# *SITUATIONS A DIMENSION ADIDACTIQUE ET PARADIGMES D'ENSEIGNEMENT DANS LE SECONDAIRE : LA NOTION DE FONCTION*

*Isabelle Bloch*[28]
*DAEST - Université Bordeaux 2*

Je présente dans cet exposé une partie de mon travail de thèse, celle qui a trait à la construction de situations d enseignement / apprentissage de l analyse dans le secondaire. Ce travail m'a conduite à préciser la notion de situation à dimension adidactique, et, partant, à étudier la notion de milieu dans la théorie des situations, tant d'un point de vue théorique que du point de vue de la construction de situations effectives. Une de ces situations sera détaillée, et les connaissances et savoirs qu'elle permet seront étudiés.

## I. INTRODUCTION

On s'accorde généralement à reconnaître que l'enseignement de l'analyse au lycée a subi, depuis trois décennies environ, d'importants bouleversements, et ceci plusieurs fois de suite : à chaque changement de programme (1966, 1971, 1982, 1985, 1991), des remaniements non négligeables ont été opérés dans les contenus d'analyse figurant dans le programme des classes scientifiques (Première et Terminale), avec d'éventuelles retombées sur les autres sections (économique, littéraire). Ces variations ont été pointées dans des travaux récents (Artigue, 1993 ; Artigue, 1996 ; Trouche, 1996 ; Artigue 1998). Il semble qu'il soit difficile à l'institution scolaire de dégager une dialectique raisonnable pour l'enseignement de l'analyse : en témoignent ces turbulences.

L'analyse a d'ailleurs toujours été considérée comme d'enseignement difficile, introduisant à des ruptures en terme de preuve, de conceptualisation, et de méthodes de travail. La complexité de ce domaine, et les difficultés rencontrées pour construire des situations didactiques pertinentes, ont conduit certains chercheurs à affirmer l'impossibilité d'enseigner l'analyse autrement que par ostension, tandis que d'autres cherchaient une entrée par la modélisation de phénomènes physiques (Legrand 1991 ; Di Martino 1992), par la

[28] isabelle.bloch@aquitaine.iufm.fr

problématique des grandeurs (Groupe AHA), ou par l'analyse non standard (Lutz, Makhlouf, Meyer 1996). De nombreux travaux ont également été menés sur l'enseignement instrumenté de l'analyse (Trouche 1996, Artigue, Drouhard, Lagrange 1994).

J'ai choisi, dans un premier temps de mon travail de thèse, d'interroger la notion de situation fondamentale de l'analyse en m'appuyant sur les questions posées par Marc Legrand (Legrand 1991), ce qui m'a amenée à étudier les milieux possibles pour l'introduction de la notion de fonction ou de limite ; puis à chercher quelle articulation des connaissances et des savoirs était envisageable dans ce milieu, en particulier où articuler les savoirs relatifs à la validation, savoirs que toutes les recherches signalaient comme problématiques. L'étude des connaissances et savoirs conduit enfin à réinterroger la notion d'adidacticité (situation adidactique ou à dimension adidactique) et le travail du professeur dans une telle situation. Sur ce dernier point je renvoie le lecteur à l'article paru dans RDM 19/2 (Bloch 1999).

Dans une première partie, j exposerai donc comment j ai été amenée à m'appuyer sur la problématique connaissances / savoirs pour étudier l'enseignement de l'analyse dans le secondaire. La prise en compte de la problématique connaissances / savoirs suppose la construction d un milieu propre à l'enseignement de concepts de l'analyse par des situations au moins partiellement a-didactiques. J'essaierai de dégager les caractéristiques d un tel milieu, d'un point de vue épistémologique comme du point de vue de l'apprentissage.

Je présenterai ensuite un exemple de situation à dimension adidactique visant l'enseignement du conept de fonction, et montrerai, en liaison avec la structuration du milieu, comment les situations construites tentent de prendre en compte les trois niveaux d'organisation du savoir : action / connaissances, formulation / ostensifs, validation / savoir, et ce qu'il est nécessaire de modifier, si l'on veut parvenir à faire exister ces différents niveaux, dans les activités présentées habituellement aux élèves.

En conclusion, j'examinerai quels types de connaissances sont travaillées dans les situations expérimentales, et :

1) en quoi elles diffèrent des connaissances habituellement présentes dans l'enseignement secondaire ;

2) quel lien elles présentent avec les connaissances travaillées dans l'enseignement supérieur.

# II. PROBLÉMATIQUE

## 1. L'enseignement de l'analyse dans le secondaire

### *a) Les évolutions*

Lorsqu'on étudie les évolutions de l'enseignement du concept de limite depuis les années 1970, date de la réforme des " maths modernes ", on peut pointer quelques étapes :

- en 1970 : les suites et les limites sont introduites par des définitions et preuves formelles ;
- en 1986 , les programmes tentent de réintroduire une problématique de majoration par des suites de référence. On obtient alors un traitement des limites dont voici un exemple (Mathématiques Première S et E, Gautier et Thiercé, Hachette 1986, p. 129) :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \text{DONC} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

MAIS comme on ne peut pas majorer directement on écrit

$$\frac{1}{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$$

ET

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

OR

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

De plus

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} < 1 \quad \text{dès que } n \geq 4 ,$$

DONC

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$$

Ceci conduit donc :

— à traiter de façon très différente deux exemples qui sont exactement de même nature, du point de vue des phénomènes de limite ;

— à avoir besoin d'une inflation de connaissances algébriques, pour traiter des exemples élémentaires ;

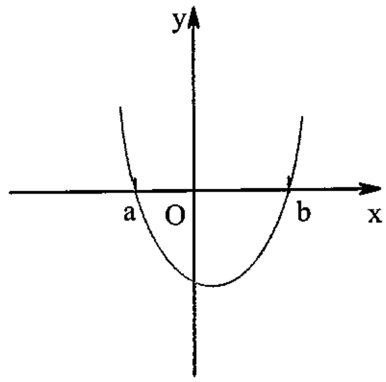
— à ne pas pouvoir instituer ces connaissances en savoirs, étant donné que ces connaissances sont à renouveler pour chaque exemple.

- dans les années 90 :

L'enseignement organise le travail en conformité sur des objets supposés représentatifs. Ainsi les propriétés sont illustrées par un calcul, un graphique, un tableau numérique, " données à voir " sans justification de leur nécessité ni outils de validation ou d'invalidation. Cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport graphique / fonction, supposé transparent : les élèves sont supposés *voir* dans le dessin - graphique ce qu'y voit le professeur, c'est-à-dire un ostensif de fonction numérique.

***Exemple : fonction minorée***

Le graphique est donné aux élèves, avec :
- soit un minorant placé sur l'axe des ordonnées, et le commentaire : " la fonction est minorée sur l'intervalle (a,b) par ... "
- soit, la consigne : " montrez que la fonction est minorée " (le nombre candidat à être un minorant étant alors fourni ou laissé à la charge des élèves).




*b) La nature du travail mathématique*

Le travail proposé dans les années 70 était essentiellement formel : le sens était supposé issu du formalisme, puisque celui-ci était tenu pour la quintessence des mathématiques. Dans les années 80, les réformes avaient pour but de réintroduire la notion d'approximation en analyse ; dans les faits cela s'est traduit par une inflation du travail algébrique sur les majorations, minorations, sans que le temps didactique puisse avancer suffisamment pour permettre d'introduire des tâches pertinentes du point de vue de l'analyse (pour des développements et précisions, cf. Artigue 1993).

La présentation ostensive des propriétés, privilégiée depuis la dernière réforme, est supposée plus " intuitive ". Dans les faits, le travail proposé ne permet pas aux élèves de disposer d'outils pour déterminer des **savoirs** de l'analyse. Ainsi, dans le cas de l'exemple ci-dessus :

— quelles sont les fonctions ou les classes de fonctions qui sont majorées, minorées ;

— quelle est l'utilité de la notion ainsi introduite ;

— comment cette notion se distingue des autres notions relatives à l'ordre, concernant les fonctions (croissance, extrema) ;

— quelles sont les fonctions ou les classes de fonctions qui ne sont pas majorées, minorées ;

— quelle est, pour une fonction, la propriété contraire d'être majorée, c'est-à-dire : la propriété " p " étant connue, comment s'énonce la propriété " non p " ?

Autrement dit, cet enseignement ostensif ne permet pas aux élèves de travailler sur des critères mathématiques. En effet c'est le propre des énoncés mathématiques que de pouvoir dire quelle propriété ils déterminent, quels sont les objets mathématiques qui vérifient ces propriétés, et quels sont ceux qui ne les vérifient pas. Or le fait de ne pas disposer d'outils de validation relatifs à une propriété entraîne une incapacité à opérer avec cette propriété ; un énoncé mathématique est également déterminé, en ce sens que le connaître permet de connaître son contraire, ce qui n'est pas possible ici.

Dans ces conditions, on peut s'interroger sur la capacité des élèves à voir vraiment dans les tâches proposées un travail sur les concepts mathématiques visés. On voit là les limites de l'ostension basée sur " l'intuition ".

*c) L'équilibre connaissances / savoirs*

Ces phénomènes peuvent être analysés en termes de savoirs et de connaissances présents dans l'enseignement. En effet :

- les années 70 tentent d'organiser l'enseignement autour de la présentation formelle du savoir, en supposant ce savoir suffisant pour traiter les problèmes qui en relèveraient, et en négligeant la construction nécessaire de connaissances relatives à ces problèmes ;
- l'enseignement des années 80 quant à lui, présente des problèmes à traiter avec très peu de savoirs institués, mais chaque cas nouveau nécessite la mise en œuvre de connaissances importantes relatives à l'algèbre et aux majorations ; ces connaissances sont trop locales pour être instituées facilement afin de pouvoir être ensuite décontextualisées et réinvesties ;

- l'enseignement actuel, sous couleur de baser l'approche de l'analyse sur l'intuition graphique, ne donne à l'élève aucun outil lui permettant de traiter des cas différents de ceux qui lui sont présentés. On pourrait dire qu'il tente de se baser sur des connaissances, mais ces connaissances, si elles se construisent effectivement (ce qui resterait à prouver) sont de l'ordre des connaissances privées et non opérationnelles dans le travail mathématique.

On pourrait donc analyser ces variations comme un problème de L'EQUILIBRE CONNAISSANCES / SAVOIRS

J'ai donc été amenée à étudier la problématique des connaissances et savoirs (C/S) , afin de déterminer s'il était possible de construire à ce niveau des situations qui puissent être porteuses à la fois de connaissances et de savoirs de l'analyse.

## 2. Connaissances et SAVOIR [29]

*" Enseigner, c'est travailler le savoir, pour induire dans un cadre situationnel choisi, un processus cognitif supportant l'apprentissage, dont le produit sera en retour institué en savoir ".*

Conne, 1992 : " Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique ", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12- 2/3, La Pensée Sauvage éd.*, Grenoble.

Il s'agit donc d'induire des connaissances dans une situation à partir du savoir, mais ces connaissances doivent pouvoir retrouver le savoir à terme.

*a) Connaissance*

*" Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation , et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale. "*

(Brousseau & Centeno 1991, note p.176, " Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant ", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 11- 2/3, La Pensée Sauvage éd.*, Grenoble).

[29] Pour une étude bibliographique plus complète de connaissances et savoirs, cf. Bloch 1999.

- Ce qui départage connaissance et savoir, c'est leur rôle dans la situation :

*" La situation n'est pas seulement le cadre de l'action du sujet, elle en est la condition, elle est donc étroitement associée aux connaissances en jeu. De ce fait, une partie de la situation va devoir entrer comme partie intégrante des savoirs correspondants. Cette partie, cachée peut-être, mais essentielle, sert de* **référence** *au savoir et* **d'objet** *à la connaissance. "* (Brousseau, 1990, " Le contrat didactique : le milieu " *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9- 3, La Pensée Sauvage éd.*, Grenoble).

Les connaissances ont à voir avec la transformation des situations, et avec la possibilité d'évolution vers le savoir ; elles sont donc reliées à la diffusion possible des savoirs :

| CONNAISSANCE :<br>transformation de la situation ← → diffusion de savoirs |
|---|

Se pose alors le problème de la reconnaissance des connaissances, reconnaissance liée à leur utilité (on **reconnaît** les connaissances, et **qu'en faire** ?)

- Une connaissance est reconnue en ce qu'elle agit sur la situation (interaction sujet / milieu)
- quand je dis qu'elle est reconnue, je postule d'emblée une

INTERACTION DE CONNAISSANCES

- ce qui suppose du SAVOIR : le savoir est un repère pour reconnaître la connaissance, en situation, à propos d'une action
- la connaissance est reconnue par le *professeur*, ce qui suppose que cette reconnaissance a pour celui-ci une fonction dans la situation (en dehors de sa fonction pour l'élève, qui est bien sûr de permettre à ce dernier de réussir la tâche proposée, le jeu mis en scène dans la situation) : cette fonction c'est de permettre l'évolution (pilotée par le professeur) du contrat didactique. En effet, dans une situation où les connaissances s'expriment, le contrat ne peut rester stable, puisqu'il s'agit que ces connaissances évoluent pour pouvoir à terme être institutionnalisées en savoirs.

*b) Savoir*

*" Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. "*

(Brousseau & Centeno 1991, note p.176, " Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant ", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 11- 2/3, La Pensée Sauvage éd.*, Grenoble).

- Un savoir est ce qui CONTRÔLE la situation
- Un savoir est une connaissance IDENTIFIEE PAR LE SUJET
- C'est une CONNAISSANCE UTILE (utilisable, par exemple pour poursuivre l'interaction de connaissances)

*c) Savoirs pragmatiques et savoirs savants*

Suivant Conne (1992), je distinguerai les savoirs pragmatiques et les savoirs savants ; les premiers comprennent les savoir-faire et les savoirs réfléchis :

- Les savoir-faire sont des savoirs en situation, qui se suffisent du résultat de l'action
- les savoirs réfléchis sont des savoirs explicitables (pourquoi l'action a été efficace : pourquoi ça marche ?)
- Les savoirs savants sont des savoirs SUR LES SITUATIONS

La question est alors de déterminer quelles situations sont favorables à la manifestation et à la construction de connaissances, et comment construire ces situations, c'est-à-dire :

QUEL MILIEU PERMET LA PRODUCTION, L'EXISTENCE, DE CONNAISSANCES ?

COMMENT CONSTRUIRE ET ETUDIER UN MILIEU ADEQUAT ?

## III. LE MILIEU

La détermination d'un milieu théorique relatif à un savoir donné, et la construction effective d'une situation basée sur ce milieu, sont fondées sur l'étude des DEUX QUESTIONS THÉORIQUES SUIVANTES :

1) Comment construire un milieu (une famille de milieux) relatifs à un concept donné ?

2) Comment structurer le milieu (analyser la situation, les connaissances) de façon à ce que la situation soit jouable et produise, à chacun des niveaux de milieu considérés, les comportements, procédures, connaissances, attendues.

Liés à ces deux questions, il y a DEUX NIVEAUX DE MODELES :

— un modèle de milieu théorique de l'enseignement d'un concept (dans ma thèse j'ai étudié le milieu théorique d'introduction des fonctions et des limites). La possibilité de construire théoriquement un tel milieu ne dit rien sur les réalisations effectives envisageables de telles situations, lesquelles situations, pour être réalisables obéissent à d'autres contraintes (chronogénétiques par exemple, ou de compatibilité avec les savoirs institutionnels)

— un modèle de milieu spécifié : celui qui permet de prévoir une situation adidactique effective, et de rendre compte de la contingence, c'est-à-dire le milieu relatif à une situation construite / donnée.

Les deux concepts sont bien évidemment théoriques, mais ils ne remplissent pas la même fonction.

## 1. La fonction des deux milieux théoriques et leur construction

*a)* Le milieu théorique relatif à l'enseignement d'un concept est celui qui détermine les jeux possibles relativement à ce concept : il se détermine d'un point de vue épistémologique (point de vue des jeux possibles du savoir) et cognitif (point de vue des jeux possibles de l'élève). Il détermine donc aussi les variables didactiques à prendre en compte.

*b)* Le modèle de milieu spécifié est celui où les variables didactiques prennent des valeurs, et le jeu est défini du fait de la fixation des variables didactiques : il s'agit alors d'étudier les possibilités théoriques de la situation ainsi déterminée, en vue de la construction de connaissances et de savoirs relatifs au concept (analyse a priori de la situation).

La construction du premier type de milieu, nous l'avons dit, se fait par des considérations épistémologiques et cognitives : pour l'exemple de telles constructions, se reporter à Bloch 2000, chapitre 3 (la notion de fonction), C. et R. Berthelot 1983 repris dans Bloch 2000 (la notion de limite), Brousseau 1988 (rationnels et décimaux), Berthelot et Salin 1992 (la géométrie).

Pour ce qui est du deuxième type, les nombreuses situations adidactiques construites dans la théorie des situations fournissent des exemples analysés rigoureusement.

Trois remarques :

- Construire un milieu adidactique ne peut se faire en respectant l'organisation du savoir, sinon on retrouve celui-ci ;
- Donc cette construction se fera en mettant au premier plan des considérations sur les possibilités d'action, les agrégations de connaissances, la facilité d'entrée dans la situation ;
- Ce qui sera déterminant sera la possibilité reconnue d'existence de PROCESSUS de production de connaissances, c'est-à-dire de possiblités pour l'élève de mettre en place des procédures conduisant à l'échec ou à la réussite, ces procédures recevant ensuite des rétroactions du milieu, le milieu matériel / objectif étant seul à l'origine des rétroactions ou des apports du professeur étant également nécessaires. Dans ce dernier cas il restera à examiner dans quelle mesure l'adidacticité de la situation est ou non préservée.

## 2. Structuration du milieu

On veut étudier :

— ce qui va être produit (analyse a priori)

— ce qui est effectif (comprendre la contingence)

en termes de fonctionnement (actions, procédures, régulations) et donc de connaissances : quelles connaissances peuvent être en jeu à quelles phases de la situation, et d'adidacticité : dans quelle mesure l'élève est-il en relation avec un milieu qui lui envoie des rétroactions.

La question de l'ADIDACTICITE est en effet à relier à celle de l'étude du milieu et des connaissances :

— le critère de l'adidacticité est la production et l'interaction de connaissances ;

— il n'y a pas adidacticité des *objets* de la situation mais des PROCESSUS issus des actions et des procédures des élèves (évolution de la situation).

La structuration du milieu est donc nécessaire car le milieu EVOLUE, c'est dire que dans une situation adidactique, **le contrat n'est pas stable**.

Je me réfère au modèle de structuration du milieu proposé par Margolinas, et que je rappelle ci-dessous (modifié (Bloch 1999) pour rendre plus explicite le travail du professeur) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| M3:<br>M-de construction | | P3:<br>P-noosphérien | S3:<br>situation noosphérienne | sur |
| M2:<br>M-de projet | | P2:<br>P-constructeur | S2:<br>situation de construction | didac |
| M1:<br>M-didactique | E1:<br>E-réflexif | P1:<br>P-projeteur | S1:<br>situation de projet | tique |
| **M0:**<br>**M d'apprentissage** | **E0:**<br>**Elève** | **P0:**<br>**Professeur-pour-l'élève** | **S0:**<br>**situation didactique** | |
| M-1:<br>M-de référence | E-1:<br>E-apprenant | P-1:<br>Professeur en action | S-1:<br>situation d'apprentissage | a- |
| M-2:<br>M-objectif | E-2:<br>E-agissant | P-2 :<br>P- observateur | S-2:<br>situation de référence | didac |
| M-3:<br>M-matériel | E-3:<br>E-objectif | | S-3:<br>situation objective | tique |

Remarquons que dans ce schéma, la situation d'élaboration du milieu théorique du concept pourrait se situer aux niveaux 2-3, c'est-à-dire la situation de construction.

Les niveaux adidactiques permettent de rendre compte de l'évolution du contrat didactique, c'est-à-dire :

- de ce qui est attendu de l'élève à chaque étape de la situation ;
- du type d'interaction avec le milieu et le professeur, et donc de ce que le professeur est amené à faire pour piloter la situation.

## 3. Construction de situations pour l'enseignement de l'analyse

L'étude des travaux de didactique amène à constater qu'il n'existe que peu de situations de résolution de problèmes pour les concepts de l'analyse. Citons cependant les projets qui peuvent être proches de la démarche de construction d'un milieu pour l'enseignement de l'analyse : :

- Les travaux de Legrand, Pintard, Di Martino (modélisation par la situation du pétrolier) ;

- Les travaux du Groupe AHA : Approche Heuristique de l'Analyse. Le groupe AHA utilise explicitement la problématique des grandeurs, et celle des infinitésimaux, pour construire des situations d'enseignement des concepts de fonction, limite, tangente, intégrale. Quel que soit l'intérêt de cette démarche, je n'ai pu en reprendre les éléments, pour des raisons de temps essentiellement : le projet AHA est un projet long.

*a) Construction d'un milieu effectif*

Cette construction obéit à des impératifs relatifs au savoir :

- il est nécessaire de pouvoir INSTITUER EN SAVOIR le produit des interactions dans la situation
- il faut que l'action, les connaissances produites et formulées soient INTELLIGIBLES et UTILISABLES pour le savoir.

Quelles sont les conditions minimales de réalisation pour être sûr que l'on est bien dans une situation de résolution de problème de l'analyse ?

Le savoir est " d'emblée enseignable " ; quels détours sont : légitimes, efficaces, nécessaires ????

HYPOTHESE : on fait de l'analyse si l'on peut disposer de CRITERES DE VALIDITE des propriétés, permettant l'entrée dans la théorie mathématique " analyse "

Ces critères peuvent être pris dans un répertoire assez large, mais ils doivent être mis en rapport avec le savoir, dans une perspective au moins temporelle.

*b) Nécessité de prendre en compte la validation*

Ceci rejoint l'analyse faite de l'enseignement actuel : ostension sans possibilité de valider ou même de disposer d'énoncés " complets " (un théorème dit ce qu'est une propriété, il permet de prouver quels sont les objets qui la vérifient et quels sont ceux qui ne la vérifient pas).

La prise en compte de la nécessité de valider impose alors une étude des questions didactiques liées à la validation :

- A l'entrée dans une théorie nouvelle complexe comme l'analyse, l'on ne dispose pas du système servant à valider, et le système de preuve de l'analyse est en rupture avec celui de l'algèbre:

  les formulations des preuves de l'analyse apparaissent comme une " boîte fermée ", p.ex. : $\forall \varepsilon , | a - b | < \varepsilon$ Il n'est pas " transparent " qu'en ouvrant la boîte on trouvera $a = b$
- Faut-il laisser vivre des modes de validation provisoires ? (légitimité, durée)
- Problème de l'adaptation ultérieure
- Analyser les différents modes d'accès au répertoire de la validation :

1. du point de vue des objets et des problèmes

Lien avec les validations empiriques (prise en compte de la problématique des grandeurs) ou utilisation des fonctions comme base de questions mathématiques. J'ai choisi la deuxième solution, pour des raisons de compatibilité avec l'institution et de durée de mon projet (possibilité d'avoir les élèves durant un an seulement).

2. du point de vue des registres de représentation utilisés dans le milieu

INFINI mais : pour la dévolution pas pour des règles opératoires à ce niveau

ALGEBRIQUE (règles de simplification , ...)

GRAPHIQUES

NUMERIQUE (représentant par un système de voisins, cf. Bloch 2000, chapitre 3 )

Il est donc nécessaire d'étudier les registres de représentation du point de vue des tâches qui peuvent être associées à l'utilisation d'un registre (cf. Bloch 2000, chap 4), et cf. II.4 )

3. du point de vue des choix didactiques concernant les critères de validation

   Prévoir ce qui sera explicite ou implicite dans l'utilisation des critères de validation (par ex. axiome d'Archimède, propriété des intervalles emboîtés, algèbre des limites, règles " opératoires " sur l'infini...)

Les CRITERES de validation sont du côté du SAVOIR ; les moyens de validation utilisés spontanément (ou sous l'influence du jeu dans la situation) par les élèves sont du côté des CONNAISSANCES.

## 4. Milieu objectif et ostensifs

### *a) Registres et ostensifs*

Un préalable à la construction d'un milieu est l'étude des registres disponibles pour les notions d'analyse, et des tâches afférentes. La définition d'une **tâche** est celle de Leontiev : un but à atteindre, et des conditions données ; ces conditions peuvent jouer comme des contraintes ou des aides.

Il s'agit de :

➔ récupérer :

- des connaissances des élèves (y compris des obstacles et des conceptions)
- des moyens de travail ET de validation

➔ analyser

- des tâches possibles

➔ augmenter

- les capacités de fonctionnement (de nombreuses tâches trouvées dans l'analyse a priori ne figurent pas dans les tâches routinières de l'enseignement secondaire, cf. Bloch 2000, chapitre 4).

### *b) Registre réducteur / producteur*

L'analyse des registres doit prendre en compte les notiosn de registre réducteur (un représentant d'un concept, dans un registre, ne peut montrer qu'une partie des propriétés de ce concept) et producteur (un représentant permet de voir des propriétés parasites (qui ne sont pas celles du concept) car spécifiques de la représentation.

- GRAPHIQUE

— un graphique est majoré, minoré ; il est discret : le continu devra être induit.

— un graphique permet de faire apparaître une fonction comme objet ; on verra donc des propriétés (y compris fausses).

- ALGEBRIQUE

— courbe, valeurs, racines ne sont pas apparentes

— la nature de la fonction est perceptible, du moins dans les cas simples (polynômes par exemple)

- GEOMETRIQUE

— ex: le parallélogramme articulé est-il un bon représentant de la fonction “ sinus ” ?

*c) Installation d'un milieu matériel / objectif*

- Les ostensifs ne suffisent pas à définir la situation MAIS ils sont indispensables au niveau secondaire et supérieur pour installer un milieu matériel, qui doit déjà être constitué de représentants de concepts mathématiques.
- C'est la **question posée** qui détermine le milieu objectif :

→ Quel jeu est possible ? → Quelles connaissances ?

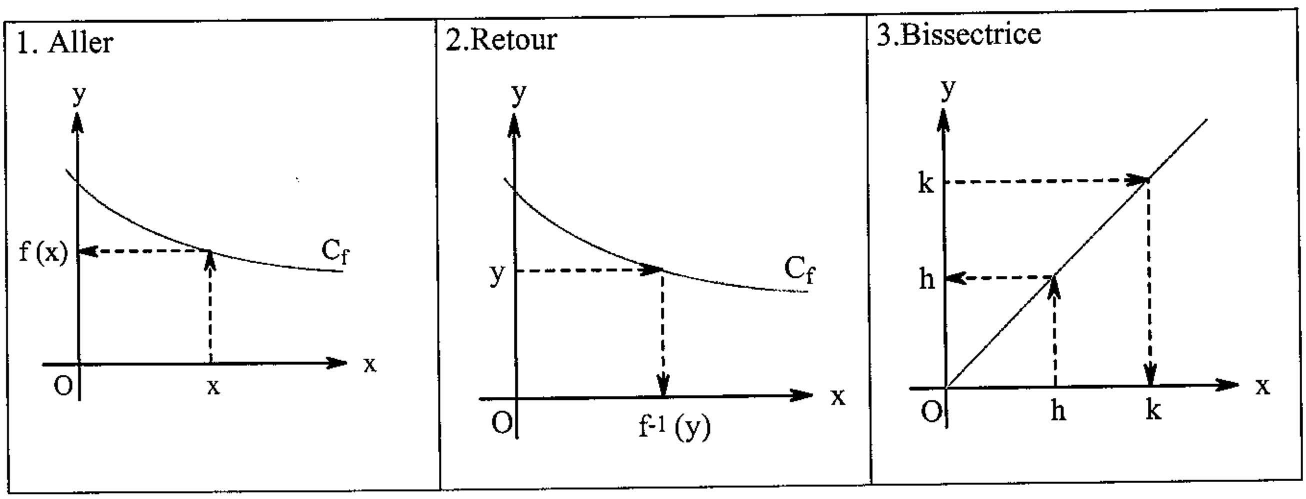
## IV. LA SITUATION " GRAPHIQUES ET CHEMINS "

La situation construite, à partir de cette analyse, pour l'enseignement de la notion de fonction dès la classe de Seconde (10ème classe) est due à **Pedro Alson**, qui l'a mise en place à l'Université Centrale du Venezuela pour des étudiants abordant le Calculus tout en disposant d'un petit bagage algébrique.

### 1. Le milieu " matériel " et objectif

- repères du plan et graphiques fonctionnels
- données de fonctions ou de contraintes amenant à construire des RGC (représentations graphiques cartésiennes) de fonctions, ou à répondre à des questions relatives aux propriétés des RGC construites.
- moyens de validation : CHEMINS ET GRAPHIQUES

**Les trois chemins fondamentaux:**



Les graphiques et les chemins font partie du milieu pour l'action :

- sur les repères ou graphiques, l'élève peut tracer des RGC, placer et coder des points ;
- avec les chemins, il peut contrôler des images, des antécédents, contrôler qu'une RGC est bien une RGC de fonction ;
- il peut contrôler des propriétés des fonctions ;

il peut associer des RGC par une transformation ou une opération, i.e. opérer globalement sur les RGC

**2. La situation (le jeu)**

*a) Composante " fonctions "*

Le but du jeu est de :

- disposer d'un certain nombre de RGC de fonctions, et pouvoir dire si ces fonctions possèdent, ou non, certaines propriétés.
- construire un stock de fonctions sur lesquelles tester les propriétés énoncées.
- ce stock de fonctions sera assimilé, dans le milieu prévu, à un stock de RGC, ce qui permettra de le faire en grande partie construire par les élèves.

*b) Composante " contraintes "*

- disposer d'un stock de contraintes, et d'y éprouver les RGC soit données, soit construites ;
- produire des contraintes, ou des théorèmes sur les contraintes.

*c) Validation*

Dans les deux composantes de la situation, le but de la validation (et l'état final gagnant) est le même : être capable de dire si la contrainte est réalisée.

Les moyens de cette validation :

- moyens graphiques / formels avec les RGC et les chemins;
- éventuellement moyens numériques, algébriques si les données (le choix des variables) le permettent.

La situation comporte une dimension a-didactique si :

- des questions nouvelles, sur les fonctions, ou sur les contraintes, peuvent émerger à partir des contraintes identifiées

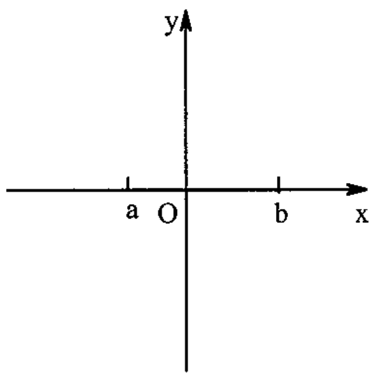
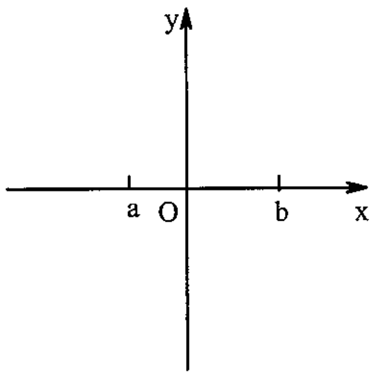
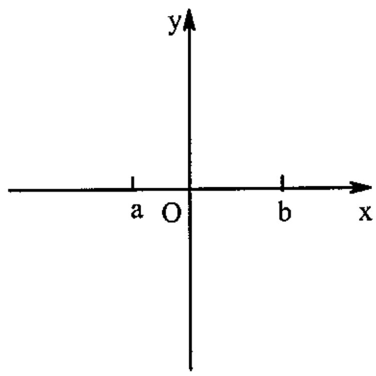
- le milieu fournit une rétroaction à ces questions
- il y a INTERACTION DE CONNAISSANCES :

  — ELÈVE / MILIEU — PROFESSEUR / ELEVE

<u>LES FONCTIONS : EXEMPLES DE FICHES</u>

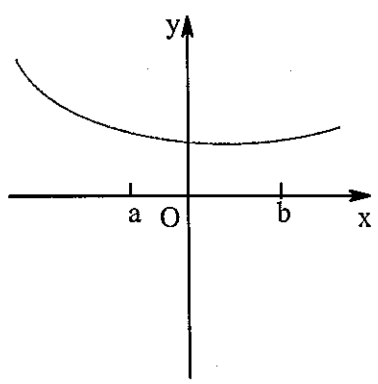
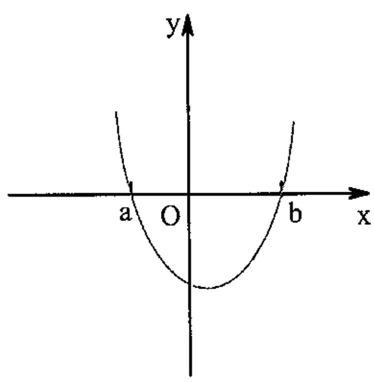
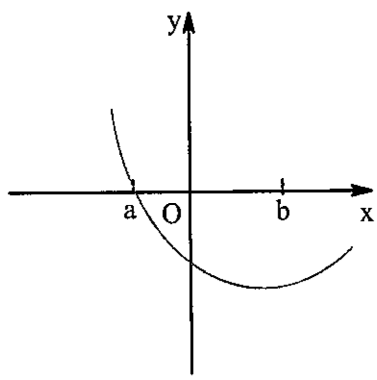
Dans tous les cas, la consigne est : “ Dessine la RGC (Représentation Graphique Cartésienne) d’une fonction f vérifiant les conditions énoncées ”.

**1 : Recherche de fonctions sous contrainte d’inegalites:**

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\forall x / x < a$ ou $x > b$, $f(x) < f(b)$<br>et $\forall x / a < x < b$ ,<br>$f(a) > f(x) > f(b)$ | $\forall x / a < x < b$ ,<br>$f(a) > f(x) > f(b)$ | $\forall x / x > b$, $f(a) > f(x) > f(b)$<br>$\forall x / x < b$, $f(x) > f(b)$ |

*Commencer par placer f(a) et f(b).*

*2 : Compléter dans chacun des cadres ci-dessous par une condition sur x, vérifiée pour la RGC tracée*

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $f(x) > f(a)$ si x .... | $f(x) > f(a)$ si x .... | $f(x) < f(a)$ si x .... |

1 : Quel travail sur cette consigne ?

Quelles connaissances ?

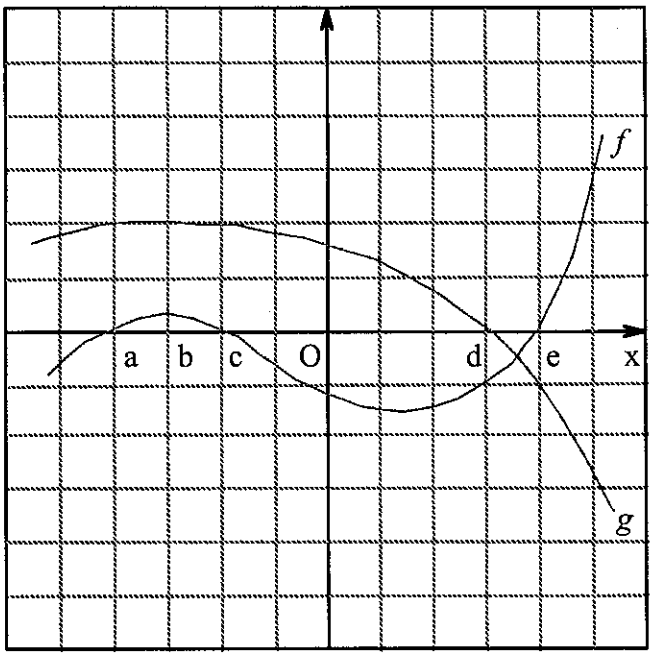
1) Fonction discontinue : est-ce une fonction ?

Les chemins sont un outil pour répondre. Le milieu graphique permet donc de construire, par le jeu des contraintes, des fonctions nouvelles (non encore rencontrées) et de valider des réponses à des questions concernant ces nouvelles classes de fonctions.

2) $\forall$ x / a < x < b , f(a) > f(x) > f(b) est, ou non, une condition équivalente à " f décroissante sur [a , b] " ?

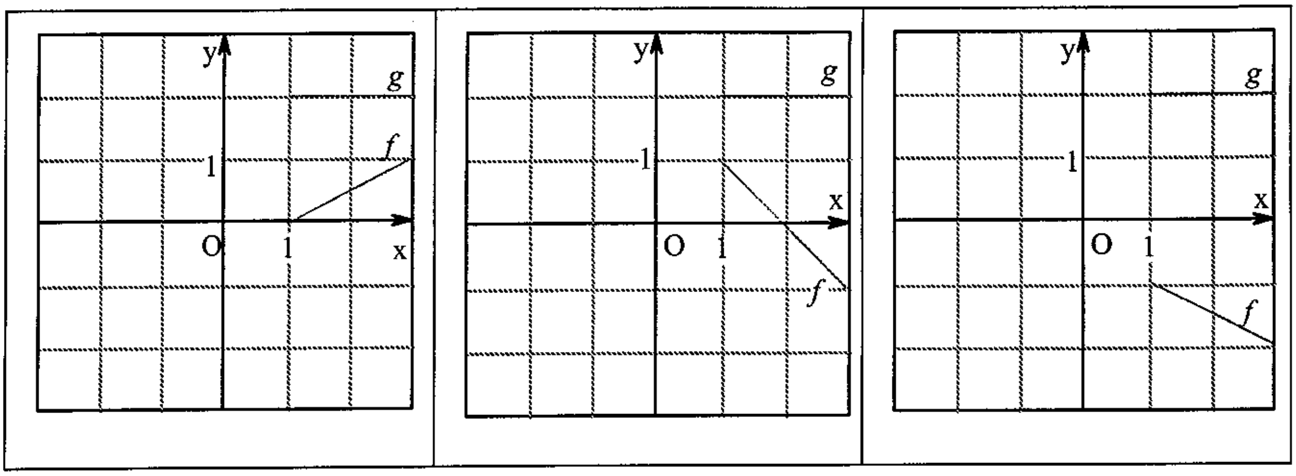
→ TRAVAIL SUR LE SENS ET LA NECESSITE DES QUANTIFICATEURS

**2. Somme et produit de fonctions**




*Ci-dessus : dessinez la fonction somme et la fonction produit de f et g, en utilisant les points d'abscisse a, b, c, d, e. Quelles règles peut-on énoncer quant au tracé de la RGC de f + g et de f × g à partir des RGC de f et de g ? Enoncez des théorèmes lorsque f et g sont des fonctions connues (par exemple constante, affine...)*

*Dans chacun des cadres ci-dessous, représentez la RGC de la fonction produit f × g (varier f et g)*




Les élèves retravaillent dans cette tâche les connaissances numériques, en particulier tout ce qui concerne la somme et le produit de nombres réels : les rapports au zéro et à l'unité sont redécouverts dans un environnement différent.

Il en résulte que les élèves sont en terrain non familier, et que les premiers essais de sommes, par exemple, sont peu assurés : les élèves tracent la somme de deux fonctions affines point par point, en n'osant pas affirmer qu'il s'agit bien d'une droite. Il est nécessaire de passer au mode algébrique pour en être sûr, étant donné les propriétés du graphique. Ce passage s'avère non évident ; ainsi le fait que l'algébrique puisse être un mode de validation pour le graphique est **une connaissance à construire**, et non pas spontanée.

Par contre pour le produit les élèves énoncent que le produit de deux fonctions affines est une fonction affine ... mais là, le graphique invalide très facilement cette proposition.

**Comment rendre l'utilisation des connaissances NECESSAIRES : RETOURNER LA SITUATION (cf. Bloch 2000 b, Dédidactification et retournement de situations, communication au colloque Guy Brousseau, juin 2000).**

Les consignes consistent à énoncer des propriétés de $f \times g$ , et à chercher dans quels cas f et g peuvent conduire au résultat cherché :

—$f \times g$ coupe l'axe Ox en telle abscisse ;

—$f \times g$ est négative sur l'intervalle [a, b] ;

—$f \times g$ est une fonction affine ;

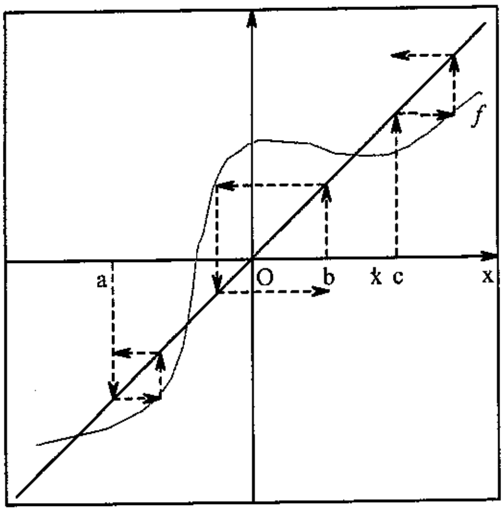
—$f \times g$ est une fonction du second degré, et l'abscisse du sommet de la parabole est $a$ ;

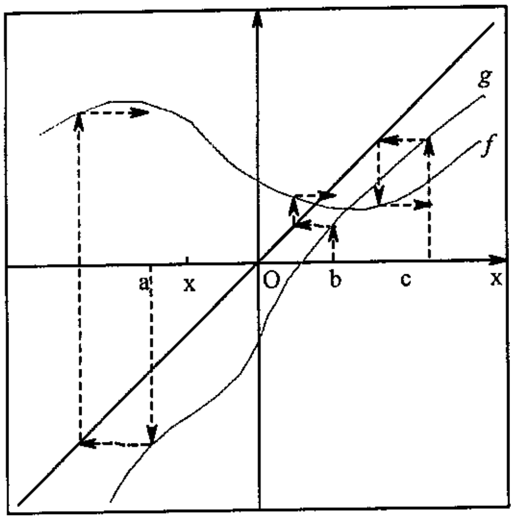
—$f \times g$ est du second degré, et sa RGC ne coupe pas l'axe Ox ;

— $f \times g$ est du second degré, et a un maximum ; $f \times g$ est du second degré, a pour maximum zéro ;

— $f \times g$ est du troisième degré, et n'est pas monotone ; ....

**<u>Les fonctions : le chemin de la réciproque et de la composée</u>**




Ce travail vise à :

- Faire énoncer des propriétés sur la réciproque (condition nécessaire et suffisante d'existence, propriété de symétrie par rapport à la bissectrice) ;
- Faire retravailler la notion de racine carrée d'un point de vue fonctionnel ; les élèves trouvent sans difficulté les deux réciproques de la fonction " carré ". Le travail graphique met aussi en évidence de façon particulièrement claire qu'un nombre négatif ne peut avoir d'antécédent.
- Donner aux élèves une expertise graphique par la maîtrise des outils d'anticipation sur la composition des fonctions. Ce point est particulièrement bien investi par les élèves.

### 3. Les variables didactiques des situations

*a) La nature des fonctions intervenant dans les graphiques*

➔ fonctions constantes, fonctions affines ;

➔ fonctions quelconques

*b) La nature des données numériques ou littérales présentes dans certains graphiques*

➔ nombres entiers ou rationnels facilement repérables, ou nombres irrationnels ;

➔ par exemple pour la somme et le produit, signe des valeurs prises par f et g ; pour le produit, comparaison avec l'unité ;

➔ valeurs repérées sur l'axe des x ou des y, mais indiquées par une lettre

➔ recours obligatoire aux quantificateurs.

*c) La nature et la complexité des consignes (contraintes) demandées*

➔ identification et validation de propriétés de fonctions dont le RGC est donnée ;

➔ ou tracé de RGC de fonctions avec des contraintes données.

LA DIFFICULTE DU PROBLEME A RESOUDRE TIENT ALORS A PLUSIEURS MODALITES :

➔ la nature du travail demandé (travail sur une courbe déjà tracée ou tracé à réaliser) ;

➔ le nombre de conditions (contraintes) demandées ;

➔ le fait que les conditions soient données sous forme d'égalités ou d'inégalités, ce qui peut entraîner l'obligation de quantifier ;

➔ les valeurs : numériques ou valeurs "quelconques" repérées par des lettres, sur les axes ou dans les contraintes imposées ; valeurs quantifiées (variables) ou non ;

➔ les conditions globales ou locales

*d) La possibilité ou non de fonctionnement autonome du graphique/formel (nécessité de contrôle numérique / algébrique ou non).*

➔ La variable algébrique est commandée par les éléments présents dans la consigne

➔ La variable numérique est commandée par la présence ou l'absence d'un quadrillage sur les graphiques

*e) La présence ou l'absence de transformations*

➔ connaissant une transformation géométrique, transformer une RGC déjà construite

➔ connaissant une RGC déduite d'une autre, identifier la transformation effectuée

➔ possibilité d'associer des équations

## 4. Les obstacles prévus

*a) Fonctions déjà connues*

Les fonctions linéaires et affines sont prégnantes au début de l'apprentissage de la notion de fonction. On récupère donc des connaissances, mais aussi des " théorèmes-élèves " comme " le produit de deux fonctions affines est ne fonction affine ".

*b) Contrat classique associé au graphique*

➔ le graphique est vu dans ce contrat classique comme l'aboutissement d'une suite d'opérations algorithmiques et non comme un outil de preuve ou de construction ;

➔ le graphique peut être vu également comme une " photographie " de la fonction ou comme un idéogramme, ce qui peut amener à accorder à la fonction des propriétés qui sont en fait celles du dessin ;

➔ le traitement dans le contrat classique est essentiellement ponctuel. Or le fonctionnement ponctuel, non seulement n'induit pas le fonctionnement global mais plus encore, il peut se constituer en obstacle au fonctionnement global.

*c) Expertise graphique*

➔ le registre graphique est porteur, comme tout autre, d'un certain nombre de spécificités de fonctionnement qui doivent être enseignées / apprises et qui, dans le contrat classique, ne font pas partie des connaissances publiques de la classe.

*d) Etablissement du nouveau contrat et connaissances des élèves*

➔ le contrat classique : dans ce contrat, le produit de deux fonctions affines étant donné, le professeur fera effectuer le produit algébrique, constater que l'on obtient une fonction du second degré, et trouver éventuellement la correspondance entre les paramètres de la parabole associée et les paramètres de départ des fonctions affines (milieu allié)

➔ Théorème- élève : le produit de deux " segments " est un " segment "

➔ le registre algébrique permet de désigner une fonction sans ambiguité ; le fonctionnement consiste donc à identifier une fonction, puis à décliner, sur cette fonction, un certain nombre de propriétés

➔ dans le milieu graphique, on procède plutôt par accumulation d'informations sur la fonction, mais les informations recueillies restent en tout état de cause significatives d'une classe de fonctions, et non d'une fonction unique (à moins bien entendu que l'on ne dispose d'une information supplémentaire de type algébrique).

→ rupture avec le contrat habituel ; rupture aussi au niveau des moyens de validation disponibles pour les élèves, et au niveau des questions qu'ils sont amenés à prendre en charge

### 5. Effets de la situation « graphiques et chemins »

*a) Changement de contrat*

La preuve par la RGC est à la charge des élèves et non plus du ressort du seul professeur. Le graphique fonctionne comme élément interactif non algorithmisé (Lacasta). il y a un RAPPORT EFFECTIF avec le graphique.

*b) Modification des objets problématiques*

Le graphique n'est plus le but rituel d'un travail qui se passe dans un autre registre. Il est devenu outil de preuve dans un questionnement où les objets problématiques sont des concepts : fonctions et propriétés des fonctions.

*c) Création d'un milieu fonctionnel*

Cette situation contribue à créer un milieu fonctionnel pour poser des questions d'analyse, un " herbier " de fonctions plus riche que les fonctions de référence algébriques.

## V. ETUDE DANS L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Etude de transcriptions de cours et de copies d'élèves.

### 1. Les transcriptions

Deux cours de maths sup. PCSI (professeurs A et B) portant sur les propriétés de R,, les limites ...

*a) Du côté du professeur*

- expression du savoir, avec identification de ce savoir et des formes sous lesquelles il intervient
- expression de la façon d'utiliser le savoir, ou de commentaires sur le savoir

- augmentation / diminution de l'incertitude de la situation (gestes de clôture ou d'ouverture), par exemple questions sur le savoir pour créer de l'incertitude
- type d'argumentation : formulation, explicitation, validation (en restant dans le même registre ou en changeant de registre)

*b) Du coté des élèves*

réponses, questions, du savoir, calculs (par ex. au tableau), indications de procédures ou opinions

### 2. Les connaissances publiques

1. un premier type correspond à des connaissances relatives à des procédures, à l'instanciation des théorèmes, et aux conséquences sur les objets mathématiques envisagés
2. un autre type de connaissances correspond à des synthèses (ou bilans de connaissances) locales
3. remarques sur l'heuristique

➔ Deux types de connaissances émergent de façon dominante :

- **les connaissances relatives à la validité des énoncés et à leur champ d'application**
- **les connaissances relatives aux énoncés eux-mêmes**

### 3. Articulation secondaire / supérieur

Parmi les connaissances nécessaires pour aborder l'analyse dans l'enseignement supérieur, certaines peuvent être travaillées dans l'enseignement secondaire : la situation " Graphiques et chemins " donne des possibilités pour ce travail, sans aborder directement le formalisme, et en s'appuyant sur des connaissances des élèves.

## VI. RESULTATS

La situation " Graphiques et chemins " et la situation du flocon de von Koch (introduction de la notion de limite) ont été expérimentées dans une classe de Première Scientifique.

### 1. Profil des élèves

L'évaluation des connaissances des élèves s'est faite, d'une part, par le relevé des connaissances travaillées dans la situation ; d'autre part, un questionnaire a été élaboré et donné à quatre classes de Première Scientifique, dont la classe expérimentale (Bloch 2000, chapitre 7).

*a) Connaissances travaillées dans les situations*

- Connaissances sur les fonctions comme objets, par l'intermédiaire des graphiques + fonctions " quelconques "
- Connaissances sur les fonctions répondant à des spécifications (contraintes, énoncé de propriétés)
- Connaissances sur les énoncés et leur :
    - — champ d'application
    - — domaine de validité
- Connaissances relatives à l'utilisation de symboles formels dans les validations et démonstrations

*b) Questionnaire*

Un questionnaire a permis d'établir :

- que les élèves de la classe expérimentale ont des connaissances plus dispersées que ceux des classes témoins, mais ne sont pas pénalisés
- que ces élèves sont moins dépendants des exercices classiques de la classe de Première Scientifique, et généralisent plus facilement
- que, dans les classes témoins, les bons élèves sont capables des mêmes raisonnements sur les fonctions que les élèves de la classe expérimentale

dans la classe expérimentale, la différence élèves moyens / bons est nettement moins marquée

## 2. Lien secondaire / supérieur

Les connaissances associées aux savoirs de l'analyse sont actuellement manquantes dans l'enseignement secondaire , donc les professeurs de niveau post-bac n'ont actuellement d'autre ressource que d'introduire simultanément :

- les objets de la théorie
- les modes de raisonnement
- les preuves et le formalisme
- les questions sur la validité des énoncés,

d'où un échec massif des étudiants.

L'expérimentation menée prouve qu'il existe des situations permettant de faire travailler, dans le secondaire, les connaissances nécessaires à la transition avec le supérieur.

### 3. Milieu et adidacticité

- Les situations expérimentées sont bâties à partir d'un milieu antagoniste, c'est-à-dire pouvant fournir des rétroactions au travail de l'élève
- Les éléments nécessaires à la validation étant en rupture avec les moyens de preuve antérieurement connus des élèves, il est néanmoins nécessaire de prévoir des apports de connaissances et savoirs du professeur
- Il est alors essentiel d'étudier les INTERACTIONS DE CONNAISSANCES professeur / élève afin d'analyser la situation (y compris dans l'analyse a priori) tout en sachant que les élèves peuvent entraîner le professeur plus loin que ce qu'il avait prévu (cf. Bloch 1999).

## BIBLIOGRAPHIE


AHA (Groupe Approche Heuristique de l'Analyse) (1996) Une approche heuristique de l'analyse. *in Repères IREM, n°25, Topiques éditions*, Metz

ALLIOT J.F, LIEGAULT S. (1998) Etude de l'enseignement des fonctions au lycée : utilisation par les élèves de registres de représentation. *Mémoire professionnel, sous la direction de Marc Rogalski*, IUFM Nord - Pas de Calais.

ALSON P. (1987) Metodos de graficacion. *Université de Caracas*, Venezuela.

ALSON P. (1991) A qualitative approach to sketch the graph of a function. in *School science and Mathematics*

ARTIGUE M (1992) Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices. *Mathematical Association of America, Notes Series, n° 25.*

ARTIGUE M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM*, n°11. *Topiques éditions*, Metz.

ARTIGUE M. (1995) Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères IREM, n°19.* Editions Topiques, Metz.

ARTIGUE M. (1996) L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques. *Colloque, Université de La Laguna, Tenerife,* Espagne.

ARTIGUE M. (1998) L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18 / 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

BERTHELOT C., BERTHELOT R. (1983) Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe de Première A. *DEA, université de Bordeaux I.*

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève : un exemple dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.19/ 2, *La Pensée Sauvage,* Grenoble.

BLOCH I. (2000) L'enseignement de l'analmyse à la charnière lycée / université : connaissances, savoirs, et conditions relatives à la validation. *Thèse*, Université Bordeaux 1.

CHAUVAT G. (1999) Courbes et fonctions au collège. *Petit x, n° 51*, IREM de Grenoble.

CORNU B. (1992) Limits, in *Advanced Mathematical Thinking, D.Tall, éd., Kluwer*, Dordrecht.

COSTE-ROY M.F. (1988) Transition secondaire / post-secondaire : en France, la rénovation des premiers cycles scientifiques. *Rapport à ICME 6, Budapest 1988. Publié dans " L'enseignement des mathématiques au niveau universitaire ",* commission INTER-IREM " Université ".

DELEDICQ A. (1996) Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ? *in Repères IREM, n°24, Topiques éditions*, Metz.

DIEUDONNE J. (1980) Calcul infinitésimal. *Hermann, éd.1997.* Paris.

DIGNEAU J.M (1989) Une étude des connaissances sur les nombres à l'entrée de la Seconde. *IREM de Bordeaux, Université Bordeaux I.*

DI MARTINO H. (1992) Analyse du contrôle épistémologique d'une situation didactique : la situation du pétrolier. *DEA, Université Joseph Fourier*, Grenoble.

DI MARTINO H., LEGRAND M., PINTARD D. (1995) Modélisation et situations fondamentales. *Actes de la VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

DUVAL R. (1994) Les représentations graphiques : fonctionnement et conditions de leur apprentissage. *Actes du colloque CIEAEM, éd. Antibi, université Paul Sabatier*, Toulouse.

FUNRIGHETTI F., SOMAGLIA A. (1994) Functions in algebraic and graphical environments. *Actes de la 46ème rencontre CIEAEM, éd. A. Antibi,* Toulouse.

HAUCHART C. , SCHNEIDER M. (1996) Une approche heuristique de l'analyse. *in Repères IREM, n° 25, Topiques éditions*, Metz.

HAUCHART C. , KRYSINSKA M. (1993) Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente à une courbe. *in Actes de la première université d'été européenne " Histoire et épistémologie des mathématiques ", éd. IREM*, Montpellier.

HAUCHART C., ROUCHE N. (1985) Suites et séries géométriques. *Bulletin APMEP n° 348*, APMEP éditeur, Paris.

IREM de Poitiers (199 ?) Limites et infini au lycée.

IZORCHE M.L (1977) Les réels en classe de Seconde. *Mémoire de DEA, Université Bordeaux I.*

LEGRAND M. (1991) Groupe des situations fondamentales et métaphore fondamentale. Réflexions autour de la recherche d'une situation fondamentale au sujet du concept de limite : la situation du pétrolier. *Séminaire Dida Tech n° 131, Université Joseph Fourier*, Grenoble.

LEGRAND M. (1996) La problématique des situations fondamentales. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16 / 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

LEGRAND M. (1997) La problématique des situations fondamentales. *Repères IREM, n°27,Topiques éditions* , Metz.

LONGO G. (1999) L'infini mathématique et les preuves. *CNRS et Département de mathématiques et informatique, Ecole Normale Supérieure*, Paris. Disponible sur le site : http ://www.dmi.ens.fr/users/longo

MASCHIETTO M. (1998) Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse mathématique. *Mémoire de DEA*, Université Paris VII.

PECAL M. , SACKUR C. (1996) (Groupe IREM " Liaison lycée — DEUG ") Quelle rupture et quelle continuité dans l'enseignement des mathématiques au lycée et à l'université. *Bulletin APMEP n° 410, Journées nationales Albi 1996.* APMEP éditeur, Paris.

PERRIN M.J (1999) La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ? *in Repères IREM, n°34, Topiques éditions*, Metz.

ROBERT A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3.3.

ROGALSKI J. (1984) Représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonctions. *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifique, Sixièmes journées internationales sur l'éducation scientifique, Giordan et Martinand éd.*, Chamonix.

ROGALSKI M. (1990) Graphiques et raisonnements : visualiser des fonctions. *in "Audi-math" n°2, dossier de l'enseignant de mathématiques, Centre National de Documentation Pédagogique, Ministère de l'Education Nationale*, Paris.

ROGALSKI M. (1994) Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.14-1 / 2.

RUIZ HIGUERA L. (1993) Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la nocion de funcion : analisis epistemologico y didactico. *Thèse, Université de Grenade*, Espagne.

SCHNEIDER M. (1991) Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *in Repères IREM, n°5, Topiques éditions*, Metz.

SCHNEIDER M. (1992) A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *in Educationnal Studies in Mathematics, n° 23, Kluwer Academic Publishers*, Pays - Bas.

SIERPINSKA A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 6.1.

SIERPINSKA A. (1992) On understanding the notion of function. *in MAA Notes n° 25 (The concept of function : aspects of epistemology and pedagogy),* p. 25-58. Mathematical Association of America.

SCHWARZ B. , DREYFUS T. (1995) New actions upon old objects : a new ontological perspective on functions. *Educationnal studies in Mathematics, n° 29, p. 259 - 291. Kluwers Academic Publishers*, Nederlands.

TALL D. (1994) A versatile theory of visualisation and symbolisation in Mathematics. *Conférence plénière, 46ème rencontre de la CIEAEM*, Toulouse.

TALL D. (1996) Functions and calculus. *in Bishop et alii, (eds) International Handbook of Mathematics Education, Kluwer* ; Dordrecht.

THIENARD J.C. (1991) Pour une approche de l'enseignement de l'analyse par le calcul infinitésimal. *IREM de Poitiers*.