SUR LE PREMIER ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE

1. A la recherche d'une méthode

J'ai longuement hésité à publier une étude dont l'idée me poursuit depuis longtemps. En insistant publiquement sur la médiocrité de certains résultats, j'ai craint de donner une idée fausse de l'enseignement des mathématiques, dans nos établissements secondaires, et de lui nuire dans l'esprit de ceux qui ont la charge de ses destinées. Le danger était d'autant plus grand qu'il est fort difficile de démontrer les avantages de cette discipline à ceux qui croient n'en avoir tiré aucun profit ou qui en ont conservé un souvenir peu agréable; ceux qui en ont bénéficié n'ont pas besoin de cette démonstration. Au point où nous sommes arrivés, il semble que ce danger ait fait place à un autre qui commande l'action.

La réforme en cours astreint tous les élèves aux mêmes études scientifiques, jusqu'à la fin de la classe de Première. Au premier abord, on devrait se féliciter de l'hommage rendu à des enseignements dont la valeur éducative est proclamée, puisqu'on n'en veut priver personne.

Mais, en se reportant au passé et au présent, on ne peut s'empêcher de concevoir quelque inquiétude. Chacun sait que les élèves sortant de Troisième A s'orientent vers les divisions A-B ou les divisions C du second cycle, les uns d'après leurs préférences, les autres d'après leurs répugnances; il ne serait pas impossible de faire la part de ces deux causes principales. Des renseignements autorisés permettent de croire que, dans certaines classes de Troisième A, la moitié des élèves étaient regardés par le professeur comme incapables de s'intéresser à l'étude des mathématiques. Quant à ceux que leur orientation primitive condamnait à entrer en Seconde D, leur présence, dans les divisions B du premier cycle, n'était nullement une garantie de leurs aptitudes naturelles pour les mathématiques. Quoi qu'il en soit, la bifurcation scientifique, à la fin du premier cycle, avait pour résultat de répartir les élèves de façon moins hétérogène et de faciliter la tâche des professeurs de mathématiques du second cycle.

La formation des queues de classes, commencée en Sixième, s'aggravait seulement jusqu'en Troisième, en ce qui concerne les élèves des sections A; elle ne cessera maintenant qu'au sortir de la Première, pour tous les élèves. Le devoir du professeur de mathématiques reste le même, en Seconde et en Première : il lui faut s'adresser à l'ensemble et tirer le meilleur parti de tous, sans nuire aux mieux doués. Mais dans un ordre différent, j'en aperçois 5 d'un côté, 3 d'un autre, etc. J'émis une telle impression de doute en posant cette question : « Trouverai-je le même nombre d'élèves dans les deux cas ? » que les enfants ne surent plus que croire ; je fus obligé de les rassurer : je me contentai de leur demander si des élèves étaient entrés ou sortis dans l'intervalle et tous les visages s'éclairèrent.

Je ne poursuivis pas l'expérience ce jour-là ; mais je l'ai reprise bien souvent et chaque fois que les élèves se sont rappelé qu'une somme ne change pas, quand on intervertit simplement l'ordre des termes, ils ont invoqué cette règle pour constater que le nombre d'élèves était resté le même.

De ces constatations choisies parmi beaucoup d'autres du même genre, on serait tenté de conclure que l'enfant a besoin d'une règle et que la vision directe de faits très simples lui est interdite. Si on adopte cette conclusion, ne va-t-on pas soumettre son activité à des lois dont l'origine lui échappe, retarder encore l'âge où cette vision devient nécessaire ? Est-ce que l'empreinte laissée par une telle discipline ne va pas diminuer en lui la faculté d'observer, sans laquelle il est impossible d'étudier avec fruit les sciences expérimentales ?

L'importance de ces faits n'apparaît pas également à tous ceux qui en sont les témoins : quelques-uns en sont vivement frappés. Au sortir d'une classe de Quatrième B, où ces deux expériences m'avaient donné les résultats habituels, je dis au Recteur qui m'accompagnait : « Je serais curieux de savoir à quel âge cet état d'esprit disparaît. » « Je suis plus curieux encore de savoir à quel âge il commence », me répondit-il. On ne pouvait poser plus nettement le problème de la responsabilité de l'enseignement.

Je ne crois pas que le mal soit aussi profond qu'il paraît. Il ne faut pas oublier que l'élève habitué surtout à faire preuve de connaissances, ne fait appel qu'à sa mémoire, quand on l'interroge ; il n'est guère capable de séparer les effets et les causes : la peine qu'il éprouve à distinguer les conclusions des hypothèses, en géométrie, jusque dans la classe de Seconde, en est une preuve. On ne peut douter d'ailleurs que les élèves aient la notion de leur nombre, car ils sont les premiers à répondre, quand on leur demande si la classe est au complet : un coup d'œil circulaire, jeté sur les bancs dans un ordre quelconque, les renseigne immédiatement.

Quoi qu'il en soit, le problème posé vaut qu'on y réfléchisse.

Des observations d'un autre ordre montreront le danger qu'il peut y avoir à donner prématurément des connaissances, sous forme de règles. Dans une classe de Sixième, le maître énonce la règle relative à la divisibilité par 9 ; afin d'en bien faire saisir le mécanisme et de donner confiance aux élèves, il la fait appliquer et vérifier, sur divers exemples. Il semble qu'il n'y ait rien à reprendre à cette façon de faire, que le professeur emploie d'ailleurs constamment.

La découverte de la règle ne me paraissant pas au-dessus des forces de cette classe, je m'adressai à tous et demandai qu'on me fournit des multiples de 9, sans faire appel à la règle, bien entendu ; un élève me donna 36, un autre 9, un troisième 99.

Je croyais tenir le fil directeur ; avant de le suivre, je voulus m'assurer de sa solidité, mais à ma question : « Comment avez-vous vu que 99 est un multiple de 9 ? » l'élève répondit en invoquant la règle. Je lui avais proposé un effort au-dessus de ses moyens, en lui demandant d'oublier ce que le maître lui avait si bien appris. Il ne me restait plus qu'à attendre l'action salutaire du temps, qui rendrait possible le libre exercice du jugement, en supprimant l'apport de la mémoire. Je livre cet exemple à la méditation de ceux qui croient encore que la démonstration du maître est rendue plus facile lorsque l'élève en connaît le but.

Une maîtresse d'un établissement secondaire de jeunes filles demandant un jour à ses élèves pourquoi elles s'intéressaient si peu à une démonstration dont elle essayait en vain de leur faire saisir l'importance, obtint une confidence dont je garantis le sens, sinon les termes : « Nous connaissons cette règle depuis longtemps ; nous l'avons souvent appliquée et jamais elle ne nous a trompées, pourquoi voulez-vous que nous en doutions ? »

Des exemples de ce genre montrent le danger de tuer la curiosité en apportant des connaissances prématurées. Et pourtant, il faut donner des connaissances de bonne heure, si l'on veut en tirer des aliments indispensables au besoin d'activité des jeunes élèves !

Une autre expérience montrera combien est superficielle la notion de fraction acquise par les enfants.

Dans une classe de 1re Année de 38 élèves, la maîtresse vient de faire corriger un problème au tableau : on donne le prix de vente de marchandises et on demande le prix d'achat, sachant qu'elles ont été revendues avec un bénéfice de 14 o/o. On s'est appuyé sur ce fait que le prix de vente est les 114 centièmes du prix d'achat et que, par suite, ce dernier est les 100 cent quatorzièmes du premier. Le problème a été fait par beaucoup, si on en juge par les copies remises. Je demande si tout le monde a compris les explications données au cours de la correction ; j'obtiens la réponse affirmative habituelle, dont on se contente trop souvent. Je voulus m'en assurer et je sortis deux crayons que je présentai à la classe en ces termes :

— La longueur du petit crayon est les 3 cinquièmes de celle du grand ; qui de vous peut me dire ce qu'est la longueur du grand par rapport à celle du petit ?

Au bout de quelques instants, après bien des encouragements, je constatai que 7 élèves se proposaient de répondre. Je les interrogeai successivement, sans rien laisser paraître de l'effet que me produisaient les réponses : la dernière seule me fournit le résultat exact, soit 5 tiers. Encore ne put-elle m'en donner une raison acceptable !

Je montrai alors, en remontant à la définition, comment les deux crayons m'apparaissaient divisés l'un en 5, l'autre en 3 parties respectivement égales ; comment la vision des nombres 5 et 3 était inséparable de celle des nombres 3 et 5, et que les deux fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{3}$ s'imposaient simultanément à l'esprit : je finis par obtenir l'adhésion de toutes. Je ne m'en tins pas là et recommençai avec des exemples qui différaient du premier, soit par les fractions mises en jeu, soit par la nature des grandeurs que je choisis toujours familières aux enfants. Ce ne fut qu'au bout de cinq tentatives que j'obtins, sans restriction, l'assentiment général ; encore ne suis-je pas bien sûr que ce ne fût un moyen d'échapper à une ténacité que toutes avaient sentie irréductible !

Je pourrais citer beaucoup de faits analogues. Ceux que j'ai rapportés suffisent à montrer certaines des difficultés que présente l'enseignement de l'arithmétique ; elles ne sont pas inférieures à celles que l'on rencontre en géométrie. Il en est d'autres d'ailleurs que n'éprouvent pas, au même degré, ceux qui enseignent la géométrie : elles tiennent au passage des élèves par les mains d'un grand nombre de maîtres ou de maîtresses, en partant de la maman ou de la nourrice. Nous sommes désarmés en présence de ces collaboratrices de la première heure, dont les bonnes intentions dépassent souvent la compétence.

Nous verrons dans la suite ce que l'on peut tenter pour écarter des obstacles d'un autre genre.

2. De la collection au nombre entier

J'ai fait allusion aux difficultés que peut susciter une famille bien intentionnée, lorsqu'elle apporte à l'enseignement une collaboration peu éclairée. Le danger me paraît d'autant plus sérieux que cette étude prétend viser une sorte de rénovation des méthodes. Or, beaucoup parmi nous, sont tentés de croire que la meilleure est celle qui les a formés ! C'est humain et il n'y a pas de raison pour que les parents échappent à cette loi naturelle. Désireux de réduire au minimum l'effort de leurs enfants, certains accepteraient volontiers de les voir conduire dans des sentiers où ils n'ont pas eux-mêmes trébuché trop souvent et où ils pourraient les soutenir à l'occasion. De ce point de vue, ils sont enclins à critiquer les exigences d'un maître qui, mieux informé, cherche à exercer le raisonnement du jeune élève et ne se contente pas de lui faire appliquer les règles traditionnelles. Il n'y a qu'à résister poliment, si l'on ne peut ramener les intéressés à une conception plus saine des droits de l'élève aussi bien que des devoirs du maître.

J'ai parlé aussi du passage des enfants par les mains d'un grand nombre de maîtres ou de maîtresses. Je ne voudrais pas qu'il y eût là l'occasion d'un malentendu. Je connais trop les difficultés rencontrées par ceux qui enseignent les éléments de l'arithmétique, dans les classes primaires ou élémentaires, pour leur adresser la moindre critique. Ils doivent se soumettre aux horaires et aux programmes ; on peut d'ailleurs se demander si l'étendue de ces derniers n'est pas exagérée par le souci de nécessités d'ordre soi-disant pratique et si l'on n'impose pas aux enfants des règles qu'ils seront fort empêchés d'appliquer dans la suite, faute d'en avoir bien vu l'origine. Enfin, là aussi, il faut compter avec les exigences des examens.

Tout au plus pourrais-je signaler à ces maîtres une tentation à laquelle ils échappent d'autant moins qu'ils se font une idée plus haute de cette partie de leur enseignement : les conséquences d'une anticipation peuvent être graves ; elles n'apparaissent guère que plus tard, à ceux dont la tâche s'en trouve compliquée.

C'est surtout aux professeurs de l'enseignement secondaire que je m'adresse. Les études qui les ont conduits à la licence ou à l'agrégation leur ont donné la science nécessaire et la plupart dominent la matière qu'ils sont chargés d'exposer. Des empreintes successives qu'ils ont reçues, les plus profondes sont presque toujours les dernières et on peut affirmer, sans leur faire tort, qu'ils sont beaucoup plus près des élèves des hautes classes que des enfants de Sixième ou de Cinquième.

L'effort qu'ils doivent faire, pour s'adapter à ces derniers, est considérable. Mais il n'est pas douteux que, s'ils consentent à le donner, leur valeur scientifique viendra faciliter l'exercice de qualités pédagogiques dont le complet développement est conditionné par un contact prolongé avec les élèves. Je pense que le meilleur moyen de leur faciliter la tâche est de remettre les débutants bien en face d'un problème que la plupart ont sans doute perdu de vue depuis longtemps, si tant est qu'ils aient eu l'occasion d'y réfléchir sérieusement. Ceci me ramène à la notion du nombre et d'abord à celle du nombre entier.

Je ne surprendrai personne en affirmant que cette notion repose sur l'existence d'objets auxquels l'homme attribue l'identité ou tout au moins un caractère commun qui les différencie de tous les autres.

Cette notion existe indépendamment de tout symbolisme et de toute connaissance acquise en arithmétique. Pour constater que deux collections d'objets, de même nature ou non, en contiennent le même nombre, il suffit de confronter les unités de chacune. Ce rapprochement donne l'idée d'égalité de deux nombres et aussi celle de nombre plus grand ou plus petit qu'un autre.

Le groupement de deux collections d'objets de *même nature*, ou l'addition de ces collections, conduit à l'addition des nombres attachés à chacune. Cette simple opération donne au nombre des propriétés que possèdent les collections correspondantes, propriétés indépendantes de la nature particulière, mais commune aux objets rassemblés. L'arithmétique des nombres abstraits peut prendre naissance, à cette occasion, et c'est ce point de départ que l'on adopte souvent, avec des succès divers, pour un enseignement rationnel.

On revient encore, dans l'étude des opérations consécutives à l'addition, à des groupements convenables d'objets. Mais il est assez rare qu'on le fasse d'une façon systématique, tant est grande la hâte d'aboutir à des règles qu'on cherche à fixer dans la mémoire des élèves par les procédés habituels : savoir la répétition et l'application.

N'est-ce pas là l'origine du malentendu que je signalais et de la confusion qui s'établit, au jugement de l'élève, dans les positions respectives du concret et de l'abstrait ?

On aurait de grandes chances d'y échapper si le contact avec le concret durait assez longtemps pour que la règle apparût simplement comme la traduction d'un état d'esprit. On ne verrait plus alors, au même degré, les hésitations et les tâtonnements que l'on constate si souvent dans l'application de la règle abstraite au problème concret.

J'y vois un autre avantage. Les propriétés dégagées des groupements d'objets peuvent être rendues sensibles à l'enfant, soit par la vision directe, soit par le dessin, soit par l'appel à l'imagination convenablement aidée. Elles se graveront profondément dans son esprit. Ce n'est pas à dire qu'il sera toujours facile de lui faire abstraire l'idée générale ; mais la conclusion découverte de cette façon reposera sur des bases solides et non pas seulement sur la mémoire verbale : on aura fait de l'élève autre chose qu'une sorte de technicien en herbe.

Mais est-il possible d'associer aux diverses opérations de l'arithmétique, des groupements concrets qui puissent intéresser les enfants et retenir leur attention ? De nombreux exemples — la plupart n'ont aucune prétention à l'originalité — permettront d'élucider cette question.

Tout d'abord, il est nécessaire de distinguer, parmi les propriétés des nombres, celles qui s'attachent aux nombres en général et celles qui sont inhérentes aux nombres figurés dans un système de numération.

Il suffit de se reporter à la signification des symboles utilisés et à la façon dont ils sont associés, pour se représenter la complication de tels systèmes. Toutes les opérations élémentaires, addition, multiplication, puissances, quotients et restes de divisions, y sont mises à contribution. Une telle notation, indispensable à l'emploi du nombre dans la pratique, est d'un maniement délicat, voire dangereux, quand il s'agit de découvrir des propriétés qui n'en dépendent pas. Si l'on revient alors à l'idée de collection, on peut, sans réelles difficultés, faire trouver aux enfants des propositions qu'on serait tenté de croire hors de leur portée.

En principe, les propriétés relatives aux nombres figurés sont plus cachées et on s'explique les déboires éprouvés par les maîtres qui veulent faire comprendre la théorie des opérations à de jeunes élèves ; je reviendrai sur ce point.

A voir la façon machinale dont les enfants utilisent la numération — ils ne sont pas seuls —, il est manifeste qu'ils ne songent guère à son origine et à sa signification. Il m'est arrivé assez souvent de leur demander un diviseur de quatre-vingt-seize, en attirant leur attention sur l'impression qu'ils éprouvent en entendant énoncer le nombre ; ce n'est qu'après bien des efforts qu'on m'a répondu « quatre » et plus difficilement encore « seize ». Il y a cependant là une mine d'exercices de calcul mental, propres à développer l'esprit d'observation, en marge de la mémoire et des règles. Un élève qui analyse l'écriture ou l'audition de 22, 33, 44, ..., 99, doit reconnaître que ce sont des multiples de 11 ; il peut donc donner de suite le quotient et le reste de la division par 11, d'un nombre inférieur à 100 : de là à trouver rapidement le quotient et le reste de la division d'un nombre figuré quelconque, par 11, il n'y a qu'un pas et il est bien inutile de résumer, sous forme de règle, les opérations auxquelles cela conduit. On pourrait faire des remarques analogues pour les nombres 222, 333, ..., 999, par rapport à 111.

Pour mieux faire saisir les services que l'on peut demander à l'idée originelle du nombre, j'examinerai successivement les opérations élémentaires.

Addition. — Le groupement de plusieurs collections d'objets de même nature en donne de suite la notion. Il semble qu'il suffise de mentionner l'invariabilité de la somme, lorsqu'on intervertit l'ordre des termes, qu'on les additionne ou qu'on les fractionne. La confusion signalée à ce propos (loc. cit.) montre qu'il faut insister.

L'appel à divers dénombrements des élèves de la classe est un moyen naturel de fixer l'attention sur ce point. J'en ai souvent utilisé un autre. J'imagine trois corbeilles de billes, placées devant moi, et pour faciliter le langage, j'invite les élèves à leur donner des noms. Ils prennent le jeu au sérieux et j'obtiens parfois des réponses touchantes : « Jeanne..., Rose..., Andrée », me disent des petits garçons. Nous nous arrêtons à des désignations plus courtes et moins personnelles en prenant les lettres A, B, C. Je m'assure que personne n'ignore la lettre accolée à chaque corbeille. Puis je demande combien on voit de billes dans A : l'un me dit 14, un autre 9, un troisième 17. Je propose de satisfaire tout le monde en adoptant une lettre qui rappelle le nom de la corbeille ; on me donne vite a, puis b et c. Je vérifie d'ailleurs que tous attribuent les mêmes nombres symbolisés aux différentes corbeilles, selon leurs positions respectives. Je fais alors le geste de verser le contenu de B dans A et je demande combien il y a maintenant de billes dans cette dernière ; j'obtiens généralement $a + b$ et $b + a$. J'évite de donner mon opinion ; je recommence et l'accord se fait sur $a + b$ que j'écris au tableau. C'est le moment de simuler le transport du contenu de C dans A : la somme $a + b + c$ est indiquée par tous et je la note. Je suppose ensuite que les choses soient remises dans l'état primitif et j'imagine d'autres façons de rassembler toutes les billes dans l'une des corbeilles ; je me borne à trois, mais je demande si l'on pourrait procéder autrement : il est rare que je n'obtienne pas de réponse justifiée. Je m'assure ainsi que l'attention n'a pas faibli. La question habituelle : « Y a-t-il le même nombre de billes, après chaque opération ? » conduit toujours au même résultat ; l'affirmation est nette, nullement influencée par mon intonation. J'écris alors :

$$(a + b + c) \text{ billes} = (b + c + a) \text{ billes} = (c + a + b) \text{ billes} = ...$$

La substitution d'autres objets aux billes n'arrête personne et on conclut :

$$a + b + c = b + c + a = c + a + b = ...$$

Il semble que tout soit terminé ; or, c'est à cet endroit précis que j'éprouve des résistances. Le plus souvent, j'ai beaucoup de peine à faire dire aux élèves que la valeur d'une somme ne change pas quand on intervertit l'ordre de ses termes. Pourtant la plupart ont déjà entendu prononcer cette phrase : la stupéfaction du maître m'en est presque toujours un sûr garant. Puisqu'ils sont incapables de la répéter, au moment où elle s'impose, c'est qu'ils n'en avaient pas compris le sens. De pareilles constatations ne devraient pas laisser d'illusion sur la pénétration des idées qui n'auront pas été imposées par une longue préparation.

Du point de vue que j'ai signalé plus haut, le problème de l'addition des nombres figurés — c'est celui dont on se préoccupe le plus — peut se formuler ainsi : étant donné les nombres figurés, attachés à plusieurs collections d'objets de même nature, trouver le nombre figuré qui correspond à la collection unique, résultant de leur réunion. On en peut donner la solution de bonne heure ; voici celle que j'ai développée dans plusieurs classes de Sixième.

Je demande aux élèves de se représenter trois groupes de soldats, placés sur un terrain de manœuvres et contenant respectivement 287, 96 et 358 hommes, par exemple. Comme ceux-ci sont astreints à l'ordre qu'impose la discipline, ils sont rangés, dans chaque groupe, par escouades de 10 hommes et par compagnies de 10 escouades. Je m'assure que ces conventions sont adoptées par tout le monde et, m'adressant au hasard dans la classe, je fais dire les nombres de compagnies, d'escouades et d'hommes qui figurent dans chaque groupe. Puis je propose de réunir les trois groupes, en observant toujours la discipline. On commence généralement par la réunion des compagnies, on continue par les escouades et les hommes ; le report d'une compagnie au lieu de 10 escouades et d'une escouade au lieu de 10 hommes s'effectue sans mon intervention. Le groupement terminé, je demande aux élèves s'ils ont déjà entendu parler de cela. Le plus souvent, la réponse est affirmative et, bien que l'ordre suivi ne soit pas celui qui est adopté dans la pratique, on reconnaît l'addition ; je marque la nuance en complimentant les enfants d'avoir commencé par les unités les plus importantes. Il m'est arrivé pourtant, dans une bonne classe d'un lycée parisien, de recueillir une dénégation dont l'accent ne me permettait pas de suspecter la sincérité. Les élèves s'étaient d'ailleurs vivement intéressés à l'épreuve et avaient montré une satisfaction indéniable en constatant que la réunion des trois groupes leur donnait un nombre exact de compagnies. Il me suffit d'écrire les trois nombres les uns au-dessous des autres pour que le rapprochement se fît dans leur esprit et j'assistai aux manifestations d'une joie véritable. L'enfant ne dissimule pas son plaisir et récompense à sa façon le maître qui a su lui donner l'impression de la découverte.

Il va de soi qu'avec l'aide des bataillons, régiments, etc., on peut pousser l'expérience aussi loin qu'il est utile de le faire.

Soustraction. — Du point de vue concret, cette opération se présente sous divers aspects. On peut enlever une partie d'une collection d'objets ; l'addition de la partie restante et de la partie enlevée reproduit la collection primitive. Chacune des collections mises en jeu peut être répartie en groupes moins importants ce qui conduit à la différence de deux sommes.

On peut aussi envisager deux collections d'objets de même nature et s'en représenter une troisième dont l'addition à l'une des proposées reproduit l'autre. Pour s'en rendre compte, il suffit de confronter les objets des deux collections, en les alignant sur deux files parallèles, à partir de la gauche par exemple : la différence est représentée par la portion de l'une, qui déborde l'autre sur la droite. On voit de suite que si l'on ajoute ou retranche le même nombre d'objets aux deux collections, vers la gauche naturellement, la différence n'est pas altérée. On découvre ainsi les égalités :

$$a - b = a + c - (b + c), \qquad a - b = a - c - (b - c).$$

On voit tout aussi bien ce qui se passe si l'on ajoute à la collection la plus importante, vers la droite, un certain nombre d'objets, ou si cette addition porte sur la moins importante, à condition que l'ordre de grandeur des collections confrontées ne soit pas modifié. On aboutit aux égalités :

$$a + c - b = a - b + c, \qquad a - (b + c) = a - b - c,$$

qui permettent de transformer un polynome arithmétique, tel que $a - b - c + d + e - f$, sans en altérer la valeur. Mais on peut aussi recourir à une représentation concrète des opérations qui sont indiquées par la structure de ce polynome. Pour cela, on aligne a objets de gauche à droite, puis on enlève b objets et c sur la gauche ; on dispose d objets sur la droite de la collection restante, puis e ; enfin on enlève f objets à gauche : toutes les opérations voulues sont réalisées. En fait, on a disposé $(a + d + e)$ objets de gauche à droite et supprimé $(b + c + f)$ objets sur la gauche et il en reste $a + d + e - (b + c + f)$. Un polynome arithmétique de la forme indiquée équivaut donc à la différence de deux sommes dont la constitution est visible ; la réduction des termes semblables s'en déduit. Ce raisonnement, à peine modifié, conduirait aux principales propriétés des sommes algébriques.

L'appel à des mouvements d'élèves est encore un excellent moyen de fixer l'attention. On propose de faire sortir b élèves d'une classe qui en contient a ; il en restera $a - b$. Si on en faisait rentrer c, le nombre des présents serait $a - b + c$ et celui des absents $b - c$. L'accord s'établit vite sur l'égalité :

$$a - b + c = a - (b - c)$$

qu'on énonce habituellement dans l'ordre inverse ; mais il est extrêmement difficile de faire traduire la règle correspondante, sous forme générale et abstraite, en langage ordinaire.

La soustraction des nombres figurés est acceptée aussi aisément que l'addition, si l'on fait appel aux conventions utilisées pour l'addition. On retranchera 3468 de 5849 en extrayant d'un groupe constitué par 5 régiments, 8 compagnies, 4 escouades et 9 hommes, un autre groupe formé de 3 régiments, 4 compagnies, 6 escouades et 8 hommes ; les élèves seront naturellement tentés de remplacer une compagnie du groupe initial par 10 escouades, pour rendre possible l'extraction des

6 escouades. Cette façon de procéder est employée parfois dans l'exercice de la soustraction.

Multiplication. — Si l'on veut obtenir une représentation concrète du produit de deux nombres entiers, il convient de bien marquer l'égalité des collections d'objets de même nature, dont on réalise l'addition. On est ainsi conduit à aligner les a objets d'une collection et à placer en regard, sur des lignes parallèles, les objets des autres ; le nombre b des files indique le nombre des collections additionnées. Le nombre total des objets est représenté par $a \times b$.

Mais on voit de suite que l'ensemble constitué de cette manière est aussi formé par a files de b objets, d'où vient l'égalité $a \times b = b \times a$.

Supposons que l'on ait réparti les objets d'une collection en plusieurs groupes qui en contiennent respectivement a_1, a_2, a_3, a_4 et décomposé le nombre des collections — par suite celui des files — en d'autres b_1, b_2, b_3..Si l'on réalise ces hypothèses, dans la distribution primitive de l'ensemble des objets, on voit apparaître l'égalité :

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_1 + b_2 + b_3) = \Sigma a_i b_j.$$

Lorsque a et b sont égaux, la configuration correspondante est un carré. La symétrie de ce carré par rapport à l'une de ses diagonales (celle qui descend de gauche à droite, par exemple), conduit à un groupement qui utilise à la fois des lignes et des colonnes de même rang, du tableau des objets. C'est ainsi qu'on passe du carré qui porte n objets au côté, à celui qui en a $n + 1$, en bordant le premier, à droite, par une colonne de n objets, en avant par une ligne de n objets, à condition de placer un objet, sur la diagonale principale, au point de croisement de la ligne et de la colonne ajoutées. L'égalité

$$(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$$

en résulte. On intrigue beaucoup les élèves en leur proposant de se former en carré sans s'être comptés au préalable ; on les y amène aisément et on leur fait découvrir la loi de formation des carrés des nombres entiers successifs, en amorçant l'extraction de la racine carrée.

L'application de la même idée, en constituant des groupements avec plusieurs lignes et plusieurs colonnes de même rang, arrêtées à leurs points de croisement sur la diagonale principale, conduit à l'égalité :

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + (2a + b)\,b + (2a + 2b + c)\,c \\ + (2a + 2b + 2c + d)\,d$$

qui contient en germe une méthode abrégée d'extraction de la racine carrée.

Une digression fera saisir toute l'importance des groupements dus à l'idée de symétrie. On a imaginé un tableau carré, constitué sur le modèle de la table de PYTHAGORE. A l'intersection de la ligne de rang a et de la colonne de rang b, on suppose placé, soit le nombre $a \times b$, soit le nombre $a^\alpha \times b^\alpha$ (α est un nombre entier quelconque fixe). En effectuant la somme des nombres contenus dans ce tableau, par lignes ou colonnes d'une part, par groupements symétriques d'autre part, on a été conduit à des relations intéressantes, concernant les sommes de puissances semblables des n premiers nombres entiers.

Si, dans un tableau d'objets constitué par a colonnes et c lignes, on enlève b colonnes, le tableau restant ne contient plus que $(a - b) \times c$ objets ; comme le tableau primitif en contenait $a \times c$ et qu'on en a écarté $b \times c$, on est conduit à l'égalité $(a - b)\, c = ac - bc$. Il en résulte

$$(a - b)(c + d) = a(c + d) - b(c + d) = ac + ad - ac - bd$$

et $(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d)$

$$= ac - ad + bd - bc = ac + bd - ad - bc.$$

La règle des signes, pour la multiplication de deux polynomes arithmétiques, se trouve amorcée ; elle est même complètement établie si l'on a pris la précaution de ramener chacun des polynomes à une différence de deux sommes.

L'emploi de l'espace, au lieu du plan, permet de se représenter un produit de 3 facteurs a, b, c. Il est commode d'utiliser comme objets des cubes égaux que l'on dispose dans c assises superposées, chaque assise ayant a cubes sur l'un de ses côtés et b sur l'autre. A la décomposition du bloc en assises, on peut adjoindre une répartition des cubes élémentaires en murs parallèles de face ou de profil, un seul cube entrant dans l'épaisseur de chaque mur. Les égalités

$$a \times b \times c = a \times c \times b = b \times c \times a,$$

résultent de ces trois distributions. L'échange des deux premiers facteurs étant permis, on démontre ainsi l'égalité des 6 formes d'un produit de trois facteurs. Des groupements convenables, effectués simultanément sur les murs de face, les murs de profil et les assises, conduisent de même à l'égalité :

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_1 + b_2 + b_3)(c_1 + c_2) = \Sigma a_i b_j c_k .$$

Le cas où a, b, c sont égaux mène, comme précédemment, à des associations de portions de murs et d'assises de même rang, à des sortes d'emboîtements partiels, remplaçant les encadrements analogues utilisés dans le plan. En particulier, on passe du solide qui porte n cubes sur chaque arête, à celui qui en a $n + 1$ en ajoutant une assise, un mur de face et un mur de profil, formés chacun de n^2 cubes élémentaires, à condition de remplir les trois cavités prismatiques avec trois files de n cubes, qu'on réunit au moyen d'un cube d'angle. On réalise ainsi l'égalité :

$$(n + 1)^3 = n^3 + (3n^2 + 3n + 1),$$

et plus généralement l'égalité :

$$(a + b + c)^3 = a^3 + [3a^2 + 3ab + b^2]\,b + [3(a + b)^2 + 3(a + b)\,c + c^2]\,c,$$

égalités qui sont à l'origine des méthodes d'extraction de la racine cubique.

On pourrait, à cette occasion, reprendre la digression faite plus haut, à propos des tableaux carrés.

Lorsque le nombre des facteurs d'un produit est supérieur à 3, la vision directe des faits n'est plus possible, avec le mode de figuration adopté jusqu'ici.

Mais on peut se tirer d'affaire et généraliser, dans une autre voie. Une collection du 1er ordre, contenant a objets, sert de base ; en associant b de ces collections, on a une collection du second ordre ; l'assemblage de c collections du second ordre constitue une collection du 3^e et ainsi de suite. Bornons-nous d'abord à l'étude d'une collection du 3^e ordre. On peut imaginer différents modes de distribution des objets qui la constituent.

Les a objets d'une collection de base étant alignés, on peut placer tous ceux de la collection du second ordre sur une seule file, ce qui donne $a \times b$ objets alignés ; en disposant les autres collections du second ordre sur des files parallèles, on constitue un tableau rectangulaire qui porte $a \times b$ objets sur l'un de ses côtés et c sur l'autre.

On peut aussi disposer les collections du premier ordre sur des files parallèles et constituer une collection du second ordre, sous forme d'un tableau qui porte a objets sur l'un de ses côtés et b sur l'autre ; la juxtaposition de c de ces tableaux, des deux façons possibles, donne deux nouveaux tableaux qui ont respectivement $b \times c$ et a objets, ou bien $a \times c$ et b objets sur chaque côté. Ces trois dispositions donnent l'égalité des produits $a \times b \times c$, $b \times c \times a$, $a \times c \times b$ et de ceux qui s'en déduisent par l'interversion des deux premiers facteurs, c'est-à-dire l'égalité des divers produits formés avec les trois facteurs.

On pourrait généraliser de cette façon ; ce serait assez compliqué et il n'y a pas d'intérêt sérieux à le faire. L'interversion des deux derniers facteurs d'un produit qui en contient trois étant permise, celle de deux facteurs consécutifs d'un produit quelconque se trouve légitimée et par suite aussi une interversion arbitraire. L'association des facteurs en résulte, puisqu'elle s'applique naturellement aux p premiers.

On pourrait également étendre la multiplication des polynomes arithmétiques susvisés, au cas où le nombre des facteurs est plus grand que 2.

La représentation d'un produit de nombres figurés, au point de vue concret, est beaucoup plus difficile que celle d'une somme, même si l'on se borne au cas de deux facteurs. En voici un essai qui n'innove guère quant à la marche suivie.

La multiplication par 10 d'un groupe du premier ordre, formé par des compagnies, des escouades et des hommes, donne un groupe du second ordre, constitué par autant de bataillons, compagnies et escouades ; la multiplication par 100 fournit un groupe du 3^e ordre, formé d'autant de régiments, bataillons et compagnies. La multiplication par 347 revient à l'addition de 7 groupes du premier ordre, 4 du second ordre et 3 du troisième ordre ; la disposition habituelle est ainsi préparée.

Signalons une difficulté à laquelle se heurtent tous ceux qui enseignent l'arithmétique et qui provient de l'insuffisance du contact avec le concret. Lorsqu'on applique la multiplication à des opérations de dénombrement, il faut avoir grand soin de mettre en évidence la nature des objets que l'on dénombre. Les données d'un problème font souvent intervenir des objets de différentes natures ; les nombres correspondants ne jouent pas le même rôle et il faut, *avant tout*, dégager les objets, dont le nombre doit conserver un caractère concret. Tant que l'enfant indique un produit où plusieurs facteurs ont ce caractère, on peut être certain qu'il ne se représente pas ce qu'il fait.

Division. — Du point de vue concret, cette opération se présente sous deux aspects principaux.

Deux collections A et B, d'objets de même nature, étant données, la plus grande A en contenant a et l'autre b, on demande d'extraire de la première le plus grand nombre possible de collections égales à la seconde. A cet effet, on constitue une file de b objets tirés de A, puis une seconde file identique, qu'on place en regard de la première, et ainsi de suite, tant que le nombre des objets inutilisés est supérieur à b ; on forme ainsi un tableau qui a b lignes et q colonnes, et il reste r objets non rangés ; r est inférieur à b et peut être nul. L'égalité

$$a = b \times q + r, \quad (r < b)$$

en résulte. On peut fort bien dire qu'on a divisé la collection A par la collection B ; q est abstrait et r concret.

On peut essayer encore de répartir également les a objets de A dans b collections qui en contiennent le plus possible. Pour cela, on extrait b objets de A et on les aligne en amorçant les $\cancel{q}$ collections par l'attribution d'un objet à chacune. On continue la distribution en disposant chaque fois les objets sur des lignes parallèles à la première, tant qu'il en reste assez pour que l'attribution d'un objet aux $\cancel{q}$ collections en formation soit possible. Cette distribution est manifestement identique à la précédente. Elle conduit aux mêmes résultats et on obtient encore $a = q \times b + r$, q et r étant les nombres déjà signalés Mais, cette fois, q est concret, r restant concret. On dit que la collection A a été divisée par le nombre $\cancel{q}$. 9/

Toute modification apportée à l'un ou à l'autre des nombres donnés a, b, ou à tous deux, emporte des modifications correspondantes pour q et r. Une étude détaillée m'entraînerait trop loin et je me bornerai à rappeler celles dont l'intérêt pratique est le plus grand ; j'utiliserai de préférence la première définition concrète de la division.

Le problème le plus simple est celui qui se pose lorsque a et b ont un facteur commun. Soit donc $a = a_1 \times c$, $b = b_1 \times c$. La collection A peut être constituée avec a_1 files de c objets et la collection B avec b_1 files identiques. On voit de suite que si q et r sont le quotient et le reste de la division de a_1 par b_1, le groupe A est décomposable en q groupes B et en un groupe qui contient r files et par suite moins d'objets que B. L'égalité $a_1 \times c = b_1 \times c \times q + r \times c$, avec $r \times c < b_1 \times c$, en résulte de suite et on aperçoit les conclusions habituelles, relatives au quotient et au reste.

Supposons que la collection A soit constituée par des groupes partiels A_1, A_2, A_3, de sorte que $a = a_1 + a_2 + a_3$. Pour distribuer A en groupes B, contenant b objets, il est tout naturel d'opérer d'abord sur chacun des groupes qui la constituent On obtient ainsi des quotients q_1, q_2, q_3, et des restes r_1, r_2, r_3. A se trouve décomposée en $(q_1 + q_2 + q_3)$ groupes B et en un groupe qui contient $(r_1 + r_2 + r_3)$ objets.

Le cas le plus simple est celui où $r_1 + r_2 + r_3$ est inférieur à b ; dans ce cas, on obtient le quotient et le reste de la division de A par B, sans autres opérations nouvelles que les deux additions indiquées ; cela arrive, en particulier, si r_1, r_2, r_3 sont nuls.

Sinon, la distribution des $(r_1 + r_2 + r_3)$ objets en groupes B donnera le complément du quotient et le reste de la division de a par b : ce reste est le même que celui de la division de $r_1 + r_2 + r_3$ par b, et si $r_1 + r_2 + r_3$ est un multiple de b, il en est de même de a.

Une étude analogue s'applique aisément au cas où le groupe A résulte de la différence de deux groupes A_1 et A_2 ; en particulier, si la division de a_1 et a_2 par b donne le même reste, a est un multiple de b.

Le cas où a est un produit $a_1 \times a_2$, n'est autre que celui où a est une somme de a_2 nombres égaux à a_1. En utilisant les résultats obtenus plus haut, on voit que si q_1 et r_1 sont le quotient et le reste de la division de a_1 par b, le groupe A est décomposable en $q_1 \times a_2$ groupes B et un groupe qui contient $r_1 \times a_2$ objets. r_1 est inférieur à b, mais il n'en est pas de même, en général, du produit $r_1 \times a_2$. La division de a par b n'est donc pas terminée ; le quotient complémentaire et le reste s'obtiendront en divisant $r_1 \times a_2$ par b. Dans tous les cas, les restes des divisions de $a_1 \times a_2$ et de $r_1 \times a_2$, par b, sont les mêmes. On peut donc, dans la recherche du premier, remplacer le facteur a_1 par le reste r_1 correspondant ; la généralisation est immédiate.

Supposons maintenant que b soit un produit $b_1 \times b_2$. Associons au nombre a un groupe A d'hommes que nous distribuons d'abord en escouades de b_1 hommes, puis en compagnies de b_2 escouades ou de $b_1 \times b_2$ hommes. La première distribution donne e escouades, — e est le quotient de a par b_1, — et un nombre d'hommes r_1 insuffisant pour constituer une escouade. La répartition des escouades par compagnies en donne c, — c étant le quotient de e par b_2 —, et il reste un nombre d'escouades r_2 inférieur à b_2. Avec ces escouades inutilisées et les r_1 hommes laissés de côté tout d'abord, on n'arrive pas à constituer b_2 escouades ou une compagnie. Il en résulte que c est bien le nombre des compagnies déduites du groupe A, c'est-à-dire le quotient de a par $b_1 \times b_2$. La conclusion s'impose.

J'ai répété cette expérience dans beaucoup de classes de Sixième et de Cinquième ; j'ai naturellement associé l'ensemble des élèves à ces groupements, en cherchant à leur faire imaginer les manœuvres correspondantes, et j'ai toujours été satisfait des résultats. Mais il faut avoir grand soin de ne jamais laisser deviner la conclusion avant le moment où elle apparaît à tous, sous peine de voir les élèves brûler les étapes.

L'emploi des bataillons permet de traiter le cas où b est un produit de trois facteurs, et ainsi de suite.

La division des nombres figurés pourrait être présentée à partir de là, à l'aide d'une représentation concrète du dividende et du diviseur ; il n'y a pas intérêt à le faire, à cause des difficultés du langage. D'ailleurs, la règle à laquelle on arrive est assez compliquée pour que les enfants n'aient pas l'illusion d'en comprendre l'origine, lorsqu'on n'a pas tenté de la leur faire saisir ; le besoin d'une démonstration ne sera pas sensiblement diminué chez eux par une application préalable et répétée. J'indiquerai simplement une façon de présenter la preuve, qui a toute la valeur d'une démonstration.

Le maître effectue la division en suivant la marche habituelle. Il écrit soigneusement au tableau les produits partiels, avec de la craie ordinaire ; les dividendes partiels sont transcrits avec de la craie de couleur et le reste final avec de la craie ordinaire ; un seul trait est tiré au-dessous du dividende donné. Les élèves sont invités à faire la preuve de l'opération en multipliant le diviseur par le quotient, suivant le procédé habituel, avec addition du reste ; le maître les aide en leur disant de faire abstraction des nombres écrits avec la craie de couleur et de poser la craie. Ils voient alors que toutes les multiplications partielles sont effectuées et que les produits partiels sont disposés de bas en haut. L'addition du reste et de ces produits, se substituant aux soustractions successives auxquelles a conduit l'application de la règle, vient justifier celle-ci.

Je pourrais donner beaucoup d'autres exemples à propos de la divisibilité des nombres figurés ou non. Ceux que j'ai produits ouvrent la voie au calcul algébrique et en amorcent les méthodes. Ils suffiront à montrer les services que peut rendre l'étude préalable du concret pour arriver aux propriétés abstraites du nombre entier. La façon de les présenter a une importance capitale. La pénétration de l'idée ne peut être contrôlée que par un emploi systématique des méthodes actives. Ce sont les réponses des élèves qui indiqueront au maître l'opportunité du choix des images ou des notations. J'ai représenté le plus souvent par des lettres les nombres utilisés ; c'est un moyen d'éviter les opérations intempestives que suggère fréquemment l'emploi des nombres figurés. On échappe quelquefois à ce danger en présentant aux élèves des nombres assez grands pour qu'ils reculent devant la tentation d'effectuer ; cette façon de faire est plus longue, je ne crois pas qu'elle assure davantage la compréhension. Il m'a semblé que la notation littérale, convenablement amenée, pouvait être acceptée de bonne heure ; mais c'est au maître à s'en assurer.

Le travail de découverte en commun ne donne pas complète satisfaction au besoin d'action des enfants ; il faudra en tenir compte et entrecouper l'exposition théorique d'exercices et d'applications qui s'y encadrent naturellement ou bien lui consacrer un temps soigneusement limité. Des exercices de calcul mental ou écrits constituent un excellent adjuvant. Mais il sera bon d'exercer en même temps les élèves à l'observation des nombres employés, afin d'en utiliser les particularités ; il faudra naturellement les mettre souvent sur la voie. Ce sera un moyen de renouveler l'intérêt émoussé par une application répétée des règles générales. Là aussi, le retour au concret apportera souvent une aide appréciable. Sur ce terrain, je signale l'utilité d'étendre la table de PYTHAGORE aux produits de nombres compris entre 10 et 30, par les 9 premiers nombres ; on facilitera beaucoup la recherche des chiffres successifs du quotient, dans une division, lorsque les deux premiers chiffres du diviseur forment un nombre compris entre 10 et 30.

Ceux qui me liront avec soin seront sans doute étonnés de constater que je n'ai jamais utilisé le mot « fois », dont l'usage est si répandu, au début de l'arithmétique ; c'est avec l'intention de serrer la réalité de plus près que je l'ai écarté. L'emploi de ce mot est souvent commode, il n'est pas toujours sans danger ; j'aurai l'occasion de le montrer plus loin.

3. De la grandeur au nombre

Il ne viendrait à l'esprit de personne de contester l'origine du nombre entier, qu'il soit abstrait ou concret. Je ne suis pas sûr que l'accord se ferait aussi aisément sur celle de la fraction utilisée en arithmétique.

On pourrait être tenté de relier la fraction abstraite au nombre entier au moyen de la division, lorsque celle-ci est possible exactement. Le quotient de 12 par 2 serait dit la moitié de 12, comme 12 est le double de 6 ; d'une façon générale, à un multiple d'un nombre correspondrait une partie aliquote du multiple. On pourrait même concevoir des opérations sur les fractions ainsi conçues ; mais on voit de suite les difficultés se présenter en masse, ne fût-ce que pour définir l'égalité. On dirait en effet que la moitié, les deux quarts, les trois sixièmes, les six douzièmes de 12 ont la même valeur ; mais il ne serait pas permis de parler des quatre huitièmes, des cinq dixièmes, etc..., à moins de s'adresser à des nombres multiples de 8, 10, etc... Ce serait bien autre chose si l'on revenait au concret et il y aurait quelque ridicule à dire que la moitié, les deux quarts, les trois sixièmes, les quatre huitièmes, d'une pile de 12 assiettes conduisent au même nombre d'objets. La règle de trois, sous sa forme mécanique générale, n'échappe pas à ce grave inconvénient.

Certains ont voulu voir, dans l'introduction de la fraction, un moyen de réaliser des divisions impossibles et j'ai connu un maître qui piquait la curiosité de ses petits élèves de Sixième, en leur donnant cet espoir. Il est vrai que la fraction $\frac{5}{7}$, par exemple, sera regardée, à partir d'un certain moment, comme le quotient de son numérateur par son dénominateur, mais cela n'a pas de sens *a priori* et il n'y a rien à tirer de là, au premier abord tout au moins. D'ailleurs, la notation adoptée, pour figurer une fraction, se relie manifestement à cette idée et on peut regretter que le symbole $\frac{a}{b}$ représente trop tôt pour les jeunes élèves, soit une division et par suite un quotient, soit une fraction. Il y a là une source de confusion.

La notion concrète de fraction ne peut acquérir toute sa généralité qu'au départ des grandeurs dites mesurables, c'est-à-dire des grandeurs dont on peut définir ou concevoir l'égalité et l'addition : on ne pourrait parler de la fraction $\frac{p}{q}$ d'une grandeur à laquelle on ne saurait attribuer ces deux caractères. Il faut que cette grandeur puisse se laisser morceler sans perdre sa qualité première ; lui accoler une fraction sans avoir élucidé ces différents points serait faire œuvre vaine.

Mais, dira-t-on, cette question dépasse les enfants ! Est-ce bien sûr ? Est-ce que les gestes du vendeur qui présente le bord d'une étoffe au regard du mètre et qui jette chaque fois de côté la partie confrontée, ceux du marchand qui puise successivement dans un récipient, avec une mesure dont il verse le contenu dans le vase apporté par le client, ne réalisent pas ces conditions, pour les longueurs et les capacités, de la façon la plus frappante ? C'est moins immédiat pour d'autres grandeurs que l'on ne mesure pas à proprement parler, sous leurs formes générales, comme les surfaces planes (il ne peut être question de la plupart des autres qui ont besoin d'être définies) ou les volumes ; mais l'égalité et l'addition de ces grandeurs prises sous des formes géométriques particulières, ne présentent aucune difficulté et il suffit d'en choisir dont le groupement permette de recouvrir le plan ou de remplir l'espace, sans solution de continuité, autant ou aussi peu que l'on veut.

La balance donne naturellement la notion pratique de l'égalité des masses ou des poids ; quant à leur addition, elle va de soi.

Il ne peut être question, avec des enfants, des difficultés que suscite l'étude de ces caractères, à propos du temps.

Relativement aux angles, dans le plan, et aux arcs portés sur une même circonférence, la mise en évidence de ces propriétés résulte de déplacements convenables.

Faut-il insister sur les signes monétaires ? Le caractère conventionnel de l'égalité ne fait plus de doute pour personne à une époque où sa définition change d'heure en heure ; l'addition est une notion familière à tous.

Je ne parle pas des quantités de chaleur qui se présentent plus tard, encore moins des températures dont on conçoit l'égalité mais non l'addition, ni des grandeurs introduites par l'étude des phénomènes électriques ou magnétiques ; tout cela sort du cadre de cet article et nécessiterait de longs développements : il n'est pas douteux que l'enseignement n'est pas complètement au point sur toutes ces questions dont l'exposition gagnerait au retour plus fréquent aux caractères essentiels des grandeurs mesurables.

Les explications données aux élèves et les problèmes qui leur sont proposés tiennent-ils toujours compte de ces notions fondamentales ?

Combien de fois n'ai-je pas vu, en lisant des publications pédagogiques, raisonner sur des grandeurs quelconques, qu'on représentait de prime abord par des longueurs !

J'ai assisté à des corrections de devoirs dont le sujet n'avait pas été compris par la plupart des élèves. Un jour, il était question d'un réservoir rempli aux trois quarts ; l'attitude de la classe dénotant de l'embarras, je demandai ce qu'il fallait entendre par là. Un grand nombre n'y attachaient aucun sens ; quelques-uns se représentaient un cylindre portant une graduation sur une génératrice et faisaient appel, sans s'en rendre compte, à la formule qui fournit le volume de ce corps. Tous furent déconcertés quand je donnai au réservoir la forme d'une barrique renflée dans sa partie médiane. Je fus obligé d'imaginer un réservoir auxiliaire dont le contenu versé quatre fois successivement dans le premier remplirait exactement celui-ci (1). Dès que la signification du terme embarrassant fut comprise, la solution du problème posé se déroula tout naturellement et lorsqu'on fut arrivé au résultat, un de mes voisins que mes réflexions avaient particulièrement surexcité s'écria : « Ah, comme c'était facile ! »

Il serait exagéré de présenter ces caractères essentiels sous une forme générale et abstraite qui déconcerterait les enfants ; mais il faut les leur faire sentir et comprendre, à propos de chaque grandeur nouvelle, si l'on veut qu'ils puissent utiliser les propriétés des fractions.

A l'inverse de ceux qui font trop aisément crédit aux débutants sur ce terrain, il existe encore des maîtres qui croient que l'observation des grandeurs est trop difficile et qui répugnent à s'en servir pour justifier des opérations dont ils font apprendre soigneusement les règles. De nombreuses expériences me font croire que tout dépend de la façon dont les exemples sont présentés.

Je n'ai guère obtenu de réponses satisfaisantes à propos de l'égalité des fractions. Le plus souvent, on me dit que $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{3}{6}$ parce qu'une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre : c'est le phénomène habituel de la soumission à la règle imposée par l'autorité du maître. Je me risque à faire remarquer que la valeur d'une fraction aurait besoin d'être définie pour qu'on sût si elle a changé ou non ; ma réflexion tombe dans le vide, ce qui n'a rien de surprenant. Je pousse mon enquête et demande pourquoi une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre, 3 dans l'espèce. Généralement on me répond que la multiplication du numérateur par 3 la rend trois fois plus grande et celle du dénominateur par 3 la rend trois fois plus petite et par suite que sa valeur n'est pas altérée. Il y aurait beaucoup à dire sur la logique d'un raisonnement qui passe par la notion de trois fois plus grande pour arriver à celle d'égalité. Je n'en veux retenir que les termes.

Le mot « fois » a une signification précise que l'on devrait respecter. Sans parler de ceux qui ne craignent pas de dire une demi-fois et une fois et demie — ils sont nombreux —, n'y a-t-il pas un abus à remplacer une multiplication ou une division par 3, par les expressions « trois fois plus grande » ou « trois fois plus petite » ? Il semble qu'il y ait là une sorte de mécanisme verbal, tiré de la règle de trois, et dont l'emploi permet aux élèves d'appliquer les règles sans se tromper : ici encore c'est le souci d'une technique qui l'emporte. J'embarrasse beaucoup les élèves en leur demandant de comparer les expressions

(1) Je dis imaginer et cela suffit. Les maîtres qui demandent d'emblée à leurs élèves comment ils s'y prendraient pour diviser une longueur en 6 parties égales posent une question hors de portée et ceux qui font remarquer que $6 = 2 \times 3$ ne font que reculer la difficulté.

« deux fois plus grand » et « une fois plus grand » : ils me répondent généralement que c'est la même chose. Je n'en suis pas surpris car c'est ainsi que le comprennent la plupart de ceux qui ignorent les précisions (?) du langage arithmétique. Pour être logique, il faudrait dire que « une fois plus grand » n'a pas de sens ou bien que cela qualifie l'égalité ; mais alors « une fois plus grand » et « une fois plus petit » seraient équivalents ! Il serait cruel d'insister.

Quelquefois l'essai de justification prend une forme plus cohérente et on me répond que la moitié de l'unité en contient les trois sixièmes ; c'est inattaquable au point de vue du langage. Mais quelle idée un débutant peut-il se faire de parties égales, ou même simplement de parties de l'unité, s'il ne voit pas derrière cette unité une grandeur concrète ? Les confusions qui se produisent si souvent, dans l'esprit des élèves, quand les fractions qu'ils utilisent s'appliquent à des unités différentes devraient éclairer les maîtres sur le peu de pénétration de cette notion. La difficulté est telle qu'il ne faut pas craindre, pour se faire comprendre, de choisir des exemples parmi les plus familiers, dussent-ils paraître un peu gros ! Le gâteau est celui qui intéresse le plus, qu'il s'agisse de fillettes ou de jeunes garçons, et on peut en tirer beaucoup. Lorsque je demande ce que l'on préfère de la moitié ou des cinq dixièmes d'un gâteau, je vois apparaître des sourires sur un grand nombre de visages et on me répond que c'est « pareil » ; mais il ne faut pas croire que ce soit général et il m'est arrivé trop souvent de voir préférer la moitié aux trois sixièmes parce que l'élève se rendait compte de ce qu'on lui offrait avec la moitié, nullement avec les trois sixièmes et « qu'un tiens vaut mieux que deux tu l'auras. » J'ai naturellement essayé de montrer deux gâteaux identiques, partagés l'un en deux parties égales, l'autre en six parties égales et de réaliser la moitié du second par l'addition de trois de ses parties. L'élève convaincu par cet exemple ne l'était pas toujours par un autre où les grandeurs de comparaison étaient conservées, ainsi que la fraction $\frac{1}{2}$, mais où l'on remplaçait $\frac{3}{6}$ par $\frac{8}{16}$; il l'était moins encore si l'on changeait les grandeurs de base. Il y a là une preuve irréfutable de la lenteur d'accès de certains cerveaux à une idée de quelque généralité et du danger de supprimer l'effort de compréhension en formulant trop tôt cette idée dans une règle.

Chaque fois que je demande de comparer les fractions $\frac{11}{16}$ et $\frac{13}{15}$, on me propose de les réduire au même dénominateur ; si je dis : « que préférez-vous des $\frac{11}{16}$ d'un gâteau ou des $\frac{13}{15}$ d'un gâteau identique », on me donne fréquemment une réponse correcte et immédiate ; qui plus est, on la justifie nettement : les hésitations du langage ne laissent aucun doute sur la possession des deux idées qui entrent en jeu.

Je répète parfois l'expérience avec les fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{7}$ et si j'ai soin d'ajouter qu'il s'agit de fractions de gâteau, des élèves songent de suite à la moitié d'un gâteau comme terme de comparaison.

Une observation non désintéressée du partage d'un gâteau en parties égales permet de conduire l'enfant à d'autres conséquences ; proposez-lui les $\frac{2}{7}$ d'un gâteau ou les $\frac{4}{9}$ d'un gâteau identique, placé sur une autre assiette, en lui demandant ce qui reste de chacun, et son choix sera vite fait. La justification sera moins aisée que dans les exemples précédents, par suite des difficultés d'expression et parfois aussi d'une confusion qui s'établit dans son esprit entre une soustraction et une addition. On peut le mener ainsi à la comparaison des fractions dont les deux termes diffèrent d'un même nombre, mais il vaut mieux encore multiplier les observations, avant de dégager la règle.

Le rapprochement des deux morceaux enlevés du premier gâteau et des 5 parties qui restent conduirait à remarquer que la partie soustraite est les $\frac{2}{5}$ de la partie conservée et que celle-ci est les $\frac{5}{2}$ de la partie enlevée ; je pense préférable de différer cette constatation et de la présenter sur d'autres exemples, la comparaison simultanée de trois grandeurs pouvant déconcerter des débutants.

L'origine de la fraction abstraite est présentée souvent encore, dans l'enseignement, comme résultant de la comparaison de deux grandeurs mesurables de même espèce. J'ai parfois entendu affirmer que, deux longueurs quelconques étant données, on peut toujours trouver une partie aliquote de l'une, assez petite pour que l'autre la contienne un nombre exact de fois, ce qui revient à affirmer que deux longueurs prises au hasard sont commensurables. Je n'ai jamais voulu voir là qu'une étourderie. On ajoute souvent que cela est vrai à condition de négliger dans l'une une partie aussi petite que l'on veut. Mais la fraction se présente alors comme valeur approchée du rapport des longueurs et l'arbitraire qui préside à sa formation en diminue singulièrement l'intérêt et les applications. Si on se plaçait simplement au point de vue pratique des valeurs approchées, mieux vaudrait se contenter d'utiliser les nombres décimaux, comme on le fait avec le système métrique ; ils suffisent pour atteindre une approximation aussi grande qu'on la désire et leur liaison avec le système de numération permet de les manier comme des nombres entiers, en ce qui touche les opérations, la division exceptée.

En fait, si l'on veut comparer deux grandeurs mesurables de même espèce, A et B (il ne faut voir là que des dénominations), on est amené naturellement à retrancher la plus petite de la plus grande un nombre a_1 de fois assez grand pour que le reste B_1 soit inférieur à B, c'est-à-dire *à diviser la grandeur A par la grandeur B* ; il n'y a aucune raison *à priori* pour que B_1 soit nul. On est conduit ensuite à diviser B par B_1, ce qui donne un quotient a_2 abstrait comme a_1 et un reste B_2, etc. Si les opérations se terminent — la probabilité de cet événement est nulle — le dernier reste B_n est une partie aliquote commune à A et à B. Il est aisé de montrer que c'est la plus grande et que toutes les parties aliquotes communes à A et à B, en nombre illimité d'ailleurs, sont les parties aliquotes de B_n. Du point de vue qui nous occupe, on trouve alors une fraction $\frac{a}{b}$ dont les termes sont premiers entre eux et qui peut servir de mesure à A quand on prend B comme unité. Si les opérations ne se terminent pas, on obtient des mesures de grandeurs qui approchent de plus en plus de A, les unes par défaut, les autres par excès, sous forme des réduites d'une fraction continue. Tout cela est inaccessible aux enfants, et il faut se résigner à un acte d'autorité en imaginant, dès le début, des fractions de grandeur.

L'accord s'étant fait sur ce point, va-t-on définir l'égalité de deux fractions abstraites par l'égalité des grandeurs qu'elles mesurent à partir d'une même unité ? Ceux qui l'ont tenté n'ont guère sujet, je crois, d'être satisfaits de la durée des résultats. Le mot *mesure* prête d'ailleurs à bien des confusions. Il désigne à la fois un instrument, une opération, un nombre ; les acceptions qui nous intéressent pourraient être réunies dans une phrase : « Les mesures effectuées à l'aide d'une mesure donnent les mesures des grandeurs mesurées. » Le sens précis de ce mot ne peut venir que du contexte, et il me paraît préférable d'en retarder l'emploi jusqu'au jour où l'idée apparaîtra nettement.

Le mot *rapport* n'a guère plus de précision pour des débutants, et tous les maîtres connaissent les résistances que suscite son emploi, même en Quatrième et en Troisième.

Faut-il renoncer à définir l'égalité de deux fractions, au début tout au moins ? En aucune façon. Ayant remarqué que la fraction $\frac{na}{nb}$ d'une grandeur est égale à la fraction $\frac{a}{b}$ de cette grandeur, on convient de dire que les fractions $\frac{na}{nb}$ et $\frac{a}{b}$ sont égales. Plus généralement, on dira que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont égales, si les deux fractions de grandeur obtenues par leur intermédiaire, au départ d'une grandeur quelconque, sont des grandeurs égales. C'est une première manifestation de la fraction abstraite. Un mode de simplification en résulte par la division des deux termes soit par un diviseur commun, soit par leur p. g. c. d. Mais il est bon de remarquer, à ce propos, que le passage d'une fraction à une fraction égale ne se fait pas nécessairement par la multiplication ou la division de ses termes par un même nombre : l'exemple de $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{6}$ est suffisant. Il est préférable aussi de ne pas parler de fraction *irréductible* à cette occasion. On rencontre fréquemment de grosses résistances, même dans la classe de Mathématiques, quand on veut faire comprendre aux élèves que l'irréductibilité d'une fraction, dont les termes sont premiers entre eux, a besoin d'être démontrée. Pour la même raison, il vaut mieux s'abstenir de dire qu'une telle fraction ne peut plus être simplifiée : le fait est exact, mais, à force de le répéter, on finit par le croire évident. Pour ce motif encore, il convient de différer la recherche de toutes les fractions égales à une fraction donnée.

La comparaison des deux grandeurs A et B obtenues en prenant deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ d'une même grandeur G, exige le plus souvent qu'on les constitue de morceaux équivalents et qu'on reconnaisse celle qui en contient le plus grand nombre ; on est donc amené à trouver une partie aliquote commune aux parties qui constituent A et B. Une première idée conduit à décomposer G en $b \times b'$ parties égales, plus généralement en p parties égales, p étant un multiple commun à b et b' et enfin en m parties égales, m étant le p. p. m. c. de b et b'. Pratiquement, on simplifiera les deux fractions, s'il y a lieu, et on verra de proche en proche quel est celui des multiples du plus petit des dénominateurs réduits, qui est un multiple de l'autre ; cette recherche d'un multiple commun à deux nombres, par tâtonnements, conduit naturellement au p. p. m. c. : c'est un excellent exercice pour des débutants. Là encore il faudra se garder de dire que les deux fractions sont réduites au plus petit dénominateur commun ; si un élève pose la question, il faudra lui répondre affirmativement et ajouter que la démonstration viendra plus tard. Si la grandeur A est plus grande que B, on dira que la fraction $\frac{a}{b}$ est plus grande que $\frac{a'}{b'}$; on s'en rendra compte en comparant les numérateurs des fractions réduites au même dénominateur. Si ces numérateurs sont égaux, les fractions sont égales et le critérium d'égalité, sous la forme $ab' = ba'$, se trouve établi.

Je laisse de côté la comparaison d'un nombre quelconque de fractions abstraites. La réduction des fractions au même dénominateur s'impose aussi dans l'addition des fractions de grandeur. Proposons à un enfant de réunir sur une assiette la moitié et le sixième d'un gâteau et de chercher à se rendre compte du résultat de cette addition ; il songera à couper la moitié en trois parties égales qui constitueront trois sixièmes du gâteau. Il obtiendra ainsi quatre sixièmes de ce gâteau. Compliquons le problème en prenant deux autres fractions : nous l'amènerons de proche en proche à constater que la somme de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ du gâteau est une fraction de ce gâteau (on fera appel à des gâteaux identiques, s'il est nécessaire). Pour l'obtenir, il réduira les fractions abstraites au même dénominateur et s'il trouve $\frac{a_1}{p}$ et $\frac{a_1'}{p}$, il verra que la fraction résultante du gâteau est $\frac{a_1 + a_1'}{p}$. La fraction $\frac{a_1 + a_1'}{p}$ s'appellera naturellement *somme* des deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ et l'opération qui l'a fournie, *addition* des deux fractions. En étendant la chose à l'addition d'un nombre quelconque de fractions de grandeur, il arrivera à constater qu'une telle somme est une fraction de la même grandeur, dont les termes s'obtiennent par une règle facile à dégager. Il vaudra mieux attendre, pour la lui faire énoncer, que son origine et sa signification se soient bien imposées à l'esprit de l'élève.

En particulier, l'addition de q fractions $\frac{a}{b}$ d'une grandeur A, donne une grandeur qui est la fraction $\frac{a.q}{b}$ de A.

L'addition des fractions abstraites sortira de là et les propriétés commutatives et associatives de la somme résultent soit de la règle, par un rappel des propriétés correspondantes des nombres entiers, soit mieux par un retour aux opérations concrètes qui ont une allure plus générale. Aussi, je crois préférable de revenir aux grandeurs mesurables, sans idée préconçue, et de montrer comment l'appel à leurs propriétés caractéristiques conduit à un système cohérent d'opérations d'où résultent les opérations propres aux fractions.

L'addition de grandeurs données, de même espèce, en est une conséquence immédiate. La critique des propriétés commutatives et associatives de telles sommes est sans intérêt pratique. Il suffit d'en constater l'existence en prenant l'exemple de trois vases de capacités quelconques, dont on verse le contenu dans un autre vase, successivement ou simultanément, dans un ordre arbitraire.

Les vases étant de forme cubique et l'arête de l'un d'eux étant choisie, on peut imaginer que les arêtes des deux autres sont respectivement la diagonale d'une face et la diagonale proprement dite du premier : les propriétés de la somme de leurs capacités, au sens visé ci-dessus, n'ont rien à voir avec le fait que ces capacités sont incommensurables deux à deux.

De même, l'appel aux propriétés des nombres entiers ne permettrait pas d'expliquer pourquoi deux quadrilatères dont on obtient les sommets, sur une circonférence, en portant bout à bout, à partir d'un point, des arcs respectivement égaux au quart, au cinquième, au sixième de cette circonférence, ou bien au sixième, au quart, au cinquième de cette circonférence, ont même périmètre.

La soustraction de grandeurs de même espèce se conçoit sans peine et, en représentant par les signes $+$ et $-$ habituels, les opérations d'addition et de soustraction, on arrive à la notion d'un polynome $A - B - C + D - E$, dont les termes sont constitués par ces grandeurs, sans qu'aucune idée de mesure s'y trouve attachée. Si ces grandeurs sont des longueurs, on peut réaliser la longueur définie par le polynome, de la façon suivante :

Sur une droite, à partir d'un point O, de gauche à droite, on porte la longueur A ; soit Oa. A partir de la même origine, dans le même sens, on porte la longueur B qui est inférieure à A ; soit b son extrémité. La longueur $A - B$ est représentée par le segment ba. A partir de b, toujours dans le même sens, on porte la longueur C qui est inférieure à ba ; soit b' son extrémité. La longueur $A - B - C$ est figurée en $b'a$. A partir de a et vers la droite, on porte la longueur D ; soit a' son extrémité. La longueur $A - B - C + D$ est représentée par $b'a'$; etc. On obtient finalement un segment $b''a'$ qui réalise $A - B - C + D - E$. Or le point a' a été obtenu en portant bout à bout, à partir de O et vers la droite, deux segments respectivement égaux à A et à D ; le point b'' qui est à gauche de a', a été construit en juxtaposant, à partir de O et dans le même sens, trois segments respectivement égaux à B, C, E. On en conclut aisément l'égalité :

$$A - B - C + D - E = A + D - (B+C+E)$$

et toutes les propriétés commutatives et associatives qui en résultent, à condition que les opérations indiquées restent possibles.

Si l'on suppose que A, B, C, D, E, sont des fractions $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, $\frac{d}{d'}$, $\frac{e}{e'}$ d'une même grandeur, on aboutit ainsi aux propriétés des polynomes de fractions abstraites.

Le cas où les grandeurs ajoutées sont égales donne la notion de produit d'une grandeur par un nombre entier et inversement celle du quotient de la division d'une grandeur par un nombre entier, utilisées au départ pour la fraction de grandeur.

La signification de l'expression $(A-B-C+D-E) \times (a+b-c+d)$, où A, B, C, D, E représentent des grandeurs de même espèce, et a, b, c, d, des entiers, apparaît aisément, ainsi que les propriétés distributives correspondantes. Ces opérations sont identiques à celles qui ont été faites sur les collections d'objets et les nombres entiers.

Le fait de voir une fraction de grandeur comme le résultat de la division de cette grandeur par le dénominateur, suivie de la multiplication de la grandeur obtenue par le numérateur de la fraction considérée, est susceptible de généralisation. On peut envisager une suite de divisions et de multiplications successives d'une grandeur par deux séries de nombres entiers, dans un ordre déterminé. Si l'on remarque que le quotient par b de la grandeur $A \times a$ est égal au produit de $\frac{A}{b}$ par a, on conclut aisément que les multiplications et les divisions peuvent être groupées et que la grandeur finale résulte de A : 1° par une multiplication dont le multiplicateur est le produit des multiplicateurs donnés, 2° par une division dont le diviseur est le produit des diviseurs donnés ; les propriétés commutatives et associatives de telles opérations en résultent de suite.

On peut grouper ces opérations d'une autre façon et passer de la grandeur primitive à la grandeur finale par la formation d'une série de fractions de grandeurs, le numérateur ou le dénominateur de ces fractions successives pouvant être égal à l'unité. Or si l'une de ces fractions a pour dénominateur l'unité ou si son numérateur est divisible par son dénominateur, la fraction de grandeur correspondante est le résultat de la multiplication de la grandeur précédente par la valeur de la fraction abstraite. On est donc conduit à regarder une fraction de grandeur comme le produit de cette grandeur par la fraction abstraite. En particulier, le quotient d'une grandeur par b est aussi le produit de cette grandeur par $\frac{1}{b}$. Cette analyse montre que les multiplications successives d'une grandeur par une suite de fractions abstraites, équivalent à une seule multiplication. Le multiplicateur de cette dernière opération s'appellera naturellement le produit des multiplicateurs composants et on arrive à la notion du produit de fractions abstraites, à la règle qui permet de l'évaluer, à ses propriétés.

La multiplication d'un polynome de grandeurs, par un polynome de fractions, résulte de ce qui précède, ainsi que les propriétés distributives corrrespondantes.

Si l'on veut remplacer un polynome de grandeurs par une fraction de grandeur, il faut substituer une telle fraction à chacune des grandeurs qui le constituent, ce qui exige que tous ses termes soient des grandeurs commensurables. La mesure et le choix de l'unité s'imposent alors. Les mesures étant des fractions, un polynome de grandeurs de l'espèce visée apparait comme le produit d'une grandeur unité par un polynome de fractions, dont les termes sont les mesures en question. Le produit d'un semblable polynome de grandeurs par un polynome de fractions est alors le produit de l'unité par deux polynomes de fractions et on est conduit aux propriétés distributives du produit de deux polynomes dont les termes sont des fractions.

Il paraît superflu de poursuivre les développements relatifs à la multiplication. Quand à la division, elle se présente sous divers aspects. Tout d'abord, si B désigne la fraction $\frac{a}{b}$ de la grandeur A, inversement A est la fraction $\frac{b}{a}$ de la grandeur B, c'est-à-dire que si B est le produit de A par $\frac{a}{b}$, A est le produit de B par $\frac{b}{a}$ et par suite B est le quotient de la division de A par $\frac{b}{a}$. Ainsi, la multiplication d'une grandeur par $\frac{a}{b}$ et sa division par $\frac{b}{a}$ sont deux opérations équivalentes. Les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ qui se présentent ainsi sont dites inverses ; leur produit est d'ailleurs l'unité.

Cette remarque permet de résoudre un certain nombre de problèmes où ne figurent que des grandeurs de même espèce. Elle est insuffisante lorsque des grandeurs de même espèce A et B interviennent par leur rapport et que ce rapport n'est pas donné directement ; c'est ce qui arrive dans les problèmes dont les données ou les inconnues font intervenir des grandeurs d'espèces différentes. Supposons que A et B aient été tout d'abord comparées à une grandeur auxiliaire U dont elles sont respectivement les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$. La grandeur $\frac{U}{qq'}$ étant contenue $p.q'$ fois dans A et $p'.q$ fois dans B, le quotient de A par B ou le rapport de A à B est $\frac{pq'}{qp'}$. Le produit de $\frac{pq'}{qp'}$ par $\frac{p'}{q'}$ étant précisément $\frac{p}{q}$, s'appellera quotient de la division de $\frac{p}{q}$ par $\frac{p'}{q'}$. On arrive en même temps à la proposition fondamentale, relative au rapport de deux grandeurs comparées à une troisième ou mesurées avec la même unité.

On pourrait manifestement abréger, à condition de s'en tenir aux points essentiels. Je pense que, dans la pratique, il est préférable de maintenir longtemps l'élève au contact des grandeurs, en s'efforçant de les lui faire voir ou imaginer, plutôt que d'énoncer prématurément des règles en lui donnant la tentation de s'y soumettre avant de les avoir comprises : un instant de réflexion fatigue beaucoup plus qu'un long effort de mémoire.

En mettant en lumière, chaque fois que l'occasion s'en présente, les propriétés essentielles des grandeurs mesurables, on le prépare à la notion des grandeurs proportionnelles dont l'accès ne rencontre tant de difficultés que parce que les choses dont on parle ne se réalisent pas dans sa pensée. En fait, la proportionnalité de deux séries de grandeurs associées, de même espèce ou d'espèces différentes, est établie quand on a constaté que l'égalité des unes entraîne l'égalité des autres et que l'addition des unes s'accompagne de l'addition des autres. Pour n'en citer qu'un exemple on ne peut plus actuel, la formule « à travail égal, salaire égal » prépare la proportionnalité des quantités de travail effectuées et des salaires afférents ; l'addition simultanée des quantités de travail d'une part, des salaires correspondants d'autre part, en achève la réalisation.

Dans la pratique, on masque parfois ces idées capitales par une sorte de dénombrement simultané des grandeurs proportionnelles. C'est ce qu'on fait au début de la géométrie, quand on place en regard de la 360ᵉ partie d'un tour complet, un arc d'un rapporteur semi-circulaire. Cela paraît très simple, tout d'abord, à l'élève qui voit un arc en face d'un angle. Il est d'autant plus satisfait que le même nom, le *degré* dans l'espèce, est donné aux grandeurs associées. Au point de vue logique, il y a une complication à mesurer des angles au moyen d'arcs, alors qu'on peut s'en passer, d'autant plus que les arcs en question dépendent du rayon de la circonférence sur laquelle ils sont tracés. On prépare ainsi des confusions, soit dans le langage, soit dans l'écriture et on ne compte plus les élèves, ni même les maîtres, qui disent ou écrivent qu'un angle est égal à un arc ; je reconnais d'ailleurs que ceux qui emploient ce langage ne se méprennent pas en général sur la signification qu'il faut en dégager. Je ne suis pourtant pas bien sûr que des pétitions de principes ne soient parfois amorcées sur ce terrain. Mais, ce qui est plus grave, c'est qu'on prend l'habitude d'utiliser des intermédiaires inutiles et qu'on complique à loisir des choses parfois très simples.

Combien d'élèves arrivent à oublier la définition de l'égalité et de l'addition des angles et voient derrière des actes relevant uniquement de la géométrie, des opérations purement numériques !

Combien de fois ai-je entendu exposer, dans la première année de géométrie, sous la désignation de mesure des angles au centre, des angles inscrits, des angles quelconques, la correspondance qui existe entre ces angles et les arcs interceptés par leurs côtés prolongés ou non, sur une circonférence ! On énonce, à cette occasion, une proposition qui rebute la plupart des élèves et je ne suis pas bien sûr que ceux-ci se rendent vraiment compte de la proportionnalité des grandeurs comparées. Comprennent-ils que l'égaliié des mesures, sous certaines conditions, n'est pas particulière à ces grandeurs, mais que c'est là une propriété commune à toutes les grandeurs proportionnelles ? Ils sont d'autant plus portés à en douter que l'on dit même mesure quand il s'agit des angles au centre, mesure moitié quand il s'agit des angles inscrits : c'est la double signification du mot degré qui continue à peser sur la forme des conclusions.

Aussi, ne faut-il pas s'étonner des difficultés rencontrées par les débutants sur ce terrain. Or, on peut fort bien se passer de cette association, pour l'étude des applications qu'on leur propose. Il suffit de remarquer qu'un angle inscrit est la moitié de l'angle au centre correspondant. On aperçoit de suite l'égalité des angles inscrits dans un même segment. On voit non moins bien la somme de deux angles inscrits dont les sommets sont situés sur deux arcs qui ont même corde, mais qui sont placés de part et d'autre de cette corde : l'examen d'un angle rentrant et d'un angle saillant y conduit. On évite ainsi des démonstrations boiteuses comme celles que l'on donne trop souvent encore, à propos du lieu des points M qui sont placés d'un certain côté du support d'un segment rectiligne AB et d'où l'on voit ce segment sous un angle donné. J'ai toujours embarrassé les élèves en plaçant le point M en dehors du segment de cercle utile, de telle sorte que l'un des côtés de l'angle AMB rencontrât, non ce segment de cercle, mais celui qui le prolonge, de l'autre côté de AB. Là encore, la considération des angles se suffit à elle-même.

La mesure directe des grandeurs étant plus simple logiquement qu'une mesure indirecte qui fait appel à des grandeurs proportionnelles devrait donc être préférée. Les exemples du contraire sont nombreux et on arrive parfois à des formules qui font image. Un historien dira que tel général disposait de tant de baïonnettes et de tant de sabres, en mettant les instruments à la place de ceux qui les manient.

Au lieu d'apprécier l'égalité de deux quantités de travail, on se contente d'admettre que deux ouvriers en fournissent autant l'un que l'autre, dans le même temps ; ce sont alors les hommes présents sur le chantier et la durée de leur présence, qui servent à la mesure du travail accompli ou tout au moins du salaire correspondant. Si je ne craignais d'employer une formule qui prête à l'équivoque, je dirais qu'on se contente, là aussi, de la solution paresseuse.

Mon intention n'est pas de reprendre la théorie des grandeurs proportionnelles ; je me contenterai de joindre quelques remarques à celles qui précèdent.

J'ai fait allusion aux difficultés que suscite l'emploi de la règle de trois quand, au lieu de grandeurs mesurables, on fait intervenir des objets définis. Il m'est arrivé souvent de poser le problème suivant :

Un entrepreneur ayant constaté que 6 ouvriers occupés dans un premier chantier y font 13 m^3 de maçonnerie par jour, veut ouvrir un second chantier où l'on bâtisse 52 m^3 dans le même temps ; il se demande combien il devra employer d'ouvriers. Si l'élève ne remarque pas que 52 est un multiple de 13 et s'il emploie la méthode de réduction à l'unité, sous sa forme usuelle, il est conduit à dire : « Si 13 m^3 sont l'œuvre de 6 ouvriers, 1 m^3 est le travail de 6 ouvriers divisés par 13... » Je l'arrête à cet instant et, le plus souvent, ses camarades éclatent de rire. Or un examen des données, sans parti pris, montre qu'un ouvrier fait par jour $\frac{13}{6}$ de m^3 et qu'il faudra autant d'ouvriers que $\frac{13}{6}$ est contenu de fois dans 52, c'est-à-dire $\frac{52 \times 6}{13}$ ou 4×6. Si au lieu de 52 on donne 53, le problème n'a pas de solution, mais on constate que le quotient entier de 53×6 par 13 est encore 24 et que le reste est 6 ; par suite 24 ouvriers feront 52 m^3 et il restera 1 m^3 ou les $\frac{6}{13}$ de l'ouvrage d'un ouvrier, etc.

Cette ressource manquerait si la règle de trois ne faisait appel qu'à des objets définis, dont la division ne peut se concevoir. C'est ce qui arrive dans le problème-type que voici : a ouvriers fabriquent b objets dans une journée, a' ouvriers également habiles en fabriquent b' ; quelle relation existe entre a, a', b, b' ?

Il suffit de considérer $a \times a'$ ouvriers : en vertu de la première hypothèse, ils fabriqueront $b \times a'$ objets ; en vertu de la seconde, ils en fabriqueront $b' \times a$.

On en conclut l'égalité $ab' = ba'$ qui permet de calculer l'un des quatre nombres entiers a, a', b, b', quand les trois autres sont donnés, par une division. Si cette division ne se fait pas exactement, le problème n'a pas de solution, mais on peut en trouver une solution approchée.

D'ailleurs, si a et b sont donnés premiers entre eux, ce que l'on peut toujours supposer, a' et b' en sont des équimultiples et l'on reconnaît la possibilité du problème au fait que a' est donné multiple de a ou que b' est donné multiple de b. J'ai déjà fait observer que cette propriété n'est guère accessible aux débutants, car on la démontre habituellement en s'aidant des propriétés du p. g. c. d. de deux nombres.

Remarquons encore que cette solution s'applique aussi bien aux règles de trois où figurent d'une part des objets définis, d'autre part des grandeurs mesurables. Sa place naturelle serait d'ailleurs dans la partie de cette étude, qui vise les nombres entiers.

Il arrive parfois que les deux séries de grandeurs proportionnelles sont de même nature ; c'est le cas du théorème de THALÈS. On démontre alors que le rapport d'une grandeur prise dans l'une des séries, à la grandeur correspondante de l'autre série est constant ; ce rapport est un nombre abstrait et comme tel il n'est pas conçu d'emblée. C'est ce qui explique les précautions auxquelles on est obligé quand on définit les rapports trigonométriques. S'il s'agit de grandeurs d'espèces différentes, on ne peut plus parler du rapport de deux grandeurs correspondantes. On utilise alors soit le rapport de deux grandeurs quelconques de l'une des séries, qui est le même que celui des grandeurs correspondantes de l'autre série, soit le quotient des nombres qui mesurent deux grandeurs associées, avec des unités de même espèce, arbitrairement choisies. Ce quotient est encore un nombre constant auquel on peut donner une signification concrète, ce qui en facilite l'intelligence et les applications.

Par exemple, les prix de trois pièces d'étoffe de même nature et de même origine étant exprimés en francs par les nombres a, c, e, les longueurs de ces pièces mesurées en mètres étant respectivement b, d, f, chacun des quotients $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ peut être regardé comme la mesure en francs du prix du mètre de cette étoffe. On a naturellement $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$. D'autre part les trois coupons ayant été tirés d'une pièce qui a pour mesure $(b+d+f)$ mètres et qui aurait dû être vendue $(a+c+e)$ francs, le prix du mètre d'étoffe est encore mesuré en francs par $\frac{a+c+e}{b+d+f}$. On rend sensible aux jeunes élèves, de cette façon, une propriété des rapports égaux qui les surprend toujours quand on la leur énonce *a priori* et dont la démonstration abstraite ne les touche guère, car bien peu se rendent compte de ce qu'il faut voir dans l'expression « valeur du rapport $\frac{a}{b}$ » énoncée sans autre explication.

Que faut-il conclure de ces trop longs développements ? C'est que, si l'on veut donner à l'enseignement de l'arithmétique toute sa portée éducative et en préparer des applications raisonnées, il faut constamment se reporter aux origines, à la vision directe de la matière pour laquelle a été créé l'instrument, car ce sont les propriétés de cette matière qui ont conditionné l'outil.

Inversement, chaque fois qu'on en trouvera l'occasion, il faudra chercher à découvrir une propriété concrète sous une abstraction. Il ne faudrait pas croire que la portée de l'idée générale s'en trouve diminuée. Toute représentation peut être le point de départ d'associations et d'inductions que ne suggérerait pas le simple aspect des formules. Les applications géométriques du calcul algébrique et du calcul infinitésimal en donnent des exemples frappants. La géométrie et l'analyse se prêtent un mutuel appui et il n'est pas rare qu'un progrès de l'une entraîne un progrès de l'autre.

On pourrait prétendre, il est vrai, que le nombre se prête à la représentation des grandeurs indépendamment de leur nature et que les liaisons des nombres renferment une infinité de vérités d'ordre mathématique. Encore faut-il les y découvrir par des interprétations ou des combinaisons convenables. Il n'est pas niable que le retour au concret qui a fourni ces liaisons facilite singulièrement la tâche. Sans compter qu'il permet d'éviter souvent des tentatives vouées d'avance à l'insuccès. Un élève qui n'aurait pas égard à la nature des grandeurs figurant dans ses formules, serait tenté de résoudre deux équations symétriques à deux inconnues en prenant comme inconnues auxiliaires la somme et le produit des inconnues primitives. Ses efforts seraient vains s'il s'agissait d'angles, puisque le produit de deux angles n'a pas de sens. Or, s'il cherchait à se représenter ces angles à partir d'une demi-droite origine, il verrait de suite que les inconnues naturelles sont la demi-somme qui permet de placer la bissectrice de l'angle des deux côtés inconnus et la demi-différence qui donne l'écart de chacun de ces côtés par rapport à la bissectrice. Cette simple remarque appliquée à des problèmes classiques de trigonométrie, comme la résolution d'un triangle dont on donne deux côtés et l'angle compris, ou le problème de la carte, conduit à des calculs tout à fait naturels, alors que les procédés usuels sont entachés d'artifice. Qu'on ne dise pas que c'est là un exemple inventé à plaisir ; en pareil cas, des élèves de Première C-D, qui n'étaient pas inférieurs à d'autres, m'ont proposé de résoudre deux équations trigonométriques symétriques, où les deux inconnues étaient des angles, en prenant la somme et le produit comme inconnues auxiliaires.

Je suis convaincu que les problèmes de la technique donneraient des exemples probants de l'utilité du retour aux origines — c'est la thèse de cet article — pour adapter les procédés généraux du calcul aux besoins du moment. Un savant doublé d'un technicien rendrait à l'enseignement et à la science des services inappréciables en reprenant cette question sur un terrain où je ne puis prétendre.

E. Blutel.

Inspecteur général de l'Instruction publique.

CAHORS, IMP. COUESLANT *(personnel intéressé)*. — 29.642.