

ANALYSE EN TERMES DE SITUATION DES USAGES DU GRAPHIQUE CARTESIEN DE FONCTIONS¹

Eduardo Lacasta Zabalza²
Universidad Pública de Navarra

I. INTRODUCTION : TRAITEMENT COGNITIF DES DIFFERENTS MODES DE PRESENTATION DE LA FONCTION DE VARIABLE

Les travaux de recherche dans une perspective cognitive, ont traité l'effet sur l'apprentissage des différents modes de présentation de la fonction, sous l'hypothèse de base (imposée par décision méthodologique) que les phénomènes relatifs à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques peuvent être expliqués à partir des caractéristiques individuelles des sujets (psychologiques, cognitives, linguistiques...).

David Tall et autres (1991) ont analysé d'une part les rapports entre les différents modes de représentation et, d'autre part, l'importance de la visualisation dans l'enseignement de l'analyse. Pour Tall, la visualisation est un processus caractéristique de la "pensée mathématique avancée" qui permet d'avoir une représentation mentale. Le succès en mathématiques exige avoir des représentations riches des concepts et la construction d'une représentation mentale est basée sur des systèmes de représentation, c'est-à-dire, sur des "artefacts" concrets et externes ; dans le cas des fonctions, un de ces "artefacts" est la graphique cartésienne.

Des travaux de recherche en didactique de l'analyse (dans des approches théoriques différentes) montrent que les passages entre les différentes représentations faciliteraient certaines activités cognitives très utiles pour l'apprentissage.

¹ Ce travail est basé sur une contribution présentée au Colloque international "Autour de la théorie des situations didactiques" (DAEST, U. Bordeaux 2, 26-28 juin 2000).

² Departamento de Matemática e Informática. Universidad Pública de Navarra. Campus Arrosadia. 31006 Pamplona-Iruña. Espagne. elacasta@unavarra.es.

Les problématiques systémiques sont représentées par un certain nombre de travaux en didactique de l'analyse menés en France, qui ont contribué à dépasser la naïveté présente dans les premiers travaux du programme cognitif (notamment les produits de l'approche conceptualiste primitive), visant les possibilités d'action sur le système éducatif. Nous nous rapportons à l'article de Michèle Artigue (1998).

Mais la possible "incommensurabilité" des programmes de recherche cognitif et épistémologique étudiée par Josep Gascón (1999) heurte l'articulation des problématiques respectives. Autrement dit, il n'est pas évident que l'on puisse utiliser les résultats de recherche d'un programme dans l'autre, sans un développement des théories respectives qui permette de savoir si elles peuvent se comparer et si on peut les utiliser dans un champ commun.

La question de comment tirer des conclusions et utiliser les résultats d'un programme de recherche dans l'autre dépasse pour l'instant les objectifs de notre travail.

Néanmoins, nous pouvons affirmer que l'utilisation que l'on en fait de certains résultats et de certains outils de recherche peut donner des applications naïves, sous forme d'innovation des méthodes d'enseignement, qui méprisent l'importance d'une analyse rigoureuse de ses effets. Par exemple, des nombreuses situations et exercices proposés aux élèves de différents niveaux du secondaire, rassemblées dans les publications du Shell Centre et présentes dans les "Standards curriculaires" du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991), illustrent les "traductions" de Janvier (1983) ; l'influence de ces travaux sur la dernière réforme du système éducatif espagnol et l'innovation qui l'accompagne, est très forte et il semble que, dans les manuels et les livres pour le professeur issus de cette réforme, la richesse de la représentation repose préférentiellement sur les graphiques cartésiens de fonctions, qui seraient le "support intuitif" privilégié de l'apprentissage des fonctions.

II. QUELQUES PROBLEMES DIDACTIQUES POSES PAR L'ETUDE DU ROLE DU GRAPHIQUE CARTESIEN DE FONCTIONS (GCF) DANS L'ENSEIGNEMENT

Notre intention première est de prendre en compte les éléments fournis par la théorie didactique et plus nettement des éléments de la théorie des situations didactiques, pour avancer dans la description et le contrôle des différents types de milieux, qui ont pour origine

le GCF. L'intention finale est de mettre au point des dispositifs d'ingénierie didactique pour l'amélioration de l'enseignement des fonctions dans le secondaire.

Le point de départ de la modélisation d'une situation d'enseignement en théorie des situations didactiques est la production d'un jeu spécifique du savoir visé –la fonction– entre différents sous-systèmes. Existe-t-il un jeu spécifique des connaissances de l'analyse et en particulier de la fonction ?

1. Situation fondamentale, situation adidactique et situation à dimension adidactique

Le problème de trouver des situations fondamentales des notions propres de l'analyse mathématique (fonction, limite, continuité...) reste ouvert. Néanmoins, en absence de situation fondamentale, nous pouvons *"considérer des situations qui, tout en portant une partie du savoir, par exemple ce qui est nécessaire pour la dévolution des problèmes d'analyse, ne comportent pas un milieu suffisamment résistant pour qu'il soit possible de compter seulement sur les rétroactions"* (Bloch, 1999). Isabelle Bloch prévoit *"la possibilité de faire cependant vivre la situation en y aménageant un milieu permettant l'action de l'élève, milieu offrant un support assez pertinent, du point de vue du sens, à la formulation et à la validation ; autrement dit, un milieu offrant une certaine marge pour l'activité mathématique de l'élève, ainsi que pour l'exploitation de cette activité lors du processus d'institutionnalisation. On peut traduire ceci par : la situation comporte une dimension adidactique pour l'élève."*

Ce travail part de l'hypothèse qu'il est possible de trouver des situations comportant une dimension adidactique pour l'élève dans lesquelles celui-ci agit sur le GCF. L'approche systémique de la théorie des situations met l'accent sur l'identification des sous-systèmes en présence (l'enseigné, le système éducatif, le milieu) en tant qu'acteurs. Ce sont donc les rapports du professeur et de l'élève en tant qu'acteurs qui vont guider notre analyse sur le rôle du GCF.

2. L'illusion de l'évidence

Quand le professeur prépare son cours il organise un milieu qui est appelé *milieu matériel*. Dilma Fregona a étudié (Fregona 1995) les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie. Son étude théorique montre comment (même s'il ne s'agit pas d'objets graphiques) se produit *l'illusion de l'évidence* : le professeur *"voit"* dans l'objet ce qu'il veut

enseigner, donc l'élève placé face au "même monde", "voit" la même chose. Nos résultats appuient ce phénomène, en particulier quand le milieu matériel est le GCF. Autrement dit, il est supposé que le GCF a des vertus qui le font devenir un champ commun où le professeur et l'élève parlent un même langage.

Mais à partir de l'élève agissant sur le GCF en tant que milieu matériel, les différents rôles du maître et de l'élève donnent des milieux divers, dont la description générale la plus connue est celle du schéma des sous-systèmes emboîtés décrit par Brousseau (1998, p. 326). Nous espérons montrer par le biais de la description et caractérisation de ces milieux, l'aspect illusoire de l'evidence graphique.

3. Rapports fictifs et rapports effectifs au milieu matériel GCF

Dans une première approche nous prendrons la caractérisation due à Dilma Fregona des interactions effectives et fictives du sujet avec le milieu. Le sujet peut être le professeur ou l'élève.

L'interaction effective est celle qui ne dépend pas entièrement de l'acteur. Il reçoit de l'extérieur des sanctions non prévues de sa part. Le contrôle de ses actions est assumé, en partie, par un système extérieur.

L'interaction fictive a lieu quand l'enseignant cherche à organiser un milieu allié où l'acteur agit sous des contraintes qui essayent de lui faire éviter les confrontations.

Les rapports ostensifs, en particulier, sont des interactions fictives. En général, une expérience mentale ne permet que des rapports fictifs. Il ne s'agit pas ici de les rejeter dans l'absolu : ils peuvent être producteurs d'intuitions tout à fait convenables.

4. Opacité et transparence ; objets ostensifs et non ostensifs ; ostension

Nous pouvons considérer le GCF soit comme *objet* matériel perceptible dans le domaine graphique, soit comme *représentant* d'une fonction. Dans ce cas-ci l'objet matériel est en plus un signe, qui représente autre chose –la fonction– que lui même.

Quand on utilise le GCF matériel, le rapport à la fonction est *opaque* si c'est l'objet "qui l'emporte, *transparent* si c'est le signe qui est considéré en priorité" (Chauvat G., 1999).

Dans la théorie anthropologique (Bosch M. et Chevallard Y., 1999) le GCF est un objet *ostensif*, au même titre que les autres graphismes, les écritures, symboles, mots, discours et gestes mobilisés dans l'activité mathématique, qui ont un caractère matériel et perceptible. Les ostensifs ont d'une part une valeur instrumentale –dans le fonctionnement opaque– et une valeur sémiotique, quand ils fonctionnent de manière transparente. La fonction serait dans cette approche un *non ostensif*, c'est-à-dire, elle appartient au monde des notions, des concepts, des idées, etc. Cette conceptualisation a permis de mettre en évidence l'existence de contraintes touchant la dimension ostensive, comme la péjoration de l'écriture ou la transparence supposée du discours verbal.

Pour Bosch et Chevallard (op. cit.), il y a donc une pluralité de registres ostensifs –graphiques ou non– et dans la réalisation concrète de l'activité mathématique, les objets ostensifs activés se distribuent entre ces divers registres, “sans que l'on puisse voir fonctionner généralement un et un seul d'entre eux de manière autonome par rapport aux autres”. Cette hypothèse est rapprochée par les auteurs de celle, plus forte, de Raymond Duval (1996), selon laquelle, les mathématiques “constituent le mode de connaissances dans lequel [la] mobilisation [d'une pluralité de registres de représentation sémiotiques] joue un rôle fondamental et apparaît de la façon la plus visible”.

L'importance de la pluralité de registres ostensifs et de leur articulation est présente dans les travaux que venons de citer, dans le “jeux de cadres” de Régine Douady (1987) et dans nombre de travaux dans une approche cognitive.

Nous avons prouvé (Lacasta 1995) d'une part que *la conception mathématique conditionne pour l'élève la maîtrise des changements de représentations, plus qu'elle n'est conditionnée par elle, même si divers usages des graphiques préparent la compréhension des concepts mathématiques*, mais, en même temps, nous avons prouvé aussi que *les professeurs préfèrent dans l'enseignement des fonctions, les conditions (graphiques ou non) qui permettent le mieux un contrat didactique d'ostension : la présentation graphique des fonctions semble préférée, dans la mesure où elle favorise un contrat ostensif. Ainsi la place attribuée par les professeurs au graphique cartésien est basée sur une 'fausse transparence' du graphique, mais le graphique sert justement à faire la transposition didactique de la notion de fonction*. Et nous ajoutons que les ostensifs appartenant à d'autres registres contribuent aussi à cette transposition.

5. Le travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse

Dans la mesure où une situation fondamentale de la fonction n'est pas encore produite, il est nécessaire d'analyser l'activité du professeur, pour comprendre quelle est la situation pour l'élève.

Un des buts du travail de Isabelle Bloch (1999) est la modélisation "du milieu de l'enseignement de l'analyse, les activités respectives de l'élève et du professeur et les connaissances présentes dans cette double activité". À notre avis, le schéma des milieux emboîtés de Brousseau (1998), le schéma de Claire Margolinas (1994) – développé à partir des milieux emboîtés, selon une analyse ascendante et descendante – et les éclaircissements apportés par Marie Jeanne Perrin-Glorian (1999) sont des projections de la structuration du milieu, qui ont besoin d'ultérieures analyses pour la meilleure connaissance du fonctionnement des divers milieux.

III. NECESSITE DE DISTINGUER LES TYPES DE MILIEU DEFINIS A PARTIR DU MILIEU MATERIEL

L'approche systémique de la théorie des situations permet de dégager des sous-systèmes où l'étude des problèmes posés peut se simplifier, par l'isolement de ces problèmes dans le sous-système élu.

Le professeur prépare son cours d'analyse avec le milieu matériel GCF et, suivant la structuration du milieu en des milieux emboîtés (Brousseau, 1998, p. 326), à un moment donné le sujet devient un sujet symbolique : *l'acteur objectif*. Le couple milieu-acteur constitue alors la situation objective qui est proposée effectivement à l'élève, avec laquelle il doit interagir. Elle constitue donc –pour l'élève– le milieu adidactique de départ organisé par l'enseignant autour d'une connaissance visée.

Nous pouvons simplifier l'analyse pour prendre en compte d'une manière plus générale que l'enseignant doit prendre des décisions sur le *milieu matériel* et sur les rapports d'un *acteur objectif*.

L'intervention de l'enseignant modifie les conditions de fonctionnement, les usages ou les formes d'emploi du GCF et c'est au niveau de *milieu objectif* que les fonctionnements du

GCF donnent des milieux divers, que le professeur devrait connaître et maîtriser, puisqu'il détermine implicitement des contraintes qui provoquent des interactions différentes. Le contrat didactique est le moyen qu'a le professeur pour établir les règles et les stratégies de base et pour les adapter aux changements de jeux de l'élève dans le système élève-milieu. Le professeur doit donc connaître quels sont les différents milieux en jeu quand les situations comportent l'utilisation du GCF.

Les occasions qu'aura l'élève de s'adapter dépendent des milieux organisés sur le GCF et l'élève doit connaître quelles sont les conditions de fonctionnement du GCF. Par contre, s'il n'y a pas un contrôle du milieu de la part du professeur, si l'élève ne connaît pas quelles sont les conditions de fonctionnement du GCF dans les différents milieux et, par conséquent, si le contrat didactique ne distingue pas sur quel milieu doit agir l'élève, c'est justement la tentative d'adaptation du milieu à soi-même qui amène très souvent l'élève à utiliser une analyse des fonctions qui ne dépasse pas le "point-par-point".

L'ingénierie didactique devrait résoudre le problème du contrôle du milieu de la part du professeur. Mais dans notre cas, ce contrôle dépend des connaissances et des pratiques que les élèves développent à partir de la notion de fonction. Le choix de certaines connaissances et le rejet d'autres relève de la transposition didactique. À partir d'une étude expérimentale qui fait apparaître des maladroises à la fois chez les enseignants et chez les étudiants en mathématiques de niveau universitaire, Antibi et Brousseau (2000), posent en termes de *dé-transposition* les problèmes sur lesquels deux conceptions proposent des connaissances contradictoires. L'étude de la *dé-transposition* serait "la partie de la didactique des mathématiques qui s'intéresse aux modifications des conceptions d'objets mathématiques précédemment enseignés, sous l'effet des dispositifs didactiques ultérieurs". L'ingénierie didactique pourrait essayer de résoudre quelques-uns des problèmes posés dans les milieux ayant pour base le GCF, en proposant des techniques de *dé-transposition*, qui seraient des méthodes de reprise, de modification et d'intégration des conceptions anciennes, reconnues comme légitimes, dans les nouvelles.

Essayons pour l'instant de nous borner à la caractérisation des milieux objectifs, en tant que des milieux comportant une dimension adidactique pour l'élève, où le professeur est l'organisateur de la situation, concernant le professeur lui-même, l'environnement immédiat de l'élève et le milieu culturel.

IV. TYPES DE MILIEU

Gérard Chauvat (1999) a utilisé trois des cinq fonctionnements du GCF définis par nous (Lacasta 1995) : l'abaque ou *nomogramme*, l'*idéogramme* et le *mode opératoire*, que nous appellerons dorénavant *opérateur*. Dans ce qui suit, nous avons pris quelques précisions apportées par Chauvat.

Signalons que les manifestations des types de milieu que nous allons définir ne sont pas nécessairement disjointes. Par exemple, le milieu *opérateur* et le milieu *graphique structuré*, que nous définirons plus loin, font souvent appel au fonctionnement *nomographique*.

1. Nomogramme

Le fonctionnement du graphique cartésien de fonctions comme nomogramme apparaît quand les élèves font usage du graphique comme abaque ; c'est-à-dire, comme moyen d'obtenir graphiquement des "y" pour des "x" donnés, et vice versa. L'interaction est alors *effective* ; c'est-à-dire, l'élève reçoit du graphique, par le biais de la lecture sur les échelles des axes, des valeurs non prévus de sa part.

Le GCF apporte deux caractéristiques aux abaques : d'une part on a une possibilité de *contrôle* implicite sur ce qu'on lit, puisque c'est un abaque avec un environnement (des valeurs, des repères...), et d'autre part il y a une perte de précision. C'est à ce niveau qu'apparaît la différence entre les certains abaques et le nomogramme issu de l'abaque cartésien.

Mais l'élève qui doit résoudre un problème dans le milieu matériel GCF, n'a pas assez d'information pour savoir si le dessin est fait pour fonctionner exclusivement comme abaque ou s'il est susceptible d'avoir d'autres fonctionnements, qui permettent de dépasser l'analyse "point-par-point".

Caractéristiques :

le nomogramme est un moyen effectif standardisé, algorithmisé, d'obtenir des résultats numériques par l'utilisation des propriétés locales du GCF,

en principe, le sujet doit engager un *rapport effectif* avec le dessin précis qu'il a sous les yeux, mais ce rapport peut devenir *fictif* lors de l'inadaptation à certaines tâches, comme la représentation d'une fonction non affine, donné par sa formule, et

le sujet ne doit pas se soucier de ce que le graphique représente. Par conséquent, le rapport au GCF est *opaque*.

Support graphique :

Courbe non extrapolable tracée dans le plan cartésien repéré, où les échelles sont dessinées sur les axes ; c'est-à-dire, que l'élève peut interagir seulement sur le morceau dessiné de la courbe qu'il a sous les yeux.

Utilité :

- i) le graphique devient un instrument simple et efficace pour déduire des valeurs représentées sur les échelles des axes et
- ii) il y a des éléments (les échelles sur les axes, leurs valeurs extrêmes, la courbe dessinée) qui permettent à l'élève de repérer des valeurs qui ne conviennent pas, des points en dehors de la courbe, etc. ; c'est-à-dire, ces éléments facilitent un contrôle implicite de son usage.

Limitations :

- i) le milieu nomogramme ne sert pas à faire des extrapolations,
- ii) le nomogramme permet de trouver des valeurs de "y" pour chaque valeur de "x" (ou vice versa, dans le cas de l'abaque inverse), mais il ne permet pas de trouver l'image d'un intervalle ; autrement dit, l'abaque ne permet, par définition, qu'une lecture "point-par-point". Dans ce cas-ci, les interactions du sujet avec le milieu deviennent *fictives*,
- iii) il y a une perte de précision par rapport aux tableaux de correspondances ou aux calculettes.

Le nomogramme accompagne d'autres fonctionnements du graphique, mais il constitue les premières règles de l'action de l'élève sur le milieu matériel GCF.

2. Illustrateur topologique

Il y a des propriétés topologiques employées implicitement par le professeur ou par les auteurs de manuels, pour illustrer les notions propres de l'analyse, tout en économisant des précisions théoriques.

L'illustrateur topologique –c'est-à-dire le dessin fait "ad hoc" à caractéristiques fixées à l'avance– est supposé porteur, en particulier, d'une représentation de la continuité, de la croissance, de l'infini, etc. que l'élève doit "voir".

Néanmoins, signalons que, par contre, les renseignements (les signes utilisés pour représenter la concavité, la croissance, etc.) organisés dans ce que l'on appelle un tableau de variation, ont aussi un caractère d'illustration topologique, mais ils peuvent avoir une fonctionnalité de communication et l'élève peut les utiliser systématiquement, il peut les faire fonctionner selon un procédé, pour dessiner la courbe d'une fonction donnée par sa formule ou par d'autres conditions.

Caractéristiques :

- i) le sujet engage le plus souvent un *rapport fictif* avec le dessin ; le professeur essaie d'éviter les confrontations aux dessins représentant la croissance, une discontinuité quelconque, etc.,
- ii) le sujet peut arriver à mettre en œuvre une action *effective* à partir de l'organisation des renseignements fournis par l'illustration topologique et
- iii) le sujet doit "voir" ce que le graphique représente ; par conséquent, le rapport au GCF est *transparent*.

Support graphique :

Courbe repérée, pas forcément arithmétisée, représentant une fonction quelconque ; ce qui est dessiné peut souvent n'avoir aucun rapport avec une équation particulière.

Utilité :

L'illustrateur topologique donne le même genre de renseignements qu'un tableau de variation (signe, croissance, maxima, concavité...). Le graphique devient un support de caractéristiques de fonctions génériques.

Limitations :

Il n'est pas nécessaire de préciser des valeurs numériques sur les axes, mais les variables doivent être définies sur un ensemble ordonné ; par exemple, on ne peut pas utiliser la fonction illustrateur topologique sur un histogramme.

Exemples : les graphiques que les manuels et les professeurs utilisent pour illustrer les notions de limite, discontinuité, bornes...

3. Idéogramme

En général l'idéogramme est le résultat d'une transformation de la courbe et il conserve essentiellement certaines propriétés topologiques. Le choix des paramètres, des échelles etc. est tel que le graphique prend toujours le même aspect conventionnel, avec ses points singuliers.

Les professeurs qui ont employé en classe des calculatrices graphiques savent bien que lorsque les élèves travaillent directement la représentation de fonctions données par leur formule, très souvent la graphique obtenue est décevante : soit elle n'apparaît pas à l'écran, soit il apparaît fréquemment un seul trait qui ne présente aucune des caractéristiques de la courbe attendues par le professeur. C'est alors l'enseignant qui doit agir sur la commande "range", qui permet de contrôler les échelles et les "x" et "y" maximales représentables, pour réussir à avoir l'image convenable –l'idéogramme– de la courbe correspondant à un type de fonction.

D'une manière figurée, l'idéogramme serait le produit de l'utilisation convenable, mais non contrôlée par l'élève ni par le professeur, des commandes "range" et "zoom" d'une calculatrice graphique, sur un GCF quelconque.

Le changement du rapport entre les échelles des axes change l'idéogramme : une parabole à l'axe vertical n'est plus l'idéogramme de la fonction quadratique si elle est trop étroite ou trop large.

Caractéristiques :

- i) l'idéogramme est un signe graphique qui représente une idée (une expression algébrique, une fonction affine, quadratique, etc.),
- ii) le rapport au GCF est *transparent* ; le sujet doit convertir le dessin qu'il a sous les yeux en la famille de dessins qui représentent le même type de fonction et

- iii) le dessin peut n'avoir la moindre précision, pourvu qu'il ait la forme standard attendue.

Support graphique :

- i) courbe non repérée, contenant les points singuliers et tous les éléments caractéristiques d'un type de fonction, y comprises, par exemple, les branches infinies et
- ii) en plus de la courbe il se peut qu'il y ait un répertoire de symboles (par exemple, les asymptotes) qui permettent de reconnaître la fonction.

Utilité :

L'idéogramme peut représenter une famille de fonctions qui permet d'identifier une catégorie de fonctions.

Limitations :

- i) le changement du rapport entre les échelles des axes change l'idéogramme et
- ii) l'idéogramme est une fonction de communication stricte et unidirectionnelle ("la graphique d'une fonction quadratique est une parabole comme celle(s)-ci"), tandis que le nomogramme et l'illustrateur topologique peuvent envoyer à l'élève des informations –repérables au niveau des faits contingents– et ils peuvent permettre en somme la mise en œuvre d'une action effective.

Contrairement au milieu nomographique, qui confère au graphique un statut d'outil qui en légitime l'usage, le milieu idéogrammatique (tout comme l'illustrateur topologique) *péjore le recours au graphique en ne lui assignant qu'un rôle d'illustration* (Chauvat, 1999) et il privilège les rapports ostensifs : "la" courbe-ideogramme d'un type de fonction, qui est en fait un représentant des courbes de la fonction, devient dans le cours la classe d'équivalence des courbes représentatives de ce type de fonction.

4. Opérateur

Caractéristiques :

Dans ce milieu le GCF devient un élément interactif non algorithmisé de la situation et la réponse à un problème est toujours obtenue par un rapport effectif avec le graphique.

- i) l'opérateur est le fonctionnement du graphique comme moyen de contrôle de la communication et comme moyen de détermination d'un autre objet,

- ii) c'est une réponse non didactique, non subjective, qui ne dépend que partiellement de l'élève lui-même et dans laquelle il trouve une interaction et
- iii) le rapport au GCF est prioritairement *opaque* ; les interactions de l'élève avec ce milieu se produisent sur l'objet matériel lui-même.

Support graphique :

Courbe tracée dans le plan cartésien repéré.

Tâches qui sollicitent l'opérateur :

- i) trouver le plus grand intervalle en x pour lequel f est croissante ; trouver les valeurs de x pour lesquelles la pente de la tangente à la courbe est la plus grande, etc.,
- ii) trouver la fonction affine qui a telle représentation graphique donnée,
- iii) décomposer graphiquement une fonction en somme de fonctions *élémentaires*...

5. Graphique structuré

Dans un travail d'ingénierie didactique dû à Pedro Alson (1996), un certain nombre d'objets graphiques : *courbe, hauteur, chemin, allée, retour...* sont définis axiomatiquement dans un environnement purement graphique ; il s'ensuivent des conventions de codification et les transformations "horizontales" et "verticales" applicables aux courbes. C'est sont justement ces transformations de sous-ensembles du plan, induites par de fonctions, qui structurent le milieu graphique. Par le biais de cette structure, Alson développe une partie du calcul propre de l'enseignement secondaire, sans définition de limite, continuité ni dérivée.

Une structure mathématique est donc octroyée aux objets graphiques, en définissant des lois de composition des courbes (les transformations), permettant de construire des objets mathématiques complexes, dont la définition est basée sur les objets graphiques primitifs : la courbe devient un objet du savoir mathématique "fonction".

Cette structure est légitimée par un travail mathématique (Alson 1995), basé sur le modèle ensembliste des descripteurs (proposé par Alson) et la théorie de catégories, développée surtout par MacLane (1971) dans le domaine de l'algèbre. Alson définit un "functor" entre des catégories de fonctions et de graphiques, qui assure la correspondance opératoire de

certaines manipulations algébriques avec quelques manipulations dans la présentation graphique.

Contrairement à la méthode suivie dans la plupart des cours d'analyse, dans les “Métodos de graficación” (Alson, 1996) la tâche principale de l'élève est de faire des interprétations analytiques des objets graphiques.

Le travail primitif sur les “traductions” de Janvier et le travail sur les quatre milieux que nous venons de décrire, ne change pas les objets de savoir de l'analyse. Le discours du savoir se déroule dans tout les cas sur le langage mathématique usuel, avec des formules, des inégalités, valeur absolue, epsilon, etc.

Le milieu *graphique structuré* d'Alson est le seul milieu qui change les objets de savoir, qui deviennent des “chemins”, “bissectrice”, etc., au lieu des éléments propres de l'analyse développée à la manière traditionnelle.

Le livre “Métodos de graficación” est un manuel dirigé aux élèves de premier cours universitaire vénézuélien, qui ont des “déficiences énormes” dans leur préparation mathématique. Ce livre contient une méthode qui pourrait constituer une technique de *dé-transposition*, dans l'esprit du travail de Antibí et Brousseau (2000), puisqu'elle reprend, modifie et intègre des connaissances anciennes dans une organisation nouvelle, par le biais de nouveaux objets de savoir.

Caractéristiques :

Quand l'activité de l'élève porte sur de “chemins” partant de l'axe OX –quand il applique la transformation horizontale induite par une fonction–, le GCF est surtout utilisé de manière *effective* : l'élève doit agir sur le GCF, sans qu'il connaisse “a priori” quel genre de réponse il va avoir, pour qu'il en tire une conclusion.

En ce qui concerne l'opacité et la transparence, le rapport au GCF est variable.

L'élève doit dessiner des “chemins”, en interaction avec le GCF. Mais il n'est pas toujours nécessaire qu'il se soucie de ce que tous les éléments du graphique structuré représentent ; dans ce cas-ci le rapport au graphique est par conséquent *opaque*.

Par contre, quand l'élève construit le graphique de la composition ou de la somme de deux fonctions, il doit savoir ce qu'il représente –des formules spécifiques– et le rapport au GCF devient *transparent*.

Support graphique :

Il y a plusieurs éléments graphiques. La courbe tracée dans le plan cartésien est toujours présente ; il n'y a pas le plus souvent des échelles numériques, mais la courbe doit être repérée par rapport aux axes et, parfois, par rapport à la bissectrice. Dans certains cas il doit avoir nécessairement en plus la bissectrice ou des chemins déjà tracés.

Utilité :

L'étude des transformations horizontales et verticales des courbes met en jeu des propriétés topologiques du GCF : concavité, croissance, etc.

D'une manière générale, l'élève doit trouver la courbe d'une fonction comme le résultat d'une succession de transformations d'une courbe initiale.

La construction de courbes de la composition de fonctions.

V. CONSIDERATIONS FINALES ET QUESTIONS OUVERTES

Les graphiques jouent et joueront longtemps encore un rôle fondamental dans l'étude scolaire des fonctions. Ils seront jugés longtemps irremplaçables, bien que leur place soit appelée à changer sans doute, comme toutes les notions que la technologie vidéo-informatique (de logiciels comme DERIVE, MATHEMATICA, ORGE et, surtout, les calculatrices graphiques, bientôt à la portée des étudiants du secondaire) peut utiliser ou simuler.

Cependant,

- il paraît nécessaire de dénoncer *l'illusion de l'évidence graphique* et le recours naïf ou systématique au graphique : le graphique n'a pas de vertu didactique "per se",
- c'est l'existence *de différents milieux* ce qui fait changer les rapports au savoir (à la fonction et à l'analyse fonctionnelle) de l'élève et du professeur ; l'analyse en termes de situation du GCF donne au moins 5 milieux différents, selon l'usage qu'en font les professeurs et les élèves dans la situation,
- la qualité des milieux *opérateur* et *graphique structuré* comme instigateurs d'un fonctionnement "réel", culturel du savoir (la fonction), favorise au mieux la valeur des connaissances acquises,

- le milieu *nomogramme* doit s'articuler avec l'opérateur et le *graphique structuré* pour récupérer le rapport effectif au graphique,
- il est nécessaire un *travail d'ingénierie didactique* pour : a) intégrer de manière raisonnée le recours au graphique dans ses différents milieux, b) mettre au point les instruments nécessaires pour exercer un contrôle sur les milieux et c) renforcer la composante adidactique des situations de l'analyse par le biais des milieux offrant un support à la formulation et à la validation,
- en particulier, l'analyse du milieu *graphique structuré* mérite une recherche approfondie, qui sera sans doute enrichie dans la thèse en cours de Pedro Alson et
- l'étude du milieu de Guy Brousseau (Brousseau 1998) et le schéma proposé par Claire Margolinas (1994) constituent une base théorique riche, pas suffisamment exploitée jusqu'au présent dans la didactique de l'analyse.

BIBLIOGRAPHIE

ALSON P. (1995), *Sistemas de descriptores con aplicaciones a la definición de propiedades de funciones y a una ingeniería didáctica*. Universidad Central de Venezuela, Caracas.

ALSON P. (1996), *Métodos de graficación*, Ed. Erro, Caracas.

ANTIBI A. et BROUSSEAU G. (2000), La détransposition des connaissances scolaires, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 20, n° 1, La pensée Sauvage, Grenoble (pp. 7-40).

ARTIGUE M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, , *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18, n° 2, La pensée Sauvage, Grenoble (pp. 231-262).

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu - connaissances et savoirs, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, n° 2, La pensée Sauvage, Grenoble (pp. 135-194).

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble.

- CHAUVAT G. (1999), Courbes et fonctions au collège, *petit x*, Grenoble (pp.23-44).
- DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil / objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7.2, La pensée Sauvage, Grenoble (pp. 5-32).
- DUVAL R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16, n° 3, La pensée sauvage, Grenoble (pp. 349-382).
- FREGONA D. (1995), *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques*, Thèse, Université Bordeaux I.
- GASCÓN J. (1999), 'Didactique fondamentale' versus 'Advanced Mathematical Thinking': ¿dos programas de investigación inconmensurables?, *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM et IUFM, Académie de Caen.
- JANVIER C. (1983), Représentation et compréhension. un exemple : le concept de fonction, *Bulletin AMQ, Association Mathématique du Québec*.
- LACASTA E. (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*. Thèse. Université Bordeaux I.
- MACLANE S. (1971), Categories for the Working Mathematician, *Springer Verlag*.
- MARGOLINAS C. (1994), Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. *Séminaire Dida Tech*, n° 158, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- N.C.T.M. (1991), *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, S.A.E.M. Thales, Sevilla.
- PERRIN-GLORIAN M-J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, n° 3, La pensée sauvage, Grenoble (pp. 279-321).
- TALL D. (éd.) (1991), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.