intégral (CDI) dans l'enseignement secondaire

C'est en effet avec la réforme de 1902, et son ambition de fonder des humanités scientifiques à égalité de statut avec les humanités littéraires qui, traditionnellement, assuraient la formation des élites de la nation (Belhoste, 1996) que l'enseignement du CDI se généralise en France au niveau secondaire. Cette introduction est un succès comme l'attestent la stabilité

des programmes ainsi que les nombreux textes et rapports publiés (Artigue, 1996). Ceci n'est pas un phénomène isolé. L'étude internationale lancée sur ce thème par la CIEM en 1911, dont le rapport, connu sous le nom de rapport Beke (Beke, 1914) est publié en 1914 par l'Enseignement Mathématique, le montre à l'évidence, tout en nous aidant à comprendre les ressorts de ce succès.

L'entrée du CDI est tout d'abord une entrée modeste dans un enseignement où la géométrie règne en maître. Il ne fait pas l'objet d'une rubrique séparée dans les programmes, étant intégré à la partie d'algèbre, et, par exemple, dans le programme de terminale scientifique, cette partie n'occupe qu'une page sur huit. Le CDI se veut essentiellement un calcul efficace pour faire face aux besoins tant des mathématiques, dont l'enseignement inclut à l'époque, rappelons-le, mécanique, cinématique et astronomie, que des autres disciplines scientifiques, notamment la physique. C'est un enseignement qui, sans déstabiliser le curriculum, apporte un progrès évident. Il permet de se libérer de techniques ad hoc auparavant utilisées dans un certain nombre de calculs, de proposer des méthodes simples et unifiées, libérées de la métaphysique des infinitésimaux. Ces méthodes rencontrent les canons de rigueur de l'époque. Priorité est donnée à l'outil CDI, les ambitions théoriques sont clairement limitées et cette limitation est soutenue par les mathématiciens influents de l'époque comme par exemple H. Poincaré. Ces derniers d'ailleurs produisent des ressources pour les enseignants, allant au-delà des seuls manuels du secondaire. Des ouvrages comme ceux des frères Tannery, de C. Bourlet ont un retentissement international. Cet enseignement d'une analyse algébrisée, que la culture géométrique, cinématique et mécanique aide à motiver et prendre sens, est à l'évidence un enseignement qui marche. Les pionniers qui se sont investis dans l'aventure récoltent les fruits de cet investissement et ont tout lieu de se déclarer pleinement satisfaits.

Rappelons pour compléter la description de ce contexte que cet enseignement s'adresse à une petite élite, tant côté élève que côté enseignant.

2. Le tournant du milieu du siècle : des ambitions nouvelles pour l'enseignement de l'analyse

Avec le tournant du milieu du siècle, et l'évolution du champ mathématique, l'équilibre ancien se rompt. L'enseignement de l'analyse se dote de nouvelles ambitions. Il ne s'agit plus pour lui de mettre en place un calcul fonctionnel algébrique efficace, il s'agit d'approcher le champ de l'analyse comme champ théorique où les valeurs d'approximation jouent un rôle

essentiel. L'évolution s'amorce dès la réforme du début des années soixante mais, dans un contexte très marqué par la culture ancienne. Même si des définitions formelles sont introduites, il n'y a pas alors de bouleversement spectaculaire. Dans la culture ancienne, toujours dominante au lycée, des îlots se construisent où commencent à vivre les nouvelles valeurs. L'analyse des manuels des années soixante, dans leur diversité, est ici particulièrement instructive. La réforme des mathématiques modernes, au début des années 70, par sa radicalité, crée la véritable rupture, même si l'analyse est loin d'être une de ses priorités. Les exigences de rigueur, de formalisation, la centration sur les questions de fondements en sont le moteur, un moteur d'autant plus puissant qu'il transcende le champ de l'analyse. L'enseignement de l'analyse ne connaît pas cependant de crise. Il s'adresse toujours à une petite proportion de la classe d'âge et la séparation entre filières dès le début du lycée favorisent la viabilité des ambitions théoriques de la filière C, conçue par ailleurs comme filière d'excellence. La part de l'analyse, excepté en terminale C, reste d'ailleurs limitée dans des programmes où les structures algébriques tiennent le haut du pavé.

3. La contre-réforme des années 80 ou l'analyse triomphante

Si elle rejette les valeurs de la réforme des mathématiques modernes, ses ambitions théoriques et ses excès de formalisation, la contre-réforme des années 80, contrairement à ce que l'on pourrait penser, ne rejette pas l'ambition de fonder dès le lycée le champ de l'analyse comme champ de l'approximation, bien au contraire. L'effondrement de l'algèbre des structures, la disparition des éléments de théorie des ensembles, non contrebalancée par l'introduction de nouveaux champs, offre de plus à l'enseignement de l'analyse un espace où se déployer. L'analyse l'occupe effectivement et sa part relative, dans les programmes augmente substantiellement. Les valeurs de l'approximation sont fortement présentes et ce, dès la classe de seconde, soit un avant que ne débute officiellement l'enseignement de l'analyse. En témoignent les extraits suivants du programme de 1982 :

« c) *Comportement local* :

Exemple d'études au voisinage de zéro : $x \rightarrow (1+x)^2$, $x \rightarrow (1+x)^3$, $x \rightarrow 1/(1+x)$, $x \rightarrow \sqrt{1+x}$

Exemples d'approximation locale par une fonction affine : utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et le calcul d'erreurs.

On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place de majorations, par exemple : $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1+x) \leq 2x^2$ sous la condition suffisante $|x| \leq \frac{1}{2}$. »

La progression dans ce champ de l'approximation, l'évolution des moyens pour l'étude des problèmes emblématiques de l'analyse que sont les problèmes de variation et d'optimisation, les problèmes d'approximation de nombres, organisent un paysage mathématique que l'on ne cherche plus à structurer suivant l'organisation « logique » des notions. L'analyse est ainsi, en quelque sorte triomphante, face à une géométrie qui cherche à reconstruire ses valeurs.

4. Le déclin et la crise

Les ambitions épistémologiques que s'est données la contre-réforme en analyse sont ambitieuses. Comme c'est souvent le cas, la réflexion épistémologique n'a pas été suffisamment accompagnée d'une réflexion de nature plus économique et écologique, cherchant à étudier les coûts, les conditions de viabilité des choix effectués comme nous l'avons montré par ailleurs (Artigue, 1993). L'opposition entre concepts et techniques qui se développe, dans le cadre d'un constructivisme mal compris, n'aide d'ailleurs pas à oser correctement les problèmes et en particulier à s'interroger sur le coût réel de l'opérationnalisation souhaitée des techniques d'approximation. La massification rapide de l'enseignement au lycée, la réduction des horaires sur toute la scolarité secondaire, la disparition de la filière C, rendront les ambitions initiales de plus en plus irréalistes et le déclin s'amorcera inéluctablement.

La situation qui en résulte aujourd'hui est une situation de crise. Cette crise n'est pas, comme nous l'avons souligné dès le départ, un phénomène isolé et ce, même si l'évolution française que nous venons de retracer très sommairement présente des spécificités indéniables. De nombreux pays, par exemple, n'ont pas connu le phénomène de contre-réforme que nous avons vécu, la réforme des mathématiques modernes ayant été dans peu d'endroits aussi radicale que chez nous. Dans d'autres, l'enseignement de l'analyse au lycée, souvent optionnel, est resté essentiellement enseignement de calcul, au sens initial du terme, les ambitions théoriques étant réservées aux enseignements universitaires. Pourtant, quelles que soient les évolutions, le sentiment de crise est uniformément ressenti. Plusieurs raisons contribuent à l'expliquer, comme l'a montré L. Steen au Symposium de Genève déjà cité, se renforçant mutuellement par leurs interactions et nous en retiendrons ici plus particulièrement trois :

a) La place qu'occupe l'analyse dans les curricula.

Nous avons souligné l'accroissement important de la part relative de l'analyse dans les curricula au cours du 20^{ème} siècle. Le maintien de cette position ne va en rien de soi. Reflète-t-elle le rôle que joue l'analyse dans les mathématiques actuelles ? Reflète-t-elle les besoins sociaux et culturels de la formation en mathématiques ? Répond-t-elle aux besoins professionnels en mathématiques au sens large ? Sur tout le siècle passé, l'organisation du curriculum du lycée s'est posée en termes d'équilibres entre algèbre, géométrie et analyse. On perçoit bien les limites actuelles d'une telle organisation. Au fil du siècle, de nouveaux domaines mathématiques ont pris leur essor. L'évolution de l'informatique, celle du calcul scientifique créent des besoins mathématiques nouveaux. Les probabilités, encore marginales en mathématiques au début du siècle, sont aujourd'hui un des moteurs clefs du développement mathématique dans les domaines les plus divers. De plus en plus, on considère une familiarisation certaine avec les raisonnements mettant en jeu l'aléatoire, avec les notions statistiques, comme une composante incontournable de la formation du citoyen, s'il veut prendre la part qui lui revient dans les débats actuels de société. Peut-on en dire autant de la capacité à calculer des dérivées et intégrales ? L'analyse doit aujourd'hui justifier la place qu'elle occupe dans les curricula.

b) L'évolution technologique

Que l'enseignement de l'analyse soit resté simple calculus ou qu'il se soit donné des ambitions plus théoriques, force est de constater que, dans la plupart des pays, ce qui est réellement appris, ce qui est évalué, ne va guère au-delà d'une analyse algébrisée. C'est justement cette analyse algébrisée que les logiciels de calcul symbolique prennent en charge aujourd'hui, des logiciels implantés même sur des calculatrices. Ceci ne peut que renforcer l'idée que l'enseignement de l'analyse pourrait être drastiquement réduit sans que cela induise une réduction substantielle des compétences des élèves. Les choses sont bien sûr moins simples, mais le poids de tels arguments dans et surtout à l'extérieur de l'institution scolaire contribue à fragiliser l'enseignement de l'analyse et renforce le sentiment de crise.

c) La massification de l'enseignement au lycée

La massification de l'enseignement au lycée, l'hétérogénéité qui en résulte, l'injonction qui est faite aujourd'hui à l'Ecole d'assurer la réussite de tous les élèves, accroissent bien sûr la

déstabilisation Nous n'insisterons pas plus sur cette dimension de la crise qui est sans doute celle à laquelle le monde éducatif est le plus sensible.

Aujourd'hui donc, il semble impossible d'éviter une réflexion approfondie sur :

- La place à accorder à un enseignement de l'analyse au lycée,
- les valeurs épistémologiques que l'on veut faire vivre à travers un tel enseignement,
- les différenciations nécessaires dans les ambitions et moyens de l'enseignement, suivant les profils et besoins des élèves,
- la façon de prendre en compte l'évolution technologique et d'en tirer profit,
- les moyens d'assurer la viabilité des choix curriculaires,

en n'oubliant pas, dans cette réflexion, de tirer les leçons du passé mais aussi prenant en compte le fait que le passé est révolu, que les problèmes qui sont à résoudre aujourd'hui, les contraintes et les possibilités qui conditionnent les futurs possibles, même s'ils nous paraissent par certains aspects très proches de ceux du passé, sont en fait profondément différents.

Le débat a déjà commencé, hors de la communauté des didacticiens, remontant même jusqu'aux hautes sphères de l'académie des sciences. Que peuvent apporter les recherches didactiques déjà menées à cette réflexion ? Permettent-elles une approche cohérente de ces questions ? C'est ce que nous examinerons dans la seconde partie de ce texte.

III. LES RECHERCHES DIDACTIQUES : POTENTIALITES ET LIMITES DE LEURS APPORTS

Nous ne pouvons effectivement manquer de nous interroger sur ce que les recherches didactiques menées dans ce domaine depuis plus de vingt ans ont à offrir à la réflexion. Elles ont certainement beaucoup à offrir, elles ont aussi des limites évidentes. Précisons que la vision présentée ici est toute personnelle et les points de vue développés prêtent sans doute largement à discussion. Espérons simplement qu'ils pourront contribuer à une réflexion tout à fait indispensable et à laquelle les didacticiens ne sauraient se soustraire.

Nous nous appuierons dans cette partie sur le cours que nous avons fait, il y a quatre ans, à l'école d'été de didactique sur l'évolution des problématiques en didactique de l'analyse (Artigue, 1998) ainsi que sur la synthèse sur les acquis de la recherche didactique dans l'enseignement supérieur présentée dans (Artigue, 2001). Il n'est bien sûr pas question ici de reprendre ces textes mais plutôt de chercher en quoi ils peuvent nous aider dans la réflexion.

Nous intégrerons aussi quelques travaux de recherche plus récents qui illustrent bien, selon nous, l'évolution actuelle du travail didactique dans le secteur.

Le cours à l'école d'été était structuré autour de la distinction entre trois grandes catégories d'approches : les approches épistémologiques et cognitives, les approches systémiques situationnelles, les approches institutionnelles et anthropologiques. Nous reprendrons ici cette distinction, même si elle peut paraître un peu artificielle, de nombreux travaux rentrant à des degrés divers dans chacune de ces catégories. Nous essaierons en particulier de pointer les principales convergences qui se dessinent à travers des recherches menées avec des approches didactiques distinctes, d'autre part d'éventuelles divergences.

1. Approches épistémologiques et cognitives

Une convergence évidente des résultats obtenus suivant ces approches est la reconnaissance générale de la complexité des savoirs en jeu et de la diversité des rapports que l'on peut nouer avec le champ de l'analyse.

La différenciation des rapports s'inscrit dans un certain nombre de catégorisations qui varient suivant les auteurs. Ainsi en est-il de la distinction faite entre des analyses qualifiées respectivement « d'intuitive », « d'algébrique » et de « formelle », entre « calculus » et « analyse ». Ces catégorisations restent cependant relativement floues. A quoi correspond par exemple exactement ce qui est souvent qualifié d'analyse intuitive, d'analyse algébrique ? Les critères sont rarement explicités. Les distinctions que nous avons mentionnées restent proches du langage commun. Certains chercheurs ont néanmoins vont au-delà de ce langage commun. C'est le cas pour ceux qui se situent dans le cadre des théories de la réification, dont l'APOS theory, initiée par E. Dubinsky (1991), est sans aucun doute la version la plus exploitée aujourd'hui (cf. Dubinsky & Mc Donald, 2001), car deux types de rapports aux concepts mathématiques y sont fondamentaux : des rapports de type processus et des rapports de type objet. Tall (1996), tout en se situant globalement dans ce type d'approche processus/objet, distingue, quant à lui, entre des rapports de type « enactive », qui seraient en première approximation à rapprocher de la composante intuitive, des rapports de type « manipulative », plutôt du côté processus, mais sans que cela implique réduction à des processus algébriques, et des rapports « formels », lorsque les objets sont assujettis à des définitions formelles comme celles de la notion de limite et quand le système de preuve est assujetti à ses définitions. La différenciation des rapports trouve aussi à s'exprimer dans le long cheminement qui sépare les « objets mentaux » des concepts construits, par exemple dans les

travaux du Groupe AHA à Louvain la Neuve, en Belgique (Groupe AHA, 1999). Elle peut s'exprimer aussi via la distinction entre différents statuts des concepts. C'est par exemple le cas dans les travaux de A. Robert, où est introduite la notion de concepts unificateurs, généralisateurs, formalisateurs, exploitée à la fois en analyse et en algèbre (cf. par exemple la synthèse (Robert, 1998).

Cette différenciation des rapports possibles, quelle que soit la forme qu'elle prend, sert à mettre en évidence des discontinuités, ruptures, reconstructions nécessaires à l'apprentissage, auxquelles l'enseignement est généralement trop peu sensible et les difficultés résistantes qui en résultent pour les élèves et étudiants. Elle sert aussi à nourrir des stratégies d'enseignement qui visent à permettre, mieux que les pratiques usuelles, les constructions et reconstructions nécessaires, dans un paradigme globalement constructiviste. Il y a donc là des convergences évidentes. Mais, si l'on s'intéresse aux ingénieries ou « designs » didactiques (pour ne pas hypothéquer une quelconque utilisation de la théorie des situations didactiques à la base du concept d'ingénierie didactique) qui en résultent, on ne peut manquer d'être frappé par la disparité des objets construits. Les constructions didactiques issues de l'APOS theory, par exemple, sont fondées sur une décomposition génétique des concepts cherchant à identifier les processus sous-jacents et les mécanismes d'encapsulation qui permettent l'accession au statut d'objet. Elles définissent et organisent la succession des tâches proposées aux élèves et étudiants en fonction de décompositions élaborées a priori pour tel ou tel concept puis raffinées en fonction des résultats de leur confrontation au « réel », tout en se situant dans une organisation didactique générale d'enseignement coopératif (Dubinsky, Mathews, Reynolds, 1997). Quels rapports peut-on établir avec des constructions didactiques globales comme celles du groupe AHA, fondées sur la notion d'objet mental, l'identification d'obstacles épistémologiques, le recours à des problèmes complexes souvent issus de l'histoire même du champ ? Quels rapports avec des stratégies didactiques exploitant le levier « meta » pour permettre de mettre en place des rapports satisfaisant à des concepts unificateurs et formalisateurs, l'hypothèse étant faite que ces caractéristiques empêchent une entrée essentiellement a-didactique ? Quels rapports enfin avec des stratégies didactiques qui visent la réalisation des constructions et reconstructions nécessaires dans le cadre de la théorie des situations didactiques, et la recherche de situations fondamentales, même si il est reconnu qu'un fonctionnement purement a-didactique est ici inaccessible et que les limitations des interactions avec le milieu nécessitent des médiations spécifiques de l'enseignant, complexifiant le jeu entre a-didactique et didactique, comme le montre I. Bloch dans sa thèse (cf. le texte d'I Bloch dans ce volume) ?

Ce que montre cette disparité, c'est, au-delà de la reconnaissance partagée de phénomènes cognitifs essentiels, la diversité et l'incommensurabilité en quelque sorte des visions sur la façon dont se constituent les rapports et de la façon dont ils sont susceptibles d'évoluer. Nous voudrions, à ce point de l'exposé, pointer quelques caractéristiques de cette diversité.

a) Obstacles / Reconstructions

Si tous les chercheurs reconnaissent que l'apprentissage en analyse, comme l'apprentissage mathématique en général, ne peut être purement continu, la façon de théoriser les discontinuités laisse apparaître des différences profondes. La référence à la notion d'obstacle épistémologique renvoie en général aux positions les plus radicales : la connaissance scientifique se construirait par rejets successifs, et par voie de conséquence, dans les constructions didactiques, ce sont les situations qui permettent ces rejets sur lesquelles se focalise l'attention, ce sont elles qui sont tout particulièrement mises en avant et analysées, c'est sur elles que semble devoir se focaliser l'évaluation du processus didactique, le reste du travail didactique devenant, implicitement, simple affaire d'intendance. L'utilisation du terme « reconstruction » en lieu et place de celui « d'obstacle épistémologique » n'est en rien neutre. La vision n'est pas une vision en terme de rejet, c'est une vision en terme de recomposition nécessaire du paysage mathématique, une recomposition où l'ancien et le nouveau s'inscrivent dans des rapports dialectiques, où l'ancien est revisité, repositionné sans être pour autant rejeté. Il est clair que, même si les deux approches peuvent partager des sources communes au niveau des situations d'enseignement, il n'en résultera pas des constructions didactiques équivalentes.

b) Construction verticale / Construction horizontale des concepts

Parmi les approches que nous avons mentionnées, aucune aujourd'hui ne se situe dans une approche purement verticale de la construction des concepts. Même les théories de la réification, initialement fortement hiérarchisées autour de la transition processus / objet et le saut cognitif de l'encapsulation, se sont faites plus dialectiques et donnent aussi aujourd'hui plus de poids aux connections entre concepts (cf. la notion de schéma correspondant au S dans l'APOS theory). Mais, même si c'est le cas, le poids respectif accordé aux deux évolutions : horizontale et verticale, reste suivant les approches très différents. Il en résulte là encore une certaine incommensurabilité des constructions didactiques particulièrement visible dans les travaux exploitant des environnements informatiques, avec d'une part des stratégies

didactiques fondées sur l'exploitation de l'environnement pour favoriser des processus d'intériorisation et d'encapsulation via l'écriture de programmes, comme dans les stratégies dérivées de l'APOS theory, et d'autre part des stratégies didactiques fondées sur l'exploitation de l'environnement pour favoriser des processus d'articulation de registres sémiotiques, cette articulation étant perçue comme une composante fondamentale de la conceptualisation (cf. par exemple Borba & Confrey, 1996).

c) Contextualisation – Décontextualisation / Cognition située

Les chercheurs travaillant dans le champ de l'analyse s'accordent certainement pour reconnaître le caractère globalement contextualisé de la cognition, mais au-delà de cette reconnaissance partagée, encore une fois, la façon de percevoir cette contextualisation et les moyens de la dépasser ou, au moins d'en reculer les limites, est loin d'être uniforme. La théorie des situations didactiques met l'accent sur un jeu entre contextualisation et décontextualisation où l'institutionnalisation joue un rôle clef. A travers ce jeu, se joue en fait un jeu entre savoirs et connaissances où les savoirs, comme objets au moins partiellement décontextualisés, sont essentiels. Issus de connaissances contextualisées, ils sont aussi les ponts qui vont permettre le réinvestissement dans d'autres contextes, en se reconvertissant en connaissances. Il est évident que les constructions didactiques qui en seront déduites seront profondément différentes de celles liées à des approches théoriques, proposant des visions beaucoup plus radicales de la contextualisation et envisageant des conversions en quelque sorte horizontales de connaissances, par exemple dans les approches où la notion de métaphore joue un rôle central, comme celle liées à « l'embodied cognition », plus récente et que nous présenterons donc de façon un peu moins allusive.

Ce n'est que récemment que cette approche a commencé à investir le champ de l'analyse, avec notamment les travaux G. Lakoff et R. Nuñez (1997), et nous nous référerons plus précisément ici à la recherche de R. Nuñez, L.D. Edwards et J.P. Matos (1999). « L'embodied cognition » se situe globalement dans les approches qualifiées de « situated learning », postulant qu'il n'existe pas d'activité non située et que « agent, activity and the world mutually constitute each other » » (Lave et Wenger, 1991). Elle ajoute à ces hypothèses le fait qu'il ne suffit pas, pour comprendre la cognition et l'apprentissage, de prendre en compte les facteurs sociaux et contextuels, et les processus inter-individuels qu'ils engendrent, il faut aussi prendre en compte que nous donnons sens au monde qui nous entoure, en fonction de nos déterminants biologiques et de nos expériences physiques individuelles, au rang

desquelles les expériences qui mettent en jeu notre corps via le mouvement. Dans cette théorisation, « schémas- images » et métaphores jouent un rôle clef. Les schémas-image sont des primitives perceptivo-conceptuelles qui permettent la structuration d'expériences incluant des relations spatiales, tels par exemple les schémas-images d'équilibre et de verticalité. Des concepts abstraits comme celui d'équilibre sont alors vus comme des extensions conceptuelles du schéma image associé à l'expérience corporelle de l'équilibre, à de nouveaux contextes : équilibres de couleurs dans un tableau, équilibre dans une résolution d'équations.... Ces extensions se produisent grâce à des morphismes conceptuels, impliquant des métaphores conceptuelles. La thèse des auteurs est ainsi que de tels morphismes conceptuels sont à la base de beaucoup de nos connaissances mathématiques et que donc la coordination de significations basées sur un même schéma image et la pensée métaphorique jouent des rôles clefs dans l'apprentissage. Leur recherche interroge de ce point de vue le concept de continuité, un concept dont les recherches didactiques ont souligné la difficulté, en partant de la distinction classiquement opérée entre une vision intuitive de la continuité comme caractérisant un processus sans sauts, ni interruptions (la vision d'Euler d'une courbe continue comme correspondant à un tracé manuel libre sans lever le crayon) et la vision formalisée de la continuité de Cauchy-Weierstrass. En fait, il y a dans la continuité trois idées distinctes : l'idée naturelle de continuité pour une courbe, l'idée de continu liée à la complétude des réels, à « l'absence de trou », pour une courbe ou un ensemble de points et l'idée de préservation de proximité (pour une fonction). Le point de vue naturel est d'abord un point de vue cinématique lié à notre expérience du mouvement. La courbe préexiste ou est créée par le mouvement ; ce n'est pas un ensemble de points mais des points peuvent la jalonner comme les bornes sur une route, des points peuvent s'y déplacer comme un voyageur sur une route. Le langage des étudiants mais aussi celui des mathématiciens est rempli de références à cette vision cinématique de la continuité et les auteurs identifient les métaphores associées qui permettent une première conceptualisation de la notion de continuité de fonction. Les métaphores associées à la notion formelle de continuité existent elles aussi mais sont radicalement différentes. Les points y sont cette fois constitutifs de la ligne et le caractère continu de la ligne qui en résulte, qui s'exprime par « l'absence de trous », non problématique pour la conception naturelle, ne va plus de soi. La continuité d'une fonction se traduit alors par le fait que l'image d'un ensemble continu est un ensemble continu. Les auteurs de l'article cité utilisent ces analyses pour critiquer l'enseignement usuel qui établit une claire hiérarchie entre les conceptions intuitive-cinématique et ensembliste de la continuité et présente la définition en ε, η , comme celle capturant l'essence d'une continuité qui est en fait multiforme.

Ils récusent l'idée que comprendre la notion de continuité consiste à rejeter le point de vue cinématique au profit du point de vue ensembliste, même si celui-ci permet techniquement de résoudre des problèmes que le point de vue cinématique intuitif ne peut prendre en charge, et les stratégies d'enseignement qui en sont usuellement issues. On retrouve donc des débats que nous avons évoqués dans les paragraphes précédents.

L'attention portée aux déterminations biologiques de l'individu, au rôle joué par ses expériences physiques, en particulier celles liées au mouvement, dans l'apprentissage des mathématiques est sans aucun doute plus forte dans les travaux concernant le développement du rapport à l'espace et des connaissances géométriques (cf. par exemple (Longo, 1997)). En analyse, ces approches restent très marginales. Nous voudrions cependant mentionner, pour conclure ce paragraphe, la thèse en cours de M. Maschietto qui porte sur la transition algèbre-analyse (Maschietto, 2001). L'étude est centrée sur une des dimensions de cette transition : le passage d'un regard ponctuel ou global sur les objets fonctionnels, caractéristique du travail algébrique sur les fonctions, antérieur à l'analyse, à un regard local, et l'organisation du jeu dialectique entre local et global, un jeu essentiel en analyse. Ce jeu se combine, sur le plan technique, par une intégration des ordres de grandeur au calcul algébrique. Les différents termes d'une expression ne sont plus dotés d'un poids uniforme, le traitement qui en est fait est fonction des ordres de grandeurs relatifs, et repose sur la notion fondamentale de négligeabilité relative. Le calcul algébrique s'en trouve profondément renouvelé, dans ses techniques, ses modes de pilotage et de contrôle³⁵. La thèse aborde ces questions en s'interrogeant en particulier sur les caractéristiques des mouvements graphiques associés au travail algébrique sur les fonctions antérieur à l'analyse et sur l'évolution des mouvements liée à l'entrée dans le champ de l'analyse. Le mouvement de zoom graphique et la métaphore de « micro-linéarité » qui lui est associée pour traduire le comportement local d'une fonction dérivable, constituent, dans l'ingénierie développée suite à ces analyses, le point d'ancrage par rapport auquel se construit le repérage des premiers invariants et s'amorce l'évolution des rapports aux objets fonctionnels. Mais la construction didactique est ici particulièrement sensible aux limites de la perception graphique en matière d'ordres d'approximation et à la nécessité de problématiser la métaphore si l'on veut l'opérationnaliser efficacement. Ceci conduit à des formulations algébriques intégrant l'idée de négligeabilité et au développement

³⁵ Soulignons que nous nous situons ici dans une optique d'enrichissement du calcul algébrique par intégration des ordres de grandeur et d'entrée dans l'approximation via cet enrichissement, sans viser une quelconque formalisation en ε, η .

d'un calcul algébrique enrichi au sens défini plus haut, via une suite de situations dont la construction s'appuie sur les outils de la théorie des situations didactiques.

Les différences qui ont été pointées dans cette partie, on le voit bien, ne sont pas propres au champ de l'analyse même si elles s'y actualisent sous des formes spécifiques. Elles renvoient à des divergences plus fondamentales. Elles sont aussi, indirectement, de bons révélateurs des difficultés que doit affronter celui qui voudrait se fonder sur les résultats des recherches pour légitimer des stratégies d'enseignement, vu la diversité des principes cognitifs qui fondent les réalisations expérimentales et le fait que les validations de ces réalisations ne peuvent être pensées en dehors des systèmes de valeurs qui les fondent.

2. Les approches situationnelles, institutionnelles et anthropologiques

Nous avons souligné dans le cours à l'école d'été précédemment cité, les apports des approches systémiques situationnelles qui, tout en s'appuyant sur ces dernières, avaient permis de dépasser leurs limites évidentes, et la naïveté qui consiste à penser que des théories de l'enseignement sont directement déductibles de théories de l'apprentissage. Nous avons pointé les nombreux produits d'ingénierie qui en étaient issus, dans la didactique française, concernant l'enseignement au début de l'université dans les filières mathématiques. Mais nous soulignons aussi le peu de retombées de ces approches hors de la communauté des chercheurs et nous interrogeons sur les conditions de viabilité des dispositifs construits, sur les effets négatifs possibles d'une certaine quête mythique de situations fondamentales. Sur ce point, la thèse d'I. Bloch, que nous avons déjà évoquée, nous semble apporter une avancée substantielle. Elle met bien en évidence en effet les limites dans ce domaine d'un fonctionnement qui se voudrait essentiellement a-didactique, en dehors peut-être de phases que l'on pourrait qualifier de « première rencontre », en reprenant la terminologie des moments d'études introduite par I. Chevallard. Mais elle montre aussi que d'autres voies sont possibles dans lesquelles les insuffisances de l'interaction élève / milieu sont compensables par des médiations appropriées de l'enseignant, sans pour autant que la responsabilité du travail mathématique passe essentiellement à sa charge. Ceci nous conduit à interroger en retour les ingénieries existantes et leurs modes de description. Force est alors de constater d'une part :

- Le poids qu'a fait peser la théorie sur les descriptions élaborées, en conduisant à centrer l'attention, comme nous le mentionnions plus haut, sur les situations les plus

susceptibles d'un fonctionnement a-didactique, souvent des situations correspondant à des phases de première rencontre et d'exploration, à minimiser le rôle de l'enseignant et le modéliser de façon bien trop sommaire, à surestimer les responsabilités qui peuvent être accordées à l'élève ou à l'étudiant, en sous-estimant les contraintes de toutes sortes qui pèsent sur les systèmes didactiques et les questions de viabilité des dispositifs construits,

- La rigidité des modes de description pour des produits qui ne peuvent être des produits clefs en mains et que l'utilisateur se devra nécessairement d'adapter à son environnement particulier. Ceci impose des modes de description plus souples et qui outillent l'utilisateur pour ajuster à ses besoins et à son style propre le produit qui lui est proposé, sans pour autant en détruire les potentialités. Sur ce point, depuis plus de dix ans, la recherche didactique, au moins en France, n'a guère progressé.

L'évolution dans les approches systémiques se manifeste plutôt par l'inscription croissante des travaux dans des perspectives plus larges de nature anthropologique. Nous les mentionnions dans le cours à l'école d'été, en soulignant à l'époque, leur caractère récent en didactique de l'analyse. Deux types de travaux récents me semblent bien illustrer les potentialités offertes par ces approches :

- Des travaux sur les transitions institutionnelles en analyse, comme par exemple la thèse de F. Praslon,
- Des travaux sur l'intégration des technologies informatiques à l'enseignement de l'analyse, notamment ceux concernant l'intégration de logiciels de calcul symbolique.

F. Praslon, dans sa thèse (Praslon, 1999), a étudié la transition lycée (filiale S) – université (DEUG A), en ce qui concerne la notion de dérivée (la notion centrale dans l'enseignement actuel de l'analyse au lycée) et son environnement immédiat. Il fait dans son travail l'hypothèse d'existence, vis à vis de cet objet, de deux cultures distinctes : la culture du lycée, la culture DEUG et essaie de caractériser chacune d'elles. Il s'agit, à travers cette étude, d'interroger les stéréotypes culturels qui voient dans la transition lycée / université en analyse, simplement la transition entre une analyse intuitive et une analyse formelle. Les outils d'analyse que F. Praslon construit lui permettent de montrer le caractère erroné de ce stéréotype. Les différences entre les deux cultures sont réelles mais non réductibles à une opposition aussi sommaire et, plus que quelques ruptures essentielles, ce que l'on observe, c'est une succession de micro-ruptures dans les rapports à la généralité, à la preuve, dans la complexité technique, dans l'autonomie nécessaire, dans la conception des stratégies et

méthodes, dans la routinisation des techniques... qui, toutes combinées, construisent deux environnements profondément différents pour le travail de l'étudiant. Ceci lui permet de construire un éventail de tâches, à la transition de ces deux cultures, qui ne sont prises en charge ni par le lycée, ni par l'université, et constituent un véritable « trou didactique » et à étudier comment des étudiants entrant à l'université se comportent par rapport à elles, puis à construire des ateliers qui se voudraient des moyens de sensibiliser étudiants et enseignants à ces sauts culturels et de permettre de les travailler.

Les travaux sur l'intégration du calcul symbolique à l'enseignement de l'analyse comme (Artigue & Lagrange, 1999), (Guin et Trouche, 1999), (Defouad, 2000) manifestent leurs liens avec une approche anthropologique, de façon sensiblement différente. L'élargissement du regard se traduit ici par :

- D'une part, une approche de l'intégration qui met au premier plan les questions d'écologie des savoirs et de viabilité didactique, en accordant une attention particulière aux contraintes institutionnelles et à la gestion possible de ces contraintes,
- D'autre part, une approche de l'intégration qui, contrairement à beaucoup d'autres travaux portant sur les technologies informatiques, pose la question de l'instrumentation de ces technologies et développe des outils spécifiques pour l'étudier.

Le regard sur l'intégration, l'analyse de ses besoins institutionnels et didactiques s'en trouvent profondément modifiés. Une approche cognitive sur l'intégration conduit très souvent, comme le montre la recherche que nous avons menée, à plusieurs équipes, dans le cadre d'un contrat CNCRE³⁶, à chercher à faire de la technologie un outil d'apprentissage (de façon compatible avec l'approche de la cognition concernée) par rapport à des buts en termes de connaissances et savoirs qui, eux, sont peu questionnés et des acteurs institutionnels qui, excepté l'apprenant, sont perçus comme transparents. Les travaux cités ci-dessus montrent les limites d'une telle vision de l'intégration et aident à mieux comprendre une résistance du système éducatif dont on ne peut faire mystère. Des travaux sur l'instrumentation, comme la thèse de B. Defouad, qui propose une analyse fine de la genèse instrumentale de la TI92 pour l'étude de problèmes fonctionnels de variation, par des élèves de première S, met à jour un ensemble de questions liées à l'instrumentation et à sa gestion institutionnelle que la réflexion usuelle sur l'intégration ignore le plus souvent : développement des techniques instrumentées

³⁶ Le rapport consécutif à cette recherche est disponible sur le site web suivant : www.Maths.univ-rennes1.fr/~lagrange/cncre/rapport.htm

et des connaissances mathématiques et informatiques sous-jacentes, gestion institutionnelle des besoins techniques et technologiques correspondants, statut des techniques instrumentées, articulation avec les techniques et technologies associées au travail papier / crayon. La thèse montre bien la complexité des problèmes qui se posent ainsi, par exemple :

- la spécificité de certains besoins mathématiques de l'instrumentation de l'étude de la variation et la difficulté de négocier leur temps d'apprentissage dans un système qui, tout en prônant l'utilisation de technologies informatiques, définit ses normes et valeurs par rapport aux besoins d'un travail mathématique dans l'environnement papier / crayon,
- la nécessité pour motiver une instrumentation raisonnable de construire des tâches hors normes, les tâches usuelles conçues pour rendre possible et optimiser un apprentissage papier / crayon se révélant notoirement insuffisantes, et d'avoir les moyens d'assurer leur légitimité institutionnelle.

Mais la thèse montre aussi, en comparant les processus institutionnels et personnels d'instrumentation dans une classe de première S, deux années successives, que lorsque ces problèmes sont identifiés et pris en charge, la genèse instrumentale s'en trouve profondément modifiée.

Finalement, que ressort-il de ce qui précède, en termes de potentialités et limites de la recherche didactique menée à ce jour pour penser le futur de l'enseignement des débuts de l'analyse ? Sans aucun doute, sur le plan épistémologique, une meilleure identification des savoirs et connaissances susceptibles d'être engagés dans un tel enseignement, des connections existantes avec les savoirs et connaissances extérieurs au domaine, des différents rapports possibles aux savoirs de l'analyse, et sur le plan cognitif, en relation avec ce qui précède, une connaissance des difficultés majeures que présente pour les élèves et étudiants l'accès à ce nouveau champ de savoir et des outils de diagnostic associés. Sans aucun doute aussi, une meilleure connaissance des mécanismes qui ont gouverné jusqu'à présent les processus de transposition didactique dans ce domaine, du fonctionnement des systèmes didactiques, de leurs modes de réaction privilégiés aux difficultés de cet enseignement et des effets usuels de ces réactions, des contraintes auxquelles ils sont assujettis et des marges de manœuvre qui en résultent. Sans aucun doute aussi, de nombreuses constructions didactiques, en général relativement locales, qui ont été raffinées au cours d'expérimentations successives et semblent avoir permis d'approcher efficacement un certain nombre des questions posées, au moins dans un contexte expérimental. Et, enfin, plus généralement, la mise à jour de

questions, de phénomènes didactiques auquel l'enseignement n'est pas ou est peu sensible, renforçant ainsi les difficultés incontournables de l'accès à ce champ. Mais, comme nous avons essayé de le montrer, ces travaux, s'ils peuvent certainement aider la réflexion à mener, ne sauraient suffire à définir une action didactique, rationnelle et contrôlée. Il y a, à cela, différents obstacles. Sans prétendre à une quelconque exhaustivité, nous en citerons trois :

- Tout d'abord, le contexte cognitif dans lequel beaucoup de ces travaux se sont construits et la connaissance claire que nous avons aujourd'hui qu'une théorie de l'apprentissage ne saurait à elle seule fonder une théorie de l'enseignement, sans même revenir sur la diversité et l'incommensurabilité des décisions didactiques auxquelles peuvent conduire les différentes centrations cognitives des travaux en didactique de l'analyse.
- Ensuite, le fait que les travaux didactiques, dans ce domaine comme dans bien d'autres, tout en reconnaissant la diversité des rapports possibles au champ de l'analyse, sont restés largement aveugles à l'analyse de la diversité des besoins, de la diversité des contraintes et des moyens, en privilégiant les filières scientifiques les plus mathématiques, et en oubliant notamment les filières techniques et technologiques.
- Enfin, le fait que la recherche concerne des systèmes dynamiques ouverts, qui évoluent sans cesse, et que les constructions didactiques qui, à un moment donné, dans un contexte donné, semblent pouvoir répondre de façon raisonnable aux questions posées, ne sont souvent plus aussi adaptées, ne serait-ce que quelques années plus tard.

En dépit de ces limites, la recherche didactique a cependant, nous semble-t-il, beaucoup à apporter à une réflexion sur l'enseignement de l'analyse aujourd'hui, au-delà de la seule contribution à l'explication de la crise actuelle. Est-elle pour autant prise en compte, sollicitée quand il s'agit de définir des projets curriculaires, de lancer des mouvements de réforme ? C'est ce que nous allons examiner dans la partie suivante de ce texte, en nous appuyant sur l'étude menée par N. Speer, de l'université de Berkeley, sur le mouvement de réforme du Calculus aux USA (Robert et Speer, 2001).

IV. RECHERCHE ET REFORME DU CALCULUS

Comme chacun sait, les quinze dernières années aux USA ont été marquées par un vaste mouvement de réforme de l'enseignement du calculus au niveau collégial, motivé par le fort taux d'échec des étudiants et la compréhension limitée du domaine attestée par ceux-là même qui réussissaient les examens, et initié par la Sloan Conference en 1986 dont les travaux ont été repris dans la publication du MAA : « A Lean and Lively Calculus » (Douglas, 1986), la même année. L'ambition, exprimée par les mots « lean » et « lively », était claire : un enseignement couvrant moins de thèmes mais de façon plus approfondie et sollicitant un engagement plus actif des étudiants. Au moment où la réforme commence à se développer, la recherche didactique dans ce domaine aux USA est encore peu développée. Les choix didactiques seront divers et le plus souvent pragmatiques. L'examen rapide des options macro-didactiques de quelques uns des projets emblématiques de la réforme le montre clairement, tout en permettant d'identifier des leviers didactiques pour la réforme que l'on retrouve dans la majorité des projets.

Pour le projet CALC, c'est le travail de recherche sur des problèmes du « monde réel », un usage intensif de la technologie, et l'accent mis sur la communication. Pour le projet « Calculus & Mathematica », c'est une approche expérimentale des mathématiques basée sur l'utilisation d'un logiciel, ici Mathematica, et la mise en place de laboratoires de mathématiques. Le projet du Harvard Consortium est un projet qui, contrairement à beaucoup d'autres, ne se contente pas de « nettoyer » les programmes existants mais crée un programme nouveau. Un levier didactique essentiel de cette construction est l'articulation de représentations sémiotiques et points de vue, exprimée via ce qui est appelé : « the rule of three » qui stipule que chaque concept doit être enseigné et compris selon des perspectives algébriques, numériques et graphiques. Il s'agit ainsi de rompre avec un calculus traditionnel dont les pratiques sont essentiellement algébriques. Enfin, le projet C4L (Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning), à Purdue Université, l'université où enseigne à l'époque E. Dubinsky, est sans aucun doute un de ceux le plus étroitement lié aux recherches existantes, en particulier aux approches constructivistes décrites plus haut en termes de théories de la réification. L'approche constructiviste développée s'appuie sur des activités de laboratoire, l'utilisation de la technologie et des stratégies d'enseignement coopératif.

Ces différents leviers : introduction d'une approche plus expérimentale des mathématiques, exploitation de problèmes considérés comme plus réels, rupture avec une approche essentiellement algébrique, au bénéfice de pratiques numériques et graphiques, s'appuyant sur

l'utilisation de technologies informatiques (calculatrices graphiques et logiciels de calcul symbolique essentiellement), dans une vision plus constructiviste de l'apprentissage, associée à des pratiques pédagogiques interactives et à un accent mis sur la communication et l'enseignement coopératif, fédèrent la plupart des projets (Tucker, 1995).

Comme le souligne N. Speer, la mise en place des projets de réforme s'appuya peu sur la recherche didactique existante. D'une part, la recherche au niveau collégial était à l'époque très peu développée aux USA et la recherche extérieure mal connue, d'autre part, les concepteurs de projets curriculaires ne cherchèrent pas à s'appuyer sur les travaux de recherche déjà menés au niveau de l'enseignement secondaire, travaux qui inspiraient le mouvement parallèle de rénovation des standards de l'enseignement secondaire (NCTM, 1989, 1991). Les deux mouvements restèrent isolés. Le développement de la recherche fut plutôt un des effets de la réforme et des difficultés rencontrées à prouver son efficacité. Les premières publications furent essentiellement des descriptions de projets et des textes d'opinion mais très vite, en effet, se posa la question de l'évaluation de l'impact des différents projets sur l'apprentissage des étudiants. Les méthodologies utilisées pour ces évaluations furent externes, basées sur la comparaison des performances d'étudiants ayant suivi un cursus réformé et d'étudiants ayant suivi un cursus standard, sur différentes tâches, avec l'ambition de montrer que les premiers réussissaient mieux, notamment sur les tâches qualifiées de conceptuelles. D'une part, les résultats ne furent pas toujours à la hauteur des espérances ni de l'énergie déployée, d'autre part les biais et limites de ces méthodologies furent progressivement reconnues. Même si elles parvenaient à mettre en évidence des différences statistiquement significatives entre populations, elles ne permettaient pas de les expliquer, de démontrer les processus de leur production, d'identifier ce que l'on devait précisément chercher à reproduire. De plus, comparer l'efficacité de projets construits sur des principes différents et développant donc des visions différentes des objectifs à privilégier dans l'apprentissage, confronta les évaluateurs à l'impossibilité de construire une évaluation comparative scientifique, c'est à dire ne faisant pas intervenir des systèmes de valeurs extérieurs à la science (Schoenfeld, 1994). Aujourd'hui, les effets de la réforme sont encore loin d'être clarifiés, son efficacité reste problématique, mais selon N. Speer, on sent une évolution certaine. L'intérêt pour la recherche didactique au niveau collégial croît fortement et les méthodologies des travaux menés évoluent. Parallèlement cette recherche s'institutionnalise : création de l'association RUME³⁷, organisation de conférences annuelles,

³⁷ RUME : Research in Undergraduate Mathematics Education

publications avec le MAA mais aussi l'AMS³⁸, début d'une interaction avec la recherche au niveau secondaire (le fait que J. Ferrini Mundy dont les travaux de recherche dans le domaine du Calculus sont bien connus ait été responsable du projet de rénovation des standards qui vient de s'achever, que des chercheurs comme A. Schoenfeld s'y soient fortement impliqués, n'est sans doute pas sans effet à ce niveau).

La situation que nous venons de décrire n'a sans aucun doute rien d'exceptionnel. Même dans les pays où la recherche didactique sur l'analyse est plus développée, l'impact de cette recherche sur les changements curriculaires reste faible. L'intérêt de cette recherche, souvent très locale au vu des concepteurs de projets, est souvent mal perçu et s'il y a diffusion évidente d'une certaine culture didactique, de certaines idées, de certains concepts, c'est dans un processus qui échappe très souvent à la communauté des chercheurs. Cette communauté elle-même a d'ailleurs du mal à se situer de façon cohérente par rapport à l'action didactique. La connaissance didactique, au fur et à mesure de sa progression, nous montre bien la complexité des systèmes sur lesquels il s'agirait d'agir, et le poids de contraintes qui nous échappent. Elle incite à se méfier de l'effet de propositions didactiques dont le devenir dans le système éducatif est incontrôlable. Mais, dans le même temps, nous voudrions que ces connaissances patiemment élaborées servent effectivement à améliorer le fonctionnement du système éducatif et nous croyons aussi en avoir un peu les moyens... Le dilemme est particulièrement crucial quand il s'agit de penser les réformes curriculaires.

V. EN GUISE DE CONCLUSION, DES QUESTIONS SENSIBLES LARGEMENT OUVERTES

Nous voudrions pour conclure pointer un certain nombre d'interrogations qui ont traversé plus ou moins explicitement ce texte. Ces interrogations sont les suivantes :

- Comment, de façon cohérente, tirer parti d'apports didactiques si divers, se situant dans des approches différentes, qui souvent semblent complémentaires, mais parfois aussi semblent inconciliables ?
- Comment prendre en compte la diversité des rapports possibles aux objets de l'analyse, sans se laisser piéger par le mythe d'un rapport idéal, peut-être celui auquel nous avons plus ou moins laborieusement accédé, en tout cas celui que la culture et l'épistémologie usuelle de l'enseignement tendent à nous faire voir comme rapport idéal ?

³⁸ MAA : Mathematic Association of America, AMS : American Mathematical Society

- Comment prendre en compte dans le travail didactique l'évolution des rapports entre l'analyse et les autres secteurs mathématiques, l'évolution des pratiques au sein même de l'analyse ?
- Comment penser aujourd'hui l'entrée dans le champ de l'analyse, la transition algèbre – analyse, les rapports entre analyse algébrique et approximation ?
- Comment dépasser des études locales pour s'attacher au long terme qui, seul, permet d'aborder sérieusement les questions d'écologie et de viabilité ?
- Comment prendre en charge des questions technologiques, sans cesse renouvelées ?
- Comment prendre en charge la mouvance des contextes culturels, sociaux et institutionnels ?

Et nous voudrions aussi, pour terminer, rappeler à quel point il importe pour la recherche didactique, de ne pas limiter ses centres d'intérêt à ce qui lui est le plus familier, la didactique de l'analyse en section S au lycée, dans les filières MIAS et SM à l'université, voire dans la préparation aux concours de recrutement d'enseignants de mathématiques. L'enseignement de l'analyse vit et a à vivre dans bien d'autres contextes institutionnels et l'étroitesse du regard que nous avons développé jusqu'ici est à la fois regrettable et préjudiciable, quand il s'agit de penser le futur.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue M. (1993). Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM* n° 11, 115-139.

Artigue M. (1996). Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée, in B. Belhoste & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, 197-217. Editions Vuibert : Paris.

Artigue M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18.2, 231-262.

Artigue M., Lagrange J.B. (1999). Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de première S, in D. Guin (Eds.), *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des*

mathématiques. *Actes du colloque francophone européen de La Grande Motte*, mai 1998. IREM de Montpellier.

Artigue M. (2001). What can we learn from educational research at the university level, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

Belhoste B. (1996). Réformer ou conserver ? La place des sciences dans les transformations de l'enseignement secondaire en France (1900-1970), in B. Belhoste & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, 197-217. Editions Vuibert : Paris.

Bloch I. (2001). Situations a-didactique et paradigmes d'enseignement dans le secondaire : la notion de fonction, in Assude et Grugeon (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2000*, IREM de Paris 7.

Borba M., Confrey J. (1996). A student's construction of transformation of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 31.3, 235-268.

Defouad B. (2000). *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Dubinsky E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky E., Mathews D., Reynolds B. (1997). *Cooperative learning for undergraduate mathematics*, MAA notes vol. 44. Washington, DC : The Mathematical Association of America.

Dubinsky E., Mc Donald M. (2001). APOS : a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

Groupe AHA (Eds.) (1999). *Vers l'infini pas à pas. Approche heuristique de l'analyse. Guide méthodologique*. De Boeck Editeur, Bruxelles.

Guin D., Trouche L. (1999). Environnements « Calculatrices symboliques » : nécessité d'une socialisation des processus d'instrumentation – évolution des comportements d'élèves au cours de ces processus, in D. Guin (Eds.), *Calculatrices symboliques et géométriques dans*

l'enseignement des mathématiques. Actes du colloque francophone européen de La Grande Motte, mai 1998. IREM de Montpellier.

Lakoff G., Núñez R. (2000). *Where mathematics comes from : how the embodied mind brings mathematics into being*. New York : Basic Books.

Lave J., Wenger E. (1991). *Situated learning : legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press, Cambridge.

Longo G. (1997). Géométrie, Mouvement, Espace : Cognition et Mathématiques, *Intellectica* 2, 25.

Maschietto M. (to appear). *The transition from algebra to analysis: the use of metaphors in a graphic calculator environment*. Contribution to the CERME 2 Conference.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

Núñez R., Edwards L.D., Matos J.P. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 39, 45-65.

Praslon F. (1999). *Continuités et ruptures dans la transition entre terminale S et DEUG Sciences en analyse. Le cas de la dérivée et de son environnement*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Robert A., Speer N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus / elementary analysis, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus à enseigner à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18.2, 139-190.

Schoenfeld A.H. (1994). Some notes on the enterprise (research in collegiate mathematics education, that is), in E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, J. Kaput (eds), *Research in Collegiate Mathematics Education I*, vol. 4, 1-20. Providence, RI: American Mathematical Society.

Schoenfeld, A. H. (ed.) (1997). *Student assessment in calculus : a report of the NSF working group on assessment in calculus*. MAA notes vol. 43. Washington, DC : The Mathematical Association of America.

Tall D. (1996). Functions and Calculus, in A.J. Bishop al. (eds), *International Handbook of Research in Mathematics Education*, 289-325. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Tucker A. C. (ed.) (1995). *Models that work : case studies in effective undergraduate mathematics programs*, MAA notes vol. 38. Washington, DC : The Mathematical Association of America