ENTRER DANS LA CULTURE DES THEOREMES A 12-14 ANS: UN DEFI POUR LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Paolo Boero[2]
Dipartimento di Matematica, Università di Genova

I. INTRODUCTION

Approcher la démonstration entre 12 et 16 ans ("Collège", "Junior High School", "Scuola Media") constitue un défi important pour la didactique des mathématiques dans tous les pays. Parfois face aux difficultés rencontrées par les enseignants on reporte ce sujet en le traitant seulement dans les écoles qui préparent aux études universitaires scientifiques. Parfois les chercheurs eux-mêmes justifient ce choix par une minimisation de l'importance de la démonstration dans les mathématiques d'aujourd'hui (pour une discussion sur ces phénomènes, voir Hanna, 1996).

Cet exposé se situe dans une perspective tout à fait différente: la démonstration demeure un des éléments les plus importants des mathématiques et de la culture mathématique. Il faut la transmettre aux nouvelles générations, car elle constitue la clé de l'accès au savoir théorique dans le domaine des mathématiques. Exclure la démonstration de l'enseignement des mathématiques pour tous signifie donner une image fausse des mathématiques et soustraire aux gens une opportunité de faire l'expérience du coté théorique d'un savoir élaboré par l'humanité au cours de l'histoire.

Cela dit, il faut reconnaître que l'approche traditionnelle de la démonstration à l'école ne marche pas. Il faut alors s'interroger sur les raisons de la faillite, et élaborer un cadre théorique susceptible de suggérer et de soutenir des alternatives valables pour le travail en classe.

Comme l'on verra par la suite, mon exposé portera sur un but plus général que l'approche de la démonstration - le but de l'entrée dans la culture des théorèmes; les raisons de ce choix seront presentées au point 2.

"Entrer dans la culture des théorèmes" pour les élèves signifie développer des compétences spécifiques inhérentes à la production de conjectures et à la preuve de ces conjectures en prenant en compte des éléments de savoirs théoriques. On a besoin de passer par des analyses historico-épistémologiques et cognitives pour sélectionner les éléments spécifiques, essentiels, dans la production et la preuve des conjectures, et les théories

---

2 *boero@dima.unige.it*

auxquelles les élèves seront confrontés dans leur apprentissage. En particulier, le rôle crucial de l'exploration dynamique (cf. Boero et al, 1996; voir aussi Simon, 1996) de la situation problème dans la production et la preuve des conjectures doit être pris en compte; ceci peut aider à la sélection du "champ d'expérience" et des tâches dans lesquelles une telle dynamique est de ce qu'on appelle "naturelle" pour les élèves. On considère aussi qu'il y a un phénomène de continuité (possible) entre la production d'une conjecture et la construction de sa preuve et que ceci est un élément favorisant l'approche de la démonstration (voir Garuti et al, 1996; 1998). Ce phénomène doit être pris en compte pour sélectionner les situations - problèmes dans lesquelles cette continuité pourra avoir lieu de la meilleure façon. Les théorèmes appartiennent à la culture scientifique (Vygotsky, 1985, Ch. VI); une médiation appropriée de l'enseignant est donc requise pour tous ces aspects sur lesquels il y a une rupture significative avec la culture du quotidien: la forme des énoncés, la structure des démonstrations comme textes, la nature des raisonnements permis, etc.

L'exposé incorpore certains résultats obtenus en collaboration avec les équipes de Modena (Mariolina Bartolini Bussi), Pisa (Maria Alesssandra Mariotti), Turin (Ferdinando Arzarello) et tient compte des résultats de Nadia Douek (IUFM de Creteil) pour ce qui concerne les liens entre argumentation et démonstration (voir Douek, 1999a, 1999b).

II. CADRE THEORIQUE CONCERNANT LA RECHERCHE MENEE

Le cadre théorique est celui de la recherche pour l'innovation auquel maintenant se référent la plus grand partie des recherches italiennes en didactique des mathématiques:

- on part des problèmes et des problématiques qui se manifestent dans les classes (dans nos cas, la problématique de l'approche de la démonstration entre 12 et 14 ans);

- on s'appuie à des outils qui viennent de l'épistémologie, de l'histoire des mathématiques, des sciences cognitives pour traiter les problèmes considérés; dans beaucoup de cas, il faut transformer ces outils en les intégrant et adaptant à la spécificité disciplinaire et didactique des questions abordées. Nous avons dû considérer en particulier les éléments constitutifs des théorèmes au cours de l'histoire (analyse historico-epistémologique) et les processus de production (ou de médiation) de ces éléments (aspect cognitif);

- on cherche à élaborer des outils théoriques pour l'interprétation des difficultés des élèves et la prédiction de leurs comportements en vue de l'innovation didactique à réaliser (par exemple, l'outil de l'unité cognitive des théorèmes).

Dans ce cadre, un aspect important à remarquer est que dans beaucoup de cas l'innovation didactique (surtout dans ses premières réalisations en classe) fonctionne véritablement comme "ingénierie didactique" dans le sens d'Artigue (1988): en effet l'innovation didactique, conçue selon les hypothèses de travail élaborées par les chercheurs, est le contexte où ces hypothèses sont validées et d'où viennent les éléments nécessaires pour ré-élaborer les hypothèses initiales et pour formuler des nouvelles questions de recherche.

Un autre aspect important de notre cadre de recherche est le rôle joué par les enseignants-chercheurs: en raison du fait qu'il s'agit de "recherche pour l'innovation" et du fait de l'évolution dialectique du rapport entre hypothèses de travail et expérimentation en classe sur les temps longs du projet de recherche, les enseignants-chercheurs non seulement participent à la définition des problématiques sur lesquelles on travaille, mais ont un rôle crucial dans la gestion et l'analyse à-posteriori du travail expérimental dans les classes, en vue de l'évolution du cadre théorique et de la problématique de recherche.

Une question intéressante (en relation avec le débat sur la place du cognitif dans la recherche en didactique des mathématiques) est la suivante: peut-on se passer de l'aspect cognitif dans un travail didactique sur l'approche scolaire des théorèmes? Nous pensons que non, parce que l'analyse cognitive est nécessaire en particulier (mais non seulement) pour comprendre quels sont les processus mentaux à développer pour une participation productive des élèves au travail sur les théorèmes dans la classe et quelles sont les pratiques d'enseignement qui peuvent faire obstacle (ou favoriser) le développement de ces processus.

III. A PROPOS DE L'OBJET D'ENSEIGNEMENT VISE: ENSEIGNER LA DEMONSTRATION OU ENSEIGNER LES THEOREMES?

Le choix qu'on a fait a été celui d'une approche "holistique", en considérant la démonstration comme une partie importante du théorème et qui n'a pas de sens hors du théorème. L'approche "holistique" a été suggérée par l'analyse historique et épistémologique du savoir mathématique en jeu: à partir d'Euclide jusqu'à nos jours, un théorème est tel s'il est constitué d'un énoncé et d'une démonstration de l'enoncé faisant référence à une théorie. La définition de *théorème = (énoncé, démonstration, théorie de référence)* (Mariotti et al, 1997) constitue le point de départ pour développer un discours didactique sur les théorèmes dans le quel trouve sa place la problématique de l'approche de la démonstration.

En particulier, on a essayé de mettre en évidence les éléments stables constitutifs des énoncés, des démonstrations et des théories de référence pour la plus grande partie des théorèmes au cours de l'histoire (en choisissant de ne pas tenir compte des variations dues à l'évolution historique des cadres de référence épistémologiques pour ce qui concerne le statut des postulats, la modélisation du processus de démonstration, etc.). Pour les théorèmes de la géométrie (discipline qui permet une analyse historique plus vaste et continue) on a sélectionné les éléments suivants:

- l'énoncé est général (c'est-à-dire, il ne se réfère pas à une figure ou configuration particulière, mais à une classe de figures ou de configurations ayant certaines propriétés); il est aussi (implicitement ou explicitement) conditionnel (*si... alors...*); et il est écrit dans le registre mathématique du langage naturel selon un style ("genre") particulier;

- la démonstration est constituée par des "arguments" enchaînés de façon déductive, les arguments étant des prémisses acceptées ou d'autres résultats déjà démontrés ou des évidences incontestables; elle aussi est écrite selon un style particulier du registre mathématique du langage naturel;

- la théorie de référence est constituée par un corpus cohérent d'arguments qui découlent des prémisses acceptées et par une série de considérations (règles, commentaires, etc.) de type "méta" sur la façon de développer la théorie à partir des prémisses et sur les propriétés que doit avoir la théorie.

D'une façon cohérente avec l'idée que les mathématiques ne sont pas seulement constituées d'objets (comme les concepts ou les signes particuliers des différents domaines, ou les textes des démonstrations), mais aussi d'activités qui se réalisent à travers des processus individuels ou sociaux (voir Granger, 1992; Boero, Dapueto et al, 1995), on a établi les distinctions suivantes dans les champs sémantiques rattachés à certains mots-clés:

- le terme "conjecture" peut évoquer deux choses assez différentes, c'est à dire soit le processus de production ("conjecturer": "conjecturing" en Anglais) soit le texte issu de ce processus;

- de la même façon, le terme "démonstration" peut évoquer soit le processus de construction ("démontrer": "proving" en Anglais) soit le texte issu de ce processus.

A notre avis, tenir compte de ces distinctions sous-jacentes aux mots-clés est très important parce que dans le débat sur la démonstration comme objet d'enseignement on tend souvent à transférer au processus certains des caractéristiques du produit, avec des conséquences graves pour l'enseignement et pour l'apprentissage. En particulier la demande que le processus soit conforme à certains requis du produit (comme la proximité d'un calcul logique, l'exclusion des aspects métaphoriques et des analogies, etc.)(cf Hanna, 1989) peut entraver le processus de construction de la démonstration (voir Douek, 1999b).

IV. OBSTACLES RENCONTRES PAR LES ELEVES DANS L'APPROCHE DES THEOREMES EN CLASSE

Il faut distinguer les différents types d'obstacles qui concernent les différentes phases de la production d'un théorème en relation avec les différents choix épistémologiques possibles dans l'encadrement des théories mathématiques.

Pour ce qui concerne les obstacles épistémologiques, il est clair que si l'on se met dans une perspective "formaliste", la démonstration comme "calcul logique" entraîne une rupture nette avec les formes usuelles de raisonnement (et alors l'argumentation ordinaire, même l'argumentation qui organise les "arguments" selon formes de raisonnement plutôt contraignantes - comme la déduction, l'induction, l'analogie, etc. - peut être vue comme un obstacle). Mais est-il nécessaire de se situer dans la perspective formaliste pour faire des mathématiques? L'opinion de certains mathématiciens d'aujourd'hui semble plutôt critique envers la réduction de la démonstration (comme processus et aussi comme produit) à un calcul dépourvu de toute référence sémantique (voir Thurston, 1994).

Et d'autres mathématiciens (ici, le discours porte sur le coté épistémologique) nient qu'il soit possible d'évacuer toutes les références sémantiques dans la construction et dans la compréhension d'une démonstration (voir l'analyse de G. Longo, E.N.S., à propos du théorème de Kruskal, Séminaire E.N.S, mars 2000; Colloquium Mathematicum, Université de Gênes, mars 1999).

Compte tenu de tout cela, je ne vois pas la nécessité de forcer la formation des élèves dans le sens d'une culture "formaliste" de la démonstration et des théories mathématiques. On peut concevoir le passage de l'argumentation favorisant la construction d'une démonstration au produit final selon une perspective de continuité (et, si nécessaire, d'allers-retours entre argumentation et enchaînement déductif visé). Bien sûr il faut tenir compte du fait que le produit final est soumis aux contraintes (en particulier, règles d'écriture) de la tradition culturelle concernant les théorèmes mathématiques. En ce sens le produit final ne devra pas contenir métaphores ou analogies (pourtant importantes dans la construction de la démonstration), et une pièce d'argumentation du type: *"pour prouver X, il faudrait vérifier si Y est une conséquence des hypothèses, parce qu'il me semble que Y entraîne X"* sera remplacée, dans le texte final, par une phrase du type: "*Y est une conséquence des hypothèses, parce que...; et X est conséquence de Y, parce que...*".

La continuité épistémologique (entre processus de construction et production finale) n'est pas mise en cause par ces règles d'écriture, qui relèvent plutôt d'une tradition culturelle (à mettre en valeur dans la classe à travers une médiation convenable de la part de l'enseignant).

Obstacles culturels: réussir un enchaînement logique un peu long peut être étrange aux cultures d'origine de certains élèves; mais même avec des élèves d'origine sociale et culturelle plutôt haute, certains aspects de la démonstration peuvent être en contradiction avec les usages courants de la langue et le raisonnement commun. Par exemple la "nécessité" l'emporte sur la "suffisance" dans les énoncés courants (si je dis que *"pour éteindre la lumière il faut appuyer sur ce bouton"*, je sous-entend qu'il est aussi suffisant...). Mais aussi la forme spécifique des textes "énoncés" et "démonstrations" est très particulière et relève d'une culture spécialisée, d'un consensus social dans la communauté des mathématiciens et de ceux qui ont une bonne culture mathématique. L'enseignant doit réaliser la médiation de cette forme de texte.

A propos des obstacles épistémologiques et des obstacles culturels, dans la perspective épistémologique choisie on peut noter que les uniques obstacles qui subsistent sont de type culturel et portent sur les règles de composition du texte final de la démonstration et sur sa forme.

Obstacles didactiques: lors de l'approche des théorèmes, une didactique inappropriée peut produire des obstacles: par exemple, par choix de tâches inappropriées, renforcer la tendance à la vérification empirique (en particulier, à travers la mesure) des conjectures; ou donner l'impression d'un jeu sans contenu de connaissance (comme dans le cas de la démonstration de certains énoncés "évidents"). Tout cela rend discutable l'approche usuelle des théorèmes mathématiques dans le domaine de la géométrie plane. On connaît bien les difficultés liées au manque de motivation et de "sens" qui se manifestent quand on part des postulats d'Euclide. Des axiomatiques "riches" ont été conçues pour éviter ces difficultés, mais elles n'évitent pas le recours de la part des élèves à la mesure comme moyen de validation (la mesure étant assez facile à utiliser quand on travaille sur des figures géométriques planes). Au contraire dans d'autres domaines (comme la géométrie de l'espace ou la géométrie de la représentation plane d'objets et situations dans l'espace) le recours à la mesure (ou, en général, à la vérification empirique) est pratiquement impossible ou très difficile à gérer si l'on veut obtenir une validation assez fiable.

D'autre part, je ne considère pas que le passage par la mesure ou par des jeux démonstratifs de propriétés "évidentes" soit profitable pour les élèves dans l'approche des théorèmes. En effet, à mon avis les élèves ont besoin d'un apprentissage "en positif", qui puisse leur permettre de faire une expérience non frustrante de raisonnements généraux, de construction d'enchaînements déductifs, etc.

Toujours à propos des obstacles didactiques, il me semble que la pratique traditionnelle d'approche des théorèmes et de la démonstration par illustration du maître suivie de répétition de la part de l'élève soit contradictoire avec les buts d'une approche consciente et "opérationnel" des théorèmes. En effet, par la voie traditionnelle l'élève répéter un produit, n'apprend pas à produire, et cela est grave parce que le processus de production est très loin de certaines caractéristiques que d'habitude a le produit (comme le manque de redondance, l'exclusion de métaphores et analogies, etc.). On peut bien dire qu'en répétant des produits l'élève manque d'expérience à propos de certains aspects cruciaux du processus de production.

V. UNE INGENIERIE DIDACTIQUE CONCUE POUR L'ACCES A LA CULTURE DES THEOREMES

Dans le travail d'ingénierie didactique qui a constitué le cadre expérimental pour le développement de nos recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des théorèmes, on a toujours essayé de distinguer ce qui doit rester à la charge des élèves, et ce qui est à la charge de l'enseignant.

En considérant les différentes phases de la production des théorèmes, nous pensons que les premières phases de la production des conjectures et de la construction de la démonstration peuvent (et doivent) être à la charge des élèves dans n'importe quel moment du parcours didactique de l'approche des théorèmes. La raison de ce choix est implicite dans les discours précédents: il faut que les élèves puissent faire expérience directe d'un travail créatif, qui donne le sens (et le plaisir) d'une maîtrise par le raisonnement d'une situation complexe pour laquelle n'existent pas d'autres moyens accessibles d'arriver à une solution.

Etre à la charge des élèves ne veut pas dire que l'enseignant puisse ignorer leurs difficultés; au contraire il doit chercher à opérer des choix appropriés pour ce qui concerne le contrat didactique, les activités préalables, les tâches spécifiques et la gestion des situations didactiques sur les théorèmes:

A) activités préalables et contrat didactique: nos expériences en classe nous ont montré l'importance d'activités préalables sur la production et la validation d'hypothèses dans des domaines différents, comme occasions pour établir un contrat didactique (Brousseau, 1986) caractérisé par: la motivation (argumentée) des hypothèses produites; l'importance attribuée à la qualité (clarté, niveau d'explicitation) des produits écrits individuels des élèves, productions qu'on utilise systématiquement comme objets de discussion en classe; le fait qu'une hypothèse bien motivée et bien présentée mais "fausse" a plus de valeur q'une hypothèse "correcte" mais pauvre de motivations et mal exprimée;

B) les tâches doivent être à la portée des élèves, en particulier les élèves doivent connaître assez bien le domaine auquel se réfère le problème posé, ils doivent surtout avoir assez d'expérience à propos de l'exploration des liens entre les variables pertinentes pour la résolution du problème. Ce critère peut suggérer de choisir des domaines mathématiques familiers comme le domaine des nombres naturels, ou bien des domaines non mathématiques (ombres du soleil, engrenages, etc.: voir Bartolini Bussi, 1996; Boero et al, 1996; Mariotti et al, 1997; Bartolini Bussi et al, 1999) qui fonctionnent, par le moyen de modèles mathématiques simples et bien adaptés aux situations considérées, comme lieux de travail intellectuel où les métaphores "physiques" et "spatiales" aident le travail productif des élèves; voici quelques exemples:

("Problème des deux bâtons", 13/14 ans): *"On sait que deux bâtons verticaux sous le soleil produisent des ombres parallèles sur le sol. Peut-on produire des ombres parallèles sur le sol avec un bâton vertical et un bâton incliné? Justifier la réponse"* (Boero et al, 1996)

("Problème du centre de la table", 10/11 ans): *"Placer la petite balle au centre de la table; justifier le choix"* (Bartolini Bussi, 1996)

(dessin: une table en perspective, une petite balle à coté)

("Problème des roues engrenées", 10/11 ans): *"Un certain nombre de roues s'engrènent en formant un collier. Peut-on toujours faire tourner l'engrenage? Justifie ta réponse"*(Bartolini Bussi et al, 1999)

C) pour ce qui concerne les premières activités de construction de démonstrations, il est bien qu'elles soient facilitées par le choix de tâches telles que les "arguments" produits pour justifier la plausibilité de la conjecture puissent constituer les arguments-clés à enchaîner dans la construction de la démonstration (voir "unité cognitive des théorèmes", 5.2.);

D) au fur et à mesure que les élèves progressent dans le travail sur les théorèmes, l'enseignant doit s'assurer que les élèves arrivent peu à peu à maîtriser certains éléments cruciaux de la culture des théorèmes (en particulier, il faut qu'ils se rendent compte assez tôt des premières règles de fonctionnement des démonstrations et des théories: enchaînement déductif "sans sauts" des "arguments", nature des arguments admis - propriétés connues comme "vraies" ou déjà démontrées).

L'indication D) constitue le point de contact naturel entre activités confiées aux élèves et activités qui nécessitent d'une médiation importante de la part de l'enseignant.

En particulier, pour ce qui concerne la production des textes des énoncés et des démonstrations et la forme finale du produit, la médiation culturelle de l'enseignant est nécessaire et doit être soutenue par le discours et surtout (particulier ment au début) par l'utilisation soit des productions des élèves, soit des "modèles" de référence. Par exemple on choisit des textes individuels produits par les élèves, à propos desquels on mène une discussion en classe pour les évaluer selon des critères de qualité donnés par l'enseignant ("médiation indirecte") et pour les améliorer; on peut aussi les comparer avec un énoncé ou une démonstration "officielle" bien choisie par l'enseignant ("médiation directe"). Mais on a vu que aussi la proposition d'un modèle de texte final suivie par l'effort individuel des élèves d'approcher le modèle proposé ("Jeu des voix et des échos", Boero et al, 1997; 1998) et par la discussion de quelques textes produits peut fonctionner très bien pour une approche graduelle de la forme "standard" du produit final.

VI. DES APPORTS THEORIQUES ET DES QUESTIONNEMENTS ISSUS DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

L'ingénierie didactique décrite au point précédent a fonctionné dans les dernières quatre années comme contexte pour l'avancement du travail de recherche. Ici je vais présenter quelques acquis récents et des questions ouvertes.

1. Modalités de genèse de la conditionnalité des énoncés

La conditionnalité (i.e. la structure *"Si... alors..."*) constitue (comme on a vu au point 2.) une caractéristique importante et permanente des énoncés de beaucoup de théorèmes. A travers l'analyse de quelques centaines de protocoles d'élèves d'ages différents (du Collège à l'Université) engagés dans 19 tâches de production de conjectures en géométrie, théorie élémentaire des nombres, algèbre et analyse mathématique, on a identifié quatre modèles élémentaires de genèse de la conditionnalité des énoncés, qui dépendent largement de la nature de la tâche. On ne sait pas en ce moment si ces modèles couvrent (avec leurs combinaisons possibles dans la production d'un même énoncé) tous les processus de production de la conditionnalité des énoncés. L'utilité des résultats obtenus jusqu'ici consiste dans la possibilité de choisir des tâches qui puissent permettre aux élèves de faire l'expérience d'une pluralité de voies d'accès à la production des conjectures. Le travail de recherche en cours maintenant consiste dans l'étude des liens entre modes de production des conjectures et modes de production des démonstrations (en effet, lors de la phase de construction de la démonstration on retrouve souvent les formes de raisonnement que l'on a classé pour la genèse de la conditionnalité: voir Arzarello, 2000).

Les modes de production de la conditionnalité que on a classé sont les suivants (voir Boero et al, 1999):

- exploration dynamique, jusqu'à une section temporelle lors de la découverte d'une régularité: *"quand A alors B"* devient *"si A alors B"*;

(mode de production fréquent, par exemple, dans le "problème des deux bâtons")

- violation d'une régularité, et recherche de la condition de laquelle cette régularité dépend :

(tâche: *"Ecrire la propriété géométrique qui a permis à Thalès de trouver la hauteur d'une pyramide à l'aide des ombres"*, 13 ans)

(Igor) *"Nous savons que les rayons du soleil sont parallèles, et les ombres sont proportionnelles aux bâtons. Mais les droites peuvent ne pas être parallèles, dans ce cas je ne vois pas de possibilité de proportionnalité* (dessins et mesures). *Peut être qu'il est vrai que si deux droites sont parallèles, elles coupent des segments proportionnels".*

- généralisation: exploration d'un ensemble de cas, passage à un énoncé de niveau (plus) général:

(ce comportement est fréquent pour les taches de généralisation, comme dans le cas de la généralisation de la propriété: *"La somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par quatre")*

- abduction (voir Peirce, interprété par Arzarello et al, 1998): étude d'un cas et passage à un énoncé de niveau (plus) général *("de quelle condition générale dépend ce cas particulier?"):*

(on retrouve ce comportement, bien que moins fréquent que le précédent, dans les mêmes tâches qui donnent lieu au comportement précédent).

2. Unité cognitive des théorèmes

Le travail essentiel sur l'unité cognitive des théorèmes a été mené par un enseignant-chercheur, Rossella Garuti, en prise directe sur l'observation de ses élèves. Au départ, on a observé que le travail de construction de la démonstration d'une conjecture produite par les élèves était particulièrement aisé quand ils pouvaient utiliser des arguments et des formes de raisonnement (en particulier, modalités d'exploration dynamique) produites en phase de production de la conjecture (Garuti et al, 1996). Ensuite, on a considéré des cas (historiques, ou même enregistrés dans les classes) dans lesquels cette continuité entre processus de production de la conjecture et processus de construction de la démonstration était improductive (car la construction de la démonstration demandait d'autres arguments et/ou d'autres formes de raisonnement). On a considéré aussi la situation d'un énoncé à prouver non produit par l'élève, et les liens que l'élève tendait à établir entre la phase de prise en charge de l'énoncé (compréhension, analyse de sa portée, recherche d'arguments pour sa plausibilité) et la phase de construction de la démonstration.

On est parvenu ainsi (Garuti et al, 1998) à définir l'unité cognitive comme la manifestation d'un lien de continuité qui peut être établie dans certains cas entre le processus de production d'une conjecture (ou le processus de prise en charge d'un énoncé reçus par autrui) et le processus de construction de la démonstration.

Quand l'unité cognitive se manifeste, elle concerne: les théories de référence et (en leur sein) les arguments produits en phase de conjecture (ou de prise en charge de l'énoncé à prouver) et reconsidérés en phase de démonstration comme éléments à enchaîner déductivement; les représentations symboliques utilisées dans les deux phases; les types d'explorations menées (ici la continuité concerne la nature du dynamisme - variables qui bougent, variables fixes - et non pas la fonction du dynamisme, qui change nécessairement: on passe de la découverte du lien "causal" entre hypothèse et thèse, à l'exploration des virtualités conséquentes à l'hypothèse et des leurs relations avec la thèse).

L'unité cognitive des théorèmes peut être regardée comme un outil pour: interpréter certaines difficultés des élèves (et des mathématiciens: voir l'histoire du "dernier théorème de Fermat"); prévoir une partie au moins des difficultés d'une tâche de démonstration; construire des séquences didactiques graduelles d'approche des démonstrations (et de théorèmes), en partant par des tâches de conjecture et de démonstration qui à priori permettent la réalisation de l'unité cognitive.

3. Dimension mathématique des activités de conjecture et de démonstration dans des domaines non mathématiques

Une des objections les plus fréquentes quand on présente les activités sur les "théorèmes des engrenages" ou sur les "théorèmes des ombres du soleil" est qu'il ne s'agit pas de "théorèmes mathématiques". La réponse a ces objections constitue un sujet d'approfondissement constant dans notre travail. En effet, on peut considérer des niveaux différents de réponse à des interlocuteurs différents.

Si les objections portent sur le fait qu'un véritable travail mathématique (et d'éducation mathématique) doit se concentrer sur les aspects purement formels et logiques, la réponse est pour nous facile, parce qu'on n'adhère pas a cette position épistémologique (qui d'ailleurs est refusée aussi par beaucoup de mathématiciens de nos jours: cf. Thurston, 1994).

Si les objections portent sur le fait que les objets du travail théorique ne sont pas des entités mathématiques, mais des bâtons ou des roues, la réponse nécessite un travail de réflexion approfondi sur le rôle des métaphores physique, des objets qu'on peut toucher, manipuler, plier, etc., dans un véritable travail mathématique. En effet, s'il est vrai que ces référents physiques jouent un rôle important dans l'heuristique, il est vrai aussi que les mathématiciens savent se détacher des aspects "concrets" (et en reconnaître les limites) quand on passe de l'heuristique au travail systématique sur les objets mathématiques. Il faut alors concevoir le travail des élèves dans les domaines d'expérience des engrenages ou des ombres du soleil comme une étape d'un parcours qui, à plus long terme, doit porter sur la géométrie (ou sur l'algèbre) des engrenages et sur la géométrie des ombres du soleil, c'est-à-dire sur des véritables théories mathématiques concernant les modèles mathématiques des situations physiques. A ce propos je voudrais signaler le fait que quand les élèves passent au domaine géométrique l'expérience précédente dans les domaines physiques joue un rôle crucial comme référence heuristique dans les situations difficiles (voir Parenti et al, à paraître): de cette façon on peut bien dire qu'on va vers un véritable travail mathématique (où l'heuristique n'a pas peur de s'appuyer sur des considérations très concrètes!).

A l'objection *'mais alors pourquoi vous ne travaillez pas directement dans les domaines mathématiques'* on peut répondre qu'on pourrait le faire si le but fondamental de l'éducation mathématique était concentré sur les objets et les relations mathématiques. Si au contraire l'on décide qu'un but crucial est le développement et la maîtrise consciente des activités mathématique, alors il faut considérer la qualité des processus mentaux accessibles aux élèves dans les différents domaines. A ce propos dans les protocoles des élèves on trouve que la référence aux aspects dynamiques des ombres du soleil ou des engrenages est très importante pour déclencher des explorations dynamiques (cf. "transformational reasoning" chez Simon, 1996) et elles s'avèrent décisives soit dans la phase de production d'une conjecture soit dans la phase de construction de la démonstration. Si l'on veut que les élèves puissent faire l'expérience de ces processus il faut les mettre dans la meilleure condition pour qu'ils puissent les développer. La familiarité avec les aspects dynamiques des engrenages et des ombres peut bien être considérée comme une condition qui explique la facilité des élèves à réaliser des explorations dynamiques riches et performantes.

Voici un texte de démonstration d'une élève de 13 ans ("Problème des deux bâtons"):

(Enoncé négocié dans la classe: *"Si le plan vertical du bâton incliné contient des rayons du soleil, alors les ombres du bâton incliné et du bâton vertical sont parallèles")*

(Démonstration de Lucia): *"J'imagine un bâton vertical placé à la base du bâton incliné; il fait une ombre alignée avec l'ombre du bâton incliné, parce que les deux bâtons appartiennent au plan vertical du bâton incliné, qui contient des rayons du soleil, qui font l'ombre. Mais l'ombre du bâton vertical imaginaire est parallèle à l'ombre du vrai bâton vertical (parce que les deux bâtons sont // et nous savons que bâtons // produisent ombres //), et alors l'ombre du bâton incliné, elle aussi est // à l'ombre du bâton vertical."*

Les objections sur lesquelles nous travaillons davantage maintenant concernent le problème du transfert de certains processus du domaine physique au domaine mathématique; en effet le fait que des explorations dynamiques performantes soient à la portée de presque tous les enfants dans les cas des engrenages ou des ombres du soleil ne constitue pas une garantie de leur transfert en travaillant sur des problèmes qui concernent des figures géométriques ou d'autres entités purement mathématiques. La recherche en cours (en particulier dans les équipes de Gênes et de Turin) concerne deux aspects complémentaires:

- analyse des processus dynamiques de conjecture et de démonstration par des gens compétents dans le domaine mathématique; on estime pouvoir trouver des fortes ressemblances avec les processus déjà analysés dans les domaines physiques (Arzarello 2000; Busetti 2000);

- analyse des comportements des élèves des classes expérimentales quand ils font face à des tâches purement mathématiques. On a déjà trouvé chez quelques élèves des évidences pour le transfert au domaine algébrique de certaines caractéristiques du style personnel d'exploration, d'anticipation, etc. mises en évidence dans le travail dans les domaines physiques (Boero et Garuti, 2000).

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (1988), 'Ingénierie didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 7, 5 - 62

ARZARELLO, F.; MICHELETTI, C.; OLIVERO, F. AND ROBUTTI, O. (1998), 'A model for analyzing the transition to formal proof in geometry' , *Proceedings of PME-XXII*, Stellenbosch, vol. 2, pp. 24-31

ARZARELLO, F. (2000), 'Inside and Outside: Spaces, Times and Language in Proof Production', *Proceedings of PME-XXIV*, Hiroshima, vol. 1, 23 - 38

BALACHEFF, N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématiques*, thèse d'état, Université de Grenoble

BARTOLINI BUSSI, M.G. (1996), 'Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School', *Educational Studies in Mathematics,* **31**, 11-41

BARTOLINI BUSSI, M.G. (1998), 'Drawing Instruments: Theory and Practices from History to Didactics', *Documenta Mathematica,* Extra vol. ICM 1998, Vol. 3, pp. 735-746

BARTOLINI BUSSI, M. G.; BONI, M.; FERRI, F. & GARUTI, R. (1999), 'Early Approach to Theoretical Thinking: Gears in Primary School', *Educational Studies in Mathematics*, 39, 67-87

BOERO, P.; GARUTI, R. (1994), 'Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements', *Proceedings of PME-XVIII,* Lisboa, Ed. GRAFIS, Lisboa, vol. 2, pp. 96 - 103.

BOERO, P.; CHIAPPINI, G.; GARUTI, R.; SIBILLA, A. (1995), 'Towards Statements and Proofs in Elementary Arithmetic: An Exploratory Study About the Role of Teachers and the Bahaviour of Students', *Proceedings of PME-XIX,* Recife, Brazil, Universitade Federal de Pernambuco, Recife, 1995, vol. 3, pp. 129-136.

BOERO, P.; DAPUETO, C.; FERRARI, P.; FERRERO, E.; GARUTI, R.; LEMUT, E.; PARENTI, L.; SCALI, E. (1995), 'Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School', *Proc. of PME-XIX,* Recife, vol. 1, pp. 151-166

BOERO, P.; GARUTI, R. AND MARIOTTI, M.A. (1996), 'Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures', *Proceedings of PME-XX,* Valencia, vol. 2, pp. 121-128

BOERO, P.; PEDEMONTE, B. AND ROBOTTI, E. (1997), 'Approaching Theoretical Knowledge through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspective', *Proceedings of PME-XXI,* Lahti, vol. 2, pp. 81-88

BOERO, P.; CHIAPPINI, G.; PEDEMONTE, B.; ROBOTTI, E. (1998), 'The voices and echoes game and the interiorization of crucial aspects of theoretical knowledge in a vygotskian perspective: ongoing research', *Proc. of PME-XXII,* Stellenbosch, vol. 2, 120-127.

BOERO, P. (1999a), 'Didactique des théorèmes entre histoire des mathématiques, épistémologie et sciences cognitives', *Proc. of CIEAEM-50,* Neuchatel, pp. 297-302.

BOERO, P. (1999b), 'Choix des thèmes de travail et des tâches pour l'approche de théorèmes, *Actes de la X-ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathematiques*, IUFM de Caen, Tome II, pp. 59-63.

BOERO, P.; GARUTI, R. & LEMUT, E. (1999), 'About the Generation of Conditionality of Statements and its Links with Proving', *Proceedings of PME-XXIII,* Haifa, vol. 2, pp. 137-144.

BOERO, P. & GARUTI, R. (2000), 'Aspetti logico-linguistici e dinamiche mentali', in J.P. Drouhard et M. Maurel (Eds.), *Actes des Séminaires SFIDA-9 à SFIDA-12,* Volume III, 1997/99, IREM de Nice, pp. XII/3 - XII/6

BROUSSEAU, G. (1986), 'Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques', *Recherches en didactique des mathématiques*, 7, 33-115

BUSETTI, E. (2000), *Analisi dei processi di dimostrazione,* Tesi di laurea, Università di Genova

DOUEK, N. (1999a), 'Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications', *Proc. of the CERME-I Conference*, Osnabrueck (to appear)

DOUEK, N. (1999b), 'Argumentative Aspects of Proving: Analysis of Some Undergraduate Mathematics Students Performances', *Proc. of PME-XXIII,* Haifa, vol. 2, pp. 273-280

DUCROT, O. (1980), *Les échelles argumentatives,* Ed. de Minuit, Paris.

DUVAL, R. (1991), 'Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration', *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261

GARUTI, R.; BOERO, P.; LEMUT, E. & MARIOTTI, M.A. (1996), 'Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems', *Proceedings of PME-XX,* vol. 2, pp. 113-120, Univ. de Valencia, vol. 2, pp. 113-120.

GARUTI, R.; BOERO,P. & LEMUT, E. (1998), 'Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof', *Proceedings of PME-XXII*, vol. 2, pp. 345-352

GRANGER, G. G. (1992), *La vérification*, Editions Odile Jacob, Paris

HANNA, G. (1989), 'More than formal proof', *For the Learning of Mathematics*, 9, 20-23

HANNA, G. (1996),'The Ongoing Value of Proof', *Proceedings of PME-XX,* Valencia, vol. 1, pp. 21 - 34

HAREL, G. & SOWDER, L. (1998), 'Students' Proof Schemes', in A. Schoenfeld et al (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics,* Vol. 3, M.A.A. and A.M.S. pp. 234-283.

LAKATOS, I. (1985), *Preuves et réfutations*, Hermann, Paris

MARIOTTI, M.A.; BARTOLINI BUSSI, M.; BOERO,P.; FERRI, F.; GARUTI, R. (1997), 'Approaching geometry theorems in contexts', *Proceedings of PME-XXI*, Lahti, vol.1, pp. 180-195

PARENTI L., BARBERIS M. T., PASTORINO M., VIGLIENZONE P.: 'From dynamic exploration to "theory" and "theorems"', in P. Boero (Ed.), *Theorems in School,* Kluwer Ac. Pub. (à paraître)

SIMON, M. (1996), 'Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search for a Sense of Knowing', *Educational Studies in Mathematics,* 30, 197-210

THURSTON, W.P (1994), 'On Proof and Progress in Mathematics', *Bulletin of the A.M.S.*, 30, 161-177

TOULMIN, S. (1958), *The Uses of Argument*, Cambridge University Press, Cambridge.

VYGOTSKY, L. S. (1985), *Pensée et langage*, Editions Sociales, Paris