

LOGIQUE ET RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE
VARIABILITÉ DES EXIGENCES DE RIGUEUR DANS LES DÉMONSTRATIONS
METTANT EN JEU DES ÉNONCÉS EXISTENTIELS

Gilbert Arsac³

*Institut Girard Desargues, Université
Claude Bernard Lyon1*

Viviane Durand-Guerrier⁴

*IUFM de Lyon, LIRDHIST, Université
Claude Bernard Lyon1 & IREM de Lyon*

D'une manière générale, dans les démonstrations mathématiques proposées aux étudiants, on trouve assez peu de références explicites à la logique classique (calcul des propositions, calcul des prédicats). A contrario, on exige de ces mêmes étudiants un certain niveau de rigueur dans les preuves qu'ils produisent, ceci afin d'en assurer la validité. Dans les travaux que nous menons, nous examinons la question de l'articulation entre logique, rigueur et validité sous deux points de vue. D'une part du côté du praticien des mathématiques dans son rôle de professeur : *par quoi, dans son discours auprès des étudiants remplace-t-il la logique absente ?* D'autre part du côté de l'étudiant en mathématiques : *comment, en tant que novice du domaine mathématique étudié, peut-il satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent, en principe, de se prémunir contre les preuves non valides ?* Pour cette présentation, nous nous intéressons principalement à la première question. Nous appuierons nos réflexions sur un protocole obtenu en soumettant une démonstration de topologie comportant une erreur, proposée par un étudiant, à un certain nombre d'enseignants de mathématiques.

I. MOTIVATIONS

En Didactique des Mathématiques, les travaux sur la démonstration, dont les derniers sont ceux conduits par Raymond Duval (1993, 1995), utilisent comme cadre logique de référence essentiel le calcul des propositions, en mettant au cœur de l'apprentissage de la

³ arsac@desargues.univ-lyon1.fr

⁴ durand-guerrier@lyon.iufm.fr

démonstration l'appropriation par l'élève du bon usage de la règle d'inférence du Modus Ponens : reconnaissance du théorème pertinent, vérification des conditions d'application de ce théorème et détachement de la conclusion. La pertinence de ce cadre d'analyse s'explique, du point de vue logique, par le fait que l'on manipule, en Géométrie, essentiellement des théorèmes universels qui peuvent se mettre sous la forme : " Pour tout x , si $P(x)$, alors $Q(x)$ ". Cependant, dans les démonstrations géométriques, en général les quantificateurs n'apparaissent pas, c'est-à-dire que l'on travaille sur un exemple générique. On n'a donc besoin que d'une instance de l'énoncé ouvert correspondant : " Si $P(a)$, alors $Q(a)$ ", où a désigne un élément générique du domaine de référence considéré. On est alors effectivement ramené au calcul des propositions. Notons cependant (Durand-Guerrier, 1999), que cela conduit à des difficultés lorsque l'énoncé universellement quantifié est non pas vrai, mais faux sur le domaine considéré. Voici un exemple simple illustrant ce fait :

Soit Q un quadrilatère ; pour chacune des deux implications suivantes dire si elle est vraie ou fausse :

a) si Q est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur.

b) si les diagonales de Q sont perpendiculaires, alors Q est un losange.

L'énoncé a) est vrai, car il est associé à un théorème universel ; quant à l'énoncé b), c'est une instance d'un énoncé ouvert admettant à la fois des exemples et des contre-exemples. Autrement dit, on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de cet énoncé. Le déclarer faux revient à assimiler cet énoncé à l'énoncé universellement quantifié correspondant. Comme le fait remarquer Houdebine, (1998, page 115) cet exercice " fait apparaître chez des élèves de quatrième une hésitation entre faux, pas toujours vrai et vrai ".

Lorsqu'on aborde les démonstrations en Analyse, il apparaît très clairement que le cadre théorique proposé par Raymond Duval pour la Géométrie devient inopérant dans de nombreux cas, en particulier lorsqu'interviennent des théorèmes existentiels. Nous allons illustrer ce point à travers l'exemple d'une démonstration, erronée, du théorème des accroissements finis généralisés. Nous rappelons ci-dessous l'énoncé de ce théorème, ainsi que celui du théorème usuel des accroissements finis.

Théorème des accroissements finis :

Etant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, si f est continue sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a ; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Théorème des accroissement finis généralisé :

Etant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a ; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a ; b[$, tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Une démonstration, fréquemment rencontrée en DEUG scientifique première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier, de la façon suivante :

La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a ; b[$, tel que $f'(c)(b-a) = (f(b)-f(a))$. De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a ; b[$, tel que $g'(c)(b-a) = (g(b)-g(a))$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a ; b[$, $g'(c) \neq 0$ et donc $(g(b) - g(a)) \neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Cette démonstration est fausse ; on peut le montrer sur un exemple en considérant deux fonctions pour lesquelles on ne peut pas choisir le même point c , ce qui n'est pas si facile d'ailleurs puisque, pour exhiber un contre-exemple, on ne peut pas considérer deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on peut par exemple prendre les fonctions qui à x associent respectivement x^2 et x^3 ou encore x^2 et $\sin x$. Si l'on analyse cette démonstration à l'aide du modèle de Raymond Duval, on est conduit à examiner son organigramme (cf.

annexe 1). Celui-ci montre que les différents théorèmes, explicites ou implicites, sont utilisés correctement : la non-validité ne dépend pas d'une mauvaise application de la règle du Modus Ponens. L'erreur peut être analysée de deux points de vue.

- Premier point de vue : comme nous l'avons vu ci-dessus, l'erreur consiste à penser que le point c dont l'existence est affirmée est le même pour les deux fonctions alors que ce n'est pas toujours le cas. Le fait d'utiliser la même notation c pour appliquer le théorème à f et g introduit l'hypothèse que c "ne dépend pas" de f . Ici encore, il y a un problème de quantification sous-entendue (le théorème est vrai quelle que soit f) et de dépendance de variable. Cette erreur peut aussi être attribuée à une absence de contrôle de la démonstration par les connaissances mathématiques. Nous retrouverons ceci dans l'analyse du protocole.

- Deuxième point de vue : sur le plan logique, l'erreur consiste à utiliser une lettre de variable liée comme s'il s'agissait d'un nom d'objet. Ceci revient à *squeezer* l'inférence sémantique associée à la règle d'instantiation existentielle, et du coup, à ne pas respecter les restrictions correspondantes sur les noms d'objets : à savoir, qu'une lettre utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour désigner un autre objet. L'utilisation de cette règle permet de corriger le raisonnement précédent : on déduit une instance pour f avec par exemple la lettre r , puis une instance pour g avec par exemple la lettre s . On peut bien alors obtenir l'égalité des deux quotients, mais ceci ne prouve pas le résultat cherché (cf. annexe 2). Une manière d'éviter l'erreur, fréquemment rencontrée dans la classe de mathématiques, consiste à utiliser une lettre différente pour la variable liée dans chacune des deux instances de l'énoncé existentiel. Cette méthode n'a pas de statut théorique, ni sur le plan logique, ni sur le plan mathématique, car les règles de manipulation des lettres muettes en mathématiques sont analogues aux règles de manipulation de lettres de variables liées en logique. Il s'agit donc d'une pratique permettant, par l'utilisation d'un formalisme intermédiaire entre langage courant et formalisme logique, d'attirer l'attention sur le fait que l'on ne peut pas considérer a priori qu'il s'agit du même élément pour les deux fonctions.

Ce qui précède montre que, pour contrôler, sur le plan logique, la validité de la démonstration proposée, il faut faire appel à une règle d'inférence qui ne peut pas se formuler dans le calcul des propositions. Il faut donc enrichir le modèle proposé par Raymond Duval en se plaçant dans le calcul des prédicats. On se trouve alors dans une théorie beaucoup plus difficile à manipuler que le calcul des propositions, mais aussi beaucoup plus près des mathématiques. D'ailleurs, pour certains auteurs comme Gilles Gaston Granger (1994), la logique stricto-sensu ne comprend que le Calcul des Propositions. Glaeser (1973) quant à lui considère le

Calcul des Propositions et le Calcul des Prédicats comme des théories mathématiques. Nous n'entrerons pas ici dans ce débat qui dépend des définitions respectives que l'on donne des mathématiques et de la logique.

Sur le plan didactique, nous adoptons le point de vue suivant lequel le Calcul des Prédicats fonctionne comme un système de référence pour l'analyse logique des démonstrations mathématiques, en particulier des démonstrations d'analyse. Cependant, bien que le langage des prédicats soit le socle du symbolisme mathématique, la transcription dans ce langage d'une démonstration d'analyse est une opération qui ne peut être faite que par un mathématicien suffisamment expert dans cette théorie logique. De ce point de vue, la situation est bien différente de celle de la géométrie où, lorsqu'on peut se contenter du calcul des propositions, la formalisation est en général assez aisée. L'usage en mathématiques du symbolisme du calcul des prédicats, par exemple des quantificateurs, est associé en fait à une pratique qui est souvent assez éloignée des règles de fonctionnement du modèle théorique. Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, ce non respect porte en particulier sur les modes de manipulation des variables, mais est compensé par un contrôle de la validité des démonstrations à l'aide des connaissances mathématiques en jeu. Ceci suppose qu'elles soient disponibles et cette condition introduit une différence fondamentale entre l'étudiant et le mathématicien. Comment un étudiant peut-il contrôler la validité des preuves qu'il produit dans un domaine mathématique en cours d'étude ? Que faudrait-il enseigner dans les premiers cycles universitaires scientifiques, en dehors des connaissances mathématiques proprement dites, pour permettre aux étudiants de contrôler eux-mêmes la validité des preuves ? Peut-on identifier chez les mathématiciens, et au premier chef chez les enseignants, une pratique de la démonstration en analyse suffisamment stable pour fournir la base d'un tel enseignement ?

La recherche en cours que nous présentons ici a pour objet une première enquête sur la distance entre la pratique des enseignants de mathématiques à l'université et le modèle de référence théorique qu'est le calcul des prédicats. Pour cela nous avons utilisé une démonstration de topologie proposée par un étudiant, que nous avons soumise à une vingtaine d'enseignants, en étudiant en particulier le vocabulaire qu'ils utilisent et les règles de contrôle qu'ils proposent. Il s'agit d'un début de recherche dont l'objectif est de dresser un état des lieux à partir d'un questionnaire sur les références théoriques, logiques et épistémologiques des enseignants, afin de poursuivre par une recherche plus didactique. Cependant, il y a déjà un aspect didactique puisque nous étudions le discours que l'enseignant adresse à l'étudiant.

Nous cherchons à repérer d'une part les invariants, d'autre part les spécificités de chaque enseignant. A ce stade de la recherche, nous ne disposons pas d'un cadre théorique très précis ; nos analyses sont donc plutôt de type empirique.

II. ANALYSE DU PROTOCOLE

1. Présentation du protocole et première analyse

a) Le contexte

La démonstration sur laquelle nous allons travailler (voir ci-dessous) a été proposée par un étudiant considéré comme brillant par le professeur destinataire.

Voici cette démonstration (la rédaction est exactement celle de l'étudiant qui raisonne implicitement par l'absurde en partant de $d(A,B) = 0$; nous avons simplement ajouté la numérotation des lignes pour faciliter les renvois au texte).

Question : (E,d) est un espace métrique, A et B sont deux parties de E . On définit $d(A,B)=\inf\{d(x,y), x \in A, y \in B\}$. Montrer que si A est compact et B est fermé et $A \cap B = \emptyset$, alors $d(A,B) \neq 0$.

Démonstration :

1 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B, 0 \leq d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

2 Comme $x \in A$, et A fermé $\Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow \exists (x_n) \subset A, x_n \rightarrow x$.

3 Or, $d(x_n,y) \leq d(x_n,x) + d(x,y)$

4 Et, comme $x_n \rightarrow x, \exists n_0, n \geq n_0, d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$,

5 d'où, pour $n \geq n_0, d(x_n,y) < \varepsilon$, ainsi $x_n \rightarrow y$ et comme $(x_n) \subset A$, alors :

6 $y \in \overline{A} = A$, or $y \in B \Rightarrow y \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Il s'agissait d'un devoir à la maison et l'étudiant a soumis cette démonstration, conscient d'avoir démontré un résultat avec des hypothèses plus faibles que celles indiquées (A et B fermés, au lieu de A compact et B fermé). En commentaire, le professeur concerné écrit :

“ A première vue, je n'ai pas vu l'erreur mais en reprenant la démonstration je me suis rendu compte que (x_n) dépend de ε de départ ! On a donc $d(x_n^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) < \varepsilon/2$, mais si on prend un $\varepsilon' > 0$, on ne peut avoir $d(x_n, y) < \varepsilon'$. Je pense que le problème relève d'un abus de langage ; on devrait dire : $\forall \varepsilon > 0 \exists x_{\varepsilon} \in A, \exists y_{\varepsilon} \in B \ 0 \leq d(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}) < \varepsilon/2$. ”

Notons qu'il n'y a pour l'enseignant aucun doute sur le fait que la démonstration comporte une erreur ; en effet, a priori, il sait que les hypothèses indiquées dans l'exercice sont minimales. Autrement dit, c'est le savoir mathématique qui permet de disqualifier la démonstration proposée par l'étudiant. Ceci dit, il va de soi que cela ne suffit pas aux yeux de l'enseignant et le commentaire proposé concerne la recherche de l'erreur dans la démonstration ; cette erreur est interprétée comme relevant d'un *abus de langage*. De notre point de vue, la correction proposée à la fin du commentaire est à mettre en rapport avec la remarque concernant le théorème des accroissements finis : sur le plan logique, le fait d'indiquer les lettres x et y n'a pas de pertinence puisqu'il s'agit de variable liées. Sur le plan mathématique, comme nous l'avons déjà dit, c'est une pratique qui n'a pas de statut théorique. En fait, la première phrase de l'étudiant est parfaitement correcte sur le plan de la syntaxe. C'est dans l'usage qui en est fait ensuite que résident les difficultés.

b) *Analyse de la démonstration à l'aide de la déduction naturelle.*

Dans le Calcul des Prédicats, nous disposons de systèmes de preuve formelle, par exemple celui dû à Copi et présenté rapidement dans Hottois (1989). Il s'agit d'une extension au Calcul des Prédicats de la Méthode de Déduction Naturelle dans le Calcul des Propositions due à Gentzen, et qui fournit des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs propositionnels. Voici comment la présente l'auteur : “ Ce système offre l'intérêt de proposer des démonstrations qui restent au plus près de l'aspect familier des syllogismes. Cette présentation correspond à la volonté de formaliser et d'axiomatiser en ne rompant pas avec la rationalité discursive naturelle. ” Un tel système peut en particulier être utilisé pour contrôler la validité de preuves mathématiques, sans recourir à une formalisation complète dans le Calcul des Prédicats, et propose de ce fait un moyen terme entre une position formaliste

extrême s'appuyant sur la théorie de la démonstration de Hilbert, inaccessible de fait, et la position inverse qui consiste à dire que les démonstrations mathématiques n'obéissent à aucune règle. Il se fixe donc un but qui n'est pas sans rapport avec l'objet de notre recherche. Les quatre règles de manipulation des énoncés quantifiés dont on dispose dans ce système sont données sous la forme suivante (pp.101-102) :

“ 1) I.U.⁵ Instantiation Universelle

$$\frac{(x)fx}{fa} \quad ^6$$

a constante individuelle quelconque substituée à x

(...)

2) G.U. Généralisation Universelle

$$\frac{fa}{(x)fx}$$

avec a, constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée uniquement du point de vue de son appartenance à ce domaine.

(...)

3) G.E. Généralisation Existentielle

$$\frac{fa}{\exists xfx}$$

a constante quelconque

(...)

4) I.E. Instantiation existentielle

$$\frac{\exists xfx}{fw}$$

Attention à l'interprétation de w : il s'agit d'une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit s'il n'y a qu'un objet de ce type) vérifier $\exists xfx$. Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on ignore l'identité précise de cet objet. c'est pour cela qu'il faut veiller à ce que le signe introduit (ici w) soit sans occurrences antérieures qui précisément le détermineraient (l'identifieraient) de façon abusive. ”

L'application de ces règles au cas qui nous intéresse montre qu'il manque trois instances successives de l'énoncé (1) :

De l'énoncé, $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \exists y \in B, 0 \leq d(x,y) < \varepsilon/2$ (1) on peut inférer par la règle d'Instantiation Universelle (I.U.) $\exists x \in A \exists y \in B, 0 \leq d(x,y) < \varepsilon/2$ (2) où ε est une lettre de constante, sans restriction (un élément générique du

⁵ L'auteur utilise l'abréviation UI ; nous préférons respecter l'ordre des mots en français.

⁶ (x) traduit une quantification universelle, ce qu'en mathématique nous noterions $\forall x$.

domaine de référence, ici R^{+*} , dont nous ne changeons pas le nom, conformément à la pratique des mathématiciens, ce que ne ferait pas un logicien). De cet énoncé, on peut inférer en appliquant deux fois la règle d'Instantiation Existentielle (I.E.), $0 \leq d(x,y) < \varepsilon/2$ (3) où cette fois x et y sont des lettres de constantes soumises aux restrictions de la règle d'instanciation existentielle. Rappelons qu'en logique, on choisirait des lettres différentes pour les variables et les constantes d'objets : par exemple ici, on pourrait écrire : $0 \leq d(a,b) < c/2$ (4). De cette manière, après avoir introduit la suite convergent vers x , on aboutirait à la ligne 5 à l'énoncé $\forall n > n_0, d(x_n, b) < c$ (5). En appliquant alors la règle de généralisation existentielle (G.E.), on obtient : $\exists y \in B, \exists x \in A^N, \forall n > n_0, d(x_n, y) < c$ (6), puis par la règle de généralisation universelle (G.U.) : $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in B, \exists x \in A^N, \forall n > n_0, d(x_n, y) < \varepsilon$ (7).

N.B. Parmi les règles de restrictions, se trouvent naturellement le respect de l'ordre d'introduction des lettres : si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

Or l'énoncé (7) ne traduit évidemment pas le fait qu'il existe une suite de A convergent vers un point de B , si bien que l'erreur de l'étudiant provient d'une conclusion illégitime : la lecture qu'il fait de ce qu'il a écrit à la ligne 5 le conduit à restituer les quantificateurs absents sans contrôler l'ordre dans lequel ces quantificateurs doivent être écrits.

Dans les commentaires, un des enseignants écrit, en réponse à la question 1 : “ (l'étudiant) confond le fait qu'une propriété est vraie pour un “ ε fixé ” et “ quel que soit ε ” (q_1). Or la méthode classique de démonstration associée à G.U., l'exemple générique, légitime dans de nombreux cas, consiste bien à démontrer “ pour un a fixé ” et à affirmer ensuite que le résultat ne dépend pas en fait du choix de a . Autrement dit, ce commentaire laisse dans l'ombre la difficulté spécifique de cette démonstration proposée par l'étudiant, à savoir qu'on ne peut pas appliquer G.U. sans précaution dans ce cas.

Le système dû à Copi est très près de la pratique mathématique ; en particulier parce qu'il introduit les constantes d'objets ; son intérêt principal, par rapport à la pratique mathématique habituelle, réside dans le fait de rendre explicites les règles de manipulations des variables. Il est donc intermédiaire entre la pratique usuelle et un système entièrement formalisé. La méthode de déduction naturelle due à Quine, bien qu'utilisant des règles analogues, en diffère dans le sens où elle ne fait pas appel aux constantes d'objets : elle utilise uniquement des lettres de variables, libres ou liées, et introduit le contrôle de la validité en imposant des

restrictions sur l'ordre alphabétique des variables utilisées⁷, au lieu d'un méta-discours. C'est donc un système formalisé dans lequel les règles de contrôle sont syntaxiques. Parmi les quatre règles introduites par Quine, deux correspondent à des schémas conditionnels universellement valides du calcul des prédicats. Ce sont :

I.U., associée à " $(\forall xFx) \Rightarrow Fy$ " (1)

et G.E. associée à " $Fx \Rightarrow (\exists yFy)$ " (2)

Les deux autres règles

G.U. associée à " $(Fy \Rightarrow (\forall xFx))$ " (3)

et I.E. associée à " $(\exists xFx) \Rightarrow Fy$ " (4)

ne sont pas associées à des schémas valides. Par exemple, (3) n'est pas valide comme le montre le contre-exemple suivant. Plaçons nous dans l'arithmétique des entiers naturels, interprétons F par "être un nombre premier" et y par le nombre 7. Le schéma (3) s'interprète par la proposition : "*si 7 est un nombre premier, alors tous les nombres entiers sont premiers*". Cette proposition est fausse, car son antécédent est vrai, tandis que son conséquent est faux. Le schéma (3) n'est donc pas universellement valide. On démontre de même que le schéma (4) n'est pas valide en interprétant cette fois y par 6, ce qui conduit à la proposition : "*si il existe un entier naturel premier, alors 6 est un nombre premier*". Cette proposition est fausse pour la même raison que dans le cas précédent.⁸

Le fait que les deux dernières règles soient associées à des schémas non valides impose d'édicter des restrictions dans l'usage de ces règles, restrictions que Quine (1950) formule de la manière suivante (p.218) :

" Les variables d'instantiation de I.E. et de G.U. doivent être différentes lors de chaque application, et la variable d'instantiation lors de chaque application doit être alphabétiquement postérieure à toutes les variables libres de la ligne générique de l'application en question "

N.B. Lors de l'application de l'une de ces règles, la ligne générique est celle qui contient un quantificateur de plus que l'autre, appelée ligne instanciée. Pour I.E. et G.E., la ligne générique précède la ligne instanciée ; pour I.U. et G.U., c'est le contraire.

⁷ Nous empruntons la présentation de cette méthode à Gochet & Gribomont, 1990, pp.221-231

⁸ Notons que nous prouvons la non validité par des arguments de type sémantique ; c'est déjà la méthode employée par Aristote dans la théorie du syllogisme : la validité est prouvée de manière syntaxique (à partir de principes premiers et de règles), la non validité est prouvée par production d'un contre-exemple.

Pour faciliter le contrôle du respect de cette règle, Quine introduit un procédé de signalisation : pour chaque application de I.E. et de G.U. on mentionne sur la ligne déduite le nom de la variable instanciée, ce qui conduit à une nouvelle formulation des restrictions (p.219) :

“ Aucune variable ne peut être deux fois l’objet d’une signalisation et la variable signalée doit être alphabétiquement postérieure à toutes les variables libres de la ligne générique. ”

Revenons à la démonstration de l’étudiant : on peut la formaliser en désignant par une lettre de prédicat, par exemple F, la propriété sur la distance de x à y.

L’énoncé de la ligne n°1 est de la forme (1) $\forall x \exists y Fxyz$

On applique I.U. (2) $\exists x \exists y Fxyt$

On applique deux fois I.E. (3) $\exists y Fuyt \quad u$

(4) $Fvut \quad v$

u et v sont deux variables libres obtenues par une instantiation existentielle ; elles sont donc introduites dans l’ordre alphabétique et signalées sur la ligne instanciée.

Après quelques transformations mathématiques on arrive à

(5) $Gvut$

(où G désigne la propriété ad hoc). Comme t est antérieur alphabétiquement à u et v, on ne peut pas faire une instantiation universelle sur t ; autrement dit la déduction :

(6) $\forall z Guvz$

est incorrecte.

Notons que dans de tels systèmes, les règles d’écritures proposées et les restrictions imposées aux variables permettent de garantir la validité de la déduction complète, et ce bien que certaines des déductions ne soient pas *localement* valides. Ceci est associé au fait que le contrôle pas à pas de la preuve ne suffit pas ici, il faut un contrôle global, et ce contrairement à ce que l’on fait en Géométrie où les questions de formalisation des discours quantifiés n’apparaissent en général pas (cf. Duval 1993). Notons toutefois que le principe de signalisation ci-dessus proposé par Quine vise à faciliter ce contrôle. La validité logique de ce type de preuve vient de ce que l’on peut montrer que chaque fois que les restrictions imposées aux variables dans l’application de G.U. ou I.E. sont respectées, on peut reconstruire une dérivation dans laquelle les deux règles suspectes sont remplacées par un Modus Ponens combiné avec l’introduction d’une prémisse auxiliaire que l’on pourra réduire à une tautologie. Ces deux règles apparaissent donc comme des artifices pour abréger les démonstrations (Gochet & Gribomont, 1990, p.227). Du point de vue épistémologique, les considérations précédentes montrent qu’il suffit de savoir transcrire une démonstration mathématique en déduction naturelle pour être assuré de l’existence d’une transcription

formalisée dans le cadre théorique du calcul des prédicats. Autrement dit, la distance entre démonstration pratique et démonstration formalisée n'est peut-être pas aussi infranchissable qu'on l'affirme parfois (cf. par exemple R Hersh, 1997, p. 50).

Remarquons que, de même que la logique des propositions transforme la notion de causalité en implication, les systèmes de preuve du calcul des prédicats présentés ici absorbent la notion intuitive de dépendance dans des règles d'écriture et de manipulation des quantificateurs et des variables. Or, comme nous allons le voir, le mathématicien tient à garder à l'esprit cette notion de dépendance car elle lui semble indispensable pour comprendre. D'autre part, il semble peu vraisemblable que l'on puisse enseigner aux étudiants des règles assez complexes et uniquement syntaxiques.

2. Le point de vue des enseignants

En relation avec nos préoccupations de recherche, la démonstration de cet étudiant et les commentaires de l'enseignant nous ont paru mériter une exploration plus importante, ce qui nous a conduit à mettre en place une enquête auprès de collègues enseignant à l'université. Nous avons recueilli les réponses d'une vingtaine d'enseignants aux questions suivantes :

- 1) Quelles erreurs comporte cette démonstration, (vous pouvez supposer que vous l'expliquez à un collègue) ?
- 2) Qu'écririez-vous sur la copie ?
- 3) Quel corrigé proposeriez-vous à cet étudiant ?

Dans les premiers questionnaires, la formulation de la première question était la suivante : " Quelles erreurs, *sans s'attarder aux abus de notation de l'étudiant qui ont été reproduits*, comporte cette démonstration ? (vous pouvez supposer que vous l'expliquez à un collègue). " Plusieurs collègues nous ont fait remarquer qu'il était difficile de se tenir à cette consigne compte tenu de ce qu'a écrit l'étudiant, aussi nous avons supprimé la partie de la phrase en italique.

Nous avons obtenu vingt-deux réponses d'enseignants de mathématiques en poste dans diverses universités scientifiques : Grenoble, Lille, Lyon, Montpellier, Paris, Rouen. Plusieurs réponses sont très détaillées, d'autres sont un peu plus elliptiques. Nous proposons une

première étude qualitative des réponses permettant de dégager quelques grandes tendances dans le discours des enseignants, et aussi de pointer des différences.

a) Le contrôle par les connaissances mathématiques : la production d'un contre-exemple

Tous les enseignants repèrent que le résultat étant faux, la démonstration ne saurait être correcte. Quatorze d'entre eux proposent un contre exemple ; pour une minorité, c'est le premier argument proposé à l'étudiant. C'est en effet un moyen de s'assurer de la non validité du résultat établi. Mais ceci ne permet pas de savoir en quoi la démonstration est fautive. Il est remarquable de constater que certains enseignants disent n'avoir pas détecté, à la première lecture, d'erreur dans la démonstration. Ce sont donc leurs connaissances mathématiques (et non pas l'analyse logique de la démonstration) qui leur donnent la certitude d'une erreur de raisonnement et c'est leur pratique de la démonstration en Analyse qui les oriente vers le problème de la dépendance des variables. On comprend mieux alors le fait que l'étudiant, ne disposant pas de ce contrôle, puisse ne pas voir son erreur. On peut bien sûr s'interroger sur le conseil donné par l'un d'entre eux : "*quand on n'est pas sûr, il faut expliciter la dépendance*" ; n'est-ce-pas précisément un des problèmes de nombreux étudiants de n'être jamais très sûr des démonstrations qu'ils produisent ?

b) La prégnance de la notion de dépendance

Tous les collègues, sauf un, (soit 21) écrivent que "*x et y dépendent de ε* " et douze d'entre eux le traduisent en introduisant la notation $x_\varepsilon y_\varepsilon$ ou la notation y^ε ⁹. Pour certains collègues, cette notation indicée apparaît comme un "canon" mathématique. On peut lire par exemple (réponse à la première question) :

"à la ligne 1, *x et y* qui dépendent de ε ne sont pas indicés par ε ; c'est un abus classique, souvent pratique".

Pour d'autres collègues, les indices fonctionnent plutôt comme un *garde-fou* ; on peut lire dans quelques réponses à la question 2 (à l'adresse de l'étudiant)

"mettre des indices quand on n'est pas sûr de soi."

"*x et y* dépendent de ε , une notation comme x_ε évite de l'oublier."

"le dérapage fondamental est là, quand on oublie d'écrire $x = x_\varepsilon, y = y_\varepsilon$."

Certains collègues utilisent une notation de type fonctionnel (question 2):

"précise $x(\varepsilon), y(\varepsilon)$ " et plus loin, " $\exists n_0(x; \varepsilon)$ "

⁹ On ne peut évidemment pas en conclure que seuls ces 12 collègues traduisent, en général, cette dépendance par cette notation.

“ Il faut garder en mémoire les paramètres dont dépendent les quantités qu’on manipule : c’est en écrivant $h(\varepsilon, x_0)$, $h(\varepsilon)$ qu’on peut comprendre la différence entre continuité simple et continuité uniforme. ”

Les réponses recueillies laissent penser que la règle qui consiste à indiquer les lettres de variables muettes dans une quantification existentielle lorsque celle-ci est précédée d’une quantification universelle fonctionne comme une *règle de raisonnement* en Analyse, permettant à la fois d’éviter les erreurs et de mettre en évidence le “ sens ”, ici la “ dépendance des variables ”. Si on prend au pied de la lettre la notation proposée comme une notation fonctionnelle, alors ceci revient à assumer implicitement l’axiome du choix (sauf cas particuliers où on pourrait effectivement déterminer une telle fonction). D’ailleurs, la démonstration classique de la continuité qui utilise une suite construite en posant “ $\varepsilon = 1/n$ ” utilise implicitement l’axiome du choix dénombrable. On peut penser cependant que pour certains collègues, cette notation vise avant tout à rappeler par le symbolisme le fait que x_ε dépend de ε , en un sens *vague*.

La mise en relation des erreurs de l’étudiant avec des règles formelles de manipulation des variables et des quantificateurs fait apparaître de très grandes différences entre les différents enseignants. En ce qui concerne les quantificateurs deux collègues parlent d’une *mauvaise gestion des quantificateurs*, tandis que quelques collègues proposent de contrôler ce qui a été démontré en réécrivant formellement la phrase avec les quantificateurs (il s’agit donc ici d’un contrôle de type global sur les écritures symboliques) ; deux collègues quant à eux proscrivent au contraire tout emploi des quantificateurs et recommandent l’usage de la langue courante. En ce qui concerne les variables, à lire les commentaires de la plupart des collègues, il semble que dans la phrase quantifiée, les lettres renvoient implicitement à des objets du domaine considéré ; ceci n’est cependant pas partagé par tous. En effet, quelques (rares) collègues pensent que, comme les lettres qui suivent un quantificateur sont muettes et ne désignent par conséquent aucun objet, les objets que l’on manipule doivent être introduits explicitement au moyen d’*identificateurs* à l’aide de lettres qui les désignent. Cette position est à rapprocher des règles de démonstration naturelle de Copi évoquées plus haut :

- un énoncé universel vrai dans un domaine d’objets donné, de la forme “ $\forall x Fx$ ” permet d’affirmer chacune de ses instances ; pour utiliser dans un raisonnement un

tel énoncé, on écrira par exemple *soit a un objet du domaine* et on pourra alors utiliser “ Fa ” comme une proposition affirmée ;

- un énoncé existentiel vrai, dans un domaine d’objets donné, de la forme “ $\exists xFx$ ” *autorise* à considérer un objet w du domaine vérifiant la propriété correspondant à F ; on écrira par exemple *soit w un objet du domaine tel que Fw* et dans la suite du raisonnement, on utilisera “ Fw ” comme une proposition affirmée.

Cette exigence d’introduction des identificateurs s’oppose à une pratique largement répandue qui consiste à ne pas distinguer entre variable liée (lettre muette) et constante individuelle d’objets (paramètre) ; le changement de statut logique des lettres dans les démonstrations est en effet le plus souvent passé sous silence¹⁰. Cette question est en général considérée comme trop difficile pour être abordée. C’est par exemple la position de Glaeser (1973) ; dans cet ouvrage destiné aux futurs enseignants de mathématiques il consacre un chapitre à la logique dans lequel il aborde le calcul des propositions et le calcul des prédicats. Concernant ce dernier, il écrit :

“ Cela (la formalisation de la grammaire du langage des prédicats) nécessite un grand effort d’analyse que nous ne pouvons pas entreprendre dans cette ouvrage ; les règles de substitution sont très subtiles et font intervenir des distinctions entre variables libres et symboles individuels. ”

Cette question n’est donc pas traitée dans l’ouvrage. D’une manière générale, cet aspect est peu abordé dans les éléments de logique proposés aux étudiants de premiers cycles universitaires. Notons cependant qu’il faut ici se garder de généraliser ; en effet dans certaines démonstrations, les objets, ou certains objets, sont introduits explicitement et parfois les deux modes d’exposition cohabitent comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

c) Aperçus dans un manuel

Nous trouvons dans le cours de Topologie de Choquet (1984, p.49) :

¹⁰ Cf. Arsac et Durand-Guerrier, 1999.

Proposition 13-13. - Dire que E est localement connexe équivaut à dire que pour tout ouvert w de E, les composantes connexes de w sont ouvertes.

Démonstration. - 1° Soit E localement connexe ; soit w un ouvert de E, et soit C une composante connexe de w.

Pour tout $x \in C$, il existe un voisinage connexe V de x contenu dans w ; on a évidemment $V \subset C$, donc C est un voisinage de x. Comme C est voisinage de chacun de ses points, il est ouvert.

2° Inversement, supposons que toute composante connexe de tout ouvert de E soit ouverte. Pour tout $x \in E$, et pour tout voisinage V de x, la composante connexe C de V qui contient x est ouverte ; donc C est le voisinage de x contenu dans V que nous cherchions.

Dans la première partie de la démonstration, les lettres E, w et C sont introduites comme des constantes d'objets génériques : si on prouve le résultat pour de tels objets, on pourra en déduire le théorème (c'est l'application implicite de G.U.)

La troisième ligne de la démonstration est un énoncé clos de la forme " $\forall x \exists V \forall FxVCw$ ".

A la quatrième ligne, les lettres V et x ont changé de statut logique et sont manifestement des lettres de constantes d'objets ; notons que rien, dans la notation, ne vient rappeler que "V dépend de x" ; il faut dire qu'ici, cet *oubli* n'est pas dangereux, ce que l'on peut illustrer à l'aide la preuve à la manière de Quine :

- (1) $\forall x \exists V \forall FxVCw$
- (2) $\exists V \forall FxVCw$
- (3) $FtuCw$ (u instance V)
- (4) GtC
- (5) $\forall x GxC$

Ceci nous montre pourquoi ce n'est pas *dangereux* : dans la transformation qui permet de passer de (3) à (4), la variable instanciée à partir de l'énoncé existentiel (2) a *disparu*, absorbée dans la définition mathématique correspondante. Par conséquent, il n'y a pas de risque d'erreur dans la restitution des quantificateurs. Cela nous le voyons a posteriori ; celui qui rédige la démonstration le sait a priori. Qu'en est-il de l'étudiant qui étudie le cours ?

Quant à la phrase "C est voisinage de chacun de ses points", elle joue à la fois le rôle de (4) et de (5) ; dans un mouvement inverse, x passe du statut de lettre de constante d'objet, à celui de variable liée. On retrouve le même phénomène dans la deuxième partie de la démonstration.

On peut comparer cette démonstration avec le début de la démonstration ci-dessous qui se trouve dans le même ouvrage, p.75

“Théorème 18-4. - Toute application continue f d'un espace métrique compact E dans un autre espace métrique F est uniformément continue.

*Première démonstration.*¹¹ - Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue on peut, à tout $x \in E$, associer un voisinage ouvert w_x , tel que l'oscillation de f sur w_x soit $\leq \varepsilon$.

Soit p le nombre associé à la famille des w_x d'après le lemme 18-1.

Toute boule $B(y,p)$ de E est contenue dans au moins un w_x ; donc sur cette boule, l'oscillation de f est $\leq \varepsilon$; ceci démontre la continuité uniforme de f .

Comparons les deux phrases suivantes:

Pour tout $x \in C$, il existe un voisinage connexe V de x contenu dans w

A tout $x \in E$, (on peut) associer un voisinage ouvert w_x , tel que l'oscillation de f sur w_x soit $\leq \varepsilon$.

Elles ont la même structure syntaxique, mais on voit apparaître une différence de traitement concernant la “dépendance” de la deuxième lettre de variable sur la première. Dans le cas de la deuxième démonstration, c'est parce qu'on a besoin de la famille des w_x que l'on marque l'indexation; en d'autres termes *x va varier pendant le temps du raisonnement*.¹²

Dans la démonstration suivante, tirée du même ouvrage, p. 92, on voit apparaître une “dépendance” qui semble relever plutôt du *principe de précaution* :

Dans ce qui suit on note X un ensemble quelconque, Y et un espace métrique muni d'une distance d , et $F(X,Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y . Cet ensemble est muni d'un écart noté également d défini de la manière suivante :

soient f et g deux applications de X dans Y , $d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$

¹¹ L'auteur donne deux démonstrations de ce théorème.

¹² Nous allons retrouver ceci plus loin chez Liouville.

Théorème 22-5. - Lorsque l'espace métrique Y est complet, $F(X, Y)$ est aussi complet.

Démonstration - Soit (f_n) une suite de Cauchy de $F(X, Y)$. Pour tout $x \in X$, l'inégalité

$$d(f_p(x), f_q(x)) \leq d(f_p, f_q)$$

montre que la suite $(f_n(x))$ de points de Y est une suite de Cauchy. Comme Y est complet, elle possède une limite que nous noterons $f(x)$.

Or f_n étant une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que, pour tous p et $q \geq n(\varepsilon)$, et pour tout $x \in X$, on ait :

$$d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon$$

Si dans cette inégalité on laisse x et p fixes et que $q \rightarrow \infty$, $f_q(x)$ tend vers $f(x)$, et on obtient l'inégalité :

$$d(f_p(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } p \geq n(\varepsilon)$$

Il résulte de cette inégalité que $d(f_p, f) \leq \varepsilon$, donc la suite f_n converge vers f dans l'espace $F(X, Y)$ muni de l'écart d .

Donc cet espace est bien complet.

Ici, on voit apparaître explicitement une notation de type fonctionnel sous la forme $n(\varepsilon)$; on peut penser qu'ici on veut insister sur le fait que l'entier n introduit ne dépend pas de x , mais seulement de ε . D'autre part, on retrouve les changements subreptices de statut logique pour les lettres x , p et q ; x et p sont *fixés provisoirement dans le temps du raisonnement*.¹³ Enfin, le théorème qui permet de justifier la substitution de f à f_q dans l'inégalité n'est pas explicité ; ce qui peut laisser croire qu'une telle substitution va de soi, or précisément, il y a ici des manipulations de lettres qui en d'autres circonstances pourraient être *dangereuses*.

Ces trois démonstrations mettent en évidence la grande variabilité de traitement des écritures quantifiées à l'intérieur d'un même manuel. Dans d'autres démonstrations de l'ouvrage apparaissent plusieurs niveaux d'indices dans des énoncés existentiels. Il n'est pas facile de déterminer ce qui pilote les choix de l'auteur quant aux notations utilisées. On peut légitimement se demander comment un lecteur novice peut faire la différence entre les situations où telle pratique peut conduire à une démonstration erronée, alors qu'elle sera acceptable dans d'autres cas. En tant que chercheur en Didactique des mathématiques, on peut faire l'hypothèse que *la règle de raisonnement* consistant à marquer la dépendance n'a pas un caractère de généralité absolue et est utilisée par l'expert lorsqu'il sait qu'il y a un risque de

¹³ On trouve ceci explicité chez Liouville dans le cours de calcul Différentiel de l'Ecole Polytechnique (Editions Ellipses)

“ dérapage ” ; en d’autres termes, l’expert choisit le niveau de rigueur qu’il s’impose dans un cours ou dans un manuel, non seulement en tenant compte du niveau d’évolution de la théorie qu’il expose, et du public auquel il s’adresse, mais également en s’appuyant sur ses connaissances du domaine, ce dernier point n’étant a priori partagé par celui qui s’adonne à l’étude.

d) *Le vocabulaire utilisé autour de la notion de dépendance des variables*

Nous avons relevé ci-dessous le vocabulaire associé à la notion de dépendance dans les différentes réponses des enseignants.

“ Il faut pouvoir prendre ε et le faire varier: ” (q_3)¹⁴ versus “ pour ε, x fixés ” sur la copie

“ ligne 5 on “ voyait ” que si on changeait de ε , on changeait de y_ε ” (q_2)

“ si on veut faire tendre ε vers 0, y_ε n’est pas fixé. ”

“ à la ligne 1, x et y qui dépendent de ε ne sont pas indicés par ε . ”

“ (...) elle émousse notre vigilance sur la variabilité de x et de y . ”

“ (...) une famille de suites (x_n) qui accompagne une famille de (y_ε) ”

“ il faudrait montrer qu’étant donné un réel quelconque, indépendant de tout choix antérieur, à partir d’un certain rang la distance à y d’un terme de la suite est inférieur à ce réel. ”

“ Attention, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, x et y dépendent de ε . ” (q_2)

“ ceci n’a été montré que pour “ le ” ε fixé au départ ” (q_2)

“ Attention, x se déplace avec ε ; si tu fixes x , ε est fixé également . ”

“ x et y sont fonction de ε (surtout y) ”

“ dans 5, le y étant fonction de ε , on n’a pas : $(x_n) \rightarrow y$ ” (q_1)

“ expliquer que y est fonction du choix de ε . ” (q_2)

“ si on se réfère à la ligne 1, pour avoir un x (et un y), il aurait fallu commencer par fixer un ε . ”

“ il faut garder en mémoire les paramètres dont dépendent les quantités qu’on manipule. ”

“ il faut acquérir l’intuition des moments où on piétine et de ceux où on avance réellement quand on cherche un exercice, et se souvenir qu’un raisonnement mathématique est un voyage qui ne peut pas s’achever quand est resté à la case départ ”

“ son x dépend de ε ; lorsqu’il fixe x , le ε est fixé. ”

“ dès que n dépasse le temps $N(\varepsilon/2)$... ”

“ x et y dépendent de ε ! Aussi son x bouge avec ε ; ”

Le vocabulaire utilisé est assez varié et imagé : on fait varier, ou au contraire on fixe ; on change ; il apparaît des termes liés à l’idée de déplacement : on accompagne, on fait un

¹⁴ q_1, q_2 et q_3 désignent respectivement les questions 1, 2 et 3 que nous avons posées aux enseignants.

voyage ; il y a les interventions du temps (du raisonnement) ; la notion de mouvement : tout bouge. Comme on pouvait s'y attendre apparaissent donc des images, des métaphores, des analogies. Pour certains collègues, cela semble remplacer le contrôle par les outils logiques ou symboliques qui sont peu mobilisés. D'autres collègues font référence explicitement aux deux modes de contrôles.

III. UN EXEMPLE HISTORIQUE

Dans ce qui suit nous analysons une démonstration de Liouville qui se trouve dans l'ouvrage : *Calcul différentiel. Cours de l'Ecole Polytechnique 1847-1848* (éditions Ellipses). L'intérêt pour notre travail est qu'on y retrouve une erreur qui nous semble être du même type que celle qui se trouve dans la démonstration de l'étudiant.

1. Présentation de la démonstration.

Liouville se propose de démontrer d'une part que lorsque la dérivée d'une fonction est strictement positive sur un intervalle, la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ; et d'autre part que lorsque la dérivée d'une fonction est identiquement nulle sur un intervalle, la fonction est constante sur cet intervalle. Les deux démonstrations comportent des déductions non justifiées. Nous présenterons ici seulement la seconde pour sa similitude avec celle de l'étudiant.

Liouville écrit (*nous avons ajouté la numérotation des phrases pour faciliter notre exposé*) :

Soit $f(x)$ une fonction supposée réelle : on a

$f'(x) = \lim (f(x+h) - f(x)) / h$. Par conséquent, $f'(x) = (f(x+h) - f(x))/h + \varepsilon$

ε étant une quantité qui tend vers 0 quand h tend lui-même vers 0. Donc

$$0. \quad f(x+h) - f(x) = h \{f'(x) + \varepsilon\}$$

[démonstration dans le cas $f'(x) > 0$, non reproduite ici]

Quand la dérivée est constamment nulle pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b , la fonction est constante pour toutes ces valeurs.

1. soient x et x_1 deux valeurs quelconques de la variable comprises entre a et b .
2. Je dis que $f(x) = f(x_1)$.

3. Je considère m quantités comprises entre x et x_1 , en posant $mh = x_1 - x$, ces quantités sont
4. $x + h, x + 2h, x + 3h, \dots, x + (m-1)h, x_1$.
5. en vertu de l'équation générale
6. $f(x+h) - f(x) = h \{f'(x) + \varepsilon\}$
7. on a, puisque $f'(x)$ est constamment nulle,
8. $f(x+h) - f(x) = h\varepsilon_1,$
 $f(x+2h) - f(x+h) = h\varepsilon_2,$
 $f(x+3h) - f(x+2h) = h\varepsilon_3,$
.....
 $f(x_1) - f(x + (m-1)h) = h\varepsilon_m,$
9. En ajoutant membre à membre, on a :
10. $f(x_1) - f(x) = h (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_m)$
11. Soit ε la plus grande de toutes les quantités représentées par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ etc. On a :
12. $f(x_1) - f(x) < h.m\varepsilon$ ou $f(x_1) - f(x) < mh. \varepsilon$
13. Mais, $mh = x_1 - x$. Donc
14. $f(x_1) - f(x) < (x_1 - x) \varepsilon$.
15. Le premier membre est une quantité constante qui ne varie pas quand m augmente ; il en est de même de $x_1 - x$
16. mais ε a pour limite 0 quand m croît indéfiniment.
17. Il suit de là que le premier membre de l'inégalité est nécessairement nul puisqu'il est constamment moindre qu'une quantité qui s'approche indéfiniment de zéro.
18. Donc $f(x_1) = f(x)$. Ce qu'il fallait démontrer.

2. Eléments d'analyse anachronique

L'analyse qui suit est anachronique en ce sens que nous critiquons le texte de Liouville comme s'il s'agissait d'un texte contemporain, exactement de la même manière que nous l'avons fait pour la démonstration fautive de l'étudiant qui a servi à notre enquête. A la ligne 16 se trouve une affirmation non justifiée, à savoir :

ε a pour limite 0 quand m croît indéfiniment

Avec notre point de vue moderne sur le statut des lettres :

A la ligne 0, h et x sont des lettres de variables ; ε est une fonction de deux variables, et pour chaque valeur de x , la fonction partielle de la variable h tend vers 0 quand h tend vers 0. A la ligne 1, x_1 et x sont introduits comme éléments génériques. Ce sont des noms d'objets. Ce principe de démonstration correspond à l'application de G.U. A la ligne 3, m n'est pas introduit explicitement comme élément générique, mais il va fonctionner comme un élément fixe jusqu'à la ligne 14. Moyennant quoi, h est également fixé. Si nous tenons compte de ces éléments, la ligne 6, malgré les apparences, n'est pas identique à la ligne 0 car dans l'égalité, x et h sont des quantités fixées depuis la ligne 1 (elles peuvent fonctionner comme valeurs assignées à une lettre de variable) ; par conséquent, il en est de même de ε , qui est renommé en ε_1 à la ligne 8. On peut penser cependant que dans l'esprit de l'auteur, ce qu'il veut, c'est réécrire l'équation générale. Pour cela, si l'on voulait respecter les règles du calcul des prédicats, il faudrait changer les deux lettres de variable. On peut écrire par exemple :

$$6'. \quad f(y+u) - f(y) = u \{ f'(y) + \varepsilon \} \quad \text{où } \varepsilon \text{ tend vers 0 quand } u \text{ tend vers 0.}$$

La ligne 8 est alors obtenue en affectant à y successivement les valeurs $x, x+h, x+2h, x+3h, \dots, x+(k-1)h$ et à u la valeur h . On obtient ainsi les quantités constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$

Jusqu'à la ligne 14, on effectue un certain nombre de manipulations sur des quantités constantes. On peut remarquer qu'à la ligne 10 déjà, on peut faire "disparaître" la lettre h en écrivant :

$$10'. \quad f(x_1) - f(x) = (x_1 - x) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_m) / m.$$

Comme on peut remplacer h partout par $(x_1 - x)/m$, l'égalité 10'. peut effectivement être considérée comme ne faisant pas du tout intervenir h . Cette écriture peut faire penser à la moyenne de Césaro. Cependant, il faut tenir compte du fait suivant : pour chaque valeur de m , on définit une suite ω de la manière suivante :

$$\omega_1 = \varepsilon_1, \omega_2 = \varepsilon_2, \omega_3 = \varepsilon_3, \dots, \omega_m = \varepsilon_m, \text{ et } \omega_k = 0 \text{ pour tout } k \text{ supérieur strictement à } m.$$

On a ainsi affaire à une famille de suites. Liouville introduit le maximum des quantités ε_k pour aboutir à la majoration ligne 15. Il utilise l'énoncé suivant :

Il existe un unique entier j tel que pour tout k compris entre 1 et m , $\varepsilon_k \leq \varepsilon_j$. Il note ε cet élément.

Cet entier j dépend de m (il s'agit d'une instantiation existentielle suivant une instantiation universelle) ; en outre chacun des éléments de la suite w dépend lui-même de m . A la ligne 15, m n'est plus fixé (ce n'est plus un élément générique) ; il devient une variable. Par suite h

devient une fonction de m (une suite) ; il en est de même pour ε . D'ailleurs, ε a clairement le statut de suite à la ligne 16.

Lorsque Liouville rédige son texte, le calcul de prédicats n'a pas encore été développé et les travaux de Bolzano ne sont pas disponibles. Cependant, il accorde une place importante dans son cours à la notion de variable. Il précise en ces termes au début de son cours (page 1) la notion de variable qu'il utilise :

“ On appelle quantité constante une quantité qui ne varie pas pendant le cours d'un calcul¹⁵ ; on appelle quantité variable, une quantité qui prend différentes valeurs dans le même calcul [...]
On appelle variable indépendante une quantité à laquelle on donne des valeurs arbitraires depuis une quantité a jusqu'à une quantité b ”.

Cette notion s'oppose à celle de quantité fonction de x , x variable indépendante. La définition de la fonction fait appel à la notion de dépendance : la quantité varie quand x varie. On note que l'objet premier ici est la quantité et que *fonction*, *constante*, *indépendante*, sont des adjectifs, des qualités de la quantité variable. La notion de fonction de fonction est introduite de même, pour une quantité qui dépend d'une variable qui n'est pas elle-même indépendante, puis celle de fonction de plusieurs variables et Liouville écrit page 10 : “ Tout le calcul différentiel se conçoit sur la base de ces distinctions : variables indépendantes et dépendantes. ”

Sous ce point de vue, x et x_1 sont des quantités constantes ; ceci est confirmé ligne 15. Toutefois, pour passer de la ligne 7 à la ligne 8, la quantité x fonctionne comme quantité variable puisqu'elle prend des valeurs successives. En ce qui concerne m , elle semble fonctionner comme quantité constante jusqu'à la ligne 14. A partir de la ligne 15, elle fonctionnerait comme variable indépendante (si on fait une extension de cette notion pour les entiers naturels). Ce changement de statut pour m affecte en ricochet le statut de h , puisque h est une quantité fonction de m et également celui de ε ; en effet la quantité ε est fonction de h et de m , mais comme h est fonction de m , ε est fonction de fonction de m . Notons que pour que l'on puisse considérer ε comme fonction de deux variables, il faudrait, du point de vue de Liouville, que h soit une variable indépendante, ce qui n'est pas le cas. En outre, même si l'on considère que tout au long du calcul m est une quantité variable, h est utilisée comme variable indépendante ligne 6 ; il s'ensuit que son statut à la ligne 7 est instable ; elle intervient comme variable dépendante pour les quantités $x + h$, $x + 2h$ etc. ; est-elle dépendante ou indépendante quand elle représente l'accroissement ?

¹⁵ C'est nous qui soulignons.

Ce qui précède montre que dans cette démonstration une même lettre peut désigner, suivant les moments du calcul, une quantité constante et une quantité variable ; une variable indépendante et une variable dépendante ; c'est le reproche qui est fait majoritairement par les enseignants à l'étudiant dont nous avons analysé la démonstration.

Comme l'affirmation 16 n'est pas motivée, on ne sait pas quel est le raisonnement de Liouville. Sans doute considère-t-il que la déduction est évidente, puisqu'il ne la justifie pas. Peut-être applique-t-il la composition des limites en considérant que la suite ε est de la forme $\theta \circ h$, avec θ fonction de la variable h ayant pour limite 0 en 0 et h suite de limite nulle. Or, en fait, la fonction θ dépend de m ; c'est pourquoi, dès que l'on fait *varier* m , "*tout bouge*". Nous proposons ci-dessous une "reconstruction" de sa démonstration

L'idée de Liouville est de décomposer l'accroissement $f(x_1) - f(x)$ en somme des accroissements $f(x+kh) - f(x+(k-1)h)$ pour $1 \leq k \leq m$. En ajoutant les valeurs absolues qu'il néglige, on obtient :

$$|f(x_1) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^m |f(x+kh) - f(x+(k-1)h)|$$

Puis Liouville écrit :

$$f(x+kh) - f(x+(k-1)h) = \frac{f(x+kh) - f(x+(k-1)h)}{h} \cdot h = \varepsilon_k h,$$

où

$$\varepsilon_k = \frac{f(x+kh) - f(x+(k-1)h)}{h}.$$

D'où

$$|f(x_1) - f(x)| \leq h \left(\sum_{k=1}^m |\varepsilon_k| \right).$$

En raisonnant grossièrement, on peut dire que chaque ε_k tend vers 0 quand h tend vers 0,

c'est à dire quand m tend vers $+\infty$. Mais comme le nombre de termes de la somme $\sum_{k=1}^m |\varepsilon_k|$ est

égal à m , donc tend vers l'infini, Liouville sait, la lecture de son cours le montre, qu'on ne

peut pas en déduire que cette somme tend vers 0. C'est de là que vient sans doute l'idée de poser :

$$\varepsilon = \text{Max}\{\varepsilon_k / k=1, 2, \dots, n\}$$

D'où $|f(x_1) - f(x)| \leq m \varepsilon h = \varepsilon (x_1 - x)$

Puis Liouville affirme que ε tend vers 0, et c'est là la clé du résultat.

Or, de notre point de vue, ceci est loin d'être évident. Revenons en effet à la définition de la limite. Il s'agit de montrer que pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m > M$ on ait $\varepsilon \leq \alpha$. Ici la seule variable est bien m , car ε_k , une fois fixés f, x, x_1 , ne dépend que de $h = \frac{x_1 - x}{m}$, donc de m , et la définition même de ε introduit à nouveau une dépendance de m .

L'inégalité $\varepsilon \leq \alpha$ est équivalente, par définition de ε , à la conjonction des inégalités $|\varepsilon_k| \leq \alpha$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Or ε_k est le taux d'accroissement de la fonction f au point $x + (k-1)h = x + (k-1)\frac{x_1 - x}{m} = x_{km}$, cette dernière notation mettant en évidence la dépendance par rapport aux deux variables k et m . Comme $f(x_{km}) = 0$, il existe η_k (que l'on pourrait noter η_{km}) tel que :

$$|u| \leq \eta_k \text{ implique } \frac{|f(x_{km} + u) - f(x_{km})|}{u} \leq \alpha$$

Finalement, pour que $|\varepsilon| \leq \alpha$, il suffit que l'on ait $|\varepsilon_k| \leq \alpha$, c'est-à-dire $h \leq \eta_k$ pour k variant de 1 à m . Ceci équivaut à $h \leq \text{Min}\{\eta_k / 1 \leq k \leq m\}$, ou encore à

$$\frac{x_1 - x}{m} \leq \text{Min}\{\eta_k / 1 \leq k \leq m\}.$$

Mais comme le deuxième membre est une fonction de m , dont a priori on ne sait rien, on ne voit pas comment, logiquement, affirmer cette inégalité. Il faut en conclure que l'évidence implicitement supposée par Liouville ne résulte pas d'une déduction logique simple reposant sur la définition de la dérivée.

3. Commentaires

Notons tout d'abord que ce type d'exercice est extrêmement périlleux et qu'il est difficile de se départir de ses outils d'analyse habituels et précisons que nous ne prétendons nullement faire une analyse historique de ce texte. Notre perspective est clairement didactique ; il ne faut pas oublier que ce texte est un cours, certes destiné à des étudiants de haut niveau, mais c'est

néanmoins un texte à caractère didactique. Précisons également que nous ne prétendons pas que notre analyse soit totalement aboutie. Ces précautions prises, nous pouvons avancer quelques commentaires. La lecture de la démonstration de Liouville fait apparaître une affirmation non motivée (comme allant de soit) à la ligne 16. L'analyse logique (modeste) de la démonstration en termes modernes permet de repérer un changement de statut pour certaines lettres. S'il s'agissait du texte d'un étudiant contemporain, on pourrait dire qu'il s'agit d'une erreur du même type que celle relevée dans le texte de l'étudiant analysé plus haut. Concernant Liouville, c'est la connaissance du contenu mathématique qui est en jeu ; il sait que le résultat est juste ; d'une certaine manière son intuition ne le trompe pas. On pourrait dire à la manière de Poincaré qu'il avait bien senti ce qui se passait. On peut d'un autre point de vue rattacher ceci au projet de Frege, à savoir créer un système permettant d'éliminer tout recours à l'évidence. Ici, il n'y a pas de recours explicite à l'évidence, mais l'affirmation de la ligne 16 y fait implicitement appel.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

1. Conclusion

En l'état actuel de notre travail, les conclusions sont nécessairement modestes. Nous pouvons toutefois dégager de notre enquête deux phénomènes de nature opposée :

- un invariant apparaît chez les enseignants que nous avons interrogés : la nécessité de bien noter dans quel cas une variable (ici x ou y) dépend d'une autre variable (ici ε). Ainsi un contrôle sémantique du raisonnement est nécessaire ; en outre cette insistance sur un problème relatif à la manipulation des variables souligne le rôle de cette notion, et donc la pertinence de la référence au calcul des prédicats. Paradoxalement, la notion de variable ne fait plus l'objet d'un enseignement, alors que nous avons vu chez Liouville des développements explicites sur la définition d'une variable et ses différents statuts considérés même comme le fondement de la compréhension du calcul infinitésimal.
- en revanche, une grande variabilité apparaît chez les enseignants quant à la nécessité de contrôles de type syntaxique sur les démonstrations. Il en est de même de l'emploi des quantificateurs qui sont interdits par une minorité et employés par une majorité mais d'une façon qui peut être fort laxiste ou au contraire très rigoureuse.

En prenant en compte non plus seulement notre enquête mais l'ensemble des exemples que nous avons abordés, il apparaît qu'il existe bien une pratique de la démonstration en analyse,

intermédiaire, des points de vue langagiers et cognitifs, entre la simple logique sous-jacente au langage courant et une démonstration formalisée. Cette pratique nous apparaît pour le moment bien difficile à définir exhaustivement, comme on peut le voir en revenant sur l'usage que nous avons rencontré de l'indexation d'une variable par une autre dont elle dépend. A propos de cet usage, on peut relever :

- que dans le domaine des démonstrations en (ε, η) (une " sphère de pratique " dirait Bourdieu, 1980) un assez grand nombre de collègues *canonisent* cette notation. Mais son apparition chez Choquet doit être expliquée : peut-on considérer qu'elle intervient dans des cas qui sont simplement des formes plus abstraites des (ε, η) ?

- que par contre dans d'autres domaines, elle n'apparaît pas. Il semble peu vraisemblable par exemple, dans le cas du théorème des accroissements finis, d'écrire c_f , voire c_{fab} , pour indiquer toutes les variables dont dépend c ! D'ailleurs l'énoncé lui-même du théorème porte sur des éléments génériques ; ce qui dispense de faire apparaître la quantification universelle. On peut se demander si ce n'est pas Liouville qui a raison, en ce sens que lorsque les variables sont destinées à garder la même valeur (où la même référence) le temps d'un calcul, ou plus largement le temps d'un raisonnement, alors on les considère comme des constantes, jouant d'ailleurs souvent le rôle d'exemple générique. Effectivement, dans la plupart des applications du théorème des accroissements finis, f , a et b sont fixés et de ce point de vue, la démonstration du théorème généralisé recèle un " piège ". Il ne semble pas certain toutefois que cette intervention du temps du raisonnement permette d'expliquer toutes les apparitions et absences de l'indexation des variables, y compris dans une même démonstration comme on l'a vu chez Choquet ; les connaissances mathématiques a priori de celui qui rédige la démonstration semble en effet jouer un rôle non négligeable. Ceci nous semble être au cœur du questionnement didactique qui motive notre recherche : comment un étudiant, novice du domaine mathématique abordé, peut-il se frayer un chemin dans ces pratiques non stabilisées de la démonstration en analyse.

2. Propositions de recherche

Nous allons, pour terminer, indiquer un programme de continuation de ce travail sur l'articulation entre *logique, raisonnement, rigueur et validité*.

1) La poursuite de l'étude de démonstrations anciennes (antérieures à l'élaboration du calcul des prédicats) en s'intéressant en particulier au statut des lettres utilisées, au type des déductions faites et aux outils de contrôles présents dans la démonstration.

2) La poursuite d'étude de démonstrations issues des manuels avec la même perspective.

3) La mise en perspective avec les travaux balisant ce champ en Didactique des Mathématiques et en Epistémologie

4) L'analyse du discours de l'enseignant dans sa classe

5) L'analyse de démonstrations produites par des étudiants

A terme, le but est de faire des propositions structurées d'enseignement pour les premiers cycles universitaires scientifiques et pour la formation des professeurs de mathématiques permettant en particulier de répondre à la question posée en introduction, à savoir :

de quels outils un étudiant en mathématiques doit-il disposer pour satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent en principe de se prémunir contre les preuve non valides ?

Notons bien que ces outils devant être opératoires dans tous les domaines mathématiques rencontrés, il est bien clair qu'un enseignement de logique stricto-sensu ne saurait répondre à cette exigence. A contrario, notre hypothèse de travail est que cet enseignement doit s'appuyer sur la logique des prédicats.

BIBLIOGRAPHIE

Arsac G. & Durand-Guerrier, V. (1999), Démonstration et quantification existentielle in *Actes de la X^e Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. IUFM Académie de Caen.

Bourdieu P. (1980) *Le sens pratique*. Editions de Minuit.

Choquet G. (1984), *Cours de Topologie*. Masson.

Copi I. (1954) *Symbolic Logic*. New York.

Durand-Guerrier V. (1999), L'élève, le professeur et le labyrinthe in *Petit X* n°50. IREM de Grenoble.

Duval R. & Egret M.A. (1993), Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif in *Repère* n°12. Topiques Editions.

- Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Peter lang
- Gentzen G.(1935), Untersuchungen über das logische Schliessen in *Math. Zeitschr.*, 39.Traduction française : *Recherche sur la déduction logique..* PUF 1955.
- Glaeser G. (1973), *Mathématiques pour l'élève professeur*. Hermann
- Gochet P.& Gribomont P. (1990), *Logique. Méthodes pour l'informatique fonda-mentale..* Hermès
- Granger G.G. (1994), *Formes, opérations, objets*. Vrin.
- Hersh R. (1997), *What is mathematics, really*. Oxford.
- Houdebine J. (1998) *La démonstration. Ecrire des démonstrations au Collège et au Lycée*. Hachette Education.
- Liouville J.,*Calcul différentiel. Cours de l'Ecole Polytechnique 1847-1848*. Ellipses
- Quine W.V.O. (1950), *Methods of logic*. Holy, Rinehart & Winston. Traduction française : *Méthodes de logique*. Armand Colin. 1972.