Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

MOTS

Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs

TOME IX

INVERSE
RÉCIPROQUE
ROTATION
SIMILITUDE
ISOMÉTRIE
RÉFLEXION
RÉFLEXION - GLISSEMENT
VECTORIEL

Brochure A.P.M.E.P. n° 82 - 1991

Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

n° 82

MOTS

Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs

TOME IX
Brochure 1991

INVERSE
RÉCIPROQUE
ROTATION
SIMILITUDE

ISOMÉTRIE
RÉFLEXION
RÉFLEXION - GLISSEMENT
VECTORIEL

Pour tout renseignement concernant

l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

- inscription (cotisation, abonnement)
- publications (Bulletin de l'A.P.M.E.P., brochures, en particulier les collections **ELEM-MATH** et **MOTS**)
- fonctionnement (Régionales, Commissions, ...)

s'adresser au :

Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
26, rue Duméril
75013 PARIS
Tél. (1) 43. 31. 34. 05

Collection MOTS

L'A.P.M.E.P. a pensé à aider les instituteurs et professeurs dans leur enseignement de la mathématique, en rédigeant les brochures MOTS.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un lexique. Cependant, il sera loisible à chacun de ranger les rubriques par ordre alphabétique. D'autre part, nous avons tenu compte des suggestions proposées par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. dans son recueil de fiches **La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent.**

Il ne s'agit pas non plus d'une codification autoritaire du vocabulaire : l'A.P.M.E.P. ne peut pas et ne veut pas codifier. Comme dans le Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., nous nous sommes néanmoins enhardis à suggérer une certaine harmonisation, à exprimer notre penchant ou notre aversion pour certains termes. Nous souhaitons ouvrir ainsi le débat avec nos lecteurs.

Enfin, il ne s'agit pas d'un ouvrage de formation, théorique ou pédagogique, des maîtres de l'école élémentaire. Nous pensons cependant qu'une réflexion sur le vocabulaire, si on la mène assez loin, débouche sur le fond même des notions mathématiques évoquées et sur leur introduction pédagogique éventuelle. Les formateurs de toutes sortes trouveront peut-être dans quelques-unes de ces rubriques un outil pour un travail en commun avec les collègues en formation initiale ou continue. Mais nous espérons surtout qu'elles seront lisibles et utilisables par les enseignants isolés.

*

* *

Toutes les remarques, critiques, suggestions seront accueillies avec reconnaissance.

Ecrire à :

Jacques LECOQ
16, rue du Plateau Fleuri, 14000 CAEN

MOTS I **contient :** ÉGALITÉ ; EXEMPLE et CONTRE-EXEMPLE ; COUPLE ; RELATION BINAIRE ; NOMBRE NATUREL ; ENTIERS et RATIONNELS ; NOMBRE DÉCIMAL, NOMBRE À VIRGULE ; FRACTION ; ENSEMBLES DE NOMBRES.

MOTS II **contient :** REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES ; APPLICATION, FONCTION, BIJECTION ; PARTITION, ÉQUIVALENCE ; PARTAGES ; DIVISIBILITÉ ; DIVISION EUCLIDIENNE ; DIVISION.

MOTS III **contient :** NUMÉRATION ; OPÉRATION ; LOI DE COMPOSITION ; COMMUTATIVITÉ ; ASSOCIATIVITÉ ; DISTRIBUTIVITÉ ; ÉLÉMENTS REMARQUABLES POUR UNE LOI DE COMPOSITION ; PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS ; CONGRUENCES ; ORDRE ; PROPRIÉTÉS DES RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE ; PRÉORDRE ; COMPARAISON DES ORDRES USUELS DANS LE DICTIONNAIRE, DANS N, DANS D^+.

MOTS IV **contient :** APPLICATIONS LINÉAIRES ; PROPORTIONNALITÉ ; OPÉRATEURS MULTIPLICATIFS ; POURCENTAGES ; ÉCHELLES... ; ÉQUATION, INÉQUATION ; ENSEMBLE ; CARDINAL ; APPROXIMATION.

MOTS V **contient :** SEGMENT, LONGUEUR ; SECTEUR, ANGLE ; VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE ; SOLIDES ; PARALLÈLE ; VERTICAL ; HORIZONTAL ; EXPOSANT, PUISSANCE.

MOTS VI **contient une seule rubrique :** GRANDEUR - MESURE.
Et un index terminologique propre à cette rubrique.

MOTS VII **contient :** ANGLE ; SYMÉTRIE ; ORIENTATION ; PHASE ; ANGLE-DE-COUPLES ; REPÉRAGE.

MOTS VIII **contient :** INVARIANT ; IMAGE ; ANTÉCÉDENT ; TRANSLATION ; HOMOTHÉTIE ; LANGAGE VECTORIEL ; VECTEURS DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN. **Des mots flous :**

(introduction) calculer ; conserver ; correspondre ; correspondance ; décomposer ; démontrer, prouver, établir ; deux-à-deux, trois à trois, ... ; devenir égal à ; distincts, confondus, inégaux, égaux ; équidistant ; graduation ; quelconque ; représenter, représentant ; sécant, concourant, concourir ; simplifier, réduire ; transformé, transformer, transformation.

Et un index terminologique des mots mathématiques figurant dans les brochures I, II, III, IV, V, VII et VIII.

Les brochures de l'A.P.M.E.P.

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public veut être une grande équipe.

La vie d'une équipe, c'est la libre circulation de l'information entre ses membres, le droit qui appartient à chacun, le devoir qui incombe à tous, de rechercher et de poser des questions, de proposer des réponses, de remettre en cause...

Il était inéluctable que l'équipe ressentît le besoin d'éditer des brochures, et leur succès grandissant impose la nécessité de poursuivre l'œuvre entreprise, en appelant constamment l'attention des collègues sur la nécessité d'une collaboration permanente de tous.

Nous avons besoin de redéfinir périodiquement nos orientations fondamentales, et c'est dans les chartes ou les textes d'orientation que nous publions les mises à jour. Ces sortes de brochures seraient des bibles, sans le fait essentiel qu'elles ne prétendent pas détenir la vérité. Elles n'en doivent pas moins nourrir notre action.

Il faut aussi assurer à nos collègues une information de base sur la mathématique elle-même (vocabulaire, théories diverses, ...), sur les révolutions de notre époque (calculatrices, microprocesseurs, ...) sur les sciences de l'éducation (didactique des disciplines, évaluation, ...), sur les matériaux pour la classe (manuels scolaires...) et, naturellement, développer les thèmes qui s'en dégagent en tenant compte de la demande, soit pour la satisfaire, soit pour la compléter, soit pour la contester, arguments à l'appui.

Nos brochures pénètrent dans les classes (ainsi les *Aides Pédagogiques) :* elle doivent y subir les feux de l'expérimentation la plus large pour provoquer des débats ou des recherches complémentaires.

L'équipe doit aussi à ses membres la permanence de l'échange culturel. Nous avons beaucoup à travailler pour faciliter l'accès de tous les enseignants de mathématiques à une culture approfondie de la science qu'ils ont à faire aimer. Nous l'avons dit dans la Charte de Caen : "Le maître doit acquérir des connaissances qui dépassent largement celles du niveau de son enseignement".

Nous devons trouver tous ensemble le langage et la présentation qui susciteront de la part de tous une curiosité active pour l'Histoire des mathématiques, pour la beauté d'un très grand nombre de résultats ou de démarches, pour les jeux ou les paradoxes. Le maître "doit avoir eu l'occasion de poser et de résoudre des problèmes" (Charte de Caen).

Quelques brochures ont déjà partiellement répondu à ces attentes. D'autres doivent suivre, puisque la demande en est parvenue, et nous attendons des idées et des collaborateurs.

La brochure A.P.M.E.P., enfin, n'est pas l'ouvrage qu'on se contente de lire, chacun pour son propre compte. Elle ne trouve sa raison d'être que dans l'exploitation commune. Le lieu idéal pour cette tâche est le "chantier", réunion de plusieurs enseignants en groupes hétérogènes, où on cherche des problèmes tirés, soit de la pratique habituelle de la classe, soit de situations pêchées dans les brochures ou ailleurs.

De ces assemblées, qui veulent surtout ne pas être doctes, surgissent les idées pour les brochures nouvelles.

Maurice CARMAGNOLE

PREFACE

Vu les programmes actuels, nous nous sommes intéressés aux transformations géométriques, dès MOTS VII, avec SYMETRIE ; Dans MOTS VIII figurent TRANSLATION et HOMOTHETIE. On trouvera dans la présente brochure ROTATION, SIMILITUDE, ISOMETRIE, REFLEXION, REFLEXION-GLISSEMENT.

Dans la préface de MOTS VIII, nous avons déjà signalé l'aspect un peu technique de ces rubriques qu'il était difficile d'éviter ; les présentes rubriques de géométrie gardent le même aspect. Certains lecteurs nous ont reproché de nous être contentés d'un résumé de cours ; rappelons encore une fois que nous nous adressons aux enseignants, et non pas aux élèves. Nous pensons avoir rassemblé en quelques pages une documentation utile à nos collègues, documentation qui, à notre connaissance, ne figure pas dans la littérature scolaire actuelle.

Soucieux de laisser à chaque enseignant la liberté de concevoir des présentations adaptées à ses goûts et à ses élèves, nous n'avons qu'effleuré quelques considérations pédagogiques.

Par ailleurs, les rubriques LANGAGE VECTORIEL et VECTEURS DE LA GEOMETRIE DU PLAN de MOTS-VIII trouvent ici leur aboutissement dans la rubrique VECTORIEL. Là encore, nous avons voulu souligner qu'il n'y a pas rupture entre les programmes du Collège, du Lycée et de l'Enseignement Supérieur.

Enfin, cette brochure contient les rubriques INVERSE et RECIPROQUE.

Nous aimerions rappeler que si la collection s'appelle MOTS, ce n'est pas pour le plaisir d'analyser les habitudes langagières, mais c'est que, de notre point de vue, l'étude critique du langage conduit inévitablement à une réflexion sur les concepts, leur genèse, leur évolution, leur fonctionnement, leurs interactions, . . . , réflexion bénéfique pour les collègues et pour les élèves.

Nous ne prétendons pas imposer quoi que ce soit à quiconque ; mais nous avons le souci de fournir un outil de travail utilisable par tous.

INVERSE

I . INTRODUCTION

La locution courante "dans l'ordre inverse" se passe d'explications. Mais l'ordre en question peut aussi bien être une disposition dans l'espace, une succession dans le temps, un enchaînement logique, une échelle de valeurs, etc. C'est dire que le mot *inverse* s'applique, avec plus ou moins de rigueur, à des situations très diverses, dont certaines sont susceptibles d'être modélisées en mathématiques, en physique, en logique, . . .

De plus, dans beaucoup de cas où un phénomène A peut être dit inverse d'un phénomène B, on constate que B peut aussi être tenu pour inverse de A : il y a donc réciprocité entre A et B, et *réciproque* a souvent été pris pour synonyme d'*inverse* (noter que l'inverse d'un nombre se dit en anglais "reciprocal"). On ne s'étonnera donc pas qu'en dépit d'une évolution vers une plus grande rigueur, il subsiste des zones floues dans l'emploi de ces deux mots.

II . INVERSE D'UN NOMBRE

Dans cet ordre d'idée, si $\frac{2}{5}$ est le rapport d'une longueur $\boldsymbol{a}$ à une longueur $\boldsymbol{b}$, alors $\frac{5}{2}$ est le rapport de la longueur $\boldsymbol{b}$ à la longueur $\boldsymbol{a}$, et il est assez naturel de dire que ces deux rapports sont inverses l'un de l'autre.

Comme le produit des rationnels $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{2}$ est 1, ce qualificatif s'est étendu aux nombres réels (et même complexes) ; ainsi, par définition :

Le nombre u et le nombre v sont inverses (l'un de l'autre) signifie $uv = 1$

Dans $\mathbb{R}$, tout nombre, sauf 0, a un inverse. Il en est de même dans $\mathbb{Q}$, mais non dans $\mathbb{N}$ ni dans $\mathbb{Z}$.

Exemple : $2-\sqrt{5}$ et $-2-\sqrt{5}$ sont inverses.

L'inverse du réel u non nul se note $\frac{1}{u}$ ou u^{-1}.

III . INVERSE D'UNE FONCTION A VALEURS REELLES

Soit f une fonction à valeurs réelles, c'est-à-dire une fonction d'un ensemble quelconque **E** vers $\mathbb{R}$; soit **F** son existentiel.

A tout élément x de **F** tel que $f(x)$ soit différent de 0, on associe le réel $\frac{1}{f(x)}$, inverse de $f(x)$. On définit ainsi une fonction de **E** vers $\mathbb{R}$: $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.
On peut l'appeler *fonction inverse* de f (mais l'usage utilise aussi cette expression dans un tout autre sens : voir RECIPROQUE, II - 5). On peut la noter $\frac{1}{f}$.

Voici des exemples (ou **E** = $\mathbb{R}$) :

Fonction	Existentiel	Fonction inverse	Existentiel
$x \mapsto x^2-1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{1;-1\}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+_*$

IV . INVERSE D'UNE GRANDEUR

Comme on passe aisément des nombres aux grandeurs mesurables, on est amené à la notion de *grandeurs inverses* (l'une de l'autre) : voir **MOTS VI**, page 68.

Ainsi, la masse volumique et le volume massique d'une substance donnée sont deux grandeurs inverses.

V. SUITES INVERSEMENT PROPORTIONNELLES

(voir **MOTS IV**, PROPORTIONNALITE, VI)

Deux suites *inversement proportionnelles* sont deux suites dont chacune est proportionnelle à la suite des inverses des termes de l'autre ; ou, si l'on préfère, telles que le produit des termes correspondants des deux suites est constant (non forcément égal à 1).

Exemple :

0,75	-8	4,4	$\sqrt{2}$
$\frac{8}{3}$	-0, 25	$\frac{5}{11}$	$\sqrt{2}$

VI. GRANDEURS INVERSEMENT PROPORTIONNELLES

VI-1. On appelle ainsi deux grandeurs variables dont le produit est constant. Ce produit peut être un nombre (si ce nombre est 1, on retrouve deux grandeurs inverses : voir IV). Ce peut être une grandeur ; par exemple, la loi de Mariotte affirme que la pression et le volume d'une masse donnée d'un gaz parfait à une température donnée sont des grandeurs inversement proportionnelles : leur produit est constant ; ce produit est une énergie.

VI-2. Bien entendu, les grandeurs géométriques entrent dans le cadre précédent : par exemple, la longueur et la largeur des rectangles d'aire donnée sont des grandeurs inversement proportionnelles.

Un autre exemple est fourni par l'*inversion*[1] : étant donné un point **Ω** et une grandeur **P** qui a la dimension d'une aire, l'inversion de *pôle* **Ω** et *puissance* **P** associe, à tout point **M** autre que **Ω**, le point **M'** de la droite (**ΩM**) tel que le produit des longueurs orientées

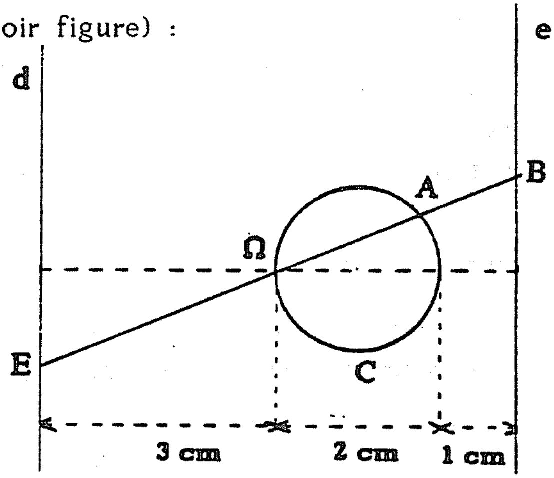
---

[1] Cette transformation, jadis appelée "transformation par rayons vecteurs réciproques", est, en cartographie, à la base de la projection stéréographique : elle permet une représentation plane de la sphère, avec cette propriété importante : deux courbes sécantes de la sphère se coupent sous le même angle que leurs images sur la carte ; de plus l'image d'un cercle est soit un cercle, soit une droite.

(voir ORIENTATION II - 4) ΩM et $\Omega M'$ soit égal à **P**.

Le point **M'** est l'*inverse* du point **M** ; et **M** est celui de **M'** : **M** et **M'** sont des points inverses (l'un de l'autre).

Exemple (voir figure) :



Par l'inversion de pôle Ω et de puissance 6 cm², **A** et **B** sont inverses l'un de l'autre ; le cercle **C** et la droite ***e*** aussi.

Par l'inversion de pôle Ω et de puissance -6 cm², **A** et **E** sont inverses l'un de l'autre ; le cercle **C** et la droite ***d*** aussi. Voir **MOTS VI**, page 129, XI - 4 .7 .

VII . INVERSE D'UN ELEMENT POUR UNE OPERATION (voir MOTS III)

VII - 1. Soit un ensemble où est définie une opération associative, notée par exemple $*$, pour laquelle il existe un élément neutre e.

A chaque élément x de cet ensemble correspond au plus un élément y tel que $x * y = e$ et $y * x = e$. Cet élément y, s'il existe, qui est dit "symétrique" de x dans le cas général, et "opposé" de x dans le cas d'opérations notées additivement, est plutôt dit inverse de x quand l'opération est notée multiplicativement, comme on le fait pour les nombres. En conséquence, cet élément y est alors souvent désigné par x^{-1} ; naturellement, $x = y^{-1}$.

Dans le cas où l'opération n'est notée ni additivement ni multiplicativement, le mot *symétrique* est tout indiqué ; mais la tendance est plutôt d'utiliser le mot *inverse* (et la notation x^{-1}) : on en voit un exemple dans RECIPROQUE, II - 5 .

VII - 2. Les éléments qui possèdent un inverse peuvent être dits *inversibles* (au lieu de "symétrisables" dans le cas général).
Exemples :

* l'élément neutre d'une opération est toujours inversible et il est son propre inverse ;
* pour la multiplication dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}$ (élément neutre : 1), tous les éléments sont inversibles, sauf 0 ;
* pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$ (élément neutre : 1), les seuls éléments inversibles sont 1 et −1 ; chacun d'eux est son propre inverse.

VIII. AUTRES EMPLOIS DU MOT "INVERSE"

A part les emplois précédemment recensés, le mot *inverse* appartient plus à la langue courante qu'à la langue technique. Moins rigoureux que *réciproque*, il peut permettre une certaine souplesse dans le langage.

VIII - 1. Supposons qu'on s'intéresse au théorème suivant : si a est multiple de 2 et si b est multiple de 5, alors ab est multiple de 10. Il n'est pas question d'annoncer que, réciproquement, toute factorisation de tel multiple de 10 comporte un multiple de 2 et un multiple de 5. Mais rien n'empêche de dire : "Inversement, cherchons quelles factorisations du multiple de 10 sont de la forme espérée".

VIII - 2. De même, on entend dire parfois que la soustraction est "l'opération inverse" de l'addition, ou la division "l'opération inverse" de la multiplication. Cette façon de parler ne résiste pas à une anlyse serrée, mais elle fait image ; d'ailleurs, il ne serait pas difficile de la rattacher à l'idée de relations réciproques (voir RECIPROQUE, II). On ne saurait ni la recommander, ni la condamner.

VIII - 3. A première vue, il n'y a pas de raison de se montrer plus sévère pour l'adjectif *inverse* quand on l'applique

* soit à l'orientation autre que celle qui a été choisie pour l'espace orienté (ou pour le plan orienté, ou pour la droite orientée), là où nous avons préféré l'adjectif *opposé* ;

* soit à des transformations qui altèrent l'orientation, là où nous avons préféré l'adjectif *négative*.

Mais en fait, ici le laxisme présente un risque plus grave d'ambiguïté ; à la limite, étudiant l'inversion dans le plan, on pourrait déboucher sur le galimatias suivant:

*"Deux figures **inverses***
*se correspondent par une transformation **inverse***
*qui est sa propre **inverse**"*

où le premier "inverse" est celui de VI - 2, le deuxième signifie "négative", et le troisième signifie "réciproque".

C'est pourquoi des expressions telles que "isométrie inverse" ou "similitude inverse", bien qu'assez courantes et malheureusement tenaces, nous paraissent indéfendables quand on leur donne le sens d'isométrie ou de similitude *négatives* (voir ISOMETRIE VII - 1 et VIII - 2 et SIMILITUDE II - 5 - 3).

RECIPROQUE

I . INTRODUCTION

Sur les chevauchements de sens entre *réciproque* et *inverse*, voir le paragraphe I de INVERSE.

II . RECIPROQUE D'UNE RELATION BINAIRE

II-1. Soit **H** l'ensemble {William, Xavier, Yves, Zacharie} de quatre hommes et **G** l'ensemble {André, Bernard, Charles, Daniel, Ernest, François} de leurs fils. Le tableau ci-dessous précise les filiations et peut s'interpréter de deux façons :

* schéma cartésien de la relation binaire $\mathcal{R}$ de **H** vers **G** "... est le père de ..."

* schéma cartésien de la relation binaire $\mathcal{S}$ de **G** vers **H** "... est fils de ...".

$\mathcal{S}$ $\mathcal{R}$ G \ H	A	B	C	D	E	F
W	X			X		
X			X			
Y		X			X	X
Z						

Chacune des deux relations $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ est dite *réciproque* de l'autre.

De façon générale, une relation binaire $\mathscr{A}$ d'un ensemble **U** vers en ensemble **V** étant donnée, on considère la relation $\mathscr{B}$ de **V** vers **U** telle que, pour tout couple (u,v) de $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$, les énoncés $u\mathscr{A}v$ et $v\mathscr{B}u$ soient simultanément vrais ou simultanément faux : $\mathscr{B}$ est la relation réciproque de $\mathscr{A}$, et naturellement $\mathscr{A}$ est la relation réciproque de $\mathscr{B}$.

Les exemples mathématiques de relations réciproques sont nombreux ; ainsi :

∗ **U** et **V** étant des ensembles de naturels non nuls, les relations ". . . est multiple de . . ."
et ". . . est diviseur de . . ." ;

∗ **U** et **V** étant des parties de $\mathbb{R}$, les relations d'ordre symbolisées par $\leq$ et $\geq$.

Dans ces deux exemples, le plus souvent **U** = **V**.

II-2. Un cas particulier important est celui des relations symétriques d'un ensemble vers lui-même : une telle relation est sa propre réciproque. Supposons par exemple que les quatre hommes de II-1 soient frères ; alors la relation de **G** vers **G** ". . .est cousin de. . ." a pour schéma :

G \ **G**	A	B	C	D	E	F
A		X	X		X	X
B	X		X	X		
C	X	X		X	X	X
D		X	X		X	X
E	X		X	X		
F	X		X	X		

Elle est symétrique.

II - 3. Revenant aux relations de II - 1, on peut observer que $\mathscr{P}$ est une application de **G** vers **H**, chacun des garçons ayant évidemment un père unique. . . Mais William a deux fils, Yves en a trois, Zacharie n'en a pas ; chacune de ces trois informations suffit pour affirmer que la réciproque $\mathscr{R}$ de l'application $\mathscr{P}$ n'est pas une application.

Par contre, l'application p : " . . .est le père de . . ." de l'ensemble $\{W, X, Y\}$ vers l'ensemble $\{A, B, C\}$ des fils aînés (si on suppose les garçons rangés par âge décroissant dans le tableau de II - 2), et l'application f : " . . .est fils de . . ." de l'ensemble des fils aînés vers l'ensemble de leurs pères sont des bijections (réciproques l'une de l'autre).

II - 4. Dans le cas particulier des bijections d'un ensemble vers lui-même, l'ensemble de ces bijections est un groupe pour la composition des applications, avec l'application identité pour élément neutre. Dans ce groupe, le symétrique (au sens du VII - 1 de INVERSE) d'une bijection n'est autre que l'application réciproque (au sens du II - 3 de la présente rubrique).

Plus particulièrement encore, si une bijection est une relation symétrique, elle est sa propre réciproque. Tel est le cas de toutes les symétries (orthogonales ou non) en géométrie (voir SYMETRIE, III).

II - 5. Nous nous sommes abstenus d'indiquer ici une notation spécifique pour la relation réciproque d'une relation binaire donnée. Dans l'enseignement élémentaire, Lycée compris, l'intérêt d'une telle notation nous paraît douteux, assurément bien moindre que le risque des confusions qu'elle pourrait créer dans l'esprit de débutants.

Cependant, dans le cas particulier des bijections, on peut, si on le juge utile, noter f^{-1} la bijection réciproque d'une bijection f, conformément à la tendance signalée à la fin du VII - 1 de INVERSE ; par exemple, dans II - 3 ci-dessus, on aurait pu noter f^{-1} la bijection p ; il est alors équivalent d'écrire A = f(W) ou W = f^{-1}(A).

Cette notation présente un inconvénient majeur pour des fonctions à valeurs numériques, donc possédant chacune une fonction inverse (au sens du III de INVERSE). Par exemple, soit g la bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $x \mapsto x + 2$; elle a une bijection réciproque : $x \mapsto x - 2$, qu'on note g^{-1} ; mais cette notation, au moins dans l'esprit du débutant, évoque fortement la fonction inverse :

$x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ (notée $\dfrac{1}{g}$: voir INVERSE, III).[1]

Les calculatrices renforcent encore la confusion.

III . IMAGE RECIPROQUE PAR UNE RELATION BINAIRE

Voir IMAGE-ANTECEDENT dans **MOTS VIII**.

III - 1. Soit $\mathscr{A}$ une relation d'un ensemble **U** vers un ensemble **V**, **U'** une partie de **U**, **V'** une partie de **V**.

Image directe de **U'** par $\mathscr{A}$ signifie ensemble des éléments de **V** qui ont au moins un antécédent dans **U'** par $\mathscr{A}$

(On dit aussi, au lieu de "image directe", "ensemble-image" ou même "image".)

Il s'agit donc d'une application de $\mathscr{P}$(**U**), ensemble des parties de **U**, vers $\mathscr{P}$(**V**), ensemble des parties de **V**.

Par exemple, en I-1, l'image directe par $\mathscr{R}$ de la partie {W , X} de **H** est l'ensemble {A , C , D} constitué par les fils de William et de Xavier.

1 De même, $f \circ f$ est souvent écrit f^2 ; mais si f a pour but $\mathbb{R}$, f^2 peut aussi désigner la fonction produit $f \times f$. Par exemple, $\cos^2 x$ désigne $(\cos x)^2$, carré de $\cos x$, et non pas $\cos(\cos(x))$, image de x par la composée $\cos \circ \cos$.

Image réciproque de $\mathbf{V'}$ par $\mathscr{A}$ signifie ensemble des antécédents par $\mathscr{A}$ des éléments de $\mathbf{V'}$

C'est l'image directe de $\mathbf{V'}$ par la relation $\mathscr{B}$ réciproque de la relation $\mathscr{A}$.

(On dit aussi "ensemble-antécédent" au lieu de "image-réciproque".)

Il s'agit donc d'une application de $\mathscr{P}(\mathbf{V})$ vers $\mathscr{P}(\mathbf{U})$.

Par exemple, en II - 1, l'image réciproque par $\mathscr{R}$ de $\{A, C, D\}$ est $\{W, X\}$. Mais attention ! $\{W, X\}$ est aussi l'image réciproque par $\mathscr{R}$ de $\{A, C\}$ et celle de $\{C, D\}$. Et il ne faudrait pas conclure, du fait que l'image directe par $\mathscr{R}$ de $\{Y, Z\}$ est $\{B, E, F\}$, que l'image réciproque par $\mathscr{R}$ de $\{B, E, F\}$ est $\{Y, Z\}$; cette dernière est en fait $\{Y\}$.

En d'autres termes, les deux applications
"image directe par $\mathscr{A}$" de $\mathscr{P}(\mathbf{U})$ vers $\mathscr{P}(\mathbf{V})$
et "image réciproque par $\mathscr{A}$" de $\mathscr{P}(\mathbf{V})$ vers $\mathscr{P}(\mathbf{U})$
ne sont pas, en général, réciproques l'une de l'autre.

III - 2 . Pour les mêmes raisons qu'en II - 5, nous nous abstiendrons de donner des notations pour les notions ci-dessus. Mal codifiées et souvent abusives, elles s'adressent à des utilisateurs déjà avertis.

IV . ENONCES RECIPROQUES[2]

Nous utilisons ici le mot *énoncé* de préférence au mot *proposition* qui est employé en grammaire dans un sens différent. Mais la terminologie reste indécise sur ce sujet.

IV - 1 . Voici un *énoncé* mathématique E :

"Chaque fois que le naturel x est multiple de 6, alors le naturel x est multiple de 3."

[2] Nous n'aborderons pas l'implication réciproque d'une implication, parce que la notion d'implication est trop délicate à manier dans l'enseignement élémentaire.

L' *hypothèse* est : "Le naturel x est multiple de 6".

La *conclusion* est : "le naturel x est multiple de 3".

Quand un énoncé comporte, comme ci-dessus, une hypothèse et une conclusion, on appelle *énoncé réciproque* de cet énoncé l'énoncé qu'on obtient en échangeant l'hypothèse et la conclusion.

Par exemple, pour l'énoncé E précédent, l'énoncé réciproque E' est :

"Chaque fois que le naturel x est multiple de 3, alors le naturel x est multiple de 6."

On dit aussi que E et E' sont des *énoncés réciproques* (l'un de l'autre).

IV - 2. Parmi les énoncés, les uns sont vrais, les autres sont faux.

Les énoncés vrais du type envisagé dans IV - 1 sont des *théorèmes*. C'est le cas de E.

Par contre, E' est un énoncé faux, donc n'est pas un théorème.

On entend dire parfois que "tel théorème n'a pas de réciproque" : c'est une façon de parler dont il vaut mieux s'abstenir ; n'importe quel théorème a un énoncé réciproque, mais ce dernier n'est pas nécessairement vrai (n'est pas nécessairement un théorème).

Deux énoncés réciproques l'un de l'autre peuvent être tous deux vrais, ou tous deux faux, ou l'un vrai et l'autre faux.

Remarque. On dit souvent "la réciproque" au lieu de "l'énoncé réciproque".

IV - 3. On parle parfois de *réciproque partielle* lorsqu'une partie de l'ancienne hypothèse continue à figurer dans la nouvelle.

Exemple. Soit l'énoncé F dans $\mathbb{N}$:

"Chaque fois que a est multiple de 10 et que b est pair, alors $a + b$ est pair".

F est vrai.

Sa réciproque est :

"Chaque fois que $a + b$ est pair, alors a est multiple de 10 et b est pair"

Elle est fause.

Voici une réciproque partielle :

"Chaque fois que a est multiple de 10 et que $a + b$ est pair", alors b est pair."

Elle est vraie.

Voici l'autre réciproque partielle :

"Chaque fois que b est pair et que $a + b$ est pair alors a est multiple de 10."

Elle est fausse.

V. EQUATION RECIPROQUE

V-1. Soit E une "équation polynomiale" dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une équation du type $P(x) = 0$ où $P(x)$ est un polynome de variable réelle x. Supposons de plus que 0 n'est pas solution de E.

On appelait jadis *équation aux inverses* de E l'équation polynomiale E' obtenue en remplaçant, dans E, x par $\frac{1}{x}$ puis en multipliant les deux membres par x^n, n étant le degré de $P(x)$.

Par exemple : l'équation aux inverses de

$$2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$$

est : $$-6x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$$

Les solutions de la première équation sont -1, -2 et $\frac{3}{2}$, celles de la seconde sont leurs inverses -1, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

De façon générale, les solutions de E' sont les réels inverses des solutions de E (avec le même ordre de multiplicité).

V-2.

Equation réciproque signifie équation polynomiale qui est sa propre équation aux inverses

Les équations réciproques $P(x) = 0$ se reconnaissent à la propriété suivante :

$P(x)$ étant un polynome réduit de degré n, deux monomes de $P(x)$ de degré(s) p et $n - p$ (quel que soit le naturel p inférieur ou égal à n) ont

soit le même coefficient (premier type),

soit des coefficients opposés (second type).

Mises à part les éventuelles solutions 1 et -1 d'une équation réciproque, les solutions sont deux à deux inverses (avec le même ordre de multiplicité).

Exemple : l'équation $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$ est une équation réciproque du second type ; ses solutions sont $2 + \sqrt{3}$, son inverse, $2 - \sqrt{3}$, et 1.

V- 3. Cette dénomination traditionnelle d'"équation réciproque" n'est pas très heureuse, l'équation n'étant réciproque . . . de rien. Elle vise à rappeler l'existence de solutions inverses (et non pas "réciproques" : nouvel exemple de l'interférence entre les deux adjectifs ; voir INVERSE, VIII). Mais elle ne comporte pas d'inconvénient grave.

ROTATION

Dans son acception mathématique, le mot *rotation* présente la même ambiguïté que le mot *translation*.

En mécanique, l'étude des *mouvements de rotation* rend compte de l'approche expérimentale d'un certain type de déplacements physiques.

Par contre, en géométrie toute idée de mouvement est écartée ; le mot *rotation* y désigne un certain type d'applications du plan ou de l'espace vers lui-même.

Par ailleurs nous utiliserons dans ce qui suit des angles-de-couples ; le lecteur pourra se reporter à la rubrique **ANGLE-DE-COUPLES** (MOTS VII).

I. MOUVEMENT DE ROTATION DANS UN PLAN AUTOUR D'UN POINT (EN MECANIQUE)

Conformément à l'étymologie, le mot *rotation* évoque le mouvement d'une roue autour de son axe.

I - 1. Considérons un bouton, d'un appareil ménager par exemple, que nous allons faire tourner autour de son axe (figure 1).

Intéressons-nous à sa face antérieure assimilée à un disque situé dans un plan **P** perpendiculaire à l'axe du bouton. Le point **Ω** où l'axe du bouton perce ce plan reste fixe pendant le mouvement.

Toute figure dessinée sur cette face, le chiffre **4** par exemple, se déplace dans le plan **P**. Etant donnés deux points **A** et **B** du chiffre **4**, on constate qu'au cours du mouvement les longueurs **ΩA** et **ΩB** restent constantes ainsi que l'angle-de-couples $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ du fait que le bouton est un solide et que le centre de la face reste en **Ω** au cours du mouvement (cette deuxième contrainte n'est pas satisfaite dans le cas de la face antérieure d'un écrou qu'on visse sur un boulon fixe). Il en est de même pour toute autre paire de points de la face antérieure du bouton.

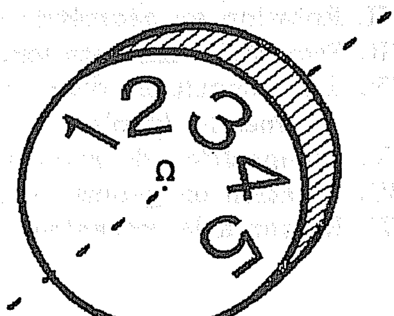


figure 1

Cette propriété est caractéristique des mouvements de rotation, dans le plan fixe **P**, d'une figure indéformable autour du point fixe **Ω** de ce plan.

I - 2. Sur la figure 2, A_1 et B_1 désignent les positions de deux points du chiffre **4** à un certain instant ; A_2 et B_2 désignent les positions respectives des mêmes points à un autre instant.

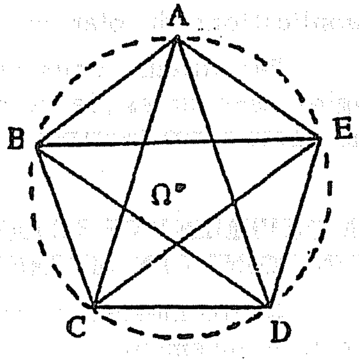


figure 2

D'après ce qui précède, $\Omega A_1 = \Omega A_2$, $\Omega B_1 = \Omega B_2$ et $(\overrightarrow{\Omega A_1}, \overrightarrow{\Omega B_1}) = (\overrightarrow{\Omega A_2}, \overrightarrow{\Omega B_2})$

En additionnant $(\widehat{\overrightarrow{\Omega B_1},\overrightarrow{\Omega A_2}})$ à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient :

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_1},\overrightarrow{\Omega A_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega B_1},\overrightarrow{\Omega B_2}})$$

Plus généralement, si $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ désignent les positions d'un point **M** du chiffre **4** aux deux instants considérés,

$$\Omega M_1 = \Omega M_2 \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega A_1},\overrightarrow{\Omega A_2}}) \ ;$$

cet angle-de-couples ne dépend donc que des instants considérés et non du point **M** choisi.

I - 3. Supposons que le point **M** soit en $\mathbf{M_0}$ à m'instant t_0 et en $\mathbf{M}_t$ à l'instant t. L'une quelconque des phases[1] de l'angle-de-couples $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_0},\overrightarrow{\Omega M_t}})$ varie continûment en fonction de t au cours du mouvement. Ainsi la donnée de cette fonction achève de déterminer le mouvement.

II. ROTATION EN GEOMETRIE DU PLAN

II - 1. Définition

Etant donnés un point **Ω** du plan et un angle-de-couples ϑ *rotation de centre* **Ω** *et d'angle* ϑ signifie application du plan vers lui-même qui, à **Ω** associe **Ω** et qui, à chaque point **M**, autre que **Ω**, associe le point **M'** tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = \vartheta$

Ω est le *centre* de cette rotation ; ϑ est son *angle*.

Désignons cette rotation par $\mathscr{R}$. On peut utiliser les notations et le langage des applications :

$$\mathscr{R}\begin{cases} P \rightarrow P \\ M \mapsto M' \end{cases} \qquad \mathscr{R}(M) = M'$$

M' est l'*image* de **M** par $\mathscr{R}$.

1 Bien qu'apparentées, les notions de *phase* et d'*angle-de-couples* sont différentes, comme nous l'avons signalé dans MOTS VII.

Etant donnée une figure **F**, l'ensemble des images par $\mathcal{R}$ des points de **F** est une figure **F'** appelée *image de* **F** *par* $\mathcal{R}$.

II - 2. *Rotations particulières*

Lorsque $\vartheta = \hat{o}$, tout point du plan est sa propre image par $\mathcal{R}$. Toute rotation d'angle nul est donc l'*identité du plan*.

Lorsque ϑ est l'angle plat, la rotation $\mathcal{R}$ est la symétrie de centre Ω.

II - 3. Des égalités $\Omega M' = \Omega M$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = \vartheta$, il résulte que $\Omega M = \Omega M'$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}}) = -\vartheta$. De sorte qu'on peut considérer indifféremment

M' comme image de **M** par $\mathcal{R}$

ou **M** comme image de **M'** par la rotation de centre Ω et d'angle $-\vartheta$.

Chaque point a donc un antécédent unique par $\mathcal{R}$; autrement dit, les rotations sont des bijections de **P** vers **P**.

De plus, la bijection réciproque de la rotation de centre Ω et d'angle ϑ est la rotation de même centre et d'angle $-\vartheta$.

III. PROPRIETES DES ROTATIONS EN GEOMETRIE DU PLAN

III - 1. D'après la définition de II-1, Ω est invariant par $\mathcal{R}$. Y a-t-il d'autres points invariants par $\mathcal{R}$?

Supposons qu'il existe un point **A** distinct de Ω et invariant par $\mathcal{R}$. Conformément à la définition, l'angle de la rotation est $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A}})$, c'est-à-dire $\hat{0}$. La rotation $\mathcal{R}$ est donc l'identité du plan. Autrement dit, pour toute rotation d'angle non nul, le seul point invariant est le centre de cette rotation.

Tout cercle de centre Ω est invariant par toute rotation de centre Ω.

Les réunions de tels cercles le sont également, par exemple (voir figure 3) le disque de frontière C_1 , la couronne de frontière $C_1 \cup C_2$, etc.

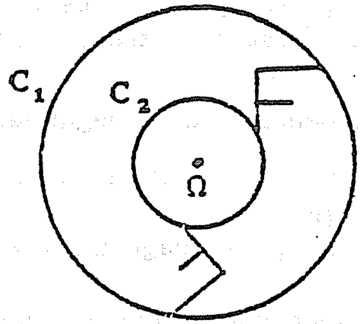


figure 3

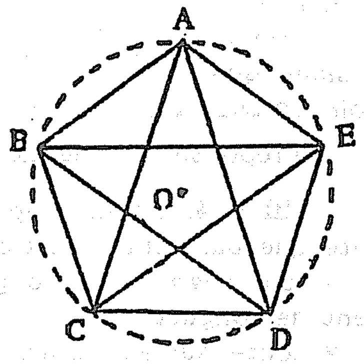


figure 4

D'autres parties du plan sont invariantes par certaines rotations ; les polygones réguliers, convexes ou non, en sont les exemples les plus connus.

Le pentagone régulier convexe **ABCDE** de centre **Ω** (voir figure 4) est invariant par 5 rotations de centre **Ω**, dont l'identité du plan. Il en est de même du pentagone étoilé **ACEBD**.

Chacune de ces rotations est déterminée par un sommet et son image.

III - 2. *Une propriété des rotations*

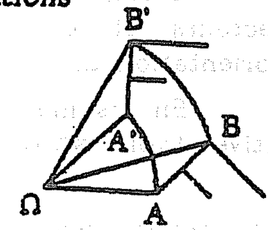


figure 5

Considérons deux points **A** et **B** et leurs images respectives **A'** et **B'** par la rotation de centre **Ω** et d'angle ϑ.

On démontre que **A'B'** = **AB** et que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \vartheta$.

III - 3. Cette propriété caractérise-t-elle les rotations parmi les applications du plan vers lui-même ?

Considérons une application f du plan **P** vers lui-même qui possède la propriété suivante : quelle que soit la paire {**X**,**Y**} de points, leurs images respectives **X'** et **Y'** par f sont telles que **XY** = **X'Y'** et $(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{X'Y'}) = \vartheta$, où ϑ est un angle-de-couples fixé.

On démontre que, si $\vartheta \neq \hat{0}$, f est une rotation d'angle ϑ.

Mais si $\vartheta = \hat{0}$, les deux égalités précédentes entraînent que $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}$, donc f est une translation (voir **TRANSLATION** III - 3).

La réponse à la question précédente est donc négative.

III - 4. De la propriété énoncée en III - 2, il résulte que par toute rotation d'angle ϑ

* tout segment de longueur L a pour image un segment de longueur L ;
* toute surface d'aire $\mathscr{A}$ a pour image une surface d'aire $\mathscr{A}$;
* toute demi-droite δ a pour image une demi-droite δ' telle que $(\widehat{\delta, \delta'}) = \vartheta$;
* toute droite a pour image une droite.

Entre autres conséquences de ces propriétés, on trouve que, par toute rotation, le milieu de deux points a pour image le milieu de leurs images. Plus généralement, le barycentre de n points affectés de coefficients a pour image le barycentre de leurs images respectivement affectées des mêmes coefficients.

Enfin, toute rotation conserve chaque angle-de-secteurs et chaque angle-de-couples, donc aussi l'orientation des parties non rectilignes du plan.

En résumé, les rotations sont des isométries positives (voir **ISOMETRIE**).

IV. DECOMPOSITION D'UNE ROTATION EN REFLEXIONS (EN GEOMETRIE DU PLAN)

Puisque toute rotation est une isométrie positive du plan, on peut la décomposer en un couple de réflexions (voir **ISOMETRIE**, note de V - 1)

La rotation de centre Ω et d'angle ϑ est la composée $s_{D'} \circ s_D$ (réflexion de miroir (droite) **D** suivie de réflexion de miroir (droite) **D'**), les droites **D** et **D'** étant sécantes en **Ω**.

L'une des deux droites peut être choisie arbitrairement (passant par **Ω**) ; par exemple, **D** étant choisie, **D'** est alors l'image de **D** par l'une ou l'autre des deux rotations de centre **Ω** dont les angles φ_1 et φ_2 sont solutions de l'équation d'inconnue φ $2\varphi = \vartheta$ (voir ANGLE-DE-COUPLES III - 2).

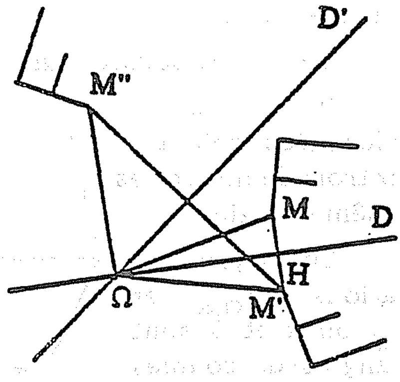


figure 6

En effet, considérons un point **M**, son image **M'** par s_D , **H** le point où **D** coupe (**MM'**), **M"** l'image de **M'** par $s_{D'}$, et **H'** le point où **D'** coupe (**M'M"**).

D'une part, **ΩM = ΩM'** et **ΩM' = ΩM"**, donc **ΩM = ΩM"** ;

d'autre part, $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\Omega H},\overrightarrow{\Omega M'}})$

et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M''}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega H'}})$ d'où, par addition,

$(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\Omega H},\overrightarrow{\Omega H'}})$, soit $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}}) = \vartheta$.

La décomposition ainsi obtenue n'est pas unique, puisque **D** a été prise arbitrairement.

On pourrait tout aussi bien prendre **D'** arbitrairement et en déduire **D** par l'une ou l'autre des deux rotations de centre **Ω** et d'angles $-\varphi_1$ et $-\varphi_2$ (réciproques des rotations utilisées plus haut). Ce fait sera employé en V - 2.

V. COMPOSITION DE ROTATIONS EN GEOMETRIE DU PLAN

Nous aurons besoin ici de notations plus détaillées : la rotation de centre **Z** et d'angle ψ sera notée $\mathscr{R}_{Z,\psi}$.

Comme on le verra plus loin (V - 2), il n'est pas possible d'affirmer en toute généralité que la composée d'un couple de rotations est une rotation.

Etudions d'abord le cas particulier des rotations de même centre.

V-1. *Composition de rotations de même centre*

V-1.1. Pour fixer les idées, soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ trois demi-droites de même origine.

Considérons les rotations $\mathcal{R}_{\Omega,\alpha}$ et $\mathcal{R}_{\Omega,\beta}$ où α et β sont les angles-de-couples de représentants respectifs $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ et $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$.

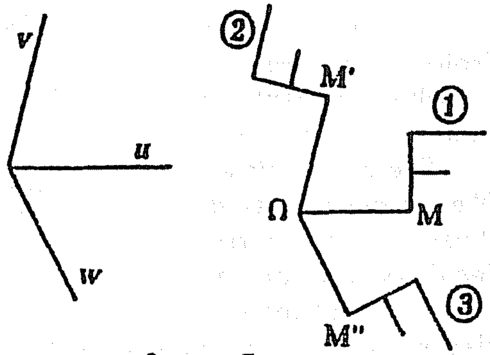


figure 7

La figure 7 suggère que, le motif ① ayant pour image par $\mathcal{R}_{\Omega,\alpha}$ le motif ②, puis celui-ci par $\mathcal{R}_{\Omega,\beta}$ le motif ③, ce dernier est l'image du motif ① par $\mathcal{R}_{\Omega,\alpha+\beta}$.

Autrement dit, la figure suggère que

$$\mathcal{R}_{\Omega,\beta} \circ \mathcal{R}_{\Omega,\alpha} = \mathcal{R}_{\Omega,\alpha+\beta}$$

Il en est bien ainsi car, pour tout point **M**,

d'une part, des égalités $\Omega M' = \Omega M$ et $\Omega M'' = \Omega M'$ il résulte que $\Omega M'' = \Omega M$;

d'autre part, des égalités $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M''}) = \beta$ il résulte que $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M''}) = \alpha+\beta$.

Cette démonstration se généralise : la composée d'un couple de rotations de même centre est une rotation qui a pour centre le centre commun des composantes et pour angle la somme de leurs angles :

$$\boxed{\mathcal{R}_{\Omega,\vartheta'} \circ \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} = \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta+\vartheta'}}$$

ce qui entraîne la commutativité de la composition des rotations de même centre :

$$\mathcal{R}_{\Omega,\vartheta'} \circ \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} = \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} \circ \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta'}$$

et d'autre part englobe les deux propositions

$\mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} \circ \mathcal{R}_{\Omega,\hat{0}} = \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta}$ et $\mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} \circ \mathcal{R}_{\Omega,-\vartheta} = \mathcal{R}_{\Omega,\hat{0}}$

La première traduit le fait, général, que l'identité du plan (ici $\mathscr{R}_{\Omega,\hat{0}}$) est élément neutre pour la composition des applications de **P** vers **P** ; la seconde signifie que les rotations $\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}$ et $\mathscr{R}_{\Omega,-\vartheta}$ sont des éléments symétriques pour cette loi.

V-1.2. Ainsi, le comportement des rotations de même centre vis-à-vis de la composition des applications est calqué sur celui des angles-de-couples vis-à-vis de l'addition des angles-de-couples. En langage mathématique, on traduit ce fait de la façon suivante : un point **Ω** étant donné, l'ensemble des rotations de centre **Ω**, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif ; de plus, ce groupe est isomorphe au groupe additif des angles-de-couples.

V-2. Un simple contre-exemple suffit pour établir l'impossibilité d'étendre les résultats de V-1 à des rotations de centres distincts : étant données deux symétries centrales S_I et $S_{I'}$ (donc des rotations de centre I et I' distincts), leur composée $S_{I'} \circ S_I$ est, non une rotation, mais la translation de vecteur $2\overrightarrow{II'}$ (voir **HOMOTHETIE** VI-2).

Plaçons-nous dans la réunion $\mathscr{E}$ de l'ensemble des rotations et de l'ensemble des translations et considérons deux éléments f et g de $\mathscr{E}$. Toute rotation (voir IV), aussi bien que toute translation (voir **TRANSLATION** IV-3) peut être considérée comme la composée d'un couple de réflexions.

Pour étudier $g \circ f$, décomposons f et g en réflexions de façon que la deuxième réflexion composante de f soit la première réflexion composante de g (voir fin de IV) ; appelons **D** le miroir (droite) de cette réflexion. Ainsi,

$$g \circ f = (S_{D_2} \circ S_D) \circ (S_D \circ S_{D_1})$$

c'est-à-dire, grâce à l'associativité de la composition des applications,

$$g \circ f = (S_{D_2} \circ (S_D \circ S_D)) \circ S_{D_1} .$$

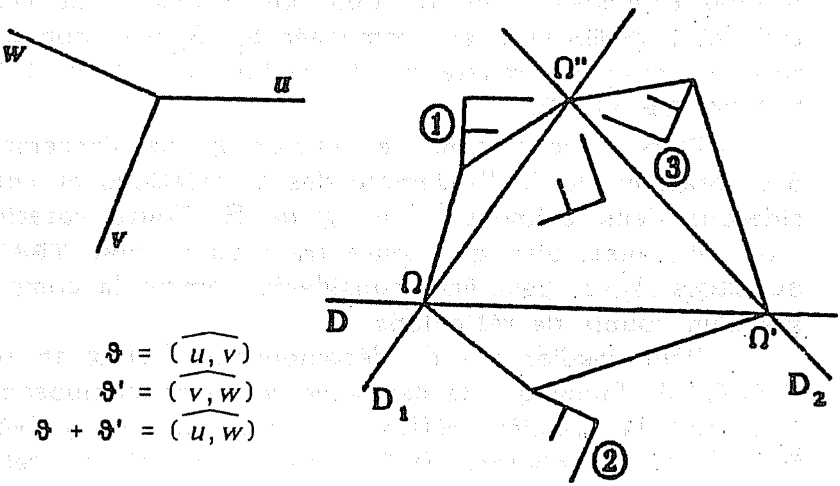
Or, $S_D \circ S_D = I_P$ et I_P , identité de **P**, est neutre pour la composition des applications.
Il en résulte que $g \circ f = (S_{D_2} \circ I_P) \circ S_{D_1}$, c'est-à-dire $g \circ f = S_{D_2} \circ S_{D_1}$. Donc $g \circ f$ est soit une translation, soit une rotation ; cette fois, la composition des applications est une loi dans $\mathscr{E}$.

Examinons maintenant les différents cas possibles.

V - 3 . *Composition de rotations de centres distincts*

V - 3 . 1. Plaçons-nous d'abord dans le cas où la somme des angles des deux rotations est distincte de $\hat{0}$. La figure 8 illustre une telle composition schématisée par le diagramme que voici :

$$\begin{tikzcd} & ② \arrow[dr, "\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'}"] & \\ ① \arrow[ur, "\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}"] \arrow[rr, "\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}"'] & & ③ \end{tikzcd}$$



$\vartheta = (\widehat{u, v})$
$\vartheta' = (\widehat{v, w})$
$\vartheta + \vartheta' = (\widehat{u, w})$

figure 8

Choisissons pour **D** la droite $(\Omega\Omega')$. Les droites $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ sont alors déterminées comme il a été précisé en IV.

Ainsi, $\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta} = s_D \circ s_{D_1}$ et $\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'} = s_{D_2} \circ s_D$

par conséquent, $\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathscr{R}_{\Omega,\vartheta} = s_{D_2} \circ s_D \circ s_D \circ s_{D_1}$

c'est-à-dire $\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathscr{R}_{\Omega,\vartheta} = s_{D_2} \circ s_{D_1}$

Le dessin suggère, et on démontre, que $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ sont sécantes et que $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est la rotation de centre Ω'', point commun à $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$, et d'angle $\vartheta + \vartheta'$. De façon générale :

> Si $\vartheta + \vartheta' \neq \hat{0}$,
> $\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}$ est une rotation d'angle $\vartheta + \vartheta'$.

Mais attention ! De $\vartheta + \vartheta' = \vartheta' + \vartheta$, il ne faudrait pas conclure à la commutativité de la composition des éléments de $\mathscr{E}$. Les rotations $\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}$ et $\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta} \circ \mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'}$ ont le même angle mais des centres distincts ; nous laissons au lecteur le soin de s'en assurer en reprenant la situation précédente et en inversant l'ordre des composantes (le centre de cette nouvelle composée est le symétrique de Ω'' par rapport à $(\Omega\Omega')$).

V-3. 2. Si la somme des angles des deux rotations composantes est $\hat{0}$, la composée est une translation. On le vérifie sur la figure 9 qui illustre une telle composition schématisée par le diagramme que voici :

$$\begin{tikzcd}
 & ② \arrow[dr, "\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'}"] & \\
① \arrow[ur, "\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}"] \arrow[rr, "\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}"'] & & ③
\end{tikzcd}$$

Comme en V-3.1, $\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathscr{R}_{\Omega,\vartheta} = s_{D_2} \circ s_{D_1}$.
Le dessin suggère, et on démontre, que $\mathbf{D}_1$ est parallèle à $\mathbf{D}_2$. Par conséquent, $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{H_1H_2}$ où H_1 est un point de $\mathbf{D}_1$ et H_2 est le projeté orthogonal de H_1 sur $\mathbf{D}_2$.

$\vartheta = (\widehat{u,v})$

$\vartheta' = (\widehat{v,u})$

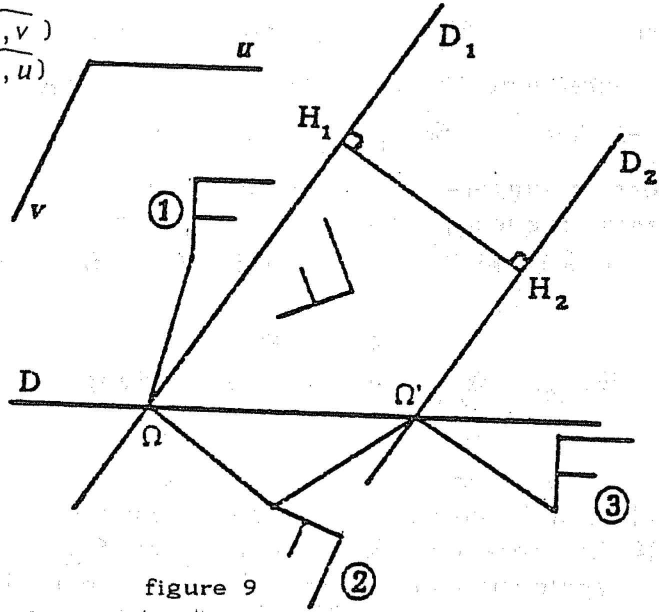


figure 9

De façon générale :

Si $\vartheta + \vartheta' = \hat{0}$,
$\mathcal{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta}$ est une translation.

Comme ci-dessus, nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que $\mathcal{R}_{\Omega',\vartheta'} \circ \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} \neq \mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} \circ \mathcal{R}_{\Omega',\vartheta'}$.

V-4. *Composition d'une translation et d'une rotation*

Dans le cas où la rotation est l'identité du plan, la composée avec une translation, dans un ordre ou dans l'autre, est cette translation elle-même.

Ce cas exclu, la composée est une rotation ; voici pourquoi.

Soit $\vec{\mathbf{v}}$ un vecteur et $\mathbf{T}_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{\mathbf{v}}$. Considérons $\mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} \circ \mathbf{T}_{\vec{v}}$ et choisissons pour **D** la droite passant par **Ω** et de direction orthogonale à $\vec{\mathbf{v}}$. La droite $\mathbf{D_2}$ est alors déterminée, comme il a été précisé en IV, de façon que

$$\mathcal{R}_{\Omega,\vartheta} = s_{D_2} \circ s_D$$

Par ailleurs (voir **TRANSLATION** IV - 3), il existe une droite $\mathbf{D_1}$ telle que

$$T_{\vec{v}} = s_D \circ s_{D_1}$$

Ainsi, $\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta} \circ T_{\vec{v}} = s_{D_2} \circ s_{D_1}$ (voir V - 2).

Les droites $\mathbf{D_1}$ et $\mathbf{D_2}$ sont sécantes car, par hypothèse, $\mathbf{D_2}$ coupe $\mathbf{D}$ qui est parallèle à $\mathbf{D_1}$. Désignons par Ω' le point commun à $\mathbf{D_1}$ et $\mathbf{D_2}$. La composée $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est la rotation $\mathscr{R}_{\Omega',\vartheta}$, comme le suggère la figure 10.

Ici encore, le lecteur pourra constater que

$$\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta} \circ T_{\vec{v}} \neq T_{\vec{v}} \circ \mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}$$

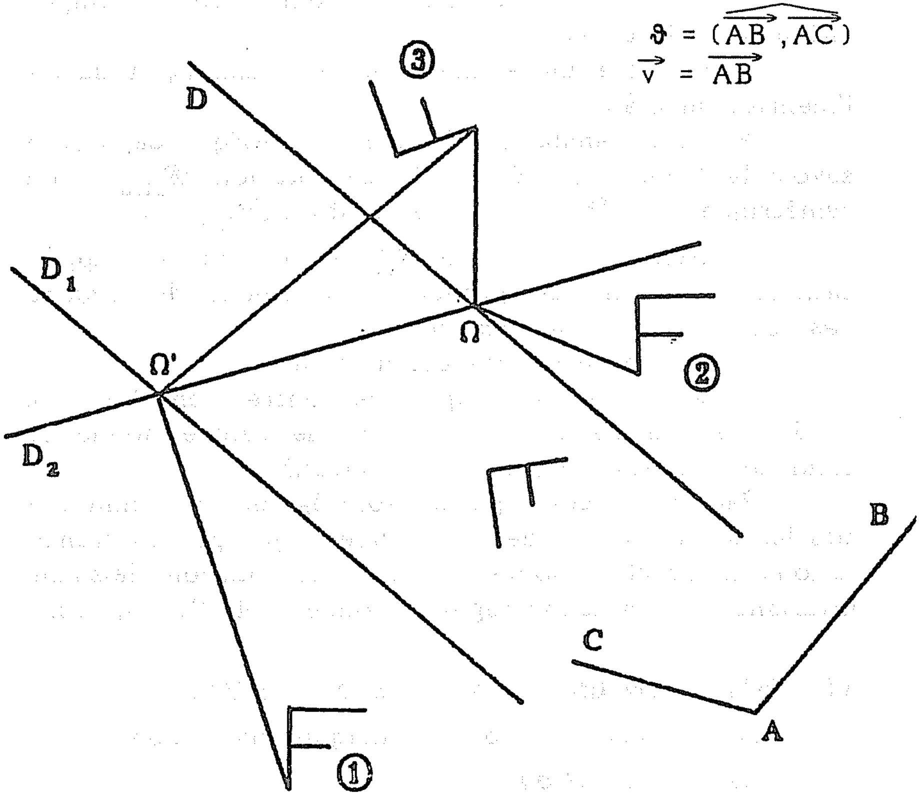


figure 10

V - 5. *Composition de translations*

Rappelons pour mémoire que la composée de deux translations est une translation et que la composition des translations est commutative (voir **TRANSLATION** IV).

V - 6. *Groupe des rotations-translations du plan*

Les résultats obtenus au cours du paragraphe V peuvent être résumés comme suit :

$\mathscr{E}$ désignant l'ensemble des rotations et translations du plan **P**,

* leur composition est une loi dans $\mathscr{E}$;

* cette loi est associative (comme toute composition d'applications) ;

* il existe un élément neutre dans $\mathscr{E}$, à savoir l'identité du plan ;

* toute translation $T_{\vec{v}}$ a un symétrique dans $\mathscr{E}$, à savoir la translation $T_{-\vec{v}}$; toute rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}$ a un symétrique dans $\mathscr{E}$, à savoir la rotation $\mathscr{R}_{\Omega,-\vartheta}$.

L'ensemble $\mathscr{E}$, muni de la composition des applications, est donc un groupe, usuellement dit *groupe des rotations-translations du plan.*

Ce groupe n'est pas commutatif.

Mais les sous-groupes rencontrés en V - 1 et V - 5, à savoir ceux des rotations de centre donné et celui des translations, sont commutatifs.

Par voie de conséquence, sont également commutatifs les sous-groupes de ces groupes : groupe des translations de direction donnée, groupe des rotations laissant invariant un pentagone régulier donné (voir III - 1), etc.

VI. ROTATION EN GEOMETRIE DE L'ESPACE

Nous nous bornerons à quelques indications.

VI - 1. *Définition*

Soit **D** une droite et, dans la direction de plans qui lui est perpendiculaire, un angle-de-couples ϑ.

Soit **M** un point de l'espace, **P** le plan passant par

M et perpendiculaire à **D**, et **H** le point où il coupe **D** ; soit enfin **M'** l'image de **M** par la rotation $\mathscr{R}_{H,\vartheta}$ du plan **P**.

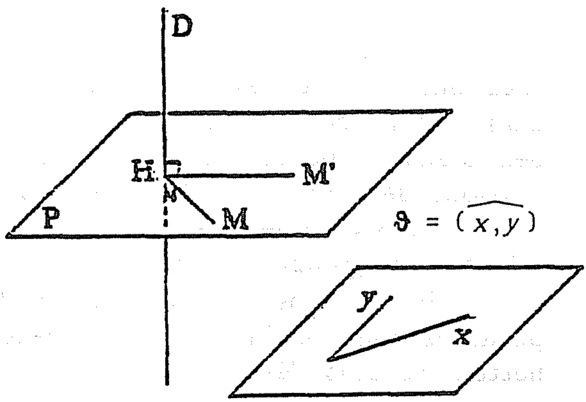


figure 11

L'application de l'espace vers lui-même qui à tout point **M** associe le point **M'** qui vient d'être défini est appelée *rotation d'axe*[2] **D** *et d'angle* ϑ.

VI - 2 . De cette définition résulte immédiatement ceci :

* quel que soit l'axe, la rotation d'angle nul est l'identité de l'espace ;

* quel que soit l'angle, toute figure de révolution d'axe **D** est (globalement) invariante, et en particulier tout plan perpendiculaire à **D** ;

* si l'angle n'est pas nul, les seuls points invariants sont les points de l'axe ;

* si l'angle est plat, la rotation est la symétrie orthogonale par rapport à **D**.

Signalons par ailleurs que les rotations sont des isométries positives de l'espace ; elles conservent donc les longueurs, les aires, les volumes, les angles-de-paires[3], ainsi que l'orientation des parties orientées de l'espace (ce qui exclut les parties rectilignes et les parties planes).

---

2 L'usage a consacré ici l'emploi du mot *axe* ; il ne faut y attacher aucune idée d'orientation ; **D** est une droite et non une droite orientée.

3 Il s'agit ici de paires-de-flèches, le mot *flèche* englobant les notions de direction orientée, droite orientée, axe, demi-droite, vecteur (cf note du I-3 de ANGLE-DE-COUPLES).

VI - 3. *Composition de rotations*

On peut ramener la composition d'un couple de rotations dont les axes sont de même direction à celle d'un couple de rotations planes dans l'un quelconque des plans perpendiculaires à cette direction. Les conclusions de V - 1 et de V - 3 se transposent aisément.

En particulier, les rotations d'axe **D** donné constituent un groupe commutatif.

En revanche, si les axes des deux rotations composantes sont de directions différentes, le problème est nettement plus délicat. Nous nous contenterons de signaler que si (et seulement si) les axes se coupent en un point **A**, ce point est invariant, et la composée est une rotation, dont l'axe passe par **A** ; mais l'angle de la rotation composée n'est pas la somme des angles des rotations composantes. (D'ailleurs cette somme n'est pas définie, vu que les angles-de-couples des rotations composantes ne sont pas relatifs à une même direction de plans). Les rotations dont les axes passent par un point **A** constituent un groupe non commutatif ; toute sphère, ou réunion de sphères, de centre **A** est invariante par tout élément de ce groupe.

VII. RETOUR A LA MECANIQUE

VII - 1. L'exemple présenté en I comporte deux aspects ;

d'une part, le bouton est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe **D** supposé fixe,

d'autre part, la face antérieure du bouton est animée d'un mouvement de rotation dans un plan fixe autour d'un point fixe **Ω** de ce plan.

L'un et l'autre de ces mouvements peuvent être caractérisés de la façon suivante : les différentes positions qu'occupe l'objet (le bouton dans un cas, sa face antérieure dans l'autre cas) sont les images les unes des autres par des rotations d'axe **D** en ce qui concerne le bouton, de centre **Ω** en ce qui concerne sa face antérieure.

VII - 2. Les rotations d'axe donné **D** laissent invariante toute surface de révolution d'axe **D** (voir VI - 3). En technologie, certaines de ces surfaces servent de guide à des mouvements de rotation ; par exemple mouvement d'un arbre dans des coussinets ou dans une crapaudine.

VII - 3. En conséquence, les surfaces cylindriques de révolution peuvent guider à la fois des mouvements de rotation autour de leur axe et des mouvements rectilignes de translation dans la direction de cet axe (voir **TRANSLATION** VI - 3). Le verrou à pène cylindrique est un excellent exemple de cette double liberté ainsi que de ses entraves : le mouvement de rotation est limité du fait que l'objet constitué du pène et de sa poignée n'a pas la symétrie de révolution, le mouvement de translation est limité parce que cet objet n'est pas cylindrique.

VII - 4. Les rotations dont les axes concourent en un point **A** constituent un groupe (voir VI - 3) ; elles laissent invariante toute sphère de centre **A**. On peut utiliser une partie d'une telle sphère en technologie comme *rotule* pour guider des mouvements de rotation quand on souhaite que leur axe puisse pivoter autour de **A**.

SIMILITUDE

Dans cette rubrique, nous ferons fréquemment appel aux propriétés des homothéties et des isométries. Nos renvoyons donc une fois pour toutes aux rubriques HOMOTHETIE, ISOMETRIE, TRANSLATION, ROTATION, SYMETRIE (paragaphes I et II), ORIENTATION (paragaphe VI).

I . FIGURES SEMBLABLES

I-1. Pourvu que le site d'une ville soit faiblement accidenté, le plan de celle-ci est une reproduction fidèle du réseau des rues.

La reproduction est beaucoup plus fidèle dans le cas des modèles réduits d'avions, de bateaux, etc.

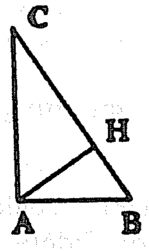
Cette fidélité peut s'exprimer ainsi : le rapport de deux longueurs liées au plan ou au modèle réduit est le rapport des longueurs correspondantes liées à l'objet représenté. Cela résulte du fait que, pour dessiner le plan ou construire le modèle réduit, on a réduit les longueurs dans un rapport constant, en les multipliant par l'échelle du plan ou du modèle réduit.

Ce procédé de construction implique d'ailleurs que tout angle lié au plan ou au modèle réduit est l'angle correspondant lié à l'objet. C'est ce qu'on utilise intuitivement lorsque, du sommet d'un édifice, on cherche à identifier les monuments d'une ville : on repère de proche en proche une direction par rapport à une autre grâce à leur angle, sachant que cet angle est celui des directions correspondantes lues sur le plan.

En termes géométriques, on résume les constatations précédentes en disant que le plan de la ville est *semblable*[1] au réseau des rues, que le modèle réduit est *semblable* à l'objet.

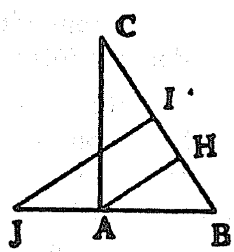
D'après la façon même dont sont réalisés les plans, il résulte que deux plans d'échelles différentes d'une même ville sont semblables l'un à l'autre. Il en est de même pour deux modèles réduits, construits à des échelles différentes, d'un même objet.

I-2. Voici un exemple classique de figures semblables. Soit un triangle **ABC** rectangle en **A** et sa hauteur [**AH**].



I-2.1. Considérons, par exemple, les triangles **ABC** et **HBA**. Ils sont rectangles, le premier en **A**, le second en **H**, et le secteur |**ABC**| leur est commun ; par conséquent $\widehat{ACB} = \widehat{HAB}$.

En ce qui concerne les angles-de-secteurs, on constate ici la même propriété que dans les exemples de I-1.



Examinons maintenant les longueurs des côtés des deux triangles.

Soit **I** le point de la demi-droite [**BC**) tel que **BI** = **BA** ; soit **J** le point de la demi-droite [**BA**) tel que **BJ** = **BC**.

---

1 Le mot *semblable* est employé ici dans un sens mathématique précis. Il ne s'agit pas du sens vague : "qui ressemble à".

De ces hypothèses, il résulte que

d'une part, les triangles **ABC** et **IBJ** sont isométriques,

d'autre part, le triangle **IBJ** est l'image du triangle **HBA** par une homothétie dont le rapport est aussi bien $\frac{\mathbf{IB}}{\mathbf{HB}}$, que $\frac{\mathbf{BJ}}{\mathbf{BA}}$, que $\frac{\mathbf{JI}}{\mathbf{AH}}$; appelons-le h.

Donc h est aussi $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{HB}}$, ou $\frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{BA}}$, ou $\frac{\mathbf{CA}}{\mathbf{AH}}$, ce qui exprime que la longueur de chaque côté du triangle **ABC** est le produit par h de la longueur du côté correspondant du triangle **HBA**.

On peut résumer ce qui précède de la façon suivante : le triangle **ABC** est semblable au triangle **HBA** dans le rapport h, ou, ce qui revient au même, le triangle **HBA** est semblable au triangle **ABC** dans le rapport $\frac{1}{h}$.

Dans le langage des plans, cartes, modèles réduts, etc., on emploie *échelle* au lieu de "rapport de reproduction à la réalité".

I-2.2. De $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{HB}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{BA}}$, on déduit $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{HB}}{\mathbf{BA}}$;
de même, $\frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{CA}} = \frac{\mathbf{BA}}{\mathbf{AH}}$ et $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{CA}} = \frac{\mathbf{HB}}{\mathbf{AH}}$.

Cela exprime que le rapport de deux côtés du triangle **ABC** est le rapport des deux côtés qui leur correspondent dans le triangle **HBA**.

On constate ici à propos des longueurs la même propriété que dans les exemples de I-1.

En résumé, le triangle **ABC** est semblable au triangle **HBA** ou, aussi bien, le triangle **HBA** est semblable au triangle **ABC**. On dit aussi que les deux triangles sont semblables[2]

I-2.3. Attirons l'attention sur le fait qu'en I-2.1 il n'intervient qu'un rapport h (ou son inverse). Ci-dessous, h sera appelé *rapport de la similitude* par

---

2 Il est adroit de désigner, comme on le fait ici, deux triangles semblables en écrivant dans le même ordre les sommets qui se correspondent.

laquelle **ABC** est l'image de **HBA**. Pour calculer h, il suffit de connaître la longueur d'un côté du triangle **HBA** et celle du côté qui lui correspond dans **ABC**.

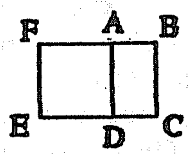
En revanche, en I - 2.2 sont intervenus des rapports dits *rapports de configuration*. Pour les calculer, il suffit d'examiner l'un des triangles. Le nombre des rapports de configuration augmente avec la complexité des deux figures.

I - 2.4. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer des constatations analogues en ce concerne les triangles **ABC** et **HAC** d'une part, les triangles **HBA** et **HAC** d'autre part.

I - 3. Un autre exemple de figures semblables a été présenté au paragraphe I de la rubrique SYMETRIE à propos du nombre d'or, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ordinairement noté Φ.

I - 3.1. Soit un rectangle **ABCD** tel que $\frac{BC}{AB} = \Phi$. Si on lui adjoint le carré **ADEF** construit sur l'un de ses grands côtés, on obtient le rectangle **BCEF** tel que $\frac{CE}{BC} = \Phi$.

Dès lors, le rectangle **BCEF** est semblable au rectangle **ABCD** dans le rapport Φ.

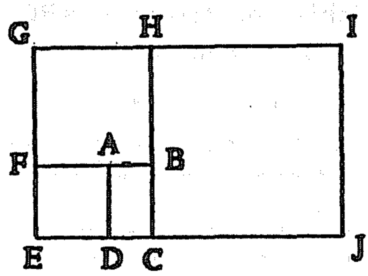


Le procédé peut se poursuivre indéfiniment et chaque nouveau rectangle est semblable au précédent dans le rapport Φ.

Il en résulte que tout rectangle est semblable à chacun de ceux qui l'ont précédé lors de la construction ; par exemple :

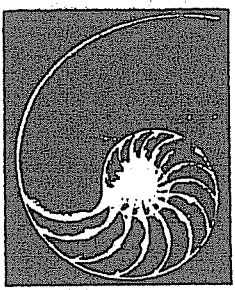
CEGH est semblable à **ABCD** dans le rapport Φ^2,

EGIJ est semblable à **ABCD** dans le rapport Φ^3.

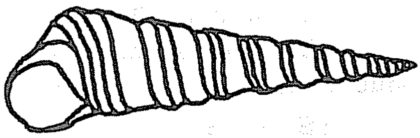


Remarque. Le rapport de la longueur à la largeur, qui est un rapport de configuration, est le même pour les quatre rectangles mentionnés ci-dessus, à savoir Φ. Il se trouve que c'est aussi le rapport de la similitude par laquelle chaque rectangle a pour image le rectangle suivant. Mais ce n'est pas le rapport de la similitude par laquelle **CEGH** est l'image de **ABCD**, non plus que de celle par laquelle **EGIJ** est l'image de **ABCD**.

I-3.2. La coquille du Nautile, comme celle de la Turitella Duplicata, présente les mêmes particularités, mais cette fois-ci dans l'espace. A chaque stade de la croissance du Nautile, la dernière loge de la coquille a les mêmes rapports de configuration que chacune des loges précédentes (on dit couramment que les loges ont les mêmes proportions) ; elle est semblable à chacune de celles qui l'ont précédée lors de la croissance de l'animal.



Nautile



Turitella Duplicata

I-4. On trouvera dans la rubrique **HOMOTHETIE** des exemples de figures semblables.

Contentons-nous de rappeler que, si une figure **F'** est l'image d'une figure **F** par une homothétie de rapport k non nul, alors pour tout couple (**M**, **N**) de points de **F**, leurs images respectives **M'** et **N'** sont telles que $M'N' = |k|\ MN$. Ainsi, la figure **F'** est semblable à la figure **F** dans le rapport $|k|$, la figure **F** est semblable à la figure **F'** dans le rapport $1/|k|$.

Mais l'homothétie présente la particularité de conserver les directions liées à **F** (voir CONSERVER dans MOTS VIII) ; ce n'était pas le cas des exemples présentés plus haut.

Notons aussi que l'image d'une figure **F** par une isométrie est semblable à **F** dans le rapport 1.

II . SIMILITUDE

Désignons par **E** un ensemble de points qui pourra être à volonté la droite, le plan ou l'espace.

II - 1 . *Définition*

Les situations présentées en I suggèrent la définition suivante :

> Etant donné un réel h strictement positif
> *similitude de rapport* h
> signifie
> application de **E** vers lui-même telle que,
> pour tout couple (**M**,**N**) de points, $M'N' = h\, MN$
> où **M'** et **N'** sont les images respectives de **M** et **N**

Le nombre h est appelé *rapport de similitude.*

Désignons par Σ une similitude de rapport h ; on peut utiliser les notations et le langage des applications :

$$\Sigma \begin{cases} E \to E \\ M \mapsto M' \end{cases} \qquad \Sigma(M) = M'$$

Etant donné une figure **F**, l'ensemble des images par Σ de ses points est une figure **F'**, appelée *image de* **F** *par* Σ.

II - 2 . Il existe de telles applications, par exemple :

* les isométries, qui sont les similitudes de rapport 1 ;

* Les homothéties de rapport strictement positif (voir HOMOTHETIE, V - 4) ;

* les composées, dans un ordre ou dans l'autre, d'une isométrie et d'une homothétie de rapport strictement positif.

Dans les deux derniers cas, le rapport de la similitude est le rapport de l'homothétie.

A noter que les homothéties de rapport k strictement négatif ne sont pas exclues de ce qui précède, car une telle homothétie est la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une symétrie centrale, laquelle est une isométrie (voir HOMOTHETIE, VI - 1 - 2). Dans ce cas le rapport de la similitude est $-k$.

II - 3. Se pose alors la question suivante : toute similitude Σ de **E**, de rapport h, peut-elle être obtenue comme la composée d'une isométrie de **E** et d'une homothétie de **E** de rapport h ? (Bien entendu, l'isométrie ou l'homothétie, ou même les deux, peuvent se réduire à l'identité de **E**).

II - 3.1. Soit H_1 une homothétie de rapport h. Pour tout couple (M, N) de points,

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[dr] & \\ M \arrow[ur, "H_1"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & M' \end{tikzcd}$$

* le couple (M_1, N_1) de leurs images par H_1 est tel que

$$M_1N_1 = h\,MN$$

* le couple (M', N') de leur images par Σ est tel que

$$M'N' = h\,MN.$$

Donc, pour tout couple (M, N),

$$M'N' = M_1N_1\ ;$$

en d'autres termes, il existe une isométrie I_1 par laquelle M' et N' sont les images respectives de M_1 et N_1.

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[dr, "I_1"] & \\ M \arrow[ur, "H_1"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & M' \end{tikzcd}$$

Par conséquent, $\Sigma = I_1 \circ H_1$.

Il n'a pas été nécessaire de particulariser le centre de H_1 : donc Σ est la composée de ***toute*** homothétie de rapport h suivie d'une isométrie convenable.

La réponse à la question posée au début de II - 3 est donc affirmative.

II - 3.2. Toutefois cette réponse n'est que partielle. En effet, la composition des applications de **E** vers lui-même n'est pas commutative ; par conséquent, sauf cas particuliers, Σ n'est pas égale à $H_1 \circ I_1$. Mais peut-on trouver une isométrie et une homothétie telles que Σ admette une décomposition de ce type ?

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[dr, "H'_2"] & \\ M \arrow[ur] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & M' \end{tikzcd}$$

Soit H_2 une homothétie de rapport h (distincte ou non de H_1, peu importe ici) et H'_2 l'homothétie réciproque, de rapport $\frac{1}{h}$. Pour tout couple (M, N) de points,

$*$ le couple (M', N') de leurs images par Σ est tel que

$$MN = \frac{1}{h} M'N' ,$$

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[dr, "H'_2"] & \\ M \arrow[ur, "I_2"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & M' \end{tikzcd}$$

$*$ le couple (M_2, N_2) des images des points de (M', N') par H'_2 est tel que

$$M_2N_2 = \frac{1}{h} M'N'.$$

Donc, pour tout couple (M, N), $MN = M_2N_2$; en d'autres termes, il existe une isométrie I_2 par laquelle M_2 et N_2 sont les images respectives de M et N ; ensuite M' et N' sont les images respectives de M_2 et N_2 par H_2.

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[dr, "H_2"] & \\ M \arrow[ur, "I_2"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & M' \end{tikzcd}$$

Par conséquent, $\Sigma = H_2 \circ I_2$.

II-3.3. En résumé, toute similitude de rapport h est la composée d'une homothétie de rapport h suivie ou précédée d'une isométrie convenable

II-4. Rappelons que, réciproquement, toute composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude (voir II-2). Par conséquent, on peut adopter comme autre définition de l'expression *similitude de rapport* h :

composée dans un ordre ou dans l'autre
d'une homothétie de rapport h et d'une isométrie.

II-5. De l'étude précédente découlent immédiatement les propriétés suivantes.

II-5.1. Toute similitude de **E** est une bijection de **E** vers lui-même.

La bijection réciproque d'une similitude de rapport h est une similitude de rapport $\frac{1}{h}$.

II-5.2. Par toute similitude de rapport h,

* (sur la droite, dans le plan ou dans l'espace) tout segment de longueur **L** a pour image un segment de longueur $h\mathbf{L}$;

* (dans le plan ou dans l'espace) toute surface d'aire **A** a pour image une surface d'aire $h^2\mathbf{A}$;

* (dans l'espace) tout solide de volume **V** a pour image un solide de volume $h^3\mathbf{V}$.

Par toute similitude, quel qu'en soit le rapport,

* (sur la droite, dans le plan ou dans l'espace) l'image d'une droite est une droite ; les rapports de longueurs sont conservés ; le milieu de deux points a pour image le milieu de leurs images ; plus généralemnt, le barycentre de n points affectés de coefficients a pour image le barycentre des images de ces points affectés des mêmes coefficients ;

* (dans le plan ou dans l'espace) l'image d'un plan est un plan ; les rapports d'aires sont conservés ; chaque angle-de-paires est conservé ainsi que chaque angle-de-secteurs ; le parallélisme (droite-droite, plan-plan, droite-plan) est conservé ; l'image d'une direction (de droites ou de plans) est une direction ;

* (dans l'espace) les rapports de volumes sont conservés.

II-5.3. Rappelons que :

d'une part, toute homothétie de rapport strictement positif conserve l'orientation de **E** et de toute partie orientable de **E** (voir HOMOTHETIE, VIII-4) ;

d'autre part, une isométrie est dite positive lorsqu'elle conserve l'orientation, négative lorsqu'elle l'altère.

Par conséquent, une similitude, étant la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une isométrie, est positive (c'est-à-dire conserve l'orientation) lorsque l'isométrie est positive, et négative (c'est-à-dire altère l'orientation) lorsque l'isométrie est négative.[3]

Notons à ce propos que toute homothétie du plan (que son rapport soit positif ou négatif) est une similitude positive du plan (voir HOMOTHETIE, VIII - 4).

III. LE GROUPE DES SIMILITUDES (DE LA DROITE, DU PLAN OU DE L'ESPACE)

E gardant la même signification qu'en II, les exemples présentés en I - 3 suggèrent que la composée de deux similitudes de **E** est une similitude de **E**.

III - 1. *Composition des similitudes*

Considérons des similitudes : l'une $\mathbf{\Sigma}$ de rapport h, l'autre $\mathbf{\Sigma'}$ de rapport h' ; soit **M** et **N** deux points de **E** ; posons : $\mathbf{M'} = \Sigma(\mathbf{M})$, $\mathbf{N'} = \Sigma(\mathbf{N})$, $\mathbf{M''} = \Sigma'(\mathbf{M'})$ et $\mathbf{N''} = \Sigma'(\mathbf{N'})$.

D'après II - 1, pour tout couple $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$,
$\mathbf{M'N'} = h\mathbf{MN}$ et $\mathbf{M''N''} = h'\mathbf{M'N'}$; donc $\mathbf{M''N''} = h'h\mathbf{MN}$.
Par conséquent, $\Sigma' \circ \Sigma$ est une similitude de rapport $h'h$.

III - 2. Le résultat précédent permet d'affirmer que $\Sigma' \circ \Sigma$ a le même rapport que $\Sigma \circ \Sigma'$. Mais généralement, $\Sigma' \circ \Sigma \neq \Sigma \circ \Sigma'$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas où Σ et Σ' sont des homothéties de centres distincts (voir HOMOTHETIE fin de VI - 4). La composition des similitudes n'est donc pas commutative.

III - 3. Comme on vient de le voir en III - 1, la composition des applications est une loi dans l'ensemble $\mathscr{S}$ des similitudes de **E**.

Cette loi est associative (comme toute composition d'applications).

---

[3] Au lieu de "similitude positive", on dit aussi "similitude directe" ; au lieu de "similitude négative", on dit aussi "similitude inverse" ; avec les inconvénients qui s'attachent aux multiples emplois des mots *direct* et *inverse* et des mots dérivés (voir INVERSE)

Il existe un élément neutre dans $\mathcal{S}$, à savoir l'*identité de* **E**.

Toute similitude a un symétrique dans $\mathcal{S}$: sa réciproque (voir II - 5 .1).

En résumé, l'ensemble $\mathcal{S}$, muni de la composition des applications, est un groupe, le ***groupe des similitudes de* E**.

Ce groupe n'est pas commutatif (voir III - 2).

III - 4 . Etant donné que

* la composée de deux similitudes positives est positive,

* l'identité de **E** est une similitude positive,

*toute similitude positive a pour réciproque une similitude positive,

le groupe des similitudes de **E** admet pour sous-groupe le ***groupe des similitudes positives de*** **E**, ainsi que les sous-groupes de ce dernier.

On peut également citer comme sous-groupes :

le groupe des isométries de **E**, ainsi que ses sous-groupes,

le groupe des homothéties-translations de **E**, ainsi que ses sous-groupes.

IV . SIMILITUDES SUR LA DROITE OU DANS LE PLAN

IV - 1 . Les similitudes offrent peu d'intérêt sur la droite : les similitudes positives ne sont autres que les translations et les homothéties de rapport positif, les similitudes négatives sont les homothéties de rapport négatif.

IV - 2 . Au contraire, dans le cas du plan, la description des propriétés des similitudes peut être affinée. En effet, c'est le seul cas où l'on sait distinguer entre angle-de-paires et angle-de-couples (voir ANGLE-DE-COUPLES, I - 1). Dès lors, vu la conservation des angles-de-paires (voir II - 5 - 2) et les propriétés des similitudes positives ou négatives (voir II - 5 - 3) :

* toute similitude positive du plan conserve chaque angle-de-couples,

* toute similitude négative du plan transforme chaque angle-de-couples en son opposé.

V. SIMILITUDES POSITIVES DU PLAN

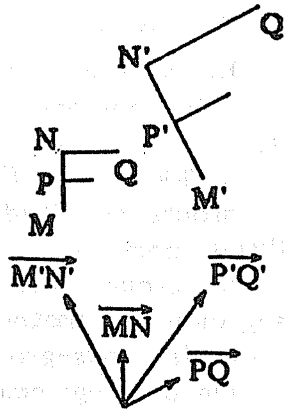
V-1. *Angle d'une similitude positive*

Désignons par **M'**, **N'**, **P'**, **Q'** les images respectives de quatre points **M**, **N**, **P**, **Q** par une similitude Σ. D'après IV-2, quels que soient les points **M**, **N**, **P**, **Q**,

$$(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{P'Q'}})$$

en additionnant $(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{M'N'}})$ à chaque membre, on obtient

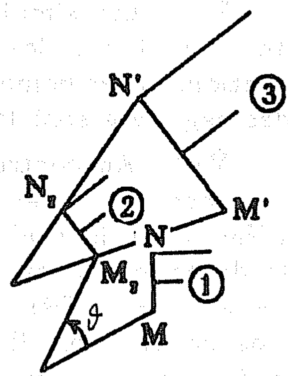
$$(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}}) = (\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{P'Q'}})$$



En d'autres termes, quelle que soit la paire {**M**, **N**} de points, $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}})$ est un angle-de-couples constant : il est appelé ***angle de la similitude*** Σ.

V-2. Cette propriété est caractéristique des similitudes positives du plan parmi les applications du plan vers lui-même.

Supposons en effet qu'une application f du plan vers lui-même soit telle que pour toute paire {**M**, **N**} de points, dont les images respectives sont **M'** et **N'**, $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}})$ soit un angle-de-couples constant ϑ.



Adoptons une démarche analogue à celle qui a été utilisée en II-3-2 : si on prend pour isométrie I_2 une rotation d'angle ϑ, les images respectives M_2 et N_2 de **M** et **N** sont telles que

$(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M_2N_2}) = \vartheta$, donc $(\overrightarrow{M_2N_2},\overrightarrow{M'N'}) = \hat{0}$. Or, cela caractérise une translation **T** ou une homothétie $\mathbf{H}_2$ de rapport strictement positif ; par conséquent :

$$\begin{tikzcd} & (2) \arrow[dr] & \\ (1) \arrow[ur, "I_2"] \arrow[rr, "f"'] & & (3) \end{tikzcd}$$

$f = \mathbf{T} \circ \mathbf{I}_2$ ou $f = \mathbf{H}_2 \circ \mathbf{I}_2$

L'application f est donc une similitude positive, évidemment d'angle ϑ. Cet angle est nul si la similitude est une homothétie ou une translation ; dans les autres cas il est l'angle de la rotation composante.

V - 3. *Centre d'une similitude positive*

La recherche des éventuels points invariants par une similitude positive Σ conduit au résultat suivant.

Lorsque simultanément $h = 1$ et $\vartheta = \hat{0}$, Σ est soit une translation de vecteur non nul (et alors aucun point du plan n'est invariant), soit l'identité du plan (et alors tout point du plan est invariant). Ces cas exclus, on démontre que par toute similitude positive, un seul point est invariant ; ce point est appelé *centre de la similitude*.

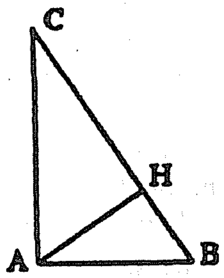
Bien entendu, si $h = 1$ et $\vartheta \neq \hat{0}$ (c'est-à-dire si Σ se réduit à une rotation), ou bien si $h \neq 1$ et $\vartheta = \hat{0}$ (c'est-à-dire si Σ se réduit à une homothétie), le centre de Σ n'est autre que le centre de la rotation ou le centre de l'homothétie. Mais le fait vraiment important est celui-ci :

Pour toute similitude ayant un centre, ce centre, Ω, peut jouer ***à la fois*** le rôle de centre d'homothétie pour l'homothétie $\mathrm{H}_{\Omega,h}$ et celui de centre de rotation pour la rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}$ en lesquelles on peut décomposer la similitude, comme on l'a vu en II - 3 - 1 et II - 3 - 2. De plus, contrairement à ce qui se passait dans le cas général, ici l'ordre de composition est indifférent, comme le suggère la figure ci dessous.

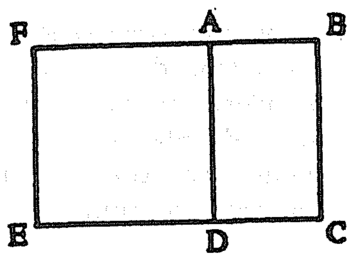
$$\begin{tikzcd} & (2) \arrow[dr, "\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}"] & \\ (1) \arrow[ur, "\mathrm{H}_{\Omega,h}"] \arrow[rr, "\Sigma_{\Omega,h,\vartheta}"'] & & (3) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (4) \arrow[dr, "\mathrm{H}_{\Omega,h}"] & \\ (1) \arrow[ur, "\mathscr{R}_{\Omega,\vartheta}"] \arrow[rr, "\Sigma_{\Omega,h,\vartheta}"'] & & (3) \end{tikzcd}$$

Ainsi, toute similitude positive ayant un centre est déterminée par le triplet (Ω, h, ϑ) constitué de son centre **Ω**, de son rapport h et de son angle ϑ.

Un exemple simple est fourni par les triangles rectangles de I - 2 : le triangle **HBA** est l'image du triangle **HAC** par la similitude de centre **H**, de rapport $\frac{HB}{HA}$ et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}})$.



En ce qui concerne les rectangles d'or de I - 3, **BCEF** est l'image de **ABCD** par une similitude Σ telle que $\Sigma(A) = B$, $\Sigma(B) = C$, $\Sigma(C) = E$, $\Sigma(D) = F$; elle est positive, son rapport est **Φ** et son angle est $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}})$.



Désignons par Ω le centre de Σ et précisons quel est ce point.

Puisque $\Sigma(A) = B$ et $\Sigma(B) = C$, $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}})$

et de même $(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}})$.

Or, $(AB) \perp (BC)$, donc $(\Omega A) \perp (\Omega B)$ et $(\Omega B) \perp (\Omega C)$.

Par conséquent, Ω est le projeté orthogonal de **C** sur la droite (AC).

Pour les mêmes raisons, Ω est le projeté orthogonal de **C** sur la droite (BE).

Ainsi, Ω est le point commun aux droites (AC) et (BE).

V - 4 . *Groupe des similitudes positives du plan*

Outre les propriétés communes à toutes les similitudes positives, les similitudes positives du plan possèdent les propriétés suivantes :

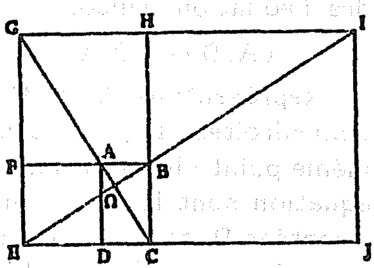
* la composée de deux similitudes d'angles respectifs ϑ et ϑ' a pour angle $\vartheta + \vartheta'$;

* la réciproque d'une similitude d'angle ϑ a pour angle $-\vartheta$;

* si l'on fixe le point Ω, toutes les similitudes positives de centre Ω forment un sous-groupe *commutatif* du groupe des similitudes positives du plan.

On a un bon exemple d'un sous-groupe, que nous appellerons Γ, du sous-groupe précédent avec les rectangles d'or de I - 3.

Appelons Σ la similitude de centre Ω, de rapport Φ et d'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ (voir la fin de V - 3).



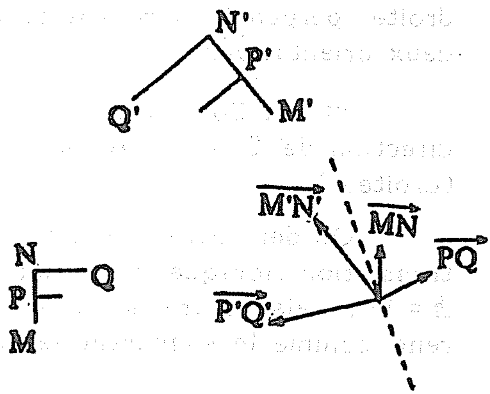
Ce groupe Γ a pour éléments : Σ, $\Sigma \circ \Sigma$, $\Sigma \circ \Sigma \circ \Sigma$, etc., Σ^{-1} (réciproque de Σ), $\Sigma^{-1} \circ \Sigma^{-1}$, etc. et l'identité I_P du plan P.

En abrégé, chaque élément de ce groupe est noté Σ^n où n est un entier (par exemple, $\Sigma \circ \Sigma \circ \Sigma = \Sigma^3$, $\Sigma^{-1} \circ \Sigma^{-1} = \Sigma^{-2}$, $\Sigma^1 = \Sigma$, $\Sigma^0 = I_P$)

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\Sigma} & B & \xrightarrow{\Sigma} & C & \xrightarrow{\Sigma} & E \\ B & \rightarrow & C & \rightarrow & E & \rightarrow & G \\ C & \rightarrow & E & \rightarrow & G & \rightarrow & I \\ D & \rightarrow & F & \rightarrow & H & \rightarrow & J \end{array}$$

VI . SIMILITUDES NEGATIVES DU PLAN

La figure ci-contre, analogue à celle de V - 1, suggère qu'il existe au moins une direction invariante par une similitude négative ; cette direction est celle de la droite pointillée de la figure.



C'est ce que nous allons préciser.

VI - 1. *Direction d'une similitude négative*

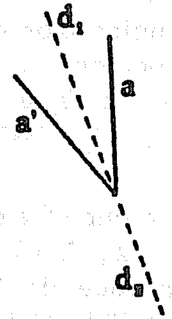
Désignons par **A** et **B** des directions orientées de demi-droites du plan et par **A'** et **B'** leurs images respectives par une similitude négative Σ.

D'après IV - 2, quelles que soient **A** et **B**,

$$(\widehat{A,B}) = (\widehat{B',A'})$$

La recherche de directions orientées invariantes par Σ conduit, ayant fixé par exemple **A**, à résoudre l'équation d'inconnue **D**

$$(\widehat{A,D}) = (\widehat{D,A'})$$



Représentons **A** et **A'** par des demi-droites ***a*** et ***a'*** issues d'un même point : les solutions de cette équation sont les deux directions orientées $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ des demi-droites opposées $\mathbf{d}_1$ et $\mathbf{d}_2$ dont la réunion est la droite bissectrice du couple (***a***, ***a'***).

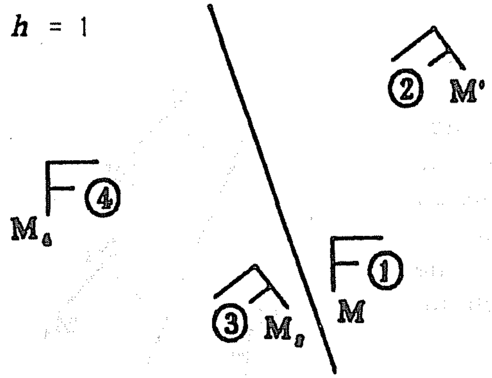
Il existe donc une direction de droites, unique, celle de cette bissectrice, qui est invariante par Σ ainsi que chacune de ses deux orientations : on l'appelle *direction de la similitude*.

On peut noter que Σ conserve aussi la direction de droites perpendiculaire à la précédente, mais échange ses deux orientations.

VI - 2. Considérons une droite **L** appartenant à la direction de Σ et désignons par ℓ la réflexion de miroir (droite) **L**.

On démontre que Σ est la composée de ℓ et d'une translation (lorsque $h = 1$) ou d'une homothétie (lorsque $h \neq 1$) ; mais l'ordre de la composition n'est pas indifférent, comme le suggèrent les dessins suivants.

$h = 1$



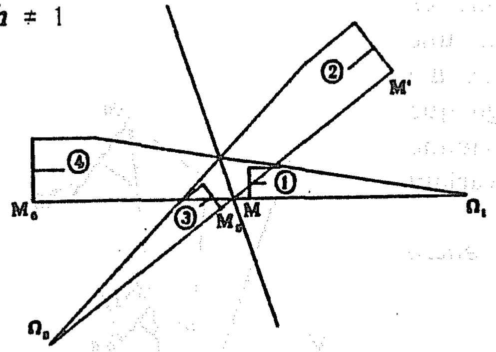
$$\begin{tikzcd} & (3) \arrow[dr, "T_3"] & \\ (1) \arrow[ur, "\ell"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & (2) \end{tikzcd}$$

$\Sigma = T_3 \circ \ell$

$$\begin{tikzcd} & (4) \arrow[dr, "\ell"] & \\ (1) \arrow[ur, "T_1"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & (2) \end{tikzcd}$$

$\Sigma = \ell \circ T_1$

$h \neq 1$



$$\begin{tikzcd} & (3) \arrow[dr, "H_3"] & \\ (1) \arrow[ur, "\ell"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & (2) \end{tikzcd}$$

$\Sigma = H_3 \circ \ell$

$$\begin{tikzcd} & (4) \arrow[dr, "\ell"] & \\ (1) \arrow[ur, "H_1"] \arrow[rr, "\Sigma"'] & & (2) \end{tikzcd}$$

$\Sigma = \ell \circ H_1$

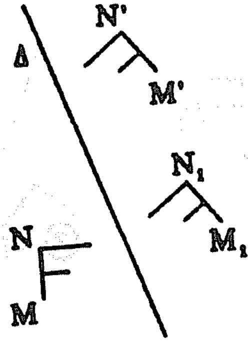
VI - 3 . ***Axe d'une similitude***

Enfin, on démontre que, parmi les droites dont la direction est celle de Σ, il existe une droite Δ et une seule qui est (globalement) invariante par Σ, ainsi que chacune de ses deux orientations ; la droite Δ est appelée *l'axe de la similitude* Σ.

VI - 4 . Soient **M** et **N** deux points, **M'** et **N'** leurs images respectives par Σ, M_1 et N_1 les images respectives de **M** et **N** par la réflexion δ de miroir (droite) Δ ; d'après VI - 1, la demi-droite $[MN)$ a pour image par δ la demi-droite $[M_1N_1)$ de même direction orientée que $[M'N')$, et cela quels que soient les points **M** et **N**.

Par conséquent :

* si $h = 1$, **M'** et **N'** sont les images de $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{N_1}$ par une translation $\vec{\mathbf{T}}$; l'invariance de Δ exige que le vecteur de cette translation soit un vecteur directeur de Δ.



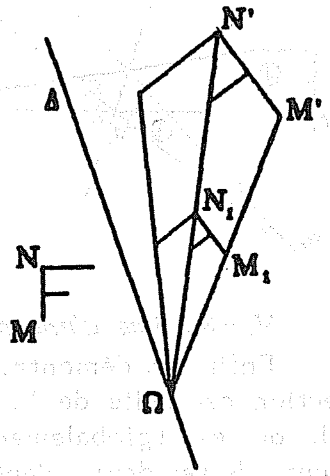
Dans ce cas, Σ est une réflexion-glissement ou une réflexion :

$$\Sigma = \mathbf{T} \circ \delta$$

ou aussi bien

$$\Sigma = \delta \circ \mathbf{T}.$$

* si $h \neq 1$, **M'** et **N'** sont les images de $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{N_1}$ par une homothétie de rapport h ; l'invariance de Δ exige que son centre Ω appartienne à Δ ; ce point Ω est invariant par la similitude Σ.



Ω est appelé *le centre de la similitude* Σ.

Ainsi, $\Sigma = \mathbf{H} \circ \delta$.

Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que, de plus, $\Sigma = \delta \circ \mathbf{H}$.

Dans ce cas, la similitude Σ est déterminée par le triplet (Ω, h, Δ) constitué de son centre Ω, de son rapport h et de son axe Δ.

Un exemple de ce dernier cas est fourni par les triangles rectangles **BAH** et **BCA** de I - 2 : **BAH** est l'image de **BCA** par la similitude qui a **B** pour centre, $\frac{\mathbf{BA}}{\mathbf{BC}}$ pour rapport et la bissectrice du saillant $[\widehat{\mathbf{ABC}}]$ pour axe.

VII. SIMILITUDES DE L'ESPACE

Nous nous bornerons à quelques indications, qui étendent à l'espace les propriétés vues en V et VI.

VII - 1. Celles des similitudes pour lesquelles aucun point n'est invariant font partie des isométries ; on peut les obtenir en composant, dans un ordre ou dans l'autre, une translation de vecteur $\vec{V}$ non nul avec :

* soit (si la similitude est positive) une rotation dont l'axe a $\vec{V}$ pour vecteur directeur (vissage),

* soit (si la similitude est négative) une réflexion dont le miroir (plan) a $\vec{V}$ pour vecteur directeur.

VII - 2. Celles des similitudes qui possédent au moins deux points invariants sont nécessairement de rapport 1 ; ce sont donc des isométries.

VII - 3. Pour les autres similitudes, il existe un seul point invariant Ω ; on l'appelle *centre de la similitude.* Toute similitude Σ de ce type peut être obtenue comme composée, dans un ordre ou dans l'autre, de l'homothétie de centre Ω et de même rapport h que Σ avec :

* soit (si la similitude est positive) une rotation dont l'axe contient Ω ;

* soit (si la similitude est négative) une antirotation de point invariant Ω (voir ISOMETRIE, VI - 1) ; plus précisément, cette antirotation est la composée, dans un ordre ou dans l'autre, d'une réflexion dont le miroir (plan) Π contient Ω, et d'une rotation dont l'axe est perpendiculaire à Π en Ω (noter que, si l'angle de la rotation est l'angle plat, Σ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-h$).

ISOMETRIE

I . INTRODUCTION

Le monde minéral, avec ses cailloux, ses rochers, ses cristaux, . . . fournit la notion de corps solide, par opposition aux gaz, aux liquides, aux boues, . . . Ces derniers épousent, plus ou moins vite, la forme du récipient qui les contient ; les premiers, au contraire, sauf contraintes physiques très puissantes (chocs, pression, température, . . .) peuvent être tenus pour "indéformables".

En outre, les objets solides fabriqués par l'homme donnent l'occasion de comparer des formes et des dimensions. Une fabrique en série produit en quantité . . . industrielle des clous "tous pareils", des plaques métalliques planes "identiques", des billes "de même grosseur", des écrous "de même modèle", . . . On entend par là que chacun de ces clous (ou chacune de ces plaques, chacune de ces billes, chacun de ces écrous, . . .) est apte à tenir la place de n'importe quel autre, qu'il peut lui être substitué en toute circonstance.

Cette expérience quotidienne que nous avons des corps solides comporte pour l'enseignement à la fois une aide et un obstacle.

C'est une aide au stade de l'initiation, et il n'est pas question de s'en priver. Il est commode, lorsqu'on aborde la géométrie, et surtout la géométrie du plan, de reconnaître par des manipulations simples (calques, pliages, . . .) les propriétés fondamentales des isométries ; il paraîtrait même artificiel, à ce stade, de déduire ces propriétés "évidentes" d'une définition plus formelle comme celle qui est donnée ci-dessous au paragraphe II et développée aux paragraphes III à VI.

Mais cette prétendue évidence a sa contrepartie : elle risque de masquer ultérieurement l'intérêt d'une modélisation mathématique. Or, le passage des objets concrets à des êtres géométriques (abstraits) et l'élimination des notions physiques de temps, de mouvements, de déplacement (voir **X**) ne sont pas moins nécessaire pour l'isométrie que pour les autres concepts mathématiques. De surcroît, la démarche intuitive qui consisterait à réduire l'isométrie à l'indéformabilité est impuissante à exprimer tout le contenu du présent concept (voir VII) tel qu'il résulte de la condition de conservation des longueurs.

II . DEFINITION, PROPRIETES

Désignons par **E** un ensemble de points qui pourra être à volonté la droite, le plan ou l'espace.

II - 1. Les translations, les symétries centrales, les réflexions et (pour le plan et l'espace) les rotations et les réflexions-glissements ont en commun les propriétés suivantes.

P1. Conserver les longueurs, c'est-à-dire que, quels que soient les points A, B, leurs images respectives A', B' sont telles que AB = A'B'.

P2. Transformer toute droite en une droite, toute demi-droite en une demi-droite tout segment en un segment.

P3. Conserver les angles-de-secteurs.

P4. Etre une bijection.

On démontre le théorème suivant :

***Toute application de* E *vers lui-même possédant* P1 *possède aussi* P2, P3 *et* P4.**

La réciproque est fausse : les similitudes de rapport autre que 1 (en particulier les homothéties de rapport autre que 1 et -1) possèdent **P2**, **P3** et **P4**, mais non **P1**.

II - 2 . *Définition*

Isométrie de **E** signifie application de **E** vers lui-même qui conserve les longueurs

Dès lors, le théorème du paragraphe II - 1 peut s'énoncer ainsi :

Toute isométrie possède les propriétés **P2, P3** et **P4**.

Nous examinerons plus loin s'il existe d'autres isométries que celles qui ont été citées au début de II - 1.

Remarque. Si l'on juge bon d'utiliser le mot *isométrie* au collège, il est sans doute préférable, et certainement légitime, d'évoquer l'une des deux définitions (surabondantes) suivantes :

"Bijection de **E** vers lui-même qui conserve les longueurs"

"Bijection de **E** vers lui-même qui conserve les longueurs et les angles-de-secteurs"

II-3. *Autres propriétés des isométries*

Toute isométrie conserve le parallélisme (droite-droite), (plan-plan), (droite-plan).

Toute isométrie conserve : dans l'espace, les volumes et les aires ; dans le plan, les aires.

Le milieu de deux points a pour image le milieu de leurs images ; plus généralement, le barycentre de *n* points affectés de coefficients a pour image le barycentre des images de ces points affectés des mêmes coefficients.

II-4.

Soit **J** une isométrie de **E** et **F** une figure ; l'ensemble des points images par **J** des points de **F** est une figure **F'**, dite "image de **F** par **J**".

J est une bijection ; la bijection réciproque de **J** est aussi une isométrie, par laquelle **F'** a pour image **F**.

On dit que les deux figures **F** et **F'** sont *isométriques*.

Plus généralement, étant donné deux figures,
dire qu'elles sont isométriques,
c'est dire qu'il existe au moins une isométrie par laquelle l'une des figures est l'image de l'autre.

Par exemple, sont isométriques :
* deux segments de même longueur
* deux secteurs de même angle
* deux cercles de même rayon
* deux sphères de même rayon
* deux rectangles de même longueur et même largeur

etc.

III . GROUPE DES ISOMETRIES DE E

Rappelons que nous avons désigné par **E** un ensemble de points qui peut être à volonté la droite, le plan ou l'espace.

De la définition (voir II - 2) il résulte que toute composée d'isométries est une application de **E** vers lui-même qui conserve elle aussi les longueurs, donc est une isométrie.

Autrement dit, la composition des isométries de **E** est une loi dans l'ensemble $\mathscr{I}$ des isométries de **E**.

Cette loi est associative (comme toute composition d'applications).

Il existe un élément neutre dans $\mathscr{I}$, à savoir l'identité de **E**.

Toute isométrie **J** a un symétrique dans $\mathscr{I}$, à savoir l'isométrie réciproque de **J** (voir II - 4).

En résumé, l'ensemble $\mathscr{I}$ muni de la composition des applications est un groupe, appelé "groupe des isométries de **E**".

Ce groupe n'est pas commutatif ; pour s'en assurer, il suffit de composer deux symétries centrales (voir HOMOTHETIE, VI - 2).

IV . INVENTAIRE DES ISOMETRIES DE LA DROITE

Les isométries de la droite sont :

* les réflexions, c'est-à-dire les symétries centrales (voir REFLEXION).

* Les translations (y compris l'identité), chacune pouvant être obtenue, d'une infinité de façons, comme composée d'un couple de réflexions.

On démontre, par exemple de proche en proche, que la composée de tout p-uplet de réflexions est soit (lorsque p est impair) une réflexion, soit (lorsque p est pair) une translation, éventuellement de vecteur nul.

V. INVENTAIRE DES ISOMETRIES DU PLAN

V-1. On démontre que les isométries du plan sont de l'un des types suivants :

* réflexion, c'est-à-dire symétrie orthogonale par rapport à une droite, miroir de la réflexion ;

* composée d'un couple de réflexions, c'est-à-dire :
si les miroirs sont parallèles, translation (y compris l'identité)
si les miroirs sont sécants, rotation[1] ;

* composée d'un triplet de réflexions, c'est-à-dire :
si les trois miroirs sont parallèles ou concourants, réflexion
sinon, réflexion-glissement.

V-2. En résumé :

Les isométries du plan sont	les réflexions les translations les rotations les réflexions-glissements

(ce qui comprend l'identité du plan)

V-3. On sait déjà (voir début de III) que la composée de tout p-uplet de réflexions est une isométrie. Plus précisément, on démontre que c'est :

* une réflexion ou une réflexion-glissement si p est impair

* une translation ou une rotation (éventuellement l'identité du plan) si p est pair.

V-4. Un autre moyen de classer les isométries du plan consiste à considérer les points et droites invariants. On aboutit au résumé suivant :

---

[1] Rappelons (voir TRANSLATION et ROTATION) que chaque translation ou chaque rotation peut être obtenue, d'une infinité de façons, comme composée d'un couple de réflexions.

- Aucn point invariant
  - Une droite globalement invariante et une seule → **Réflexion-glissement**
  - Une direction de droites dont chacune est globalement invariante → **Translation de vecteur non nul**
- Au moins un point invariant, A
  - Aucun autre → **Rotation de centre A et d'angle non nul**
  - Au moins un autre, B
    - Chaque point de (AB) et aucun autre → **Réflexion de miroir (AB)**
    - Au moins un point extérieur à (AB) → **Identité**

VI . INVENTAIRE DES ISOMETRIES DE L'ESPACE

VI - 1. On démontre que les isométries de l'espace sont de l'un des types suivants :

* réflexion, c'est-à-dire symétrie orthogonale par rapport à un plan , miroir de la réflexion ;
* composée d'un couple de réflexions, c'est-à-dire :
  * si les miroirs sont parallèles : translation ;
  * si les miroirs sont sécants : rotation[2] ;
* composée d'un triplet de réflexions, c'est-à-dire :
  * si les trois miroirs sont parallèles ou ont une droite en commun : réflexion ;

---

2 Rappelons (voir TRANSLATION et ROTATION) que chaque translation ou chaque rotation peut être obtenue, d'une infinité de façons, comme composée d'un couple de réflexions.

* si les trois miroirs sont parallèles à une même droite sans qu'on soit dans le cas précédent (autrement dit, ou bien deux des miroirs sont parallèles et le troisième les coupe, ou bien les trois miroirs déterminent un prisme) : réflexion-glissement ;

* sinon, (c'est-à-dire si les trois miroirs ont un seul point commun), *antirotation*[3] ;

*composée d'un quadruplet de réflexions, c'est-à-dire translation ou rotation ou *vissage*[4].

VI-2. En résumé :

Les isométries de l'espace sont	les réflexions les translations les rotations les réflexions-glissements les antirotations les vissages

(ce qui comprend l'identité de l'espace)

---

[3] *Antirotation* signifie : composée, dans un ordre ou dans l'autre, d'une rotation et d'une réflexion dont le miroir est un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation. Toute symétrie centrale est une antirotation dont la rotation a pour angle l'angle plat.

Le préfixe *anti* nous paraissant équivoque, nous préférerions *réflexion-rotation*, construit sur le même modèle que *réflexion-glissement*.

[4] *Vissage* signifie : composée, dans un ordre ou dans l'autre, d'une rotation et d'une translation dont le vecteur est vecteur directeur de l'axe de la rotation.

La restriction d'un vissage dont la rotation est d'angle plat sur tout plan contenant l'axe de la rotation est une réflexion-glissement. Cela seul justifierait qu'on remplace le mot traditionnel *vissage* par *rotation-glissement*, comme on a dit plus haut *réflexion-glissement*. Voir aussi X-2.

VI - 3. Comme on l'a fait dans le plan, on peut classer les isométries de l'espace en considérant les points, droites et plans invariants.

Nous ne présentons pas cette classification.

VII. ISOMETRIE ET INDEFORMABILITE

Revenons sur les manipulations évoquées à la fin du paragraphe I.

VII - 1. *Manipulations relatives à la géométrie du plan*

VII - 1.1. Supposons qu'on ait posé sur une table deux dessins tels qu'en déplaçant l'un on puisse l'amener à recouvrir exactement l'autre :

* dans certains cas, on peut se contenter de faire glisser l'un des deux dessins sur la table (figure 1) ;

* dans les autres cas, un retournement face pour face de l'un des deux dessins est indispensable (figure 2)

Remarquons que si l'un des dessins possède une droite d'autosymétrie (donc l'autre aussi), chacune des deux manipulations réussit (figure 3).

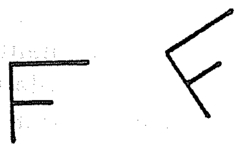


figure 1

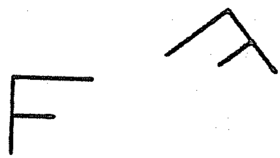


figure 2

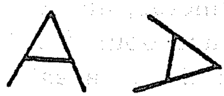


figure 3

Dans tous les cas, on peut dire que les deux dessins sont "superposables".

VII.1.2. On aurait pu, sans déplacer aucun des deux dessins, décalquer l'un et constater, en déplaçant le papier-calque avec ou sans retournement face pour face, que le dessin sur papier-calque est aussi superposable à l'autre dessin.

On peut dire que chacun des deux dessins est "substituable" à l'autre dans le rôle qu'il joue vis-à-vis du dessin sur papier-calque.

VII-1.3. Comme on tient pour évident que la longueur de n'importe quel segment lié au dessin qu'on a déplacé (en VII-1.1) ou au dessin sur papier-calque (en VII-1.2) est conservée lors du transport, les mots "superposable" et "substituable" peuvent être considérés comme de bons équivalents concrets du mot "isométrique" tant qu'on se borne à une première approche de la géométrie du plan.

VII-1.4. L'essentiel est qu'on ne s'imagine pas avoir "démontré" quoi que ce soit par une approche de ce genre, comme on avait coutume de le faire avec les "cas d'égalité" (voir XI-3). En effet :

* d'une part, on utilise un véritable postulat physique quand on admet qu'un morceau de papier (voire une feuille métallique) est indéformable ;

* d'autre part, pour rester en géométrie du plan, il faudrait considérer que le dessin déplacé et le dessin sur papier-calque sont dans le même plan lui-même sans épaisseur, ce qui exclut qu'ils aient des faces distinctes, en contradiction avec la locution "retournement face pour face". En mathématique, les phrases "Le plan a deux faces", "Le plan n'a qu'une face" sont dépourvues de signification[5].

Cependant, ces objections sont plus sensibles aux personnes déjà formées à la géométrie qu'aux débutants ; ceux-ci risqueraient même de les trouver spécieuses. A l'expérience, les procédés de VII-1.1 et VII-1.2 "passent la rampe" assez bien ; de toute façon, des approches de ce genre sont inévitables, ainsi que l'effort intellectuel nécessaire pour s'en abstraire.

---

5 Cela n'empêche pas qu'un plan régionne l'espace en deux demi-espaces.

VII - 2 . *Manipulations relatives à la géométrie de l'espace*

VII - 2 .1. Le mot "superposable" est ici totalement inadapté et ne peut mener qu'à des erreurs.

Quand le maître dit : "Deux cubes pleins, de même arête, sont superposables", il veut dire qu'on peut imaginer l'un des cubes venant coïncider avec l'autre ; mais cette coïncidence est matériellement irréalisable. En fait, dans le langage courant, "superposer les deux cubes", c'est poser l'un sur l'autre ; et on peut aussi bien superposer deux cubes d'arêtes différentes, ou un cube et une pyramide, ou, pour bâtir un mur, des pierres de formes diverses ; on superpose alors des solides qui n'ont rien d'isométriques . . .

VII - 2 .2. Au contraire, le mot "substituable" peut encore être utilisé dans certains cas. Prenons l'exemple d'appareils ménagers livrés dans des logements en plastique : deux appareils de même type peuvent être substitués l'un à l'autre dans le logement correspondant.

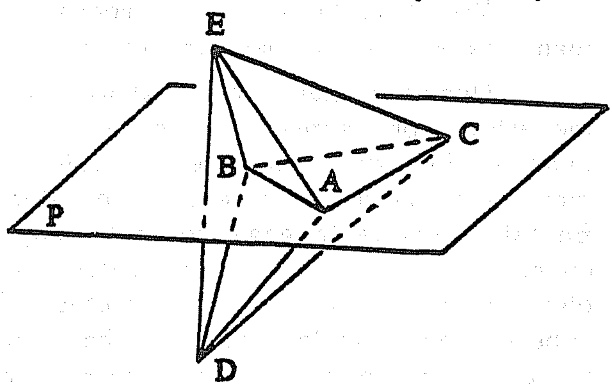
Toutefois, ce n'est pas toujours le cas. Pour certaines paires d'objets, la substitution de l'un à l'autre n'est pas possible, bien que les longueurs se conservent quand on passe de l'un à l'autre :

* les deux chaussures d'une même paire ne peuvent pas s'adapter correctement à un même embauchoir ; un embauchoir droit ne convient qu'à des chaussures droites ;

* on ne peut pas enfiler sa main droite dans un gant gauche ;

* on ne peut pas visser un écrou taraudé à droite sur une tige filetée à gauche, quand bien même cet écrou pourrait être vissé sur une tige filetée à droite isométrique à la première (même diamètre, même pas, même forme de filet).

Voici à présent un exemple plus "géométrique". A partir d'un patron de tétraèdre on peut confectionner deux tétraèdres ABCD et ABCE suivant qu'on replie trois faces d'un côté ou de l'autre du plan P de la quatrième ; ils s'échangent dans la réflexion de miroir (plan) P, donc ils sont isométriques ; et pourtant on ne peut pas substituer l'un à l'autre dans quelque logement que ce soit, par quelque déplacement que ce soit (sauf si l'un des tétraèdres, et donc aussi l'autre, possède un plan d'auto-symétrie).



VII - 2 . 3 . La conclusion est donc très différente de celle de VII - 1 . 3 . Deux figures de l'espace substituables l'une à l'autre sont nécessairement isométriques ; mais il ne suffit pas qu'une figure soit isométrique à une autre pour qu'elle lui soit substituable.

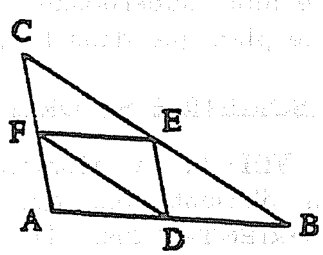
Certes, une fois admise l'indéformabilité des solides matériels, on peut encore l'utiliser pour donner une première idée de l'isométrie en géométrie de l'espace. Mais on ne pourra pas rester longtemps à ce stade, en laissant croire que cette indéformabilité épuise le concept d'isométrie.

VII - 3 . ***Où l'on concilie*** VII - 1 ***et*** VII - 2.

Ainsi la question posée à la fin du paragraphe I semble appeler deux réponses opposées : injustifiée dans l'espace d'après VII - 2, l'assimilation entre "indéformabilité" et "conservation des longueurs" serait acceptable dans le plan d'après VII - 1. En fait, cette dernière assertion ne résiste pas à une analyse plus poussée.

VII - 3.1. Dans du carton, blanc d'un côté et hachuré de l'autre, on découpe une surface triangulaire *non isocèle* ABC. Appelons D, E, F les milieux respectifs des côtés |AB|, |BC|, |CA|.

On fractionne la surface en quatre surfaces triangulaires ADF, EDB, DEF, CEF. Ces quatre triangles sont isométriques.



On livre en vrac les quatre petits triangles et on demande de les assembler de façon à reconstituer un triangle.

L'expérience montre qu'on n'y parvient que si les quatre petits cartons présentent tous leurs faces blanches, ou tous leurs faces hachurées. Ce n'est qu'à cette condition que l'on peut les qualifier, ici, de "superposables" ou de "substituables" l'un à l'autre.

VII - 3.2. Un autre exemple est fourni par les pentaminos, qui sont assemblages plans de cinq carrés de même dimension tels que deux carrés contigus ont un côté commun. Quand on veut les réaliser, une recherche méthodique conduit à 18 assemblages deux à deux non superposables par glissement sur le plan ; ce nombre se réduit à 12 si on convient de ne pas distinguer deux assemblages superposables après retournement face pour face de l'un d'eux.

VII - 3.3. En fait, dans le VII - 1, on ne s'est pas conformé à la "règle du jeu" de la géométrie du plan en utilisant dans certains cas des déplacements *dans l'espace* : le "retournement face pour face" nécessite une incursion dans l'espace où est plongé le plan (alors que, en géométrie de l'espace, on ne peut pas concrétiser le passage d'une main droite à une main gauche par une incursion dans "l'espace à quatre dimensions"...).

VII - 3.4 . En définitive, dans le plan comme dans l'espace, deux figures peuvent être isométriques sans être substituables l'une à l'autre. Si, en géométrie du plan, on refuse de "sortir" dans l'espace,
pas, le mot "superposable" n'a pas plus de signification dans le plan que dans l'espace.

VII . ISOMETRIE ET ORIENTATION

VIII - 1. La géométrie rend compte, grâce à la notion d'orientation, des situations évoquées en VII (voir ORIENTATION, VI).

Revenons à l'ensemble E de II.

Toute réflexion altère l'orientation de E (et des parties orientables de E) (voir REFLEXION).

Par conséquent, la composée d'un p-uplet de réflexions (qui est une isométrie)

* conserve l'orientation si p est pair
* altère l'orientation si p est impair.

Dans le premier cas, l'isométrie est dite *positive* ; dans le second , *négative*.

Dans le plan, toute isométrie positive conserve les angles-de-couples, et toute isométrie négative transforme tout angle-de-couples en son opposé.

VIII - 2. Revenons à II - 4 .

Etant donné deux figures isométriques,

* dire qu'elles sont *positivement isométriques*, c'est dire qu'il existe au moins une isométrie positive par laquelle l'une des figures est l'image de l'autre ;
* dire qu'elles sont *négativement isométriques*, c'est dire qu'il existe au moins une isométrie négative par laquelle l'une des figures est l'image de l'autre.[6]

---

[6] Au lieu de "positivement isométriques", on dit aussi "directement isométriques" ; au lieu de "négativement isométriques", on dit aussi "inversement isométriques" ; avec les inconvénients qui s'attachent aux multiples emplois des mots *direct* et *inverse* et des mots dérivés (voir INVERSE)

Il arrive que deux figures isométriques le soient aussi bien positivement que négativement : c'est le cas si et seulement si chacune présente au moins une autosymétrie négative.

VIII - 3 . Sur la droite,

* les isométries positives sont les translations (*p* est pair) ;

* les isométries négatives sont les réflexions (*p* est impair).

VIII - 4 . Dans le plan,

* les isométries positives sont les translations et les rotations (*p* est pair) ;

* les isométries négatives sont les réflexions et les réflexions-glissements (*p* est impair).

VIII - 5 . Dans l'espace,

* les isométries positives sont les translations, les rotations et les vissages (ou rotations-glissements) (*p* est pair) ;

* les isométries négatives sont les réflexions, les réflexions-glissements et les antirotations (entre autres les symétries centrales) (*p* est impair).

VIII - 6 . Dans VII - 1, pour les deux figures planes isométriques, la superposition ou la substitution s'effectue concrètement

sans retournement face pour face si les figures sont positivement isométriques,

avec retournement face pour face si elles sont négativement isométriques.

Dans VII - 2, deux figures isométriques de l'espace ne sont concrètement substituables l'une à l'autre que si elles sont positivement isométriques. Deux vis de mêmes dimensions sont positivement isométriques si ce sont soit deux vis à gauche, soit deux vis à droite, négativement isométriques s'il s'agit d'une vis à droite et d'une vis à gauche, etc.

IX. EN GEOMETRIE DE L'ESPACE : GENERATION DES ISOMETRIES POSITIVES PAR DES SYMETRIES ORTHOGONALES PAR RAPPORT A UNE DROITE.

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite (dite axe de la symétrie) est une rotation d'angle plat, donc une isométrie positive.

En composant un couple de telles symétries, on obtient une translation si les axes sont parallèles, une rotation si les axes sont sécants, un vissage si les axes ne sont pas coplanaires.

Inversement, toute isométrie positive de l'espace est, d'une infinité de manières, la composée d'un couple de symétries orthogonales par rapport à une droite.

X. ISOMETRIES ET DEPLACEMENTS

X-1. Lorsqu'un corps solide est en mouvement (caillou qui roule le long d'une pente, statuette qu'on déplace, . . .), deux quelconques de ses positions sont positivement isométriques. Parler d'isométrie, c'est ne considérer que ces deux positions, sans se préoccuper des positions intermédiaires occupées au cours du déplacement, en faisant abstraction du temps, comme on l'a fait déjà pour la translation et la rotation (voir TRANSLATION, VI ; ROTATION, VII).

C'est là que réside le problème majeur dans l'élaboration du concept d'isométrie : il consiste à éliminer les notions de temps, de mouvement, de déplacement, bref de tout ce qui est perçu comme intermédiaire entre la figure "initiale" et la figure "finale". C'est par là seulement qu'on peut accéder au concept d'application de E vers lui-même. Cela ne se fait pas du jour au lendemain, et on ne court pas grand risque en affirmant que dans le langage, voire dans le psychisme du mathématicien, même chevronné, il subsiste des traces de cette cinématique naïve.

X-2. Dans le souci de distinguer géométrie et mécanique, le mot *déplacement* naguère utilisé dans le sens d' "isométrie positive" est trop lié à la mécanique pour ne pas être dangereux en géométrie. Même remarque pour *déplacement hélicoïdal* au lieu de "vissage" ; ce dernier n'est d'ailleurs guère meilleur : nos proposons plus haut (voir VI-1) "rotation-glissement".

X-3. Au lieu de "symétrie orthogonale par rapport à une droite", on emploie aussi "demi-tour". Mais d'une part ce vocable rappelle trop la cinématique, d'autre part il risque d'évoquer tout aussi bien, dans le plan, la symétrie centrale.

XI. EGALITE ET ISOMETRIE

La notion d'égalité, l'emploi du signe "=" ont été heureusement précisés depuis une vingtaine d'années (voir les rubriques EGALITE, dans **MOTS I**, et DISTINCTS, CONFONDUS, INEGAUX, EGAUX, dans **MOTS FLOUS**, de **MOTS VIII**)

L'expression "figures isométriques" a été définie ci-dessus, en II-4.

XI-1. La phrase

"Les segments |AB| et |CD| sont égaux"

veut indiquer qu'on est en présence *d'un seul* segment, désigné indifféremment par [AB] ou par [CD] (voir figure 1 et figure 2) ; mais le pluriel dont elle est grevée est une bonne façon de brouiller les idées des élèves sur l'égalité. Mieux vaut dire :

"[AB] et [CD] désignent le même segment"

ou encore :

"[AB] = [CD]",

égalité qui se lit :

"segment [AB] est égal à segment [CD]".

Cette même phrase "Les segments [AB] et [CD] sont égaux", a longtemps voulu dire (voir figure 3) :

"Les segments [AB] et [CD] ont la même longueur", ce qui s'exprime aussi par :

"Les segments [AB] et [CD] sont isométriques",
ou par : "AB = CD",
égalité qui se lit :

"longueur AB est égale à longueur CD".

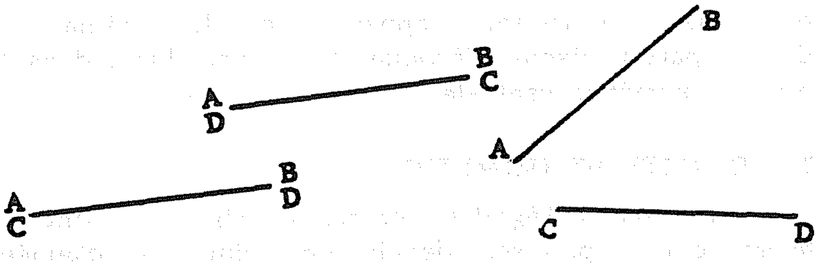


figure 1 figure 2 figure 3

XI-2. On peut développer des considérations analogues à propos de secteurs-de-plan (voir dans **MOTS V** la rubrique SECTEUR, ANGLE, III-5-1).

En particulier "secteurs isométriques" est synonyme de "secteurs de même angle".

XI-3. Les célèbres "cas d'égalité des triangles" ont été jadis un des piliers de la géométrie élémentaire ; malheureusement, on prétendait souvent les démontrer. Ces excès leur ont valu une longue éclipse. Ils tentent de réapparaître, bien que les Commentaires Officiels pour la classe de cinquième précisent sèchement : "Le recours aux "cas d'égalité des triangles" pour l'étude des figures géométriques est exclu".

En tout cas, si on les utilisait, ils seraient pris comme axiomes (donc ne seraient pas démontrés), et ce devrait être sous un autre nom : "cas d'isométrie", ou encore, si on tenait à éviter ce dernier mot, "cas de superposabilité", terme acceptable en géométrie du plan pour une première approche : voir VII (voir aussi, dans **MOTS V**, la rubrique VOCABULAIRE DE LA GEOMETRIE, TRIANGLE, II).

En outre, le mot *cas* est malencontreux, car il évoque ordinairement la subdivision d'une étude par disjonction et exhaustion. Le mot *critère* serait préférable puisqu'il s'agit en fait de conditions suffisantes pour que deux triangles donnés soient isométriques.

REFLEXION

Appelant **D** la droite, **P** le plan, **E** l'espace, considérons

* dans **D**, une symétrie de centre Ω
* dans **P**, une symétrie orthogonale d'axe Δ
* dans **E**, une symétrie orthogonale de plan Π.

Ces trois symétries orthogonales ont en commun

d'être négatives (voir **ORIENTATION**),

d'admettre pour ensemble des points invariants, dans chaque *espace* de dimension n (n est 1 pour la droite, 2 pour le plan, 3 pour l'espace), un sous-espace de dimension $n-1$ (ici, $\{\Omega\}$, Δ ou Π respectivement ; en effet, $\{\Omega\}$ est un "espace" de dimension 0).

On rassemble à présent ces symétries sous le vocable ***réflexion***, et on pourrait envisager d'appeler ***miroir*** d'une réflexion l'ensemble de ses points invariants.

Cette terminologie permet des énoncés très généraux, comme celui-ci qui s'applique à volonté dans **D**, **P** ou **E** (voir **ISOMETRIE**) ou même dans un espace de dimension n :

Toute isométrie est la composée d'un p-uplet de réflexions ; pour une isométrie donnée, le naturel p ne peut prendre que des valeurs paires si elle est positive, et impaires si elle est négative ; la plus petite de ces valeurs de p est inférieure ou égale à $n + 1$.

Voir les programmes actuels du Lycée (arrêté du 14-3-86 ; voir aussi Bulletin APMEP n° 359, page 322.

REFLEXION-GLISSEMENT

Dans le plan ou dans l'espace, ce vocable signifie :

composée, dans un ordre ou dans l'autre, d'une réflexion et d'une translation dont le vecteur est un vecteur directeur du miroir (droite dans le premier cas, plan dans le deuxième) de la réflexion (voir REFLEXION).

Les réflexions-glissements sont les isométries négatives (du plan ou de l'espace) sans point invariant (voir ISOMETRIE).

Remarque. Au lieu de *réflexion-glissement*, on rencontre aussi l'expression *réflexion glissée*, qui ... ne désigne pas une réflexion. Cette anomalie grammaticale se retrouve, par exemple en physique, dans "masse volumique" (qui n'est pas une masse), "force électromotrice" (qui n'est pas une force).

VECTORIEL

I. CARRES MAGIQUES

I-1. Considérons la grille carrée ci-contre dont chacune des 9 cases contient un nombre.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Cette grille **G** possède une propriété remarquable : la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est la même, ici 15.

On dit que **G** est un *carré magique*, d'ordre 3, dont la somme magique est 15.

Dans ce carré magique, un raffinement supplémentaire intervient : les nombres utilisés sont des naturels consécutifs. Nous ne tiendrons pas compte de cette particularité dans ce qui suit.

Voici d'autres exemples :

0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0

est un carré magique **H** dont la somme magique est 0 ;

2/3	11/6	1/2
5/6	1	7/6
3/2	1/6	4/3

est un carré magique **K** dont la somme magique est 3.

Lorsque toutes les cases sont occupées par un même nombre, on obtient un type de carré magique qui peut paraître banal, mais dont nous aurons l'emploi plus tard. En particulier,

0	0	0
0	0	0
0	0	0

est un carré magique qu'on peut appeler le *carré magique nul d'ordre* 3. Sa somme magique est nulle.

Il existe d'autres carrés magiques dont la somme magique est nulle : **H** par exemple.

Tous les carrés magiques précédents sont d'ordre 3, mais il existe des carrés magiques de n'importe quel ordre. Aux ordres 1 ou 2, les carrés magiques sont nécessairement de la forme

a

ou

a	*a*
a	*a*

, où *a* est un nombre arbitraire.

Voici un exemple moins banal :

3	-4	-1	-2
-6	-1	-1	4
-1	-1	-1	-1
0	2	-1	-5

est un carré magique d'ordre 4, dont la somme magique est -4.

I-2. Les quelques exemples précédents peuvent piquer la curiosité et susciter l'envie de chercher d'autres carrés magiques avec l'arrière-pensée de les trouver tous.

Nous nous limiterons désormais aux carrés magiques d'ordre 3.

Un premier moyen, immédiat, consiste à partir d'un carré magique déjà écrit et à utiliser les symétries du carré.

Par exemple, en échangeant les colonnes extrêmes,

à partir de

2	9	4
7	5	3
6	1	8

on obtient le carré magique

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Evidemment, on aurait pu aussi échanger les lignes extrêmes ou utiliser les symétries par rapport aux diagonales. Mais le procédé, de portée limitée, ne donne que 8 carrés magiques qui, de surcroit, ont tous la même somme magique.

Au contraire, voici des procédés qui fournissent à peu de frais de nouveaux carrés magiques en nombre illimité :

* Multiplions tous les nombres du carré magique **K** par 6 ; on obtient

6×2/3	6×11/6	6×1/2
6×5/6	6×1	6×7/6
6×3/2	6×1/6	6×4/3

ou, plus simplement,

4	11	3
5	6	7
9	1	8

qui est encore un carré magique, **U** ; sa somme magique est 18, c'est-à-dire 6×3. Il est commode (et nous verrons qu'il n'est pas abusif) de dire qu'on a "multiplié" **K** par 6, et d'écrire **U** = 6**K**.

* Additionnons case à case les carrés magiques **U** et **G** ; on obtient :

4+2	11+9	3+4
5+7	6+5	7+3
9+6	1+1	8+8

ou, plus simplement,

6	20	7
12	11	10
15	2	16

qui est encore un carré magique, **V** ; sa somme magique est 33 , c'est-à-dire 18 + 15. Ici encore, il est commode (et non abusif) d'appeler ce nouveau carré magique "somme" de **U** et **G**, et d'écrire **V** = **U** + **G**. Le carré magique nul est l'élément neutre de cette "addition".

* On est vite convaincu de la généralité des deux procédés ci-dessus. De plus, le dernier exemple cité montre qu'on peut les combiner car, de **U** = 6**K** et **V** = **U** + **G**, on déduit **V** = 6**K** + **G**.

On peut rendre compte des calculs par des écritures telles que:

$$6\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2/3 & 11/6 & 1/2 \\ \hline 5/6 & 1 & 7/6 \\ \hline 3/2 & 1/6 & 4/3 \\ \hline\end{array} \quad + \; (-2)\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 9 & 4 \\ \hline 7 & 5 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 8 \\ \hline\end{array} \; = \; \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -7 & -5 \\ \hline -9 & -4 & 1 \\ \hline -3 & -1 & -8 \\ \hline\end{array}$$

dont l'interprétation ne présente pas de difficulté.
Le carré magique obtenu a pour somme magique −12 , c'est-à-dire 6 × 3 + (−2) × 15 .

I − 3. D'emploi très simple, ces deux procédés permettent de faire proliférer les exemples à partir de carrés magiques déjà écrits. En revanche, ces procédés ne satisfont pas complètement la curiosité initiale car il n'est pas évident qu'ils permettent d'obtenir *tous* les carrés magiques d'ordre 3.

Pour les obtenir tous, adoptons une démarche systématique mais fastidieuse. Imposons-nous la somme magique s et choisissons de proche en proche les termes du carré.

Prenons a et b arbitrairement :

a	b	

Complétons la première ligne :

a	b	$s-a-b$

Prenons c arbitrairement :

a	b	$s-a-b$
c		

Complétons la première colonne :

a	b	$s-a-b$
c		
$s-a-c$		

Complétons la diagonale "qui monte de gauche à droite" :

a	b	$s-a-b$
c	$2a+b+c-s$	
$s-a-c$		

Complétons la deuxième ligne, puis la deuxième colonne :

a	b	$s-a-b$
c	$2a+b+c-s$	$2s-2a-b-2c$
$s-a-c$	$2s-2a-2b-c$	

La troisième ligne doit être complétée par $3a+2b+2c-2s$. Il se trouve que, du même coup, la somme des termes de la troisième colonne est s.

Il reste à examiner la somme des termes de l'autre diagonale. Cette somme est $6a+3b+3c-3s$; par conséquent, le carré est magique si et seulement si

$$6a+3b+3c-3s = s$$

Cette égalité peut s'écrire

$$3(2a+b+c-s) = s$$

ce qui montre que le carré est magique si et seulement si le terme central $2a+b+c-s$ est le tiers de la somme magique s.

Ce résultat, propre aux carrés magiques d'ordre 3, incite à réorganiser le carré précédent en privilégiant le terme central $s/3$ que nous noterons désormais z :

a	b	$3z-a-b$
$4z-2a-b$	z	$2a+b-2z$
$a+b-z$	$2z-b$	$2z-a$

(forme 1)

On peut donner une forme plus symétrique au résultat précédent en désignant par $z+x$ le terme du haut à gauche et par $z+y$ le terme du haut à droite :

$z+x$	$z-x-y$	$z+y$
$z-x+y$	z	$z+x-y$
$z-y$	$z+x+y$	$z-x$

(forme 2)

I-4. Observons la première forme à la lumière des combinaisons utilisées en I-2 :

a	b	$3z-a-b$
$4z-2a-b$	z	$2a+b-2z$
$a+b-z$	$2z-b$	$2z-a$

somme magique : $3z$

$$= \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & 0 & -a \\ \hline -2a & 0 & 2a \\ \hline a & 0 & -a \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & b & -b \\ \hline -b & 0 & b \\ \hline b & -b & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 3z \\ \hline 4z & z & -2z \\ \hline -z & 2z & 2z \\ \hline \end{array}$$

somme magique : 0 — somme magique : 0 — somme magique : $3z$

et, par conséquent,

a	b	$3z-a-b$
$4z-2a-b$	z	$2a+b-2z$
$a+b-z$	$2z-b$	$2z-a$

somme magique : $3z$

$$= a\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} + b\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} + z\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 4 & 1 & -2 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

somme magique : 0 — somme magique : 0 — somme magique : 3

Nommons ces trois derniers carrés :

A = $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline\end{array}$, **B** = $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline\end{array}$, **C** = $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 4 & 1 & -2 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ \hline\end{array}$

On voit alors que tout carré magique d'ordre 3 est une combinaison de ces trois carrés, du type

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + z\mathbf{C}$$

Observons de même la deuxième forme obtenue en I - 3 :

$z + x$	$z - x - y$	$z + y$
$z - x + y$	z	$z + x - y$
$z - y$	$z + x + y$	$z - x$

somme magique : $3z$

$= \begin{array}{|c|c|c|}\hline z & z & z \\ \hline z & z & z \\ \hline z & z & z \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline x & -x & 0 \\ \hline -x & 0 & x \\ \hline 0 & x & -x \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -y & y \\ \hline y & 0 & -y \\ \hline -y & y & 0 \\ \hline\end{array}$

somme magique : $3z$ — somme magique : 0 — somme magique : 0

et, par conséquent,

$z + x$	$z - x - y$	$z + y$
$z - x + y$	z	$z + x - y$
$z - y$	$z + x + y$	$z - x$

somme magique : $3z$

$= z \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} + x \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline\end{array} + y \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$

somme magique : 3 — somme magique : 0 — somme magique : 0

Nommons ces trois derniers carrés :

D = $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$, **E** = $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline\end{array}$, **F** = $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$

On voit alors que tout carré magique d'ordre 3 est une combinaison de ces trois carrés, du type

$$z\mathbf{D} + x\mathbf{E} + y\mathbf{F}$$

II . SUITES ARITHMETIQUES

II - 1. L'expression "suite arithmétique" sera prise ici dans l'acception suivante : une application f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ est appelée *suite arithmétique* lorsqu'il existe un réel r tel que $f(n+1) = f(n) + r$, pour tout naturel n. Le nombre r est appelé la *raison* de la suite f.

La suite **S** déterminée par $S(n) = 2n - 3$, pour tout naturel n, est une suite arithmétique de raison 2. Il sera plus parlant ici d'évoquer **S** par le tableau :

n	0	1	2	3	4	5	...
$S(n)$	-3	-1	1	3	5	7	...

et, de façon abrégée, par la liste :

-3 , -1 , 1 , 3 , 5 , 7 , . . .

des images par **S** des premiers naturels.

Voici d'autres exemples :

∗ la suite arithmétique **T** : 7/2 , 1 , -3/2 , -4 , -13/2 , -9 , . . . a pour raison -5/2 ;

∗ la suite arithmétique **U** : 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , . . . a pour raison 1 ;

∗ les suites arithmétiques constantes : *a* , *a* , *a* , *a* , . . . (où *a* est un nombre) ont pour raison 0 ; parmi elles se trouvent en particulier

la suite **V** : 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , . . .

et la suite nulle : 0 , 0 , 0 , 0 , . . .

En revanche, aucune suite commençant par : 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 n'est arithmétique.

II - 2. On peut développer sur les suites arithmétiques des calculs analogues à ceux qu'on a présentés à propos des carrés magiques :

∗ Multiplions tous les termes de **S** par -4 ; nous obtenons la suite :

12 , 4 , -4 , -12 , -20 , -28 , . . .

qui est arithmétique et de raison -8, c'est-à-dire $(-4)\times 2$. Il est commode de désigner cette suite par -4 **S**.

∗ Additionnons terme à terme les suites **S** et **U** ; nous obtenons la suite :

$$-3 , 0 , 3 , 6 , 9 , 12 , \ldots$$

qui est arithmétique et de raison 3 c'est-à-dire 2 + 1 ; Il est commode de désigner cette suite par **S** + **U**. La suite nulle est l'élément neutre de cette "addition".

∗ La généralité de ces deux procédés ne fait pas de doute et on peut les combiner.
Une écriture telle que -4**S** + 2**T** s'interprète aisément comme désignant la suite

19 , 6 , -7 , -20 , -33 , -46 , . . . qui est arithmétique et de raison -13, c'est-à-dire $(-4)\times 2 + 2\times(-5/2)$.

II - 3. A l'instar des carrés magiques, les suites arithmétiques peuvent s'exprimer comme combinaisons de certaines d'entre elles.

En effet, toute suite arithmétique est déterminée par son premier terme a et sa raison r :

$$a , \ a + r , a + 2r , a + 3r , \ldots$$

On peut donc l'interpréter comme la somme de la suite constante $a , a , a , a , \ldots$ et de la suite arithmétique $0 , r , 2r , 3r , \ldots$
Or, la première n'est autre que a**V**, et la seconde est r **U**. La suite considérée est donc égale à a**V** + r **U** (par exemple, **T** = 7/2**V** - 5/2**U**).

II - 4. Cette forme est intéressante parce qu'elle met en évidence le premier terme et la raison. Mais, pas plus que pour les carrés magiques, ce n'est pas la seule expression possible ; par exemple, on vérifie que **T** = -7/6**S** - 1/6 **U**.

III. CALCULS EN ECONOMIE

Exprimée en million de tonnes d'équivalent-charbon, la consommation d'énergie de la France pendant l'année 1959 se répartissait comme suit :

Charbon	Pétrole	Gaz	Hydroélectricité
71,9	35,8	2,3	13,0

Tableau T_1

et en 1960 :

Charbon	Pétrole	Gaz	Hydroélectricité
70,3	39,1	4,5	16,1

Tableau T_2

La consommation moyenne d'énergie pendant les années 1959 et 1960 est donc décrite dans le tableau :

Charbon	Pétrole	Gaz	Hydroélectricité
71,1	37,45	3,4	14,55

tableau que nous pouvons désigner par $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ ou par $\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$ afin de rappeler la façon dont il a été obtenu.

Ainsi, des calculs de consommation moyenne sur une période donnée mettent en jeu des combinaisons analogues à celles que nous avons présentées en I-2 et II-2.

On pourrait d'ailleurs exprimer le tableau T_1, par exemple, comme une combinaison de 4 tableaux :

$$T_1 = 71{,}9 \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array} + 35{,}8 \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$
$$+ 2{,}3 \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} + 13{,}0 \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

IV. LES VECTEURS DE LA GEOMETRIE DU PLAN OU DE L'ESPACE

A propos des vecteurs de la géométrie, nous renvoyons le lecteur aux rubriques LANGAGE VECTORIEL et VECTEURS DE LA GEOMETRIE DU PLAN dans MOTS VIII.

Contentons-nous de rappeler que

* la somme de deux vecteurs est un vecteur ;
* le produit d'un vecteur par un réel est un vecteur ;
* en géométrie du plan, tout vecteur peut être exprimé comme une combinaison (au sens des paragraphes I, II, III) de deux vecteurs non colinéaires ;
* en géométrie de l'espace, tout vecteur peut être exprimé comme une combinaison de trois vecteurs non coplanaires (c'est-à-dire tels qu'aucun des trois n'est une combinaison des deux autres).

V . ℝ - VECTORIEL

V - 1. Les quatre situations précédentes diffèrent par la nature des objets qu'elles mettent en jeu : carrés magiques, suites arithmétiques, tableaux statistiques, vecteurs de la géométrie du plan ou de l'espace.

En revanche, les calculs présentés dans ces situations offrent des analogies de fonctionnement que nous allons maintenant préciser.

V - 2. *Définition*

On considère un ensemble $\mathscr{V}$ dont les éléments seront désignés par des lettres latines : a, b, c, . . . et l'ensemble des réels dont les éléments seront désignés par des lettres grecques : α, β, γ, . . .

On suppose que l'ensemble $\mathscr{V}$ est muni

* d'une loi de composition notée $\oplus$ qui, à tout couple (a, b) de $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$, associe un élément de $\mathscr{V}$ noté $a \oplus b$;

* d'une loi de composition externe notée $*$ qui, à tout couple (α, a) de $\mathbb{R} \times \mathscr{V}$, associe un élément de $\mathscr{V}$ noté $\alpha * a$.

> $(\mathscr{V}, \oplus, *)$ est un ℝ-*vectoriel*
>
> signifie
>
> $(\mathscr{V}, \oplus)$ est un groupe commutatif
> et, pour tout (α, β) de $\mathbb{R}^2$ et tout (a, b) de $\mathscr{V}^2$,
>
> $$\alpha * (a \oplus b) = (\alpha * a) \oplus (\alpha * b)$$
> $$(\alpha + \beta) * a = (\alpha * a) \oplus (\beta * a)$$
> $$\alpha * (\beta * a) = (\alpha\beta) * a$$
> $$1 * a = a$$

Au lieu de l'expression ℝ-*vectoriel*, on emploie aussi *espace vectoriel sur* ℝ et, par abrévation, *vectoriel sur* ℝ.

Dans les expresssions précédentes, le mot *espace* n'a pas de sens mathématique précis ; la tendance à substantiver l'adjectif *vectoriel* est donc légitime.

Lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, on abrège *vectoriel* $(\mathscr{V}, \oplus, *)$ en *vectoriel* $\mathscr{V}$.

Les éléments de $\mathscr{V}$ sont appelés *vecteurs* (voir V - 3).

V - 3. *Notations et vocabulaire*

Les notations précédentes distinguent scrupuleusement les quatre lois de composition qui interviennent dans la structure de $\mathbb{R}$-vectoriel : l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$, les lois interne et externe dont $\mathscr{V}$ est muni. A ce titre, ces notations peuvent être utiles ; d'ailleurs nous les avions utilisées dans le tout début du chapitre III de MOTS VI (GRANDEUR . MESURE) avec le dessein d'éviter toute confusion entre les calculs sur les grandeurs d'une part et les calculs sur leurs mesures d'autre part.

Mais ces notations sont lourdes. Pour les alléger, on adopte couramment les conventions suivantes :

* on remplace $\oplus$ par $+$, ce qui est justifié par l'analogie des comportements de $\oplus$ dans $\mathscr{V}$ et de $+$ dans $\mathbb{R}$;

* on omet $*$ et certaines parenthèses en suivant les mêmes règles que pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, la première égalité de V - 2 devient :

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$$

Cette démarche est celle que nous avions suivie dans MOTS VI au paragraphe III - 7 ; à partir de ce paragraphe, seules les notations simplifiées avaient été employées. Ici, nous avons introduit ces notations dès le pargraphe I - 2, en signalant qu'elles sont commodes sans être abusives.

Cependant il existe un risque, celui de confondre, dans les écritures littérales tout au moins, les réels et les éléments de $\mathscr{V}$; pour parer à ce danger, on note souvent $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, . . . ou, dans les textes imprimés, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, . . .[1] les vecteurs de la géométrie ou de la mécanique et l'on retrouve ainsi les écritures vectorielles familières comme $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

C'est dans le même dessein que nous avons désigné ici les carrés magiques ou les suites arithmétiques par des majuscules, réservant les minuscules pour les réels ; de même, dans la définition de V - 2, nous avons fait jouer des rôles différents aux lettres grecques (qui désignent des réels) et aux lettres latines (qui désignent des vecteurs).

---

[1] En particulier, le vecteur nul se note alors $\vec{0}$ ou $\mathbf{0}$.

Cependant ces artifices d'écriture, en dehors de justifications historiques ou pédagogiques, n'ont pas de nécessité mathématique[2]. Ils ne sont pas généralisables, et cela pour une raison sur laquelle il convient à présent d'insister.

La qualité de "vecteur" ne peut pas être attribuée en propre à certains objets mathématiques plutôt qu'à d'autres. Elle n'est attribuée, et n'a d'intérêt, qu'en référence à un $\mathbb{R}$***-vectoriel*** (voir V - 2) ; ***autrement dit elle suppose une situation comportant un*** $\mathbb{R}$***-vectoriel.***

Dès lors, à peu près n'importe quoi peut se trouver en situation de vecteur : des carrés magiques, des fonctions, des polynomes, des couples de réels, des triplets de réels et jusqu'aux réels eux-mêmes[3]. On verra plus loin (voir VII - 4) un exemple où la fonction *sinus* est un $\mathbb{R}$-vecteur : en tirerait-on argument pour la noter $\overrightarrow{\sin}$? (voir VIII - 8)

V - 4. Dès maintenant, il apparaît que

l'ensemble des carrés magiques d'ordre 3 muni des lois décrites en I - 2,

l'ensemble des suites arithmétiques muni des lois décrites en II - 2,

l'ensemble des vecteurs de la géométrie du plan muni des lois habituelles sont des $\mathbb{R}$-vectoriels.

Nous donnerons ci-dessous en VII d'autres exemples de $\mathbb{R}$-vectoriels ; mais auparavant nous allons présenter une importante propriété de certains $\mathbb{R}$-vectoriels.

VI . DIMENSION D'UN $\mathbb{R}$-VECTORIEL

VI - 1. Dans le paragraphe I, nous avons obtenu tous les éléments de l'ensemble $\mathscr{C}_3$ des carrés magiques d'ordre 3 au moyen de *trois* d'entre eux, par exemple **A**, **B**, **C** ou **D**, **E**, **F**. Dans le paragraphe II, pour exprimer tous les

---

2 Par contre, il existe un emploi fonctionnel de la flèche : celui qui permet d'associer à un couple (A,B) de points son vecteur $\overrightarrow{AB}$ (cf. VECTEURS DE LA GEOMETRIE DU PLAN, V-1) ou, le plan étant pointé, d'associer à un point A le vecteur $\overrightarrow{A}$ (cf. VECTEURS DE LA GEOMETRIE DU PLAN, IX-5).

3 On constate en effet que la définition de V - 2 est vérifiée lorsqu'on y remplace $(\mathcal{V}, \oplus, *)$ par $(\mathbb{R}, +, \times)$.

éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites arithmétiques, nous avons pu nous contenter de *deux* suites, par exemple **U** et **V**. Ces nombres 3 et 2 sont-ils apparus de façon fortuite, ou pour de simples raisons de commodité, ou bien ont-ils au contraire une signification foncière ? Aurait-on pu, par exemple, obtenir tous les éléments de $\mathcal{C}_3$ par combinaison de moins de 3 d'entre eux ? C'est ce que nous allons à présent examiner

VI - 2. *Parties génératrices*

En combinant de toutes les façons possibles les éléments d'une partie $\mathcal{P}$ d'un $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathcal{V}$, on construit un $\mathbb{R}$-vectoriel certainement inclus dans $\mathcal{V}$. Mais plusieurs cas se présentent.

Premier cas. On constate que, si $\mathcal{P}$ ne contient pas un nombre suffisant de vecteurs , il n'est pas possible d'engendrer $\mathcal{V}$ tout entier. Par exemple, une suite arithmétique **W** permet d'obtenir toutes les suites de la forme k**W** (k réel), mais pas l'ensemble $\mathcal{S}$ tout entier ; en effet, ou bien **W** est une suite constante, alors toutes les suites k**W** sont constantes, donc aucune n'est égale (par exemple) à **U** ; ou bien **W** n'est pas constante, alors aucune suite k**W** ne l'est, sauf la suite nulle, donc aucune n'est égale (par exemple) à **V**.

Pareillement, la partie {E,F} de $\mathcal{C}_3$ permet d'obtenir, parmi les carrés magiques, ceux dont la somme magique est nulle, mais pas $\mathcal{C}_3$ tout entier.

Deuxième cas. En revanche, il se peut que des parties de $\mathcal{V}$ un peu plus "riches" permettent d'engendrer l'ensemble $\mathcal{V}$ tout entier. Ainsi {**U**,**V**} a permis d'engendrer $\mathcal{S}$; on dit alors que {**U**,**V**} est une *partie génératrice* de $\mathcal{S}$. De même, {**A**,**B**,**C**} ou {**D**,**E**,**F**} sont des parties génératrices de $\mathcal{C}_3$. Mais, ici encore, une distinction est nécessaire.

D'après la façon même dont ces parties ont été obtenues, chaque élément de $\mathcal{S}$ s'exprime *de façon unique* au moyen de **U** et de **V** ; de même, chaque élément de $\mathcal{C}_3$ s'exprime *de façon unique* au moyen de **A**, **B**, **C** ou au moyen de **D**, **E**, **F**. Mais il n'en est pas toujours ainsi.

Troisième cas. En "enrichissant" une partie génératrice de $\mathscr{V}$, on obtient, bien sûr, encore une partie génératrice de $\mathscr{V}$, mais on ne peut éviter de sacrifier l'unicité de l'écriture des vecteurs de $\mathscr{V}$.

Par exemple, $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}\}$ est bien une partie génératrice de $\mathscr{C}_3$, et le lecteur pourra vérifier que, **G** étant le carré magique introduit en I - 1 :

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{A} + 9\mathbf{B} + 5\mathbf{C} + 0\mathbf{D}$$
$$\mathbf{G} = 3\mathbf{A} + 10\mathbf{B} + 6\mathbf{C} - \mathbf{D}$$
$$\mathbf{G} = -\mathbf{A} + 6\mathbf{B} + 2\mathbf{C} + 3\mathbf{D} \qquad \text{etc.}$$

$\{\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{S}\}$ est bien une partie génératrice de $\mathscr{S}$, mais la suite arithmétique :

4 , 3 , 2 , 1 , 0 , -1 , -2 , . . .

s'écrit indifféremment

$\mathbf{U} + \mathbf{V} - \mathbf{S}$

ou $3\mathbf{U} - 2\mathbf{V} - 2\mathbf{S}$

ou $-3\mathbf{U} + 7\mathbf{V} + \mathbf{S}$ etc.

alors qu'avec la partie génératrice $\{\mathbf{U},\mathbf{V}\}$ cette même suite ne peut s'écrire que d'une façon : $4\mathbf{V} - \mathbf{U}$.

VI - 3. *Dimension*

Ce qui précède permet d'entrevoir le résultat fondamental suivant, dont la démonstration excéderait le cadre de la présente rubrique :

S'il existe dans un $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathscr{V}$ une partie génératrice minimale[1] *ayant **n** éléments, toutes les parties génératrices minimales de $\mathscr{V}$ ont aussi **n** éléments.*

Lorsqu'un naturel ***n*** peut ainsi être attaché à un $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathscr{V}$, ce naturel est appelé la *dimension* de $\mathscr{V}$.

L'origine du mot *dimension* est géométrique : le $\mathbb{R}$-vectoriel des vecteurs de la géometrie de l'espace est de dimension 3, celui des vecteurs de la géométrie du

[1] Le mot *minimal* est à interpréter au sens de la relation d'inclusion : dire que $\mathscr{P}$ est une partie génératrice minimale de $\mathscr{V}$ signifie qu'aucune partie de $\mathscr{P}$ autre que $\mathscr{P}$ n'est génératrice de $\mathscr{V}$.

plan est de dimension 2, celui des vecteurs de la géométrie de la droite est de dimension 1.

De plus on établit la propriété suivante, également conforme à nos constatations de VI - 2.

Si $\mathscr{V}$ est de dimension n, tout vecteur de $\mathscr{V}$ s'exprime de façon unique au moyen des n vecteurs d'une partie génératrice minimale, et cela quelle que soit cette partie génératrice minimale.

On établit aussi que, *s'il existe un vecteur de $\mathscr{V}$ qui s'exprime de façon unique au moyen des n vecteurs d'une partie génératrice, celle-ci est minimale.*

On peut désormais répondre aux questions posées en VI - 1. Les naturels 3 et 2 qui ont été introduits en I et II ne l'ont pas été de façon arbitraire : ils sont respectivement les dimensions de $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{S}$; et on ne pouvait pas engendrer ces ensembles avec un plus petit nombre de vecteurs.

VII . EXEMPLES DE $\mathbb{R}$-VECTORIELS

VII - 1. L'ensemble $\mathscr{C}_3$ des carrés magiques d'ordre 3 muni des lois décrites en I - 2 est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 3.

Si l'on restreint ces lois à l'ensemble des carrés magiques d'ordre 3 de somme magique nulle, on obtient un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 2.

De même, l'ensemble des carrés magiques

de la forme $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & a & a \\ \hline a & a & a \\ \hline a & a & a \\ \hline \end{array}$, où a décrit $\mathbb{R}$,

est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 1.

* Plus généralement, l'ensemble des carrés magiques d'ordre n, au moins égal à 3, muni de lois analogues à celles qui ont été décrites en I - 2, est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension[5] $n\,(n-2)$.

* L'ensemble $\mathscr{S}$ des suites arithmétiques muni des

---

5 Voir "Base magique", par Pinaud, Domain et Monsellier dans le Bulletin A.P.M.E.P. n° 308, page 217.

lois décrites en II - 2 est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 2.

Si l'on restreint ces lois à l'ensemble des suites constantes, on obtient un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 1.

Il en va de même pour l'ensemble des suites arithmétiques colinéaires à **U**.

* L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (x,y) de réels muni des lois définies par

$$(x,y) + (x',y') = (x+x',y+y') \text{ et } k(x,y) = (kx,ky)$$

quels que soient les réels x, x', y, y', k est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 2.

* L'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets (x,y,z) de réels muni des lois définies par

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x',y+y',z+z')$$

et $k(x,y,z) = (kx,ky,kz)$

quels que soient les réels x, x', y, y', z, z', k est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 3.

* Les tableaux du paragraphe III mettent en jeu des éléments de $\mathbb{R}^4$, lequel, muni de lois analogues aux précédentes, est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 4.

* l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de l'addition et de la multiplication habituelles est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 1 (voir note 3, paragraphe V - 3).

* L'ensemble des polynomes à une variable de degré inférieur ou égal à n, muni de l'addition des polynomes et de la multiplication d'un polynome par un réel, est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension $n + 1$.

* La physique fournit de nombreux exemples de $\mathbb{R}$-vectoriels. L'ensemble des grandeurs de même nature qu'une grandeur non nulle donnée peut être organisé en $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 1 (voir MOTS VI, VIII - 1). C'est le cas, en particulier, des longueurs, des aires, des volumes, des vitesses, des intensités électriques, etc.

VII - 2. L'exemple suivant est un peu particulier.

Aucun $\mathbb{R}$-vectoriel ne peut être vide, puisqu'il contient au moins $\vec{0}$, qui est l'élément neutre du groupe additif ; mais il peut se réduire au singleton $\{\vec{0}\}$, car celui-ci satisfait à la définition de V - 2. Pour des raisons de cohérence de la théorie des vectoriels, on est amené à attribuer à ce vectoriel la dimension *zéro*[6]

VII - 3. Jusqu'ici, nous avons écarté l'éventualité où le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathscr{V}$ n'aurait aucune partie génératrice de cardinal fini n, si grand que soit n. Mais il existe de nombreux exemples d'un pareil cas, et il est alors tout à fait normal d'attribuer à $\mathscr{V}$ la *dimension infinie*. On prendra garde toutefois de ne pas étendre inconsidérément à ce cas les propriétés des vectoriels de dimension finie.

Un premier exemple nous est fourni par l'ensemble $\mathscr{E}$ des polynomes à une variable muni de l'addition des polynomes et de la multiplication d'un polynome par un réel. Considérons une partie finie et non vide $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}$. Appelons n le plus grand des degrés des polynomes éléments de $\mathscr{P}$. Tous les polynomes combinaisons des éléments de $\mathscr{P}$ sont de degré au plus égal à n. Or $\mathscr{E}$ possède des polynomes de degré plus grand que n, ne serait-ce que x^{n+1}. Ainsi aucune partie finie de $\mathscr{E}$ n'est génératrice de $\mathscr{E}$.

Voici un autre exemple :

Considérons l'ensemble $\mathscr{A}$ des applications de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$ et deux éléments f et g de $\mathscr{A}$.
Conformément à l'usage,

* notons $f+g$ l'application de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout réel x de $[0;1]$

* k étant un réel, notons kf l'application de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$(kf)(x) = k\,f(x)$ pour tout réel x de $[0;1]$.

On vérifie sans difficulté que $\mathscr{A}$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$-vectoriel. Il est plus délicat de prouver, et nous admettrons, que ce $\mathbb{R}$-vectoriel ne possède pas de partie génératrice finie.

On développe des considérations analogues à propos des applications continues de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$ ou des applications dérivables de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$.

VII - 4. Les $\mathbb{R}$-vectoriels sont implicitement présents

---
6 Ce qui revient à dire que l'unique partie génératrice de $\{\vec{0}\}$ est la partie vide !

lors de la résolution de certaines équations ou de certains systèmes d'équations à inconnue(s) réelle(s) ; dans chaque cas, l'ensemble des solutions peut être décrit comme un $\mathbb{R}$-vectoriel. Voici des exemples.

* Soit l'équation dans $\mathbb{R}^2$ d'inconnue (x,y) $3x - y = 0$. L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des couples qui peuvent se mettre sous la forme $(a;3a)$, soit encore $a(1;3)$; c'est le vectoriel de dimension 1 engendré par le vecteur $(1;3)$.

De même, considérons l'équation dans $\mathbb{R}^3$ d'inconnue (x,y,z) $\quad 3x - 5y - z = 0$.
L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des triplets qui peuvent se mettre sous la forme $(a; b; 3a - 5b)$, soit encore $a(1;0;3) + b(0;1;-5)$. C'est le vectoriel engendré par les vecteurs $(1;0;3)$ et $(0;1;-5)$.

* Soit le système dans $\mathbb{R}$ d'inconnue (x,y,z,t)

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - t = 0 \\ 2x - 3y - z + t = 0 \end{cases}$$

L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des quadruplets qui peuvent se mettre sous la forme $(a; b; 2a; 3b)$, soit encore $a(1;0;2;0) + b(0;1;0;3)$. C'est le vectoriel de dimension 2 engendré par les vecteurs $(1;0;2;0)$ et $b(0;1;0;3)$.

* Le système dans $\mathbb{R}^2$ d'inconnue (x,y) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$
n'a d'autre solution que le couple $(0;0)$. En d'autres termes, l'ensemble des solutions de ce système est $\{(0;0)\}$. Or, celui-ci constitue un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 0 d'après VII - 2.

Dans les classes terminales scientifiques des lycées, l'étude des phénomènes périodiques simples conduit à chercher les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ deux fois dérivables qui vérifient l'équation différentielle d'inconnue f : $f'' + \omega^2 f = 0$ où ω est un réel et f'' est la dérivée seconde de f. On démontre que l'ensemble des solutions de cette équation, muni des deux lois analogues à celles qui ont été présentées en VII - 3, est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 2. De plus, une partie génératrice minimale de ce $\mathbb{R}$-vectoriel a pour éléments $\quad t \mapsto \cos \omega t \quad$ et $\quad t \mapsto \sin \omega t$.

De même l'ensemble des solutions de l'équation différentielle d'inconnue f : $f' = kf$ où k est un réel et f' est la dérivée de f, est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 1, dont une partie génératrice minimale a pour seul élément $t \mapsto e^{kt}$. De telles équations différentielles interviennent, par exemple, dans l'étude de la décharge d'un condensateur ($k < 0$), ou dans celle de la radioactivité d'un échantillon ($k < 0$), ou encore dans celle de l'évolution démographique d'une population (en expansion si $k > 0$, en voie d'extinction si $k < 0$).

VIII . BASES . COORDONNEES .

Ce paragraphe ne concerne que les $\mathbb{R}$-vectoriels de dimension finie.

VIII - 1. Nous avons signalé à la fin de VI - 3 que, si $\mathscr{V}$ est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension n, tout vecteur de $\mathscr{V}$ s'exprime de façon unique au moyen des n vecteurs d'une partie génératrice minimale de $\mathscr{V}$.

Par exemple $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ est une partie génératrice minimale de l'ensemble $\mathscr{C}_3$ des carrés magiques d'ordre 3 (voir I - 4). Par conséquent, il existe des réels x, y, z tels que le premier carré magique, $\mathbf{G}$, du paragraphe I soit égal à $x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C}$. Le calcul montre que, nécessairement, $x = 2$, $y = 9$ et $z = 5$. Ainsi, $\mathbf{G} = 2\mathbf{A} + 9\mathbf{B} + 5\mathbf{C}$.

La partie génératrice minimale $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$ ayant été choisie, les nombres 2, 9, 5 fournissent une information suffisante pour reconstituer le carré magique $\mathbf{G}$ pourvu toutefois qu'il n'y ait pas de doute quant à l'appariement des nombres 2, 9, 5 d'une part, et des carrés magiques $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ d'autre part.

Pour écarter ce doute, on convient généralement de se référer non plus à l'ensemble $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$ mais, par exemple, au triplet $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$. De façon précise, on procède comme suit :

* à tout carré magique, préalablement écrit sous la forme $x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C}$, on associe le triplet de réels (x, y, z) ;

* inversement, à tout triplet de réels (u, v, w) on associe le carré magique $u\mathbf{A} + v\mathbf{B} + w\mathbf{C}$.

Il en résulte que le choix du triplet (**A**,**B**, **C**) permet de mettre en évidence une bijection de $\mathscr{C}_3$ vers $\mathbb{R}^3$.

On dit que (**A**,**B**, **C**) est une *base* de $\mathscr{C}_3$.

Il va de soi que le choix de la base (**B**,**A**, **C**), par exemple, permet aussi d'ehiber une bijection de $\mathscr{C}_3$ vers $\mathbb{R}^3$, mais ce n'est pas la même que la précédente. Par exemple, on associe cette fois le triplet (9;2;5) au carré magique **G**. Quant au triplet (2;9;5), on lui associe le carré magique 2**B** + 9**A** + 5**C**,

c'est-à-dire

9	2	4
0	5	10
6	8	1

qui n'est pas **G**.

VIII - 2. Plus généralement, considérons une partie génératrice minimale $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ d'un $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathscr{V}$ de dimension n.

Le n-uplet $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathscr{V}$.

Le n-uplet $(e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n)$ en est une autre.

Ainsi, la partie génératrice minimale précédente engendre n ! bases[7] de $\mathscr{V}$.

Exemples :

* {**A**,**B**, **C**} engendre 6 bases de $\mathscr{C}_3$, à savoir : (**A**,**B**, **C**), (**A**,**C**, **B**), (**B**,**C**, **A**), (**B**,**A**, **C**), (**C**,**A**, **B**), (**C**,**B**, **A**)

* De même, (**D**,**E**, **F**), (**D**,**F**, **E**), (**F**,**D**, **E**), (**F**,**E**, **D**), (**E**,**D**, **F**), (**E**,**F**, **D**) sont des bases de $\mathscr{C}_3$.

* (**A**,**B**), (**B**,**A**), (**E**,**F**), (**F**,**E**) sont des bases du $\mathbb{R}$-vectoriel des carrés magiques d'ordre 3 et de somme magique nulle.

* (**D**) est une base du $\mathbb{R}$-vectoriel des carrés magiques

de la forme

a	*a*	*a*
a	*a*	*a*
a	*a*	*a*

, où a décrit $\mathbb{R}$

* (**U**,**V**) est une base du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathscr{S}$ des suites arithmétiques (voir II - 2).

* ((1;0;0;0),(0;1;0;0),(0;0;1;0),(0;0;0;1)) est une base du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$ (voir III).

---

[7] Si n est un naturel non nul, $n! = 1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-1)\times n$.

* Une base du $\mathbb{R}$-vectoriel des applications-polynomes de degré inférieur ou égal à n est $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n)$, où $f_0 : x \mapsto 1$; $f_1 : x \mapsto x$; $f_2 : x \mapsto x^2$; . . . ; $f_n : x \mapsto x^n$.

VIII - 3. La convention exposée à la fin de VIII - 1 à propos de $\mathscr{E}_3$ peut être étendue à tout $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension n.

Choisissons une base $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{V}$.

Tout vecteur $\mathbf{X}$ de $\mathscr{V}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + \ldots + x_ne_n$; on associe alors au vecteur $\mathbf{X}$ le n-uplet $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Inversement, à tout élément $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on décide d'associer $y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + \ldots + y_ne_n$, qui est élément de $\mathscr{V}$.

On a ainsi mis en évidence une bijection de $\mathscr{V}$ vers $\mathbb{R}^n$.

Le n-uplet $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ est appelé le *n-uplet des coordonnées* de $\mathbf{X}$ pour la base $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$.

Par exemple, on a vu en VIII - 1 que $\mathbf{G} = 2\mathbf{A} + 9\mathbf{B} + 5\mathbf{C}$, donc $(2;9;5)$ est le triplet des coordonnées de $\mathbf{G}$ pour la base $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$.

De même, le lecteur vérifiera que $\mathbf{G} = 5\mathbf{D} - 3\mathbf{E} - \mathbf{F}$; par conséquent, $(5;-3;-1)$ est le triplet des coordonnées de $\mathbf{G}$ pour la base $(\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F})$.

Pour la base $(\mathbf{V}, \mathbf{U})$ du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathscr{S}$ des suites arithmétiques (voir II - 2 et VI - 2), (a, r) est le couple des coordonnées de $\mathbf{S}$.

VIII - 4. Considérons un réel k. Il résulte de la définition de V - 2 que

$k\mathbf{X} = (kx_1)e_1 + (kx_2)e_2 + (kx_3)e_3 + \ldots + (kx_n)e_n$

c'est-à-dire que $(kx_1, kx_2, kx_3, \ldots, kx_n)$ est le n-uplet des coordonnées de $k\mathbf{X}$ pour la base $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$.

De même, soit $\mathbf{Y}$ un élément de $\mathscr{V}$; posons $\mathbf{Y} = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + \ldots + y_ne_n$, alors

$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + (x_3 + y_3)e_3 + \ldots + (x_n + y_n)e_n$

donc $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n)$ est le n-uplet des coordonnées de $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ pour la base $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$.

Dès lors, tout calcul dans $\mathscr{V}$ peut se décalquer dans $\mathbb{R}^n$ et réciproquement. De façon plus précise, on exprime ce fait en disant que tout vectoriel de dimension n est isomorphe au $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^n$.

VIII - 5. soit $\mathscr{V}$ un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 2 et (e, f) une de ses bases.

Au vecteur de $\mathscr{V}$ qui s'écrit $xe + yf$, associons le couple de réels (x, y) : on met ainsi en évidence une bijection de $\mathscr{V}$ vers $\mathbb{R}^2$ (c'est le résultat de VIII - 4 appliqué au cas où $n = 2$).

Par ailleurs (voir REPERAGE, XI), le repérage cartésien d'un plan Π muni d'un repère (Ω, I, J) repose sur une bijection de $\mathbb{R}^2$ vers Π : le couple de réels (x, y) a pour image le point de Π dont le couple des coordonnées est (x, y).

On voit par là la possibilité d'établir une bijection de $\mathscr{V}$ vers Π : le vecteur $xe + yf$ a pour image le point de coordonnées (x, y). En particulier

le vecteur nul a pour image le point Ω
le vecteur e a pour image le point I
le vecteur f a pour image le point J.

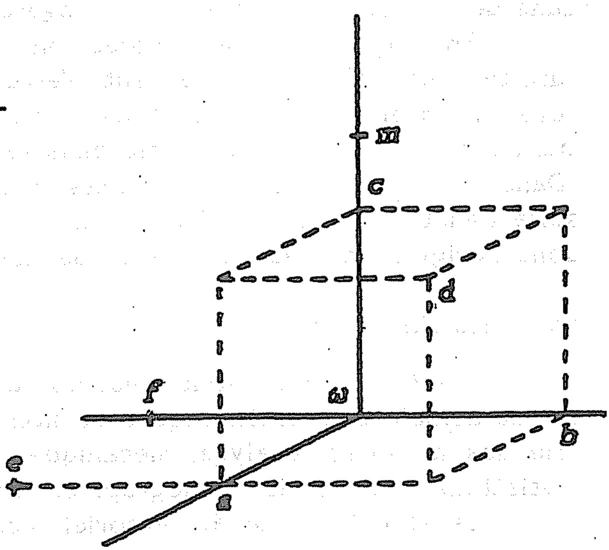
On comprend ainsi qu'on appelle parfois *plan vectoriel* tout $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 2. En outre, on parle parfois de *plan ponctuel* au lieu de *plan* pour mieux distinguer les deux notions : $\mathscr{V}$ est un plan vectoriel, Π est un plan ponctuel.

Exemple : le paragraphe IX - 5 de la rubrique VECTEURS DE LA GEOMETRIE DU PLAN illustre ce qui précède, dans le cas où $\mathscr{V}$ est le $\mathbb{R}$-vectoriel des vecteurs de la géométrie du plan.

VIII - 6. De la même façon, tout $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 1 peut être représenté par une droite munie d'un repère. Pour cette raison, on appelle parfois *droite vectorielle* tout $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 1.
Une règle graduée peut être considérée comme un fragment de cette représentation du $\mathbb{R}$-vectoriel des longueurs. Sa matérialisation par le double décimètre aussi, mais cette

fois la situation est plus délicate à manier puisqu'elle met simultanément en évidence au moins trois bases du $\mathbb{R}$-vectoriel en question : 1cm ; 0,5cm ; 0,1cm. Faut-il s'étonner que de jeunes enfants éprouvent des difficultés à manier cet instrument ?

VIII-7. Quant aux éléments d'un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 3, on peut les représenter par les points de l'espace usuel. Par exemple, choisissons (A, B, C) comme base de $\mathscr{C}_3$; sur le dessin ci-contre, les carrés magiques A, B, C, D, E, F



sont représentés respectivement par les points a, b, c, d, e, f, et le carré magique

0	0	0
0	0	0
0	0	0

est représenté par le point ω.

Dans cette représentation, le plan H déterminé par les points ω, a et b représente l'ensemble des carrés magiques de somme magique nulle. Le point m de la droite (ωc) étant tel que $\overrightarrow{\omega m} = k\overrightarrow{\omega c}$, le plan parallèle à H et passant par m représente l'ensemble des carrés magiques de somme magique $3k$. Par conséquent, si l'on classe les carrés magiques en fonction de leurs sommes magiques, les classes sont représentées par les plans parallèles au plan H.

VIII - 8. On voit que l'ensemble des vecteurs de la droite, ou du plan, ou de l'espace, muni des opérations habituelles, a été et demeure le parangon des $\mathbb{R}$-vectoriels, et qu'il fournit souvent un modèle mental, voire graphique, et aussi un adjuvant mnémotechnique, dans des questions tout à fait étrangères à la géométrie.

En témoignent les expression "plan vectoriel ", "droite vectorielle", qui viennent d'être définies, ou encore "colinéaire" (voir VECTEURS DE LA GEOMETRIE DU PLAN, VII - 5), par exemple dans le phrase suivante : "Dans le plan vectoriel des suites arithmétiques, toute suite constante est colinéaire à la suite **V**" (voir II - 1), dont l'origine géométrique n'est pas douteuse.

IX. UTILISATIONS

Les $\mathbb{R}$-vectoriels sont présents dans un grand nombre de domaines, mathématiques ou non : géométrie, théorie des nombres, analyse, mécanique, physique, chimie, statistiques, économie, démographie, etc.

La structure de $\mathbb{R}$-vectoriel peut être enrichie. Un exemple élémentaire et classique est fourni par l'ensemble des vecteurs de la géométrie du plan muni du produit scalaire habituel.

X. GENERALISATION

On généralise la structure de $\mathbb{R}$-vectoriel en remplaçant, dans la définition de V - 2, le corps des réels par tout autre corps $\mathbb{K}$; on définit ainsi un $\mathbb{K}$-*vectoriel*.

Pour les distinguer des éléments de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire des *vecteurs*, les éléments de $\mathbb{K}$ sont généralement appelés les *scalaires*.

Dans le cas où $\mathbb{R}$ est considéré comme vectoriel sur lui-même (voir VII - 1), ces deux vocables permettent de distinguer les réels considérés comme vecteurs des réels considérés comme scalaires.

Une combinaison désigne un vecteur ; dans l'écriture d'une combinaison, apparaissent à la fois des scalaires et des vecteurs ; le rôle joué alors par les scalaires fait qu'on les appelle *coefficients*.

$\mathbb{Q}$ étant l'ensemble des nombres rationnels, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps ; il existe donc des $\mathbb{Q}$-vectoriels. $\mathbb{R}$ en est un (voir définition de V-2 pour s'en assurer) ; ici, les réels jouent le rôle des vecteurs et les rationnels celui des scalaires.

On peut démontrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-vectoriel de dimension infinie (autrement dit, chaque fois qu'on considère un ensemble fini de réels, l'ensemble de leurs combinaisons à coefficients rationnels est une partie de $\mathbb{R}$ autre que $\mathbb{R}$). Alors que (voir VII-1) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 1.

En dehors de tout contexte, dire que $\mathbb{R}$ est un vectoriel est insuffisant ; encore faut-il préciser le corps des scalaires.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Commun aux brochures I (1974), II (1975), III (1976), IV (1978),
V (1980), VII (1984), VIII (1987) et IX (1990). De plus, "GM" renvoie
à Mots VI (Grandeur-Mesure) dont l'index spécifique indique la page.

Abréviations des rubriques :

A : ANGLE
AC : ANGLE-DE-COUPLES
AF : APPLICATION, FONCTION, BIJECTION
AL : APPLICATIONS LINÉAIRES
AP : APPROXIMATION
AS : ASSOCIATIVITÉ
CA : CARDINAL
CG : CONGRUENCES
CM : COMMUTATIVITÉ
CO : COUPLE
DE : DIVISION EUCLIDIENNE
DI : DIVISION
DS : DISTRIBUTIVITÉ
DT : DIVISIBILITÉ
E : ENSEMBLE
EG : ÉGALITÉ
EI : ÉQUATION, INÉQUATION
EL : ÉLÉMENTS REMARQUABLES POUR UNE LOI DE COMPOSITION
EN : ENSEMBLES DE NOMBRES
EP : EXPOSANT, PUISSANCE
ER : ENTIERS ET RATIONNELS
EX : EXEMPLE, CONTRE-EXEMPLE
F8 : MOTS FLOUS contenus dans MOTS VIII
FR : FRACTION
H : HOMOTHÉTIE
I : INVERSE
IA : IMAGE, ANTÉCÉDENT
IN : INVARIANT
IS : ISOMÉTRIE
LV : LANGAGE VECTORIEL
ND : NOMBRE DÉCIMAL, NOMBRE A VIRGULE
NN : NOMBRE NATUREL
NU : NUMÉRATION
OM : OPÉRATEURS MULTIPLICATIFS
OP : OPÉRATION, LOI DE COMPOSITION
OR : ORDRE
OT : ORIENTATION

OU : COMPARAISON DES ORDRES USUELS DANS LE DICTIONNAIRE, DANS N, DANS D^2.
PA : PARTAGES
PE : PARTITION, ÉQUIVALENCE
PEC : POURCENTAGES, ÉCHELLES...
PH : PHASE
PL : PARALLÈLE
PO : PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS
PR : PRÉORDRE
PT : PROPORTIONNALITÉ
RB : RELATION BINAIRE
RC : RÉCIPROQUE
RE : PROPRIÉTÉS DES RÉLATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE
RF : RÉFLEXION
RFG : RÉFLEXION-GLISSEMENT
RG : REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES
RO : ROTATION
RP : REPÉRAGE
S : SOLIDES
SA : SECTEUR, ANGLE
SI : SIMILITUDE
SL : SEGMENT, LONGUEUR
SY : SYMÉTRIE
T : TRANSLATION
V : VECTEURS DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN
VG : VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE
VH : VERTICAL, HORIZONTAL
VL : VECTORIEL

Le signe * placé à côté d'une abréviation de rubrique indique qu'on trouvera dans cette rubrique des indications plus ou moins complètes sur le sens du mot considéré.

Certains mots se retrouvent dans presque toutes les rubriques : **contre-exemple, couple, définition, écriture, égalité, élément, énoncé, ensemble, exemple, naturel, nombre, notation, nul, partie, représentation, représenter, situation, sous-ensemble, zéro, ...** Nous n' avons laissé dans l'index que l'indication des rubriques "à astérisque" éventuelles les concernant.

Nous avons supprimé des mots comme : **collection, construction, démontrer, dessin, figure, formule, généralisation, hypothèse, notion, objet, propriété, tableau, théorème.**

soustraction ER - OP - AS - EL - PO - OM - EI
sphère EI - VG* - VH - PL - SY - OT - GM - F8 - RO - IS
sphérique (repèrage—) RP*
spirale logarithmique SY*
spire SY
statistique PA*
strict (ordre—) OR*
strictement (positif...) EN* - ER* - VG - EP - F8
structure EN - ER - OM - V
substituable IS*
successeur NN*
suite NN - AF - DI - OU - I - VL
suite vide OU
suite proportionnelles PT* - OM
suivant NN*
sup OP* - DS - EL
superficie DI
supérieur NN* - AP
supérieur (cardinal—) EN
superposable SL - SA - VG - SY - GM - LV - IS*
support E - SL - SA - VG - V
surface PL - VG - S - OT - H - T - V - F8 - RO - SI
symbole EG - FR - PA
symétrie EI - SL - SA - VH - VG - SY* - OT - H - T - IN - IA - F8 - RO - SI - IS - VL
symétrie positive, négative SY*
symétrie (relation symétrique) RB - PE - RE* - PR - EG* - VG - SY - V - F8 - RC
symétriques (éléments—) EL* - SY - H - I* - RO - IS
symétriques (points, figures—) RG - CM - SY*- H - V - LV
symétrisable EL*
symétrisé FR*
synonyme, synonymie EG - FR - ER - OU
système : voir "numération"
système SY - VL

table AF* - RG - DT - OP* - CM - CG - AP
table de logarithmes EP*
table (d'une application) PT - OM
table traçante EI
tangent (plan) PL
tangent, tangente E - PL - VH - VG - F8
tangente (trigonométrique) SY - PH - GM
taux PEC - EP - GM
taux d'incertitude AP* - GM
technique (d'une opération) DI - NU - OP* - F8
température I

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Secrétariat : 26, rue Duméril 75013 Paris
Tél. (1) 43. 31. 34. 05

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'A.P.M.E.P. est une association, fondée en 1909, qui regroupe tous les enseignants concernés par l'enseignement des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université". L'A.P.M.E.P. est un lieu d'échanges, pédagogiques et scientifiques, pour tous les enseignants de mathématiques.

Les Régionales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. avec, très souvent des sections départementales, voire locales. En effet, à la dispersion géographique de ses adhérents, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres, qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par dessus les barrières officielles des divers dégrés d'enseignement.

Les Journées Nationales

L'A.P.M.E.P. organise chaque année des Journées Nationales qui sont, pour les membres de l'Association, l'occasion de se retrouver. Elles ont, ces dernières années, regroupé de 500 à 800 participants autour de thèmes divers.

Les Publications

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique, et qui rapporte la vie de l'association, tant régionale que nationale. On y trouve notamment les rubriques suivantes : études, études didactiques, dans nos classes, mathématiques et société, examens et concours, manuels scolaires, évaluation, interdisciplinalité, formation des maîtres, informatique, audio-visuel, problèmes, jeux et maths, matériaux pour une documentation, un coin de ciel...

Elle édite aussi un Supplément au Bulletin appelé B.G.V

IGR imprimerie -lyon