

ASPECTS EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES DE LA LIAISON "POINTS - VECTEURS"

André PRESSIAT¹

INRP et IUFM d'Orléans – Tours

La présentation porte sur une thèse, soutenue en mai 1999. Le point de départ de ce travail réside dans le constat des récentes difficultés d'enseignement, en France, relatives à l'emploi du calcul vectoriel pour traiter des questions de géométrie au lycée, constat que nous expliciterons en examinant l'enseignement de deux types de problèmes : le traitement vectoriel des questions d'alignement et de concours en classe de seconde, et l'étude de configurations planes à l'aide de transformations vectorielles en terminale. Le but de ce travail est d'analyser les raisons de ces difficultés, puis de proposer des éléments d'ingénierie curriculaire sur ce thème. Comme l'indique le titre de la thèse, le cadre d'analyse est à la fois épistémologique et didactique. Du point de vue didactique, le cadre théorique utilisé est celui de la théorie anthropologique, et notamment les notions d'organisation mathématique et d'organisation didactique. La démarche générale consiste à entreprendre une étude épistémologique et historique la plus complète possible relative à l'émergence des notions de vecteur, d'espace vectoriel et d'espace affine, en focalisant notre attention sur les organisations mathématiques et didactiques déjà mises en œuvre, en France mais également dans d'autres pays, qui intègrent les deux types de problèmes évoqués plus haut. Cette prise de distance par rapport aux pratiques institutionnalisées et dominantes dans notre pays est ensuite mise à profit pour proposer de nouvelles organisations mathématiques et didactiques qui ne souffrent plus des mêmes faiblesses ; elles introduisent un nouvel ostensif, le vecteur - position, ce qui modifie les techniques utilisées, mais également le contenu et la genèse des organisations mathématiques et didactiques proposées.

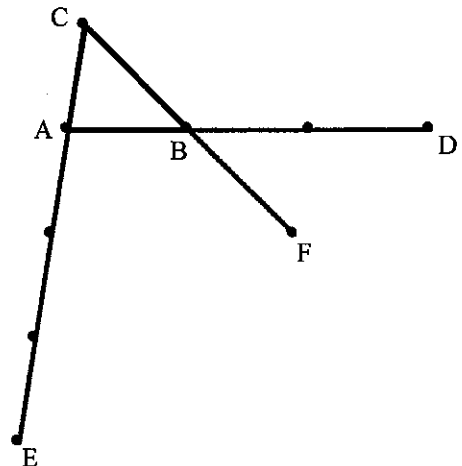
Dans la suite, nous évoquerons rapidement quelques exemples de problèmes dont l'enseignement a récemment rencontré des difficultés. Ensuite, nous développerons la liaison « points – vecteurs » d'abord du point de vue théorique, puis du point de vue des types de problèmes et des techniques. Nous présenterons ensuite la nouvelle organisation mathématique et didactique, avant de conclure et d'évoquer des questions qui restent à étudier.

¹ andre.pressiat@wanadoo.fr

I. DIFFICULTES RECENTES DANS LA MISE EN ŒUVRE DES PROGRAMMES

1. Au niveau de la classe de Seconde

L'énoncé suivant est un exemple illustrant le type de problèmes d'alignement souvent traité immédiatement après que la multiplication externe a été introduite. Il sert de support à l'explicitation d'une méthode proposée par N. Vogel dans un article de la revue «Repères IREM» (n°16), dans lequel l'auteur critique celles proposées par divers auteurs de manuels.

	<u>Énoncé</u> On donne un triangle ABC et les trois points D, E, F définis par : $\vec{AD} = 3 \vec{AB}$ $\vec{CF} = 2 \vec{CB}$ $\vec{AE} = -3 \vec{AC}.$ Prouver que D, E, F sont alignés.
--	---

La méthode proposée, du point de vue mathématique, n'utilise que la définition et les propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication externe, ainsi que la caractérisation de l'alignement de trois points en termes de vecteurs colinéaires. En revanche, elle fait intervenir des accessoires et des techniques associées à ces accessoires : identification et utilisation de vecteurs ou chemins coloriés reliant des points ; l'emploi des vecteurs seuls semble manquer de puissance et d'autonomie, il faut le contrôler à l'aide d'indices extérieurs. Ces techniques ne seront ni reprises dans les classes ultérieures, ni reliées à celles découlant de l'emploi du barycentre. On peut s'étonner de l'absence quasi-totale dans les manuels de Seconde d'une technique comme la suivante, utilisant une base attachée à la configuration.

Prenons comme base $\left(\vec{AB}, \vec{AC} \right)$. Décomposons $\vec{ED}$ et $\vec{EF}$ dans cette base.

$$\vec{ED} = \vec{AD} - \vec{AE} = 3 \vec{AB} + 3 \vec{AC}$$

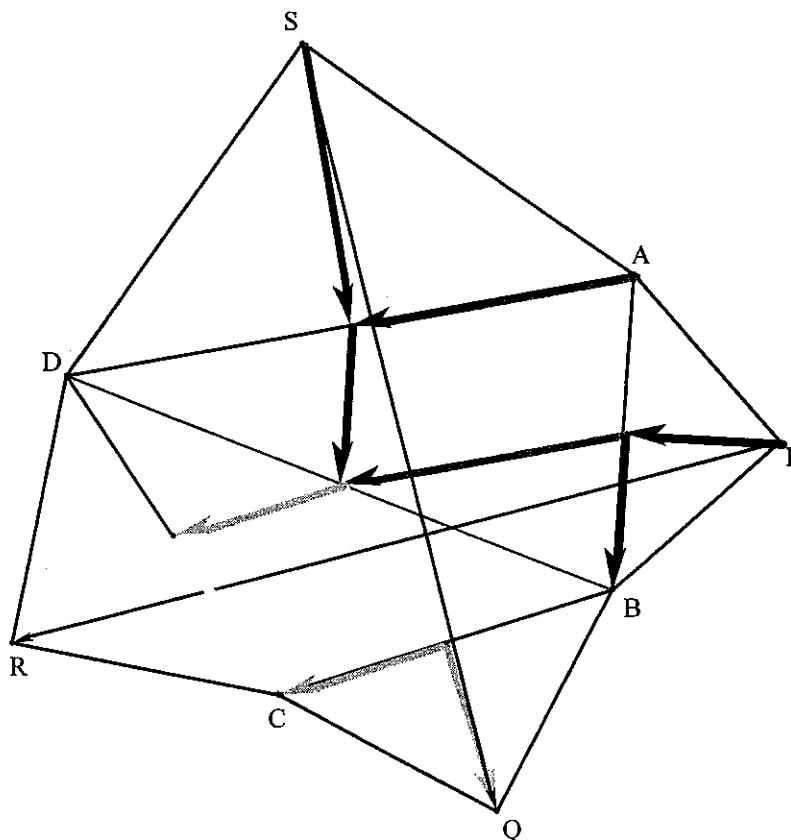
$$\begin{aligned} \vec{EF} &= \vec{AF} - \vec{AE} = \vec{AC} + \vec{CF} + 3 \vec{AC} = 4 \vec{AC} + 2 \vec{CB} = 4 \vec{AC} + 2 \vec{AB} - 2 \vec{AC} \\ &= 2 \vec{AB} + 2 \vec{AC}. \end{aligned}$$

Donc $\vec{ED} = \frac{3}{2} \vec{EF}$. Et donc D, E et F sont alignés.

Le recours à une base est jugé inutile pour traiter une telle question. La notion de base sera introduite plus tard, et réservée quasi-exclusivement à l'utilisation en géométrie analytique.

2. Au niveau de la classe de Terminale S

La technique que nous allons évoquer concerne l'emploi d'une transformation vectorielle (essentiellement une isométrie vectorielle ou une similitude vectorielle) pour l'étude d'une configuration du plan (par exemple, celle dite « des triangles de Napoléon » ou celle de Van Aubel – les centres des carrés construits sur les côtés d'un quadrilatère ABCD forment un quadrilatère EFGH dont les diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires – illustrée ci-dessous).



Nous laissons au lecteur le soin de reconstituer l'effet du quart de tour vectoriel direct sur la décomposition du vecteur $\overrightarrow{PR}$, et de reconstituer ensuite le vecteur $\overrightarrow{SQ}$. L'introduction de cette technique dans les programmes date de 1986, avec une première mise en application dans les classes à la rentrée 1989 ; elle disparaîtra dès la rentrée scolaire de 1994.

II. POINTS ET VECTEURS : POINT DE VUE THEORIQUE

Parmi les 43 ouvrages que nous avons examinés pour reconstituer l'émergence et le développement du calcul vectoriel - ponctuel, les auteurs suivants sont incontournables.

Pour l'émergence des espaces vectoriels

LEIBNIZ - 1672/79	HAMILTON - 1843
GRASSMANN - 1839/44	GIBBS - 1879/84

BURALI-FORTI & MARCOLONGO - 1909/10

Pour l'émergence des espaces affines

WEYL - 1918/22

FRÉCHET - 1928

Pour les constructions théoriques de la géométrie, autres que celles d'Euclide et de Weyl

HILBERT - 1899

BIRKHOFF - 1929

BRISAC - 1955

BLUMENTHAL - 1961

DIEUDONNÉ - 1964/68

Pour les articulations entre les voies anciennes et la voie vectorielle

FRÉCHET - 1928

ARTIN / BLUMENTHAL - 1955

CHOQUET - 1964

MIRON - BRÄNZEI - 1995

Nous n'évoquerons ici que certains d'entre eux, d'un triple point de vue : existence dans leurs travaux d'une remise en cause des théories antérieures ; citations (parfois traduites par nos soins) de certains passages importants ; influence de l'œuvre du point de vue didactique.

LEIBNIZ - 1672/79

- Dans son ouvrage «La caractéristique géométrique», Leibniz critique le choix des axiomes fait par Euclide, ainsi que la géométrie analytique de Descartes.

- Il est à la recherche de l'analogie pour la géométrie de ce que l'algèbre permet pour les grandeurs : « Il nous faut encore une autre Analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement *situm* comme l'Algèbre exprime *magnitudinem*. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit représenter des figures et même des machines et mouvemens en caractères, comme l'Algèbre représente les nombres ou grandeurs ; et je Vous en envoie un essai, qui me paroît considérable. ».

Dans ce but, il définit les caractères :

« Les caractères sont des objets exprimant les relations entre d'autres objets, plus faciles à manier qu'elles », et introduit en particulier le suivant :

« on désigne par A.B la situation mutuelle des points A et B, c'est-à-dire un extensum (rectiligne ou curviligne, peu importe) qui les relie et demeure le même tant que cette situation ne varie pas ». Leibniz définit ensuite la notion de congruence, et introduit à ce sujet une nouvelle notation, voisine de la lettre γ , qui lui permet de définir les ensembles suivants : sphère de centre A et de rayon AB, plan (ensemble des points équidistants des points A et B), droite (ensemble des points Y tels que A.Y γ B.Y γ C.Y).

Leibniz utilise la congruence γ pour énoncer des axiomes :

- le premier dit que A γ B, c'est-à-dire qu'un point quelconque est congru à tout autre, ce qui distingue l'espace géométrique de l'espace physique ;

- le deuxième dit que la relation A.B γ B.A est toujours vraie.

Ces choix interdisent à Leibniz de voir A.B et B.A comme deux entités distinctes, étape indispensable pour que Leibniz ait pu développer un système vectoriel. Grassmann fournira une réponse au projet que Leibniz a su définir sans pouvoir le conduire à son terme, réponse qui lui permettra en 1846 de gagner un prix promis par la revue « Jablonowskischen Gesellschaft » pour récompenser la création d'un système satisfaisant aux contraintes énoncées par Leibniz.

HAMILTON - 1843

On sait qu'on lui doit l'introduction du mot « vecteur » :

« The algebraically *real* part may receive ... all values contained on the one *scale* of progression of number from negative to positive infinity ; we shall call it therefore the scalar part, or simply the scalar of the quaternion, and shall form its symbol by prefixing, to the symbol of the quaternion, the characteristic Scal., or simply S., where no confusion seems likely to arise from using this last abbreviation. On the other hand, the algebraically imaginary part, being geometrically constructed by a straight line or radius vector, which has, in general, for each determined quaternion, a determined length and determined direction in space, may be called the vector part, or simply the vector of the quaternion ; and may be denoted by prefixing the characteristic Vect., or V. We may therefore say that a quaternion is in general the sum of its own scalar and vector parts, and may write

$$Q = \text{Scal.}Q + \text{Vect.}Q = S.Q + V.Q$$

or simply $Q = SQ + VQ$. ».

Hamilton illustre l'emploi des symboles V et S dans le cas particulier des quaternions dont la partie scalaire est nulle : si $\alpha = xi + yj + zk$ et $\alpha' = x'i + y'j + z'k$, $S\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz')$ et $V\alpha\alpha' = i(yz' - z'y) + j(zx' - xz') + k(xy' - x'y)$.

GRASSMANN - 1839/44

- Comme Leibniz, il remet en cause la construction d'Euclide : « la géométrie manque toujours d'un début scientifique et [...] le fondement pour tout l'édifice de la géométrie souffre jusqu'à présent d'un défaut qui rend nécessaire une transformation complète de celui-ci. »

- Il est l'inventeur de la relation que seuls les manuels (à de rares exceptions près) et la tradition française attribuent à Chasles, comme le montre cet extrait d'une de ses lettres :

« Le point de départ vint de la considération de quantités négatives en géométrie : j'étais habitué à voir les distances AB et BA comme des quantités opposées. Il en résultait la conclusion que si A, B et C sont des points d'une ligne droite, alors dans tous les cas $AB + BC = AC$, ceci étant vrai aussi bien lorsque AB et BC sont dirigés dans le même sens que s'ils sont de sens contraire (quand C est entre A et B). Dans ce dernier cas, AB et BC ne sont pas considérés simplement comme des longueurs, mais simultanément leurs sens sont pris en considération car ils sont de sens contraires. Ainsi fut mis à jour la distinction entre somme de longueurs et somme de distances ayant une direction fixe. Il en résultait la nécessité de définir ce dernier concept de somme non seulement dans le cas où les distances ont des sens égaux ou opposés, mais aussi dans tous les autres cas. Ceci peut être fait de la manière la plus simple en faisant que $AB + BC = AC$ reste vrai quand A, B et C ne sont pas sur une même ligne droite. ...

Quand je combinai ce concept de produit géométrique avec l'idée antérieurement établie de somme géométrique, l'harmonie la plus frappante en résulta.

Un travail sur la théorie des marées, que j'avais entrepris il y a longtemps, me conduisit à la Mécanique Analytique de Lagrange et, de ce fait, je repris ces idées d'analyse. Tous les développements dans ce travail furent transformés selon les principes de cette

nouvelle analyse d'une manière si simple que les calculs devenaient souvent plus de dix fois plus courts que dans l'œuvre de Lagrange. ».

C'est également à Grassmann que l'on doit l'extension du calcul barycentrique de Möbius dans le cas où la somme des coefficients est nul, résultat connu dans la tradition française sous le nom de « fonction vectorielle de Leibniz » (!).

Son travail, d'accès difficile, sera très peu diffusé, avant de connaître une reconnaissance tardive.

GIBBS - 1879/84

C'est l'un des créateurs de l'algèbre linéaire moderne, en isolant les vecteurs de la théorie des quaternions.

« Mon premier contact avec les quaternions eut lieu lors de la lecture de « Electricity and Magnetism » de Maxwell, où les notations des quaternions sont beaucoup utilisées. Je fus vite convaincu que pour dominer ce sujet, il était nécessaire que j'en maîtrise les méthodes. En même temps, je me rendis compte que, bien que les méthodes soient appelées quaternioniques, l'idée de quaternion était tout à fait étrangère au sujet. En ce qui concerne le produit de vecteurs, je me suis rendu compte qu'il y avait deux importantes fonctions (ou produits) appelées la partie vectorielle et la partie scalaire du produit, mais que la réunion des deux pour former ce qui était appelé le produit (complet) ne faisait pas avancer la théorie en tant qu'instrument d'investigation géométrique.[...] J'ai donc commencé à développer, en repartant de zéro, l'algèbre comportant les deux sortes de multiplication, les trois opérateurs différentiels,[...] Je finis par imprimer ce travail, mais ne le publiai pas, même si j'en distribuai un bon nombre d'exemplaires à des personnes qui me semblaient pouvoir y trouver un intérêt. Le délai que je pris et mon hésitation venaient principalement de ma difficulté à me décider sur des détails de notations, sujets secondaires en eux-mêmes, mais pour lesquels il vaut mieux éviter des changements inutiles. [...]. De toute manière, je me rendis compte que les méthodes que j'utilisais, tout en étant à peu près celles de Hamilton, étaient presque exactement celles de Grassmann. [...]. Je n'ai cependant pas conscience d'avoir été influencé par les écrits de Grassmann dans mon « Vector Analysis », même si je n'étais pas mécontent, dans l'introduction, de m'abriter derrière un ou deux noms distingués (Grassmann et Clifford) pour avoir fait des changements de notation que je pensais être détestables pour les quaternionistes. ».

- Gibbs est le premier à avoir donné un cours de calcul vectoriel, ayant précisément pour support son « Vector analysis ».

WEYL - 1918

Les propriétés « affines » ont été pressenties par Euler (1707–1783). Möbius parle d'affinités pour désigner les transformations projectives qui conservent le parallélisme.

- Hermann Weyl invente les espaces affines (qu'il définit et dont il établit les propriétés en quelques pages) afin de pouvoir les utiliser dans une géométrie différentielle permettant de traiter la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Dans une multiplicité à n dimensions, munie d'un système de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$, les formules de changements de coordonnées pour passer du système $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ au système $x_1, x_2, \dots, x_n$, étant de la forme $x_i = f_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$, où les fonctions f_i possèdent des dérivées partielles α_k^i continues dont le déterminant n'est pas nul, ceci afin d'assurer que la géométrie affine soit valable dans l'infiniment petit, de façon à pouvoir calculer les dx_i en fonction des $d\overline{x}_i$, par les formules

$$dx_i = \alpha_k^i d\overline{x}_k, \text{ (avec la convention de sommation d'Einstein)}$$

les coordonnées relatives d'un point $P'(x_i + dx_i)$ infiniment voisin d'un point $P(x_i)$ sont les composantes d'un élément linéaire ou d'une translation infinitésimale $\overline{PP'}$.

Les translations infinitésimales jouent le même rôle pour le développement du calcul tensoriel que celui que jouent les translations finies pour l'édification de la géométrie affine.

• Seulement 44 ans plus tard, on verra l'introduction des espaces affines tels qu'ils ont été définis par H. Weyl dans les programmes de la classe de Maths Spéciales A'.

BIRKHOFF - 1929

• L'ouvrage est construit de façon à enrichir petit à petit le système d'axiomes, de façon à faire disparaître des propriétés indésirables d'une part, et de façon à introduire le plus tard possible l'axiome d'Euclide d'autre part. On développe ainsi au maximum la géométrie dite « absolue », dans laquelle on ne fait intervenir ni cet axiome ni sa négation.

Aucune considération vectorielle n'apparaît dans ce livre. Il constitue une façon de structurer, sur le plan du savoir « savant », l'édifice enseigné au collège. Les noms donnés aux axiomes se veulent suggestifs.

Axiome 1 : Incidence

Axiome 2 : le postulat de la règle (graduée)

Il existe une application d de $\Pi \times \Pi$ dans $\mathbf{R}$, $(P, Q) \mapsto PQ$, telle que pour chaque droite d il existe une bijection f de d dans $\mathbf{R}$, telle que : pour tout couple (P, Q) de points de d on ait : $PQ = |f(P) - f(Q)|$.

On peut alors définir la relation « être entre », les notions de segment, de demi-droite, d'angle (comme réunion de deux demi-droites de même origine, non portées par la même droite), d'ensemble convexe.

Axiome 3 : Séparation

On peut alors définir l'intérieur d'un angle (comme intersection de deux demi-plans) et démontrer qu'il y a équivalence entre l'appartenance d'un point M à l'intérieur d'un angle $\angle AVB$ et le fait que la demi-droite $[VM)$ coupe le segment AB .

Axiome 4 : l'axiome du rapporteur

Axiome 5 : axiome du miroir (ou côté – angle – côté : cet axiome peut être présenté sous deux formes équivalentes)

Axiome 6 : Postulat d'Euclide (ou pour la géométrie non-euclidienne : l'axiome des parallèles).

• En 1929, Birkhoff et un enseignant, Ralph Beatley, ont écrit un article intitulé « A New approach to Elementary Geometry » fondé sur les propriétés ci-dessus et donnant des conseils à l'intention des enseignants de lycée.

CHOQUET - 1964

- Choquet propose deux axiomatiques permettant de dégager la structure vectorielle du plan.

La première s'inspire de la démarche de Birkhoff, mais la simplifie :

- d'une part, en remplaçant l'introduction de la relation « être entre » par celle d'une relation d'ordre total sur chacune des droites ;
- d'autre part, en introduisant très tôt l'axiome des parallèles, ce qui lui permet d'introduire en tant qu'axiome la conservation du milieu par une projection parallèlement à une droite (et d'obtenir ainsi un « plan de translation »).

Enfin, il utilise abondamment le pointage des droites et du plan, démontrant que les résultats obtenus en matière de vecteurs sont indépendants du point choisi.

La deuxième fait jouer un rôle plus important à la notion de distance.

- La première de ces axiomatiques inspirera les programmes de collège de la période des mathématiques modernes, la seconde les programmes qui leur succéderont.

DIEUDONNÉ - 1964/68

- Il propose une théorie du plan et de l'espace affine en se plaçant uniquement dans un espace vectoriel (de dimension 2 ou 3) ;

a et b désignant deux points d'un tel ensemble, la droite D_{ab} est l'ensemble des points $a + \xi(b - a)$ ou encore $(1 - \xi)a + \xi b$, ξ décrivant $\mathbf{R}$.

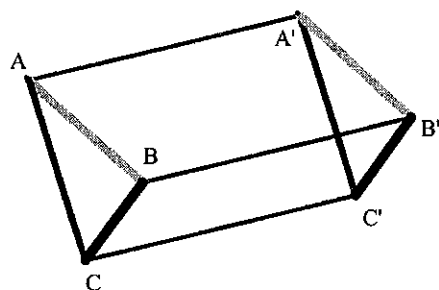
La notion de barycentre n'est nulle part abordée, pas même dans les thèmes d'exercices proposés.

- Son influence dans les débats sur l'enseignement de la géométrie est bien connue.

ARTIN - BLUMENTHAL - 1955/61

- Ils proposent une reconstruction axiomatique de la géométrie affine, sans disposer au départ de la notion de nombre.

- Elle met d'abord en évidence l'importance du petit axiome de Desargues (version affine)



Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que les droites (AA') , (BB') et (CC') soient parallèles et distinctes, alors les relations $(A'B') \parallel (AB)$ et $(A'C') \parallel (AC)$ impliquent : $(B'C') \parallel (BC)$.

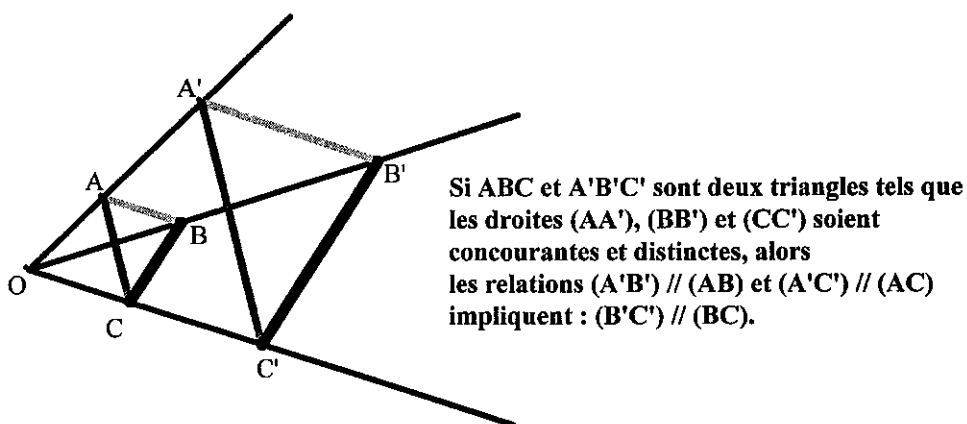
pour obtenir la transitivité de l'équipollence et le groupe additif des vecteurs à partir du parallélisme (Artin, «plan de translation» de Lelong-Ferrand), et pour obtenir un ensemble de nombres Γ ayant les propriétés suivantes (Blumenthal) :

1) $(\Gamma, +)$ est un groupe commutatif ; 2) pour toute coordonnée a , $a.0 = 0.a = 0$; 3) la multiplication est distributive à droite par rapport à l'addition.

Les vecteurs sont introduits à l'aide des translations, leur addition à partir de leur composition, aspect que l'on retrouve dans les programmes de collège depuis 1985, au moins.

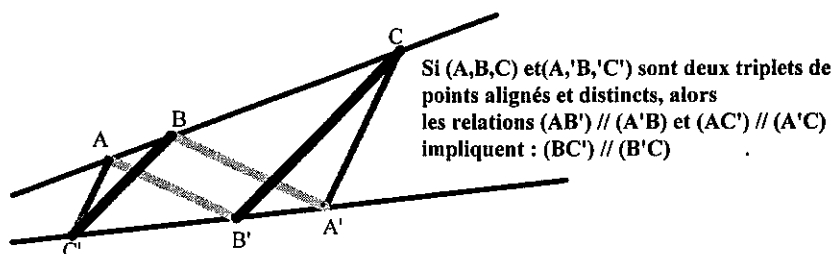
Blumenthal étudie un exemple simple de plan non arguésien (dans lequel le petit axiome de Desargues – ainsi d'ailleurs que le grand – est faux), qui mérite d'être davantage connu : le plan de Moulton.

– Le grand axiome de Desargues (version affine)



permet de faire de Γ un corps, de définir une multiplication externe et de faire de l'ensemble des vecteurs un espace vectoriel sur ce corps, le plan initial étant un plan affine attaché à cet espace vectoriel, et enfin de démontrer que toute droite du plan qui coupe la droite des y a une équation de la forme $y = x.m + b$.

– Enfin, l'axiome de Pappus (version affine)



assure la commutativité du corps, ce qui permet d'obtenir la forme usuelle des équations de droite.

MIRON – BRÂNZEI - 1995

• Ces auteurs roumains font le point sur les grandes présentations axiomatiques modernes de la géométrie élémentaire. On y retrouve les auteurs précédemment évoqués (Hilbert, Birkhoff, Weyl), dont les travaux sont repris avec un point de vue de logicien (axiomatique minimale, catégoricité), sans perdre de vue les questions d'enseignement.

L'introduction de la notion d'espaces « presque vectoriels » permet de mettre à jour le caractère non minimal du système d'axiomes usuel pour les espaces vectoriels, et d'expliquer le caractère un peu surprenant de l'axiome « Pour tout x , $1 * x = x$ ». On obtient un système d'axiomes minimal en remplaçant dans la définition usuelle d'un espace vectoriel l'axiome précédent par l'axiome « $\forall x \neq 0, 1 * x \neq 0$ ».

- Ils proposent une *définition mathématique des vecteurs en termes de direction, sens, longueur* dans le cadre de l'axiomatique de Hilbert, ce qui montre d'une part qu'une telle définition est possible, mais d'autre part qu'elle est très complexe.

On peut noter l'abondance et la diversité des travaux théoriques mettant en jeu la liaison points - vecteurs, ainsi que leur impact sur l'évolution des programmes d'enseignement en France.

Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer qu'un travail beaucoup plus réduit a été fait en ce qui concerne les aspects pratiques et techniques d'emploi du calcul vectoriel - ponctuel dans des problèmes relevant de la géométrie élémentaire.

III. POINTS ET VECTEURS : POINT DE VUE DES TYPES DE PROBLEMES ET DES TECHNIQUES

Les ouvrages dans lesquels les aspects pratiques et techniques sont évoqués sont beaucoup moins nombreux.

Compte tenu des contraintes de place, nous n'aborderons ici que les problèmes d'alignement. Nous évoquerons dans un premier temps les ouvrages de Grassmann et de Gibbs, et ensuite ceux de Marcolongo et Burali-Forti et de Coffin, qui sont les premiers ouvrages de calcul vectoriel publiés en langue française.

GRASSMANN

Le présent travail est grandement facilité par la traduction de l'*Ausdehnungslehre* de 1844, par Dominique Flament, parue en 1994)

Les idées de base sont traduites par le choix d'expressions telles que « déviation d'un point R par rapport à un autre point A », « écart d'un élément à un autre », « déviation totale d'une série de points par rapport à un point R », « écart d'une association élémentaire à un élément », qui correspondent pour les deux premiers au vecteur $\overrightarrow{RA}$ et pour les deux derniers à des expressions telles que :

$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}, \text{ et plus généralement } a\overrightarrow{RA} + b\overrightarrow{RB} + c\overrightarrow{RC}.$$

L'idée de départ consiste à pointer le plan ou l'espace en un point R et à considérer les écarts ou déviations d'un point ou d'un système de points pondérés par rapport à ce point R , puis de s'intéresser à des systèmes dont les déviations par rapport à R sont les mêmes. Des exemples simples sont alors traités. C'est alors que l'indépendance du résultat par rapport au choix initial du point R apparaît, ce qui débouche sur la notion de grandeurs élémentaires égales, puis sur la théorie de ces grandeurs élémentaires, théorie qui permet d'étendre celle faite par Möbius à propos du barycentre au cas où la somme des masses est nulle.

Les applications traitées par Grassmann concernent la statique (le barycentre comme « centre de forces parallèles », mais également une étude des corps flottants faisant intervenir une association de masse nulle, le vecteur constant qui lui est associé se voyant attribuer une

signification physique), et le magnétisme (pour illustrer à nouveau les associations de poids total nul).

Mais aucune application concernant la géométrie élémentaire n'est donnée dans cet ouvrage.

GIBBS

Dans son article « On multiple algebra » (1869), Gibbs évoque les intérêts respectifs de l'« analyse vectorielle » et de l'« analyse ponctuelle » de Grassmann pour les applications de l'algèbre « multiple » à la géométrie. Il ne donne aucun exemple, mais développe des considérations générales sur la portée de chacune de ces branches ; il termine en évoquant l'utilisation du plan ou de l'espace pointé :

« Si on représente les points par des vecteurs tracés à partir d'une origine commune, et si on développe alors celles des relations entre de tels vecteurs représentant des points qui sont indépendantes de la position de l'origine, par ce simple processus on peut obtenir une grande partie de l'algèbre ponctuelle, et peut-être cette algèbre toute entière. (...) L'analyse vectorielle, ainsi élargie, est à peine distinguable de l'analyse ponctuelle, mais le traitement du sujet de cette manière a en quelque sorte un caractère d'expédient, comparé à l'unité et à la simplicité que présente ce sujet lorsqu'on le développe directement à partir de l'idée de quelque chose situé en un point. ».

MARCOLONGO & BURALI-FORTI – 1910

Les notations employées pour désigner les vecteurs sont de trois sortes : $\mathbf{a}$, $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, et $\mathbf{A} + \mathbf{a}$, ce qui leur permet d'écrire par exemple que " $\mathbf{a} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ " équivaut à " $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{a}$ ".

Leur ouvrage comporte une critique détaillée de confusions à éviter (vecteur/segment) et d'expressions à ne pas employer : ainsi, un vecteur $\mathbf{a}$ n'a ni origine, ni extrémité ; les auteurs, au lieu de parler de l'origine de $\mathbf{a}$, de l'extrémité de $\mathbf{a}$, suggèrent l'emploi de phrases telles que :

« extrémité d'un vecteur $\mathbf{a}$, dont $\mathbf{A}$ est l'origine » = $\mathbf{A} + \mathbf{a}$

A la fin de l'ouvrage, ils introduisent la relation d'équipollence, seule compatible avec l'emploi du signe « $\equiv$ » tel qu'il a été codifié par Leibniz, afin d'éviter certains abus de langage relatifs aux vecteurs «égaux».

Quant aux applications à la géométrie élémentaire, elles s'appuient sur la théorie du barycentre, faite en terme de formes de Grassmann de première espèce, c'est-à-dire de manière très formelle.

– le milieu du segment AB est $\frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2}$;

– l'égalité de vecteurs $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{D}$ équivaut à l'égalité $\frac{\mathbf{A} + \mathbf{D}}{2} = \frac{\mathbf{B} + \mathbf{C}}{2}$;

– si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sont trois sommets consécutifs d'un parallélogramme, le sommet opposé à $\mathbf{B}$ est $\mathbf{A} + \mathbf{C} - \mathbf{B}$.

– le symétrique de $\mathbf{A}$ par rapport à $\mathbf{O}$ est $2\mathbf{O} - \mathbf{A}$.

– le cas du centre de gravité « de l'aire d'un triangle ABC » est traité ainsi :

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{A+2\frac{B+C}{2}}{3} = \frac{B+2\frac{C+A}{2}}{3} = \text{etc.}$$

COFFIN - 1914

Il réalise en détail l'organisation que Gibbs avait seulement esquissée. En une vingtaine de pages, dont le sommaire est reproduit ci-dessous, il présente essentiellement les techniques relatives à certains types de problèmes, renvoyant à d'autres ouvrages pour leur démonstration.

	page
1 Définitions	1
2 Représentation graphique d'un vecteur	2
3 Égalité des vecteurs. Vecteur négatif. Vecteur unité. Vecteur inverse	3
4 Addition et soustraction. Somme vectorielle et intégration	4
5 Fonction de points. Définition de Lamé. Définition pratique de la continuité d'une fonction vectorielle.	5
6 Décomposition des vecteurs en leurs composantes	8
7 Les trois vecteurs unités x, y, z .	8
8 Équations de la droite et du plan	10
9 Condition pour que trois vecteurs soient terminés sur la même ligne droite. Exemple.	11
10 Équation du plan	15
11 Équation d'un plan passant par les extrémités de trois vecteurs a, b , et c	15
12 Condition pour que quatre vecteurs soient terminés dans le même plan	16
13 Diviser une droite en une proportion donnée. Centroïde	16
14 Relations indépendantes de l'origine. Condition générale pour qu'une relation soit indépendante de l'origine	18
Exercices et Problèmes	20

Une lecture plus attentive permet d'identifier la prise en compte des types de problèmes suivants :

- trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite passant par l'origine dont on connaît un vecteur directeur (Type 1).
- trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite ne passant pas par l'origine dont on connaît un point et un vecteur directeur (Type 2).
- trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite ne passant pas par l'origine dont on connaît deux points (Type 3).
- trouver le point d'intersection de deux droites connaissant une équation vectorielle paramétrique de chacune d'elles (Type 4).
- démontrer que trois points sont alignés (Type 5).

Concernant la technique de détermination du point d'intersection de deux droites (Type 4), une indication très importante est donnée. Il convient d'exprimer tous les (rayons) vecteurs qui interviennent à l'aide de deux ou trois (rayons) vecteurs constituant une base. Alors, par l'intermédiaire des décompositions des vecteurs dans cette base, le problème se

trouve ramené à la résolution d'un système d'équations linéaires à deux inconnues numériques. Coffin n'hésite pas, pour des problèmes de géométrie plane, à prendre une origine en dehors du plan, afin de pouvoir utiliser une base de l'espace.

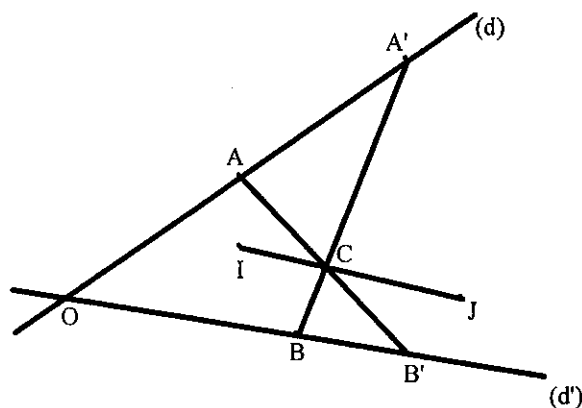
L'emploi de rayons - vecteurs (ou vecteurs - positions) est ici clairement assumé, et l'indépendance des résultats obtenus par rapport au choix du point « origine » fait l'objet d'une démonstration. De plus, il permet d'utiliser des expressions très parlantes comme « vecteurs qui se terminent sur une même droite » ou « vecteurs termino - colinéaires ».

On peut par ailleurs remarquer que les problèmes d'alignement sont dotés d'une technique avant que la notion de barycentre (désignée sous le nom de centroïde) soit introduite.

L'influence du livre de Coffin a été fort limitée en France en ce qui concerne les mathématiques. Sans doute sa date de parution explique-t-elle en partie ce phénomène. Le premier ouvrage de calcul vectoriel d'inspiration vraiment française (Calcul vectoriel. Théorie, applications géométriques et cinématiques, A. Chatelet, J. Kampé de Fériet, 1924) privilégie pour les vecteurs les deux notations $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$, et ne reprend aucune des techniques évoquées par Coffin, préférant aborder les questions géométriques par une voie analytique.

La brochure étudiée dans le paragraphe suivant est beaucoup plus récente. Elle souhaite mettre en évidence les techniques purement vectorielles permettant de traiter les problèmes d'alignement et de concours. On pourra noter comment les différents types de problèmes évoqués par Coffin sont intriqués, certains d'entre eux (type 4) étant mal affichés.

Une publication de l'IREM d'Aix - Marseille : « Les problèmes d'alignement et de concours en géométrie plane » (1983)



Les auteurs considèrent la « configuration fondamentale » reproduite ci-dessus, et mettent l'accent sur la méthode « du double alignement ». On se place dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et

on pose : $\overrightarrow{OA'} = a \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = b \overrightarrow{OB}$; après avoir fait trouver à quelle condition les droites (AB') et $(A'B)$ sont sécantes, ils demandent de déterminer les coordonnées de leur point d'intersection C. Pour cela, une indication est donnée, suggérant d'introduire les paramètres x et y tels que :

$$\vec{AC} = x \vec{AB'} \text{ et } \vec{A'C} = y \vec{A'B},$$

dans le but d'obtenir deux écritures du vecteur $\vec{OC}$ dans la base $\left(\vec{OA}, \vec{OB}\right)$, qui permettent de

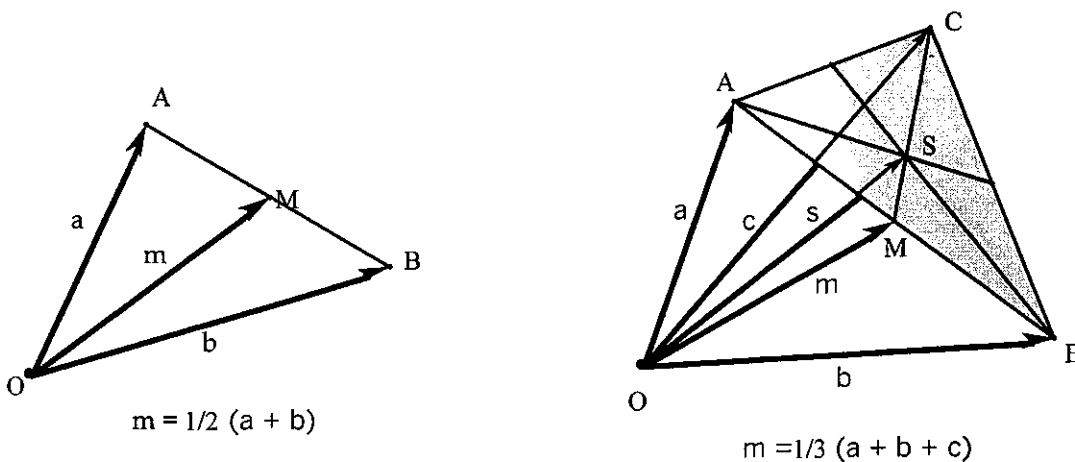
conclure. Ils précisent alors (la brochure date de 1983) que la méthode qui vient d'être décrite doit être bien maîtrisée au niveau de la première S et que, compte tenu de son importance, il convient de proposer dès la classe de Seconde des exemples de résolution de ce problème, et d'investissement de cette méthode pour résoudre d'autres problèmes. Le résultat :

$$\vec{OC} = \frac{a(1-b)}{1-ab} \vec{OA} + \frac{b(1-a)}{1-ab} \vec{OB},$$

est ensuite réutilisé dans la résolution de problèmes classiques (tels que : les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés ; les théorèmes de Ménélaüs et de Pappus).

FLETCHER, PEDOE,

Contrairement à la tradition française, l'emploi de vecteurs - positions se retrouve en bonne place dans plusieurs ouvrages anglo-saxons : « Didactique » de J.T. Fletcher (traduction française en 1966), manuels scolaires allemands actuels (Collection LS, Lambacher et Schweizer, 1995/96), et d'une manière très complète dans l'ouvrage de Dan Pedoe «Geometry, a comprehensive course» (1970, édité en 1988). À titre d'exemple, nous reproduisons ci-dessous des figures du manuel scolaire allemand :



(Dans l'ouvrage en question, les lettres minuscules désignant les vecteurs - positions sont surmontées d'une flèche : nous ne l'avons pas reproduite ici ; il en sera de même dans certains des schémas qui suivent.).

CHATELLUN, IREM de Bordeaux : l'enseignement des vecteurs, LELONG-FERRAND, FRESNEL

Les ouvrages et publications françaises reprenant de telles pratiques (reposant sur la manipulation de vecteurs - positions et sur l'utilisation de formes nulles de Grassmann) sont beaucoup plus rares.

– L'ouvrage de Lucien Chatellun (1952), qui s'adresse à des étudiants et aux candidats aux concours de l'enseignement fait une place à l'étude des formes nulles de Grassmann faisant intervenir 3 ou 4 points. Mais cette étude sert de moyen pour démontrer les théorèmes de

Ménélaüs et de Céva, qui sont ensuite utilisés dans les applications en géométrie élémentaire. Les seules applications véritables des formes nulles de Grassmann concernent des exercices difficiles posés à l'agrégation.

– Dans la publication de l'IREM de Bordeaux « L'enseignement des vecteurs, Quatrième, Troisième, Seconde » (1992), le plan pointé et les vecteurs - positions sont introduits, mais ils le sont surtout pour définir la multiplication d'un vecteur par un nombre, et pour démontrer les propriétés de cette opération. En revanche, ils ne sont pas utilisés dans des techniques de résolution d'exercices ou de problèmes.

– Dans deux ouvrages universitaires récents (« Les fondements de la géométrie » de J. Lelong-Ferrand (1985), et « Méthodes modernes en géométrie » de J. Fresnel (1996)) on retrouve une allusion aux formes de Grassmann et à leur emploi pour caractériser des points alignés. Mais dans le premier, les exercices sollicitant ces résultats sont très guidés et aucune autonomie du lecteur au sujet de ces outils n'est attendue ; pour le deuxième, les énoncés en question servent à démontrer d'autres caractérisations de l'alignement de points ou du caractère lié d'une famille de points, mettant en œuvre des outils mathématiques tels que les coordonnées barycentriques ou les déterminants.

CONCLUSION des paragraphes 2 et 3

• Du point de vue historique et épistémologique, on note un déséquilibre entre :

– d'une part, l'important travail de constructions théoriques de la géométrie en liaison avec le calcul vectoriel (et son impact sur l'évolution des programmes d'enseignement) ;
– d'autre part, un travail beaucoup plus réduit concernant les aspects pratiques et techniques de l'emploi du calcul vectoriel-ponctuel dans les questions relevant de la géométrie élémentaire.

Le passage de l'époque « des mathématiques modernes » à celle de la « contre-réforme » semble reposer sur un principe implicite, que l'on pourrait formuler ainsi : *si un environnement technologico - théorique est suffisamment puissant pour permettre la construction de la géométrie élémentaire, alors il est naturellement générateur de techniques puissantes pour résoudre les problèmes classiques relevant de ce domaine.* Les techniques en question sont supposées exister potentiellement, leur mise en œuvre et les éventuelles mises au point auxquelles elles pourraient donner lieu (au niveau (T, τ) de l'organisation mathématique) sont supposées à la portée de tout auteur de manuel et de tout professeur maîtrisant convenablement les niveaux (θ, Θ) .

• À l'issue de ce travail d'enquête sur l'utilisation du calcul vectoriel dans les questions élémentaires de géométrie affine, on voit apparaître deux univers dans la pratique du calcul vectoriel - ponctuel :

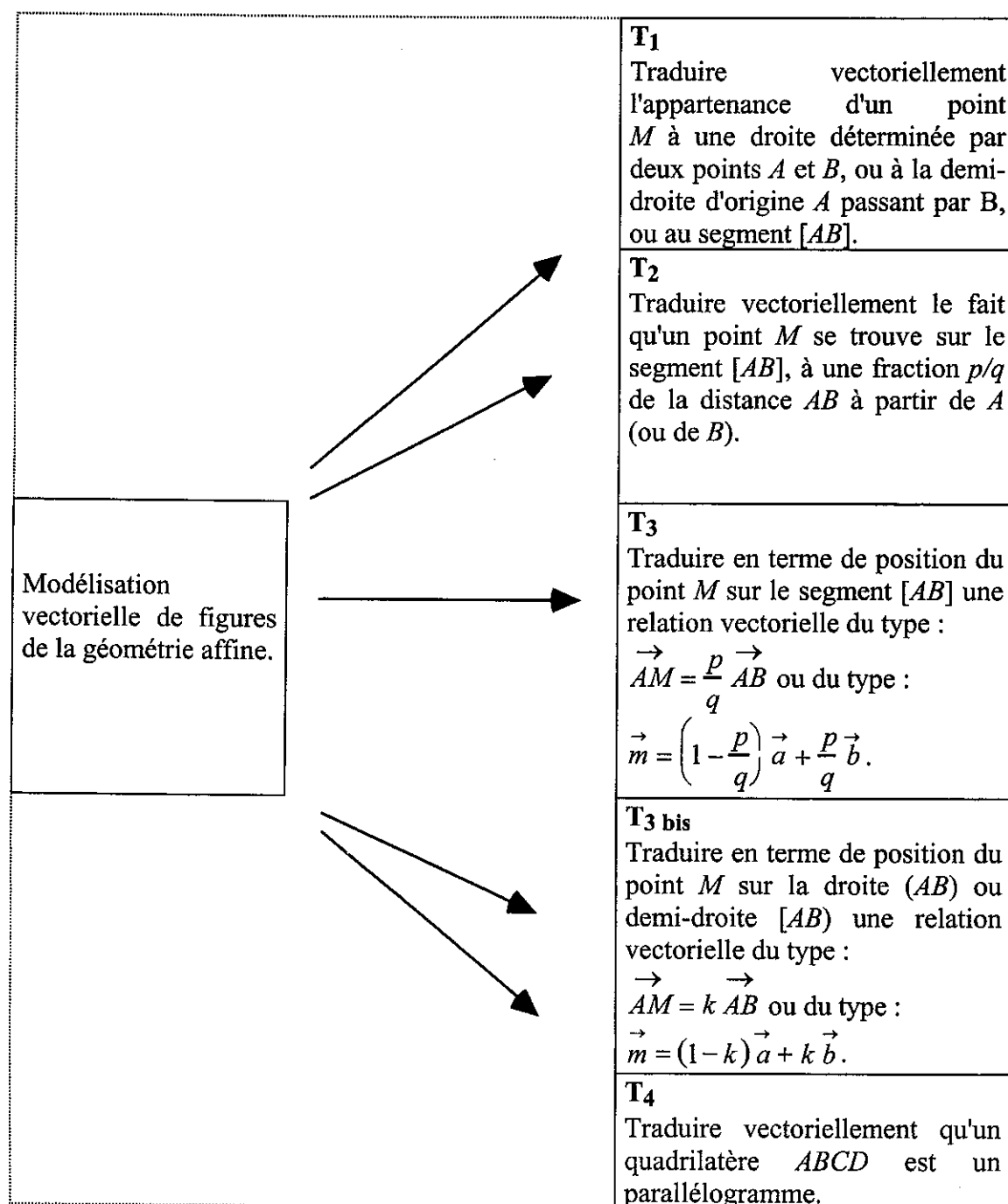
– un univers anglo-saxon, où l'on utilise effectivement le pointage du plan ou de l'espace, ainsi que les vecteurs - positions (les « écarts » ou les « déviations » de Grassmann), les propriétés géométriques en question étant caractérisées en termes de vecteurs - positions.

– un univers français de l'enseignement secondaire, où les vecteurs - positions sont indésirables, la notation $\overrightarrow{AB}$ et la relation de Chasles (sous forme additive) étant au cœur des techniques.

IV. PROPOSITION D'UNE ORGANISATION MATHÉMATIQUE LOCALE CONCERNANT L'ÉTUDE DU CALCUL VECTORIEL AU DÉBUT DU LYCÉE, ET D'ÉLÉMENTS DE L'ORGANISATION DIDACTIQUE ASSOCIÉE.

La proposition qui suit suppose que les vecteurs ont été introduits comme ils le sont actuellement au collège en France, et que la multiplication d'un vecteur par un nombre a été traitée.

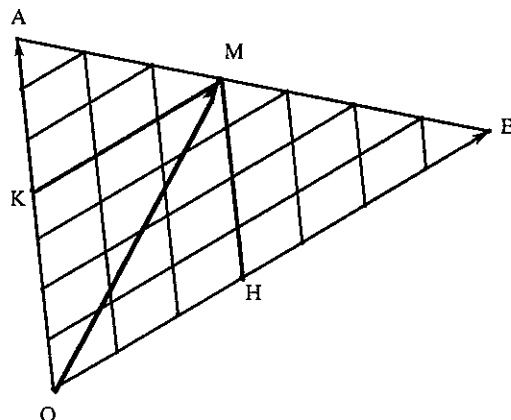
Nous allons présenter les grandes classes de problèmes dans l'ordre chronologique de leur étude, et préciser les types de problèmes T_i qui les composent. La première souffre souvent d'un mauvais affichage, car on la considère comme un simple exercice de « traduction ».



Ce premier type de problèmes est l'occasion d'une première rencontre avec l'introduction des vecteurs - positions, le point « origine » étant en-dehors de la droite (AB) . Le travail de T_2 doit être l'occasion de mieux comprendre pourquoi le nombre $\frac{p}{q}$ apparaît comme coefficient de

$\vec{b}$, et non pas de $\vec{a}$, sans pour autant l'installer prématurément comme un savoir de type algorithmique.

Considérons par exemple le cas où $p = 3$ et $q = 7$.



M est alors aux $\frac{3}{7}$ de $[AB]$ à partir de A . L'utilisation du « petit théorème de Thalès » relatif aux divisions régulières (travaillé actuellement dès la classe de Quatrième) montre que c'est le projeté H de M sur (OB) parallèlement à (OA) qui est aux $\frac{3}{7}$ de $[OB]$ à partir de O . Quant au projeté K de M sur (OA) parallèlement à (OB) , il est aux $\frac{4}{7}$ de $[OA]$ à partir de O .

La technique τ permettant de modéliser une figure à l'aide de tels vecteurs - positions va ensuite faire l'objet d'un travail, dans un double but : montrer l'effet du choix d'un point de la figure comme point « origine » ; préparer la notion de base (plus précisément de famille génératrice), en donnant à voir que dans plusieurs cas, tous les vecteurs - positions des points de la figure peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires de deux d'entre eux, plusieurs choix pour ces deux vecteurs étant possibles.

Travail de la technique τ , préparant un premier moment technologique	T₅ Dans le plan pointé (le point « origine » est précisé) exprimer tous les vecteurs - positions des points d'une figure en fonction de certains d'entre eux, qui sont précisés. La figure est du type : polygone avec points localisés sur certains « côtés » par rapport aux extrémités de ces côtés.
	T_{5 bis} Effet du changement de point « origine » dans des problèmes du type précédent : on prend comme point « origine » l'un des points de la figure.
	T₆ Pointer le plan, et choisir deux vecteurs non colinéaires de manière à pouvoir exprimer tous les vecteurs - positions des points de la figure en fonction de ces deux vecteurs.

À titre d'exercice relatif à T₅, on peut indiquer le suivant :

Un triangle ABC est donné, A' est le milieu de [BC], B' celui de [AC] et C' celui de [AB]. G est le point situé au tiers de [BB'] à partir de B' (ou au 2/3 de [BB'] à partir de B) ; H est le point situé au tiers de [CC'] à partir de C' ; K est le point situé aux 2/3 de [AA'] à partir de A. O est un point du plan distinct de tous les points de la figure.

Il s'agit de déterminer les vecteurs - positions de A', B', C' et de G, H et K en fonction de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$, et d'en déduire une propriété bien connue.

$$\vec{a}' = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} ; \vec{g} = \frac{2}{3}\vec{b}' + \frac{1}{3}\vec{b} ; \vec{b}' = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} ; \vec{h} = \frac{2}{3}\vec{c}' + \frac{1}{3}\vec{c} ; \vec{c}' = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} ; \text{ Ainsi, } G =$$

$$\vec{k} = \frac{2}{3}\vec{a}' + \frac{1}{3}\vec{a}, \text{ donc } \vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) ; \vec{h} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) ; \vec{k} = \dots \text{ Donc : } \vec{g} = \vec{h} = \vec{k}.$$

$H = K$, et les trois médianes ont ce point en commun.

Arrive ensuite le premier moment technologique, dans lequel se fait la mise en place de la notion de base. Ce travail est facilité par une situation de reprise, permettant de réinvestir les connaissances des élèves sur les repères (orthogonaux). Ici, en pointant le plan en l'origine du repère, il ne reste plus qu'à définir une base, et à justifier l'existence et l'unicité des coordonnées d'un vecteur.

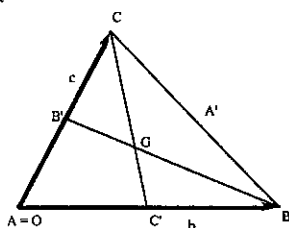
0₁ Premier moment technologique, facilité par une situation de reprise : bases, repères.

Cette introduction des bases va permettre d'élaborer une première technique vectorielle pour déterminer le point d'intersection de deux droites, analogue à celle évoquée par Coffin (sans s'autoriser cependant le choix d'un point « origine » extérieur au plan de la figure comme le fait cet auteur).

Localisation du point d'intersection de deux droites (ou segments)

T₇
Déterminer vectoriellement le point d'intersection de deux droites (ou de deux segments), ces droites (ou segments) étant déterminés par deux points, que l'on sait repérer par leurs vecteurs - positions.

Pour illustrer **T₇**, reprenons l'exemple du centre de gravité d'un triangle, et déterminons la position sur chacune d'elles du point d'intersection de deux médianes.



Pointons le plan en A , les vecteurs de base étant les vecteurs - positions de B et C .

$$\text{Alors : } \vec{c}' = \frac{1}{2} \vec{b}, \quad \vec{b}' = \frac{1}{2} \vec{c}.$$

Le point G , commun aux deux médianes (BB') et (CC') , est le point de paramètre t sur la première, de paramètre s sur la seconde, ce qui se traduit par : $\vec{g} = (1-t)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$ et $\vec{g} = (1-s)\vec{c} + \frac{s}{2}\vec{b}$. De l'unicité de l'écriture du vecteur $\vec{g}$ dans la base

$$(\vec{b}, \vec{c}), \text{ on déduit le système : } \begin{cases} 1-t = \frac{s}{2} \\ \frac{t}{2} = 1-s \end{cases}, \text{ d'où l'on tire : } t = s = \frac{2}{3}.$$

On peut alors aborder les problèmes d'alignement.

Alignement de trois points

T₈
Démontrer vectoriellement l'alignement de trois points A, B et C .

Ce type de problèmes étant au cœur de l'organisation mathématique, nous allons détailler les techniques qui le concernent.

Techniques relatives à T₈	Éléments technologiques
τ₈₁ * La première technique consiste à démontrer que deux des six vecteurs que l'on peut former à l'aide de ces trois points, par exemple $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, sont colinéaires. (Nous avons vu toutes les difficultés que la mise en œuvre de cette méthode ne manque pas de susciter). τ₈₂ * Dans le plan pointé, l'un des trois points, A par exemple, étant le point « origine » (technique τ₈₂₁). Il suffit alors de démontrer que $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont colinéaires ; pour cela, il convient en général de les exprimer dans une même base (constituée par les vecteurs - positions de deux points non alignés avec le point « origine ») et de démontrer la proportionnalité de leurs coordonnées dans cette base.	Caractérisation de l'alignement de trois points à l'aide de la colinéarité de deux vecteurs. Caractérisation de l'alignement de trois points à l'aide de la colinéarité de deux vecteurs.

* Dans le plan pointé, les trois points étant distincts du point « origine ».

Deux situations se présentent alors :

Ou bien, (technique τ_{822}) on arrive à montrer que le vecteur - position de l'un des trois points, $\vec{b}$ par exemple, s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres, la somme des coefficients étant égale à 1 :
 $\vec{b} = k \vec{a} + (1 - k) \vec{c}$.

Alors, d'après les techniques vues pour T3, B appartient au segment [AC], donc A, B et C sont alignés.

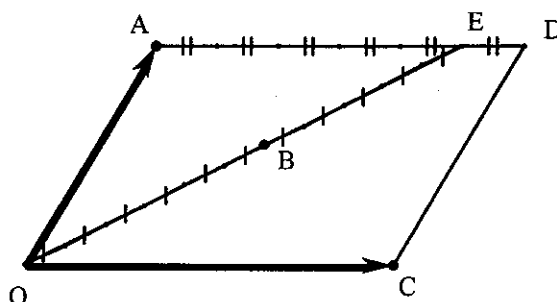
Ou bien, (technique τ_{823}), on cherche trois nombres α, β et γ , non tous nuls, dont la somme est nulle, et tels que:
 $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$.

Cette technique τ_{823} peut s'introduire à partir de celle qui précède τ_{822} .

Sa justification sera évoquée ci-dessous.

Pour introduire la technique la plus élaborée τ_{823} , on peut étudier d'autres configurations avec la technique τ_{822} , par exemple :

E est aux $\frac{5}{6}$ de [AD] à partir de A, B est aux $\frac{6}{11}$ de [OE] à partir de O.



Il s'agit de démontrer que A, B et C sont alignés.

$$\vec{e} = \vec{a} + \frac{5}{6} \vec{c}$$

De $\vec{e} = \frac{1}{6} \vec{a} + \frac{5}{6} \vec{d}$, $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{6}{11} \vec{a} + \frac{5}{11} \vec{c}$, on déduit $\vec{e} = \vec{a} + \frac{5}{6} \vec{c}$, puis

$\vec{b} = \frac{6}{11} \vec{a} + \frac{5}{11} \vec{c}$. Ce résultat peut également s'écrire plus commodément (car sans faire

apparaître d'écritures fractionnaires) sous la forme :

$$11 \vec{b} - 6 \vec{a} - 5 \vec{c} = \vec{0},$$

égalité dont le premier membre est une combinaison linéaire des vecteurs - positions des points dont on veut montrer l'alignement, dont la somme des coefficients (11 - 6 - 5) est nulle.

Ce résultat est-il toujours vrai lorsque des points A, B et C sont alignés ?

Si $\vec{AC} = k \vec{AB}$, alors $\vec{c} - \vec{a} = k(\vec{b} - \vec{a})$, ce qui s'écrit : $\vec{c} + (-1 + k) \vec{a} + k \vec{b} = \vec{0}$, avec

$$1 + (-1 + k) - k = 0.$$

Ainsi, si A, B et C sont trois points alignés, leurs vecteurs - positions vérifient une relation de la forme $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$, la somme $\alpha + \beta + \gamma$ étant nulle.

Pour avoir un outil permettant de démontrer l'alignement de trois points, la question de la valeur de vérité de la réciproque se pose. Ainsi, que dire de trois points A , B et C dont les vecteurs - positions vérifient des relations telles que :

$$7\vec{a} - 5\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0} \quad ; \quad 6\vec{a} - 7\vec{b} - \vec{c} = \vec{0} \quad ; \quad -9\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c} = \vec{0} \quad ;$$

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + (-\alpha - \beta)\vec{c} = \vec{0}, \alpha \text{ et } \beta \text{ désignant deux nombres réels non nuls ?}$$

Nous ne détaillerons guère le type de problèmes suivant T_9 , dont les techniques consistent à exprimer dans une même base les vecteurs positions des quatre points A , B , C et D et à démontrer ensuite que $\vec{b} - \vec{a}$ est colinéaire à $\vec{d} - \vec{c}$.

T_9 Démontrer vectoriellement le parallélisme de deux droites (AB) et (CD).

Il est cependant remarquable que la démonstration du théorème de Pappus (affine) s'obtient très facilement avec cette technique.

La mise en place progressive des techniques τ_{821} , τ_{822} , τ_{823} et celles relatives à T_9 est à l'origine du deuxième moment technologique.

θ_2 Un deuxième moment technologique : relations vectorielles indépendantes du point « origine ».

Vers une autonomisation du modèle : les combinaisons linéaires de deux vecteurs - positions conduisent à en introduire un troisième, indépendant du choix du point « origine » : le barycentre.

L'étude des types de problèmes T_1 à T_8 met en évidence l'intérêt de relations telles que :

$$\vec{m} = (1 - k)\vec{a} + k\vec{b}, \text{ où } k \text{ désigne un nombre réel (forme 1)}$$

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}, \text{ avec } \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ (forme 2),}$$

la première étant un cas particulier de la seconde.

Il est facile de démontrer que ces relations ne dépendent pas du point « origine » choisi.

Les relations utilisées dans ce qui précède sont donc toutes indépendantes de la manière dont on pointe le plan pour pouvoir utiliser des vecteurs - positions.

Les combinaisons linéaires de vecteurs - positions ayant un rôle dans ce qui précède font apparaître deux cas particulièrement importants :

— les combinaisons linéaires de deux vecteurs - positions dont la somme des coefficients est égale à 1 ;

— les combinaisons linéaires de trois vecteurs - positions dont la somme des coefficients est égale à 0.

Une question se pose alors ?

Que dire d'une combinaison linéaire de deux vecteurs - positions dont la somme des coefficients n'est pas égale à 1 ?

Considérons une telle combinaison : $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

• Si $\alpha + \beta = 0$, alors $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \alpha \vec{a} - \alpha \vec{b} = \alpha (\vec{a} - \vec{b}) = \alpha \vec{BA}$. On retrouve le résultat vu précédemment : une combinaison linéaire de deux vecteurs dont la somme des coefficients est nulle est un vecteur, indépendant du point « origine » choisi.

• Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors deux stratégies peuvent être envisagées pour utiliser ce que nous connaissons sur les combinaisons linéaires de vecteurs - positions :

– se ramener à une combinaison linéaire de deux vecteurs - positions dont la somme des coefficients est égale à 1 ;

– faire intervenir un troisième vecteur - position de manière à obtenir une combinaison linéaire de trois vecteurs - positions dont la somme des coefficients est égale à 0 ; on sait d'ailleurs que la première stratégie est un cas particulier de la seconde.

Quelle que soit la voie choisie, on est amené à introduire un point G dont le vecteur - position $\vec{g}$ vérifie :

$$(\alpha + \beta) \vec{g} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad (1)$$

ou encore

$$-(\alpha + \beta) \vec{g} + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0} \quad (2).$$

La relation (2) montre que ce point G est indépendant du choix du point « origine » choisi, et que le point G est sur la droite (AB) .

La relation (1), écrite sous la forme : $\vec{g} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{a} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{b}$, met bien en évidence le fait

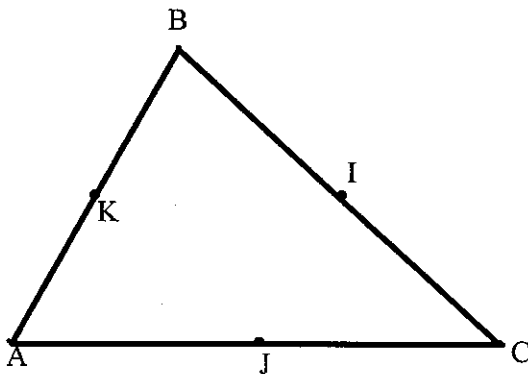
que la somme des coefficients de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égale à 1 ; elle permet en outre de situer G sur la droite (AB) : $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$, ou $\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{BA}$.

Alors, on peut introduire le vocabulaire relatif au barycentre de deux points pondérés, qui notons-le, n'a pas été sollicité jusqu'ici.

Reprise de T8

avec la technologie Θ_2 , qui génère de nouvelles techniques, rendant inutile le choix d'une base du plan, mais reposant encore sur le calcul vectoriel sur les vecteurs - positions.

Reprenons l'exemple du centre de gravité d'un triangle :



Déterminons le point d'intersection des médianes $[AI]$ et $[BJ]$. Pour cela, cherchons à évaluer une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{a}$ d'une part, de $\vec{j}$ et $\vec{b}$ d'autre part, ayant des coefficients de même somme.

On a : $2\vec{i} = \vec{b} + \vec{c}$ et $2\vec{j} = \vec{c} + \vec{a}$.

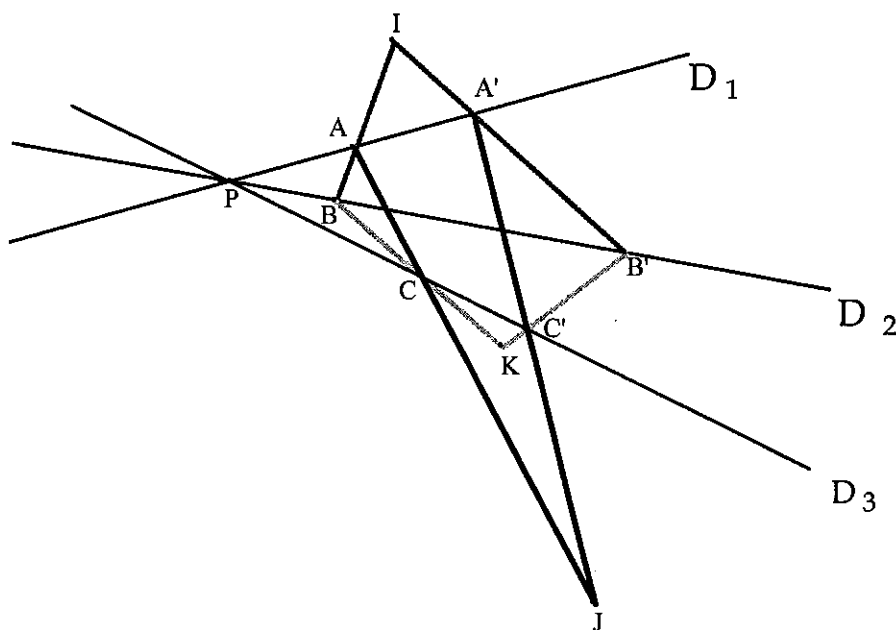
En soustrayant membres à membres, on fait disparaître $\vec{c}$, vecteur - position qui nous gêne :
 $2\vec{i} - 2\vec{j} = \vec{b} - \vec{a}$, d'où l'on déduit :

$$2\vec{i} + \vec{a} = 2\vec{j} + \vec{b}$$

On introduit alors le point G dont le vecteur - position $\vec{g}$ vérifie $3\vec{g} = 2\vec{i} + \vec{a} = 2\vec{j} + \vec{b}$, (ou si l'on préfère $\vec{g} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{b}$.), point qui est donc commun aux segments $[AI]$ et $[BJ]$.

Il est facile de montrer que $3\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ puis que $3\vec{g} = \vec{c} + 2\vec{k}$ (ou $\vec{g} = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{k}$), ce qui prouve que G appartient aussi au segment $[CK]$.

Pour montrer la puissance de ces techniques de modélisation et de démonstration, illustrons leur emploi pour démontrer le théorème de Desargues (projectif).



P est le point de concours des droites (AA') , (BB') et (CC') . I est le point d'intersection de (AB) et $(A'B')$, Il s'agit de démontrer que I , J et K sont alignés.

La bonne idée consiste à traduire que P est le point de concours des trois droites en termes de barycentres :

$$\vec{p} = \alpha \vec{a} + (1 - \alpha) \vec{a}' \quad ; \quad \vec{p} = \beta \vec{b} + (1 - \beta) \vec{b}' \quad ; \quad \vec{p} = \gamma \vec{c} + (1 - \gamma) \vec{c}'.$$

De $\alpha \vec{a} + (1 - \alpha) \vec{a}' = \beta \vec{b} + (1 - \beta) \vec{b}'$, on déduit $\alpha \vec{a} - \beta \vec{b} = (1 - \beta) \vec{b}' - (1 - \alpha) \vec{a}'$, égalité qui nous incite à introduire le vecteur - position du point I , commun aux droites (AB) et $(A'B')$, qui vérifie :

$(\alpha - \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} - \beta \vec{a}$. En procédant de la même manière, on établit les relations :

$$(\beta - \gamma) \vec{k} = \beta \vec{b} - \gamma \vec{c}, \quad (\gamma - \alpha) \vec{j} = \gamma \vec{c} - \alpha \vec{a}.$$

On en déduit que $(\alpha - \beta)\vec{i} + (\beta - \gamma)\vec{k} + (\gamma - \alpha)\vec{j} = \vec{0}$; or la somme des coefficients est nulle. Ce qui suffit pour démontrer l'alignement des points I, J et K .

Retour à la géométrie analytique

Équation d'une droite coupant les deux axes du repère.

Lors de l'étude du type T₁ de problèmes, nous avons vu que si la droite (AB) ne passe pas par le point « origine » O , alors un point M du plan appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un nombre réel k tel que :

$$\vec{m} = (1 - k)\vec{a} + k\vec{b},$$

ce qui revient à dire que l'appartenance du point M à la droite (AB) est équivalente à la relation : $x = 1 - y$, ou encore $x + y = 1$, (x, y) désignant les coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{a}, \vec{b})$. En d'autres termes, $x + y = 1$ est une équation cartésienne de (AB) dans le repère $(O; \vec{a}, \vec{b})$.

Considérons maintenant un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan et une droite D coupant respectivement les axes des abscisses et des ordonnées en A et B , distincts de O . Si a désigne l'abscisse de A , et b l'ordonnée de B , D a pour équation $X + Y = 1$ dans le repère $(O; a\vec{i}, b\vec{j})$.

On en déduit une équation cartésienne de D dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, forme d'équation peu travaillée dans les programmes récents.

On peut terminer par un retour à la première grande classe de problèmes : les vecteurs permettent de modéliser les demi-plans, sous-ensembles qui jusqu'ici ne pouvaient être modélisés qu'en géométrie analytique.

Modélisation
vectorielle de
figures de la
géométrie
affine.



T₁₀

Traduire vectoriellement l'appartenance d'un point M au demi-plan de frontière (AB) auquel appartient le point C :

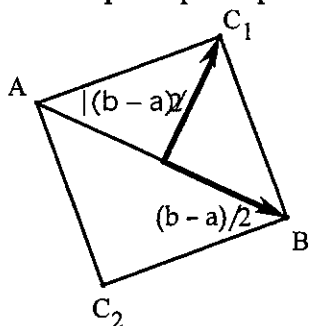
relation du type $\vec{AM} = k\vec{AB} + k'\vec{AC}$; ou encore, en pointant le plan en A , relation de la forme $\vec{m} = k\vec{b} + k'\vec{c}$, $k \in \mathbf{R}$ et $k' \in \mathbf{R}^{*+}$.

Les vecteurs - positions peuvent également être utilisés pour traiter des problèmes de géométrie euclidienne (métrique). Faute de place, nous ne pourrions détailler ici l'organisation mathématique correspondante, qui permet de modéliser les figures usuelles de la géométrie euclidienne, de traiter certaines études de configurations sans avoir besoin de recourir au produit scalaire, et qui constitue une excellente préparation à l'interprétation géométrique (ponctuelle et vectorielle) des nombres complexes, et pourrait donc agréablement en préparer l'étude.

Afin d'aiguiser la curiosité du lecteur, précisons que le calcul vectoriel introduit précédemment, qui travaille avec des vecteurs - positions et des vecteurs écrits sous la forme $\vec{AB}$, doit être complété par l'introduction d'un opérateur, que l'on trouve sous une forme plus complexe dans les travaux de Grassmann, ainsi que dans de nombreux ouvrages américains :

il s'agit de l'opérateur $|$ qui, appliqué à un vecteur $\vec{m}$, donne le vecteur $|\vec{m}$, image de $\vec{m}$ par le quart de tour vectoriel direct. On a donc, pour tout $\vec{m}$, $|\left(|\vec{m}\right) = -\vec{m}$. On utilise abondamment la linéarité de l'opérateur $|$.

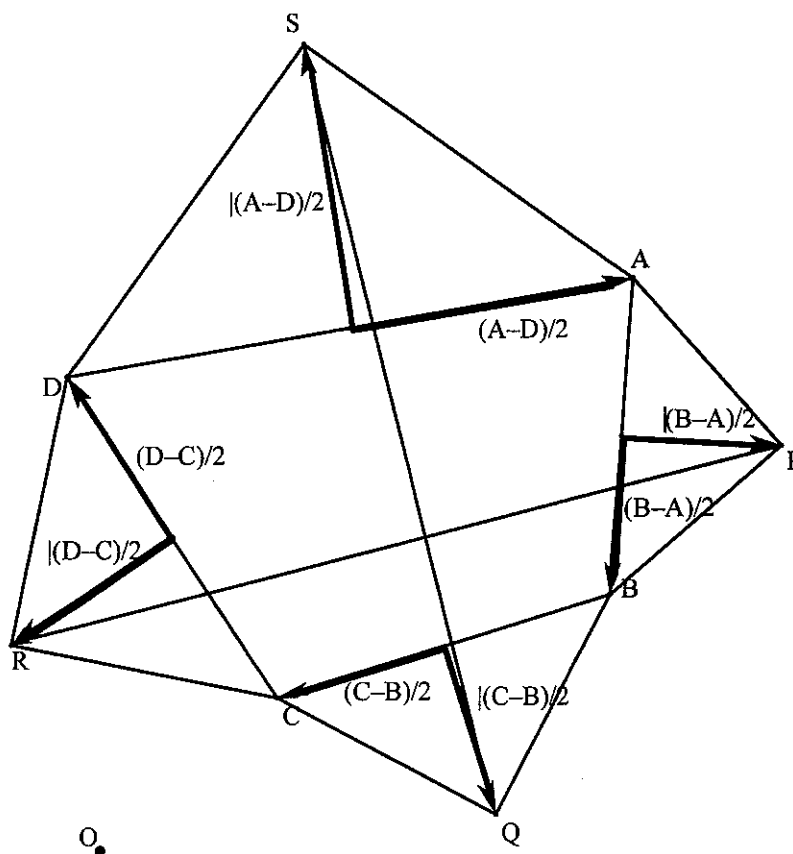
Par exemple, on peut modéliser le triangle ABC rectangle isocèle en C, en localisant son sommet principal C par rapport à la base principale [AB] de la manière suivante :



$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \left| \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} \right|.$$

$$\vec{c}_2 = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \left| \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} \right|.$$

Revenons, pour terminer, à la configuration de Van Aubel, dans laquelle on suppose que le quadrilatère ABCD est orienté dans le sens direct.



En désignant, comme le fait Pedoe, un point et son vecteur - position par la même lettre, les données se traduisent à l'aide des quatre égalités suivantes :

$$P = (A + B)/2 + |(B - A)/2$$

$$Q = (B + C)/2 + |(C - B)/2$$

$$R = (C + D)/2 + |(D - C)/2$$

$$S = (D + A)/2 + |(A - D)/2.$$

Quant à la conclusion « $PR = QS$ et les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires », elle se traduit par « $|(R - P) = \pm (Q - S)$ ». Un contrôle graphique sur la figure permet de conjecturer que le résultat attendu est $|(R - P) = Q - S$.

Il s'agit de démontrer que $|(R - P)$, c'est-à-dire que $|R - |P$ est égal à $Q - S$, ce qui se fait à l'aide des règles usuelles du calcul vectoriel vues jusqu'ici, auxquelles on ajoute celles relatives à l'opérateur « $|$ » :

$$|R = |(C + D)/2 + |(D - C)/2 \text{ c'est-à-dire } |R = (C - D)/2 + |(C + D)/2,$$

$$|P = |(A + B)/2 + |(B - A)/2 \text{ c'est-à-dire } |P = (A - B)/2 + |(A + B)/2,$$

$$\text{donc } |R - |P = (C - D - A + B)/2 + |(C + D - A - B)/2.$$

$$\text{D'autre part, } Q - S = (B + C - A - D)/2 + |(C - B - A + D)/2.$$

D'où le résultat.

V. CONCLUSION

1. Les raisons d'étudier le « Calcul vectoriel »

On peut donc dégager deux raisons fondamentales au projet commun de Leibniz et Grassmann :

- fonder d'une manière nouvelle la géométrie en tant que théorie mathématique (1) ;
- trouver des objets mathématiques et des opérations sur ces objets permettant de symboliser les relations géométriques présentes dans les figures ou dans les transformations géométriques, de manière à pouvoir en déduire les propriétés, par un simple calcul algébrique (2).

En vue d'un enseignement au niveau du Collège et du Lycée, la raison (2) mérite une attention particulière. On peut alors en proposer la formulation suivante, visant à expliciter la raison principale de l'étude du calcul vectoriel au début du lycée :

- dans un premier temps, à propos d'une figure usuelle de la géométrie vue antérieurement : supposant connus certains de ses éléments, caractériser à l'aide de vecteurs, ses autres éléments. En d'autres termes, il s'agit de décrire à l'aide de vecteurs comment on peut engendrer (ou construire) une figure à partir de certains de ses éléments.
- dans un second temps, démontrer les propriétés d'une figure géométrique en utilisant un calcul algébrique d'un type nouveau : le calcul vectoriel.

2. Construction d'une organisation mathématique adoptant cette raison comme motif pour étudier le calcul vectoriel

Nous nous sommes efforcés de proposer une organisation mathématique et didactique respectant les conditions suivantes :

- le professeur indique au départ les raisons d'étudier l'œuvre ;
- l'étude est consacrée à des types de problèmes légitimes par rapport à ces raisons ;
- elle accorde une place importante aux techniques, et notamment à leur travail, dans le but d'améliorer leur fiabilité d'une part, de cerner leur portée d'autre part ;
- le niveau technologique est introduit pour justifier, et rendre intelligible les techniques d'une part, créer de nouvelles techniques plus efficaces pour des types de problèmes anciens et engendrer de nouveaux types de problèmes d'autre part.

Une telle organisation impose cependant d'avoir identifié au préalable

- des types de problèmes T_{ijk} ,
- des techniques τ_{jk} ,
- des technologies θ_k ,

et d'avoir trouvé au moins un chemin dans cet espace à trois dimensions le long duquel le professeur va conduire l'étude proposée à l'élève.

C'est ce que nous avons tenté ici en ce qui concerne le calcul vectoriel au lycée, en prenant comme germes de types de problèmes les questions suivantes, prises dans les programmes récents d'enseignement à ce niveau en France :

- les problèmes d'alignement et de concours,
 - l'étude des configurations de la géométrie euclidienne plane ;
- quant à l'organisation didactique correspondante, seuls quelques éléments la concernant ont été abordés, en mettant en lumière certains moments de l'étude.

Notre travail met en évidence l'importance, dans l'organisation mathématique, des techniques, et en particulier des dispositifs qu'elles supposent, notamment du point de vue des ostensifs. Ainsi, le choix des ostensifs relatifs aux vecteurs conditionne l'existence même de certaines techniques. Notre étude met en évidence les trois ostensifs suivants :

- la notation $\overrightarrow{AB}$;
- la notation du « vecteur libre » $\vec{u}$;
- la notation $\vec{m}$ du vecteur - position d'un point M relativement à un point « origine » O .

En France, au niveau de l'enseignement secondaire, seuls les deux premiers sont reconnus par l'institution. Ils suffisent pour traiter le niveau technologique, la notation $\vec{u}$ étant indispensable à ce niveau. Dans les pays anglo-saxons que nous avons considérés (Allemagne, Grande-Bretagne, États-Unis), le troisième est couramment utilisé ; il est une partie du dispositif de nombreuses techniques : il facilite ainsi la description de ces techniques, ce qui est important pour leur enseignement, en même temps qu'il constitue un outil de base de ces techniques. Sa place n'est cependant pas confinée au niveau des techniques, car il intervient naturellement dans la justification de ces dernières, c'est-à-dire au niveau technologique des organisations mathématiques. L'organisation proposée adopte donc l'emploi du vecteur - position. Pour qu'elle puisse être viable, il est indispensable que la communauté de l'enseignement des mathématiques change d'attitude à son égard, ce qui constitue un travail de longue haleine, auquel cet article voudrait apporter une première contribution.

3. Des questions qui restent à étudier

On a vu précédemment que l'expérimentation de l'organisation proposée ne concerne pas seulement les élèves mais également les professeurs et leurs formateurs, puisqu'elle suppose des changements importants des habitudes de travail dans un domaine qui n'a guère évolué depuis longtemps.

Par ailleurs, d'autres questions restent à étudier plus précisément, parmi lesquelles nous citerons :

- l'articulation avec les débuts de l'enseignement du calcul vectoriel ;
- la cohabitation des vecteurs - positions $\vec{m}$ et des vecteurs « libres » $\vec{u}$;

- l'articulation avec l'enseignement des nombres complexes et de leurs applications géométriques : ces derniers se montrent plus efficaces dans l'étude des questions faisant intervenir des angles ;
- l'articulation avec les débuts de l'Algèbre linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

AMALBERTI R., ARNAL J-P., BENIAMINO J.C., MARION J., OVAERT J.L., PROUDHON D., VERNET J-M., 1983, *Les problèmes d'alignement, de parallélisme et de concours en géométrie plane*, G.R.E.G., IREM d'Aix-Marseille.

BLUMENTHAL Leonard M., 1980, *A modern view of geometry*, Dover Publications, Inc., New York.

BURALI-FORTI C., MARCOLONGO R., 1910, *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, traduction française de S. Lattès, Librairie scientifique J. Hermann, Paris.

CHEVALLARD Yves, 1991-1992, *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*, Séminaire Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique, Université Joseph Fourier, n° 122, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1995, *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*, Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques de 1995, pp. 83 - 122, (édition coordonnée par Robert Noirfalise, IREM de Clermont-Ferrand , et Marie-Jeanne Perrin - Glorian, IUFM d'Arras et Équipe DIDIREM Paris VII).

CHEVALLARD Yves, 1997, *Familière et problématique, la figure du professeur*, Recherches en didactique des mathématiques, Volume 17/3, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, pp. 17 - 54.

CHEVALLARD Yves, 1999, *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, Volume 19/2, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, pp. 221 - 266.

CHOQUET G. , 1964, *L'enseignement de la géométrie*, éditions Hermann, Paris.

COFFIN J.-G., 1914, *Calcul vectoriel avec applications aux mathématiques et à la physique*, traduction française par Alex Véronnet, Gauthier-Villars, Paris.

CROWE Michael J., 1967, *A history of vector analysis, The evolution of the idea of a vectorial system*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, London.

DIEUDONNE J., 1966, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, troisième édition, collection «Enseignement des sciences», Hermann, Paris.

DORIER Jean-Luc (coord.), 1997, *L'enseignement de l'Algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

FLAMENT D., 1994, *Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, La Lineale Ausdehnungslehre*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris.

FLETCHER T. J., 1966, *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui*, une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré, traduit de l'anglais par

- F. Dubail, D. Duclos, M. Glaymann, M. Hagege, C. Mourgues, M. Mourgues, O.C.D.L, Paris.
- FRESNEL J., 1996, *Méthodes modernes en géométrie*, collection Formation des enseignants et formation continue, Hermann, Paris.
- GIBBS J. Willard, 1961, *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, Volume II, Dynamics, Vector Analysis and Multiple Algebra, Electromagnetic Theory of Light, Miscellaneous Papers, Dover Publications Inc., New York.
- GOUTEYRON A., BOUSCASSE J.-M., CHAUMET M.-C., COLMEZ F., DAMEY P., PINET B., PUYOU J., ROBERT Y., (1992), *L'Enseignement des vecteurs*, IREM de Bordeaux.
- IREM de Strasbourg, 1975, *Le livre du problème , volume 5, calcul barycentrique*, Cedic, Paris.
- LEIBNIZ G.W. , 1995, *la caractéristique géométrique*, texte établi, introduit et annoté par Javier ECHEVERRIA, traduit, annoté et préfacé par Marc PARMENTIER, Librairie philosophique J.Vrin, Paris.
- LELONG-FERRAND J., 1985, *Les fondements de la géométrie*, PUF, Paris.
- MIRON R. et BRÂNZEI D., 1995, *Backgrouds of arithmetic and geometry, an introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- PEDOE Dan, 1988, *Geometry, a comprehensive course*, Dover Publications, New York.
- PRESSIAT A., 1999, *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison «points-vecteurs»*, Thèse de doctorat, Université Paris VII Denis Diderot, 486 p. En vente à l'IREM de Paris VII (141 F + 28 F de frais de port).
- SCHMID A. et SCHWEIZER W. (dir.), 1995, par BÜRKER M., KOLLER D., SCHEID H., SCHMID A. et avec la collaboration de GERLACH H., *LS Analytische geometrie, Leistungskurs, classe de terminale, matière principale*, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig.
- VOGEL Nicole, 1994, *Quelques repères pour apprendre à démontrer avec la relation de Chasles*, Repères-IREM, n° 16, pp.83 - 109.
- WEYL H., 1922, *Espace, temps, matière*, Librairie Blanchard, Paris.