Georges GLAESER

Formation des enseignants en heuristique

ANALYSE ET SYNTHÈSE

A la mémoire de
Georges POLYA
(1887 - 1985)

QU'EST-CE QUE L'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe des enseignants concernés par les mathématiques de la Maternelle à l'Université.

Ces maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux (de la Maternelle à l'Université), mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique et conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec les Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

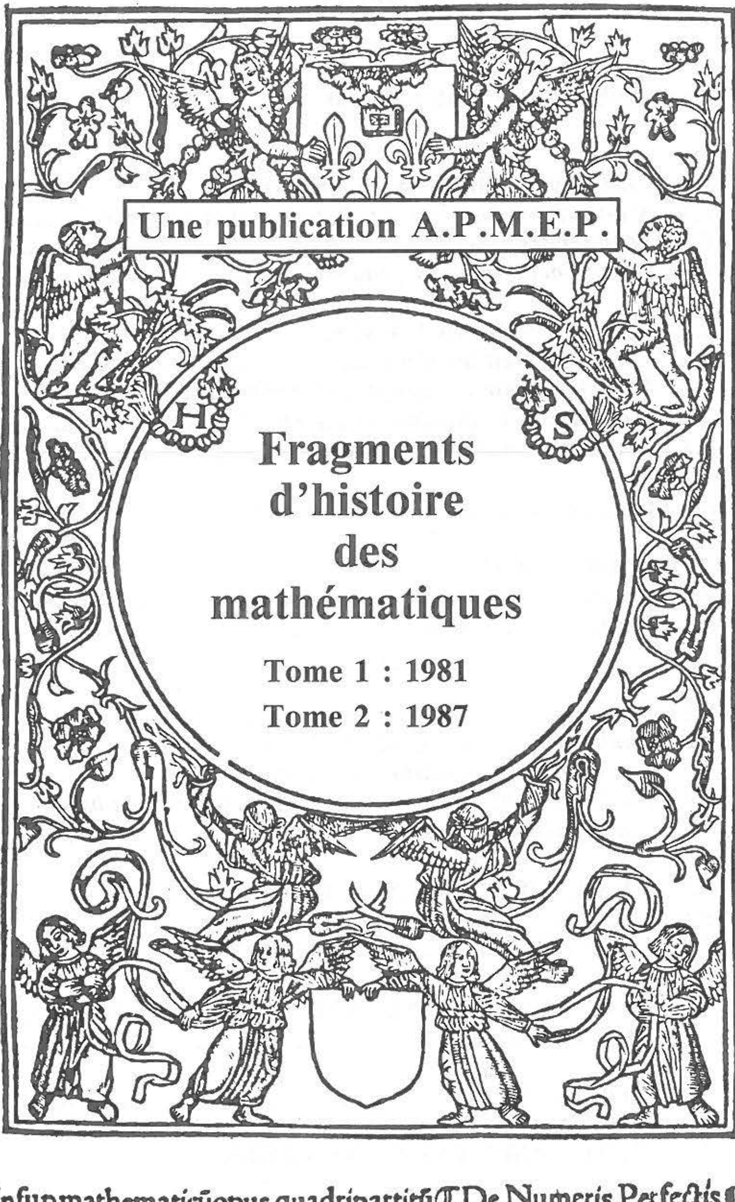
L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association, ainsi qu'un Bulletin Grande Vitesse (BGV) (6 numéros par an) qui est un supplément au bulletin vert, contenant des informations... qui ne peuvent attendre. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3^{e}, Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

A.P.M.E.P.
26 rue Duméril, 75013 PARIS
(1) 43.31.34.05

Sommaire



¶ Insupmathematicũopus quadripartitũ ¶ De Numeris Perfectis ¶ De Mathematicis Rosis ¶ De Geometricis Corporibus ¶ De Geometricis Supplementis

1re PARTIE : AMBIGUÏTÉS ET CONTRADICTIONS

1. DEUX VOCABLES A CLARIFIER

1.1 *N'a-t-on pas tout écrit sur l'analyse et la synthèse ?*

Ne suffirait-il pas, pour en parler, d'illustrer par des exemples les citations classiques des bons auteurs ?

Une triple surprise attend celui qui plonge dans les textes !

• Rien qu'en se limitant au domaine mathématique, on relève dans la littérature **une vingtaine de sens** différents attribués à ces mots ; nous en distinguons, pour notre part, plus d'une cinquantaine !

• Ces acceptions sont souvent **contradictoires**, dans un même texte... parfois dans une même phrase !

• Tous les auteurs opposent radicalement l'analyse et la synthèse. On devrait donc au moins se mettre d'accord sur ce **contraste**. Or, nos auteurs s'embrouillent là-dessus.

En voici d'abord deux témoignages :
L'épistémologue Pierre BOUTROUX (1920), citant LAPLACE, dont il approuve un passage de "L'exposition du système du monde", termine par cette réflexion cocasse : "... A cela près que Laplace appelle "analyse" ce que nous avons appelé "synthèse"...".

Descartes, répondant aux objections faites contre les "Méditations métaphysiques", déclare que "l'analyse fait voir comment les effets dépendent des causes", tandis que "la synthèse examine les causes par les effets". Voilà une distinction bien tranchée ! Mais il se reprend aussitôt pour ajouter : "bien que la preuve qu'elle (la synthèse) contient soit souvent aussi des effets par les causes". Bref, c'est le contraire, sauf lorsque c'est la même chose !

Il est apparu qu'il serait commode de donner des noms aux divers thèmes heuristiques étudiés dans ce texte, mais qu'il serait sage de renoncer à employer les mots "analyse" et "synthèse", générateurs de confusion. C'est ce que nous ferons, sauf lorsqu'il s'agira d'évoquer l'emploi usuel de ces mots.

Etait-il vraiment nécessaire d'entreprendre cet effort de clarification ? Du point de vue de la didactique, c'est indispensable : la description des processus de recherche, de compréhension ou d'apprentissage nécessite un vocabulaire approprié ; celui-ci se dégage à partir d'une étude minutieuse des thèmes heuristiques.

1.2 *Taxonomies*

Le décorticage soigneux des diverses démarches intellectuelles est particulièrement important pour établir des **taxonomies**, qui sont les instruments fondamentaux de la didactique.

Un enseignant ne peut se contenter d'affirmer qu'un élève a compris (ou n'a pas compris) une explication : il doit distinguer plusieurs niveaux de compréhension. La découverte de ces niveaux est une des tâches primordiales de la recherche en didactique.

La première tentative (partiellement couronnée de succès) d'élaborer une échelle des niveaux de compréhension est due à B.S. BLOOM et son école (BLOOM 1969). On a cependant vite reconnu que la taxonomie de BLOOM n'était pas adaptée aux mathématiques. Et depuis, on a fait des progrès, notamment en mettant au point le modèle NLSMA (PLUVINAGE 1977) (TOURNEUR 1972). Celui-ci fonctionne assez bien, à condition d'être manié par quelqu'un qui a pris la peine d'apprendre à s'en servir.

Rappelons que la taxonomie de BLOOM distingue d'abord six niveaux principaux de compréhension (subdivisés en sous-niveaux). Parmi les critiques justifiées adressées à ce système, citons celles qui tiennent à l'imprécision du quatrième niveau ("Aptitude à analyser") et du cinquième ("Aptitude à la synthèse"). Nous proposons dans la suite beaucoup d'exemples d'énoncés d'exercices qui requièrent ce que l'on appelle communément de l'aptitude à analyser ou à faire des synthèses. Or on constate que ces aptitudes sont très diverses, depuis l'automatisme le plus routinier jusqu'à la créativité imaginative. Pour qu'une taxonomie fonctionne, il est indispensable que tous les techniciens qui ont appris à s'en servir aboutissent à peu près au même diagnostic. Ce n'est donc pas un hasard si le système NLSMA évite l'emploi des mots "analyse" et "synthèse".

Les distinctions qui seront mises à jour dans l'étude qui suit devraient se révéler efficaces dans l'**examen du contenu** d'un énoncé d'exercice, d'un manuel, d'une production d'élèves, d'un comportement de chercheur...

1.3 *Des sciences appelées "analyse".*

1.3.1 Exemples

• "L'arithmétique" de DIOPHANTE, né vers 325 après J.-C., précurseur de notre algèbre, n'est qu'un immense recueil d'exercices ! L'auteur met l'accent sur les méthodes qui lui ont permis de les résoudre.

Lorsque VIETE (1540-1603) expose les méthodes de l'algèbre littérale, il intitule son ouvrage "Introduction en l'art analytique". Il insiste sur des préoccupations heuristiques. Plus tard, l'algèbre engrangera une masse de connaissances. On les présentera d'une manière structurée ; ce ne sera plus un art, mais une science.

• Les fondateurs du calcul différentiel et intégral insistent beaucoup sur la fécondité du nouvel outil. L'invention s'est élaborée à propos de quelques exemples dont l'intérêt, en tant que résultat scientifique, est limité (quadrature de la parabole, par Archimède ; étude de la cycloïde par les mathématiciens du 17e siècle; etc.). Mais il apparait que l'essentiel n'est pas dans les exemples de plus en plus spectaculaires que la nouvelle science permet de traiter. Les premiers traités s'intitulent "**Analyse des infiniment petits...**" et bientôt on se contentera de les nommer "Analyse".

• Le chef-d'œuvre de LAGRANGE, "Mécanique **analytique**" (1788), est la présentation d'une méthode pour résoudre les problèmes de dynamique par le calcul.

• L'espoir de résoudre **tous** les problèmes de géométrie par l'algèbre n'est encore qu'un vœu pieux pour DESCARTES, en 1637.

Ce n'est qu'en 1748 qu'EULER institutionnalise l'usage des coordonnées dites cartésiennes !! (GLAESER 1968).

En 1798, à la suite de MONGE, LACROIX est en mesure d'exposer une méthode opérationnelle, dans "Application de l'algèbre à la géométrie". Il prétend avoir réalisé ce que LAGRANGE a fait pour la mécanique, et propose le dénomination "Géométrie **analytique**".

1.3.2 Ainsi, on a attribué le nom d'**analyse** à beaucoup de sciences au premier stade de leur développement. Elles n'avaient pas obtenu, à l'époque, beaucoup de résultats. Mais elles disposaient déjà d'une méthode prometteuse dont il restait à prouver la fécondité.

Mais peu à peu, chacune des sciences accumule des résultats présentant un intérêt propre. Les auteurs s'ingénient alors à les exposer. Ils insistent sur l'architecture du monument qu'ils ont édifié. Les soucis heuristiques s'estompent. L'heure des exposés synthétiques a sonné.

1.3.3 Cependant, par une inertie très naturelle, les sciences continuent à s'intituler "analytiques" alors que les justifications de ce mot ont disparu.

Bourbaki parle des "structures fondamentales de l'analyse" alors que son souci majeur est la synthèse de la mathématique.

Et peu à peu, on en vient à appliquer le mot "analyse" à n'importe quoi : les auteurs ne savent plus pourquoi l'étude des fonctions s'appelait "analyse", et en vertu de quelle étymologie elle s'opposait à l'**analyse fonctionnelle**. Que sont donc l'analyse combinatoire, indéterminée, diophantienne, etc. ?

2. ACCEPTIONS DIVERSES

2.1 *L'analyse, c'est le calcul !*

Les progrès de l'heuristique se traduisent souvent par la mise au point d'une "procédologie". On rêve d'un système de notations ayant des vertus algorithmiques fécondes, qu'il suffirait d'utiliser conformément à des règles strictes pour résoudre **tous** les problèmes. Cette conception est présente chez Leibnitz, chez Descartes et bien d'autres. Et peu à peu, l'adjectif "analytique" qualifie une méthode basée sur un calcul. Ce point de vue apparaît notamment dans la "géométrie analytique" et dans la "mécanique analytique".

Cependant Lagrange et Lacroix déclarent dans un rapport à l'Institut : "Les mots analyse, analytique présentent souvent un contre-sens lorsqu'on les emploie à désigner d'une façon générale tous les procédés de calcul ou de démonstration obtenus à l'aide de signes algébriques, au lieu de l'être par la considération immédiate des lignes et figures".

L'emploi des méthodes de calcul a parfois lassé les mathématiciens qui n'appréciaient guère l'obtention automatique d'une réponse dont ils ne comprenaient pas toujours les raisons profondes. En réaction à l'abus des coordonnées, en géométrie, s'élabora une "géométrie synthétique" qui raisonne directement sur les figures. A l'origine les intentions heuristiques étaient prédominantes, mais c'est l'opposition au calcul qui a motivé le choix de l'appellation.

L'assimilation de l'analyse au calcul a donné naissance à d'autres avatars : on a appelé "**fonctions analytiques**" celles qui se prêtaient le plus aisément au calcul ! (Ce sont les fonctions développables en séries entières).

2.2 *L'analyse comme synonyme d'heuristique*

On oppose fréquemment l'analyse, **méthode de découverte**, à la synthèse, **méthode d'exposition**. On lit, dans "La logique de Port-Royal" (ARNAULD et NICOLE, 1662) : "Ainsi, il y a deux sortes de méthodes : l'une pour découvrir la vérité, qu'on appelle **analyse** ou **méthode de résolution** et que l'on peut aussi appeler **méthode d'invention** ; et l'autre pour la faire entendre aux autres quand on l'a trouvée, qu'on appelle **synthèse** ou **méthode de composition** et qu'on peut aussi appeler **méthode de doctrine.**".

On remarque déjà ici un léger glissement de sens. Le mot "résolution" évoque un enchaînement **logique** d'arguments, élaboré lors de la rédaction.

Descartes défend le même point de vue dans ses ⟪Réponses aux objections faites aux "Méditations métaphysiques"⟫ :
"Les anciens géomètres avaient coutume de se servir seulement de la synthèse dans leurs écrits, non qu'ils ignorassent entièrement l'analyse, mais parce qu'ils en faisaient tant d'état qu'ils la réservaient pour eux seuls comme un secret d'importance".

Pour Gabriel LAMÉ (1818), analyser un problème, c'est en deviner méthodiquement la solution, sans souci de rigueur. La synthèse serait alors l'exposé rigoureux. Ici l'analyse s'oppose à la déduction logique.

On notera que l'Analyse est apparue jusqu'ici dans des acceptions franchement **contradictoires** !

Elle est souvent liée à **l'heuristique**, à l'invention imaginative, qui exige intuition, fantaisie, talent...

Mais elle évoque aussi le **calcul**, qui devrait mener sûrement à la solution, si l'on fait preuve de soin et de persévérance.

En utilisant le même mot pour désigner des démarches aussi opposées, on masque le contraste entre **l'heuristique** et **l'algorithme.**

2.3 *L'analyse de la situation ; examen et traduction*

L'analyse de la situation consiste à localiser les notions essentielles ; à distinguer ce que l'on sait déjà, de ce qu'on aimerait savoir ; à collecter les informations dont on pourrait avoir besoin.

Pour celui qui cherche à résoudre un problème, cette première phase s'appelle : **"Comprendre l'énoncé".** On cherchera à formuler le problème en termes clairs : pour Hippolyte TAINE, **"Analyser, c'est traduire".**

On ne confondra pas cette étape avec celle où finalement **on comprend le problème.** Il est fréquent que l'on connaisse la signification de tous les mots de l'énoncé sans que l'on comprenne "où gîte le lièvre". Et brusquement on prend conscience qu'il y a un problème. Ce micro-eurêka peut survenir bien après la compréhension de l'énoncé.

Cette traduction s'opérera dans un langage approprié et, selon le célèbre précepte de Pascal, "on subtituera mentalement les définitions à la place des définis". On aboutira fréquement à une **mise en équation** du problème.

> EXEMPLE 1 : "Les nombres $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ peuvent-ils appartenir à une même progression arithmétique ?"
>
> Le mot-clé est ici "progression arithmétique". Pour le traduire, il est commode d'introduire la raison r. On aboutira alors au nouvel énoncé :
>
> "Existe-t-il des entiers m et n tels que $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{mr}{nr}$?
>
> On a ainsi "compris le problème" : "Le nombre $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ est il rationnel ?".

2.3.1 *Choix de la traduction.*

L'activité de traduction n'est pas toujours aussi simple. La correspondance signifié-signifiant est rarement bijective.

Par exemple, lorsque l'un des mots-clés est "parallélogramme", on peut hésiter entre une dizaine de traductions possibles (parmi lesquelles on n'oubliera pas : "quadrilatère admettant un centre de symétrie").

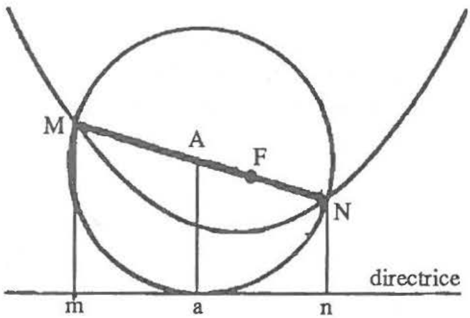
Mais même avant de faire cette traduction, on devrait déjà choisir le langage : adoptera-t-on la formulation usuelle en géométrie élémentaire ? Ou bien, utilisera-t-on des coordonnées cartésiennes ? Ou encore le langage vectoriel ou barycentrique ? On pourrait aussi raisonner dans le plan complexe ?

2.3.2 *Mise en équation*

"Mettre en équation, écrit POLYA (1957), c'est exprimer à l'aide de symboles mathématiques une condition exprimée en mots ; c'est traduire le langage ordinaire en formules mathématiques... Dans les cas simples, l'énoncé verbal se divise presqu'automatiquement en diverses parties, dont chacune peut être immédiatement transcrite en symbole mathématique."

La virtuosité heuristique s'acquiert en s'entraînant à bien choisir les inconnues, les axes de coordonnées et plus généralement un système de notations adapté. On remarquera que la méthode d'algébrisation connue sous le nom de "géométrie analytique" se laisse parfois transposer en un "calcul géométrique" qui n'utilise pas d'axes.

EXEMPLE 2 : "Soit [MN] une corde d'une parabole passant par son foyer F. Démontrer que le cercle de diamètre [MN] est tangent à la directrice."



Démonstration : Appelons m, n, a les projetés orthogonaux respectifs de M, N, A (centre du cercle) sur la directrice. D'après une définition de la parabole, FM = Mm et FN = Nn.

$$\text{Donc} \quad Aa = \frac{Mm + Nn}{2} = \frac{MF + NF}{2} = \frac{MN}{2}$$

La distance Aa de A à la directrice est donc égale au rayon du cercle

Le géomètre G. SALMON (1870) peut être considéré comme un modèle de virtuosité et d'élégance dans le maniement du calcul géométrique, concis et intrinsèque.

2.3.3 *Traduction iconique* ("mise en figure")

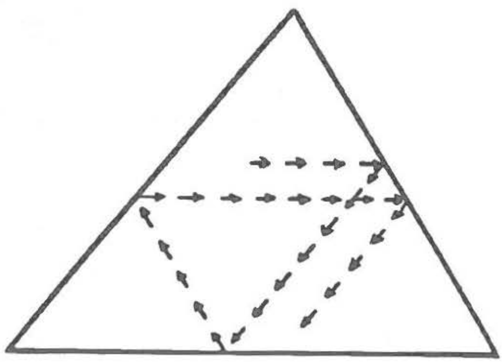
Le dessin fournit des langages efficaces pour traduire l'énoncé d'un problème (figures, représentations graphiques, graphes, organigrammes, etc.).

"Devant un grand nombre de situations, une vieille habitude pousse l'homme à tracer sur le papier des points, représentant des individus, des localités, des corps chimiques, etc., joints entre eux par des lignes ou des flèches symbolisant une certaine relation. Ces schémas se rencontrent partout sous des noms différents : sociogrammes (psychologie), simplexes (topologie), circuits électriques (physique), diagrammes d'organisation (économie), réseaux de communications, arbres généalogiques, etc." *(BERGE 1967)*

Le conseil banal de tous les pédagogues de la mathématique : "dessiner une figure exacte et claire" repose implicitement sur le postulat : "N'importe quelle figure aide toujours à comprendre! ". C'est loin d'être certain.

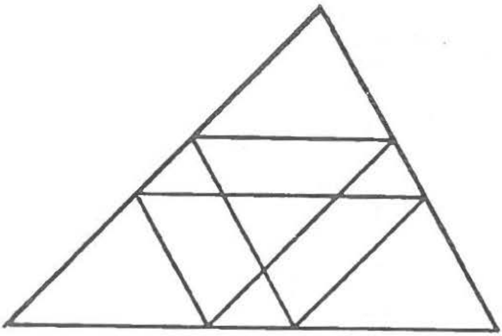
EXEMPLE 3 : On trouvera dans le premier fascicule du "Livre du Problème" (IREM de Strasbourg 1973) des commentaires didacti ques sur le problème de géométrie introduit par la figure suivante :

Observer la **"mise en figure de l'hypothèse"**



Nous préconisons ce type de dessin, sous le nom de **"flou intentionnel"**.

Mais imaginons que la même question mathématique ait été présentée aux mêmes élèves (qui n'auraient pas encore compris ce qu'est une démonstration et qui n'auraient pas été convaincus de la nécessité de démontrer), à l'aide de la figure suivante :



On assiste ici à la **"mise en figure de la conclusion"**

L'échec pédagogique aurait été prévisible. Invités à démontrer qu'une certaine ligne polygonale se referme, la plupart se seraient contentés de regarder la figure en déclarant : "C'est évident !" (Le mot "évident" vient du latin "videre", voir).

En fait, les phénomènes trop "visibles" constituent des obstacles à la motivation de la démonstration !

Dans d'autres cas, la production d'une "figure claire et exacte" est un auxiliaire heuristique patent.

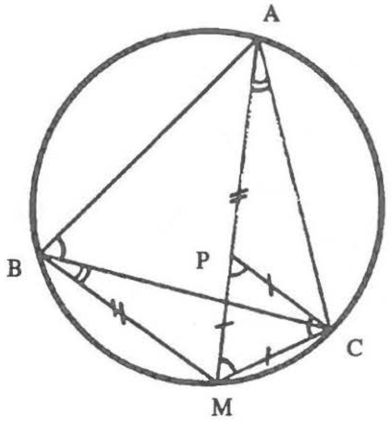
2.3.4 *Confusion entre hypothèse et conclusion*

Une des principales exigences à laquelle doit se soumettre un dessin efficace est de permettre la distinction entre **hypothèses** et **conclusions**. Comme ces renseignements apparaissent simultanément sur une figure "neutre", celle-ci peut jouer un rôle nocif en incitant à commettre des cercles vicieux.

EXEMPLE 4 : "Soit ABC un triangle équilatéral et M un point de son cercle circonscrit. Démontrer que la longueur de l'un des segments [MA], [MB], [MC] est égale à la somme des deux autres".

Pour mettre en évidence la propriété demandée, on placera un point

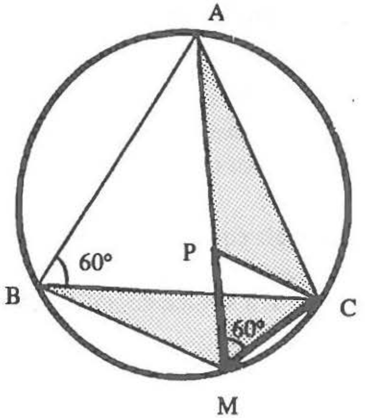
P sur le segment le plus long (ici [AM]) en sorte que MP = MC (ou BM = AP).
Si l'on dessine une figure "neutre", qui ne distingue pas l'ordre dans lequel on fait intervenir les constructions auxiliaires :



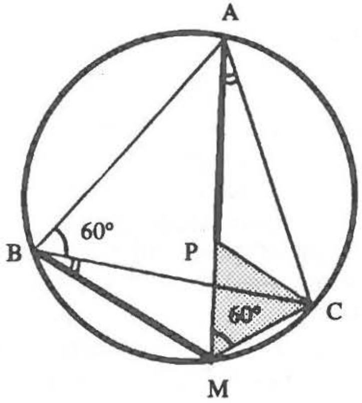
on ouvre la porte à toutes les possibilités de cercles vicieux.

Il s'agit de visualiser de la façon la plus percutante et la **plus redondante** les informations que fournit l'énoncé et que le chercheur veut avoir en tête. Il y parviendra en utilisant certains signes graphiques conventionnels.

On a le choix entre deux stratégies, qui conduiraient à la même figure si on ne prenait pas soin d'utiliser des conventions spéciales :



Ici, par construction PM = MC (et l'on cherche à prouver que AP = BM).
Le triangle PMC (isocèle, avec un angle de 60°) est équilatéral.
Une rotation de 60° autour de C amène B sur A et M sur P.
On en conclut que BM = AP.



Là, par construction AP = BM (et l'on cherche à prouver que PM = MC).
Une rotation de 60° autour de C amène B sur A, la demi-droite [BM)sur la demi-droite [AM), et finalement M sur P.
On conclut que le triangle MPC est équilatéral. Donc PM = MC.

2.4 *L'analyse comme décomposition*

"L'analyse et la synthèse consistent à démonter et à remonter une machine pour en connaître tous les rouages."

Condillac.

D'après l'une des définitions du "vocabulaire de la Philosophie" d'André Lalande, "l'analyse est la décomposition du tout en ses parties".

Cette nouvelle acception recouvre en fait une douzaine de sens, selon la signification que l'on attribue au mot "parties", et selon que la décomposition porte sur l'ensemble des "objets" intervenant dans le problème, sur l'ensemble des relations qui relient ces objets, ou enfin sur l'ensemble des questions posées.

2.4.1 *Les constituants simples*

L'enfant et le primitif ont une vision syncrétique de la complexité. La pensée analytique parvient à séparer l'essentiel du négligeable. Elle choisit les aspects significatifs et invente des éléments explicatifs qui échappent à la perception. Jean PERRIN (1948) la décrit ainsi :

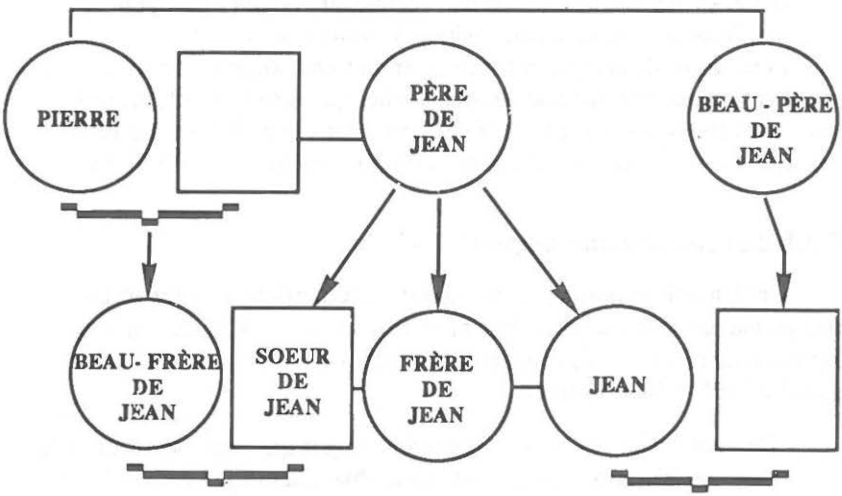
"Deviner l'existence ou les propriétés d'objets qui sont encore au -delà de notre connaissance, et expliquer du **visible compliqué** par de **l'invisible simple"**.

On poursuit alors cette quête jusqu'à la découverte d'éléments suffisamment primordiaux pour que le "tout" puisse être entièrement reconstruit à partir d'eux (synthèse).

Choisissons d'abord pour illustrer cette activité intellectuelle une situation artificiellement embrouillée : cette amusette montre cependant un cheminement de pensée typique (avec, en plus, une traduction iconique assez riche.).

EXEMPLE 5 : "Pierre dit à Jean : "Je suis le frère de ton beau-père; le père de ton beau-frère ; le beau-frère de ton père ; le beau-père de ton frère". Peut-on concevoir une famille aussi étroitement unie ?"
Les expressions-clés de l'énoncé : beau-père et beau-frère, font inter venir des compositions de liens de parenté plus simples : les liens du **mariage** (que nous symboliserons par) et les liens de **filiation** (traduits par des flèches verticales).
A vrai dire les liens de **fraternité** (ou de sororité) pourraient s'exprimer déjà à partir de là (la sœur de Pierre est la fille du père de Pierre). Mais nous décidons de considérer la **fraternité** comme un lien de parenté **simple**(représenté par un trait horizontal) pour éviter de faire intervenir une troisième génération, celles des parents de Pierre.

Les autres éléments simples sont les personnages qui interviennent ; on se persuade de l'avantage de distinguer les sexes (par O et □) et à répartir les personnages en deux générations.

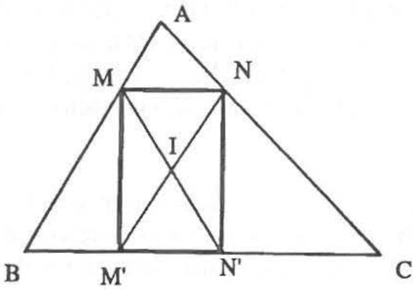


On remarquera que la production de cet arbre généalogique dûment complété constitue une solution du problème.

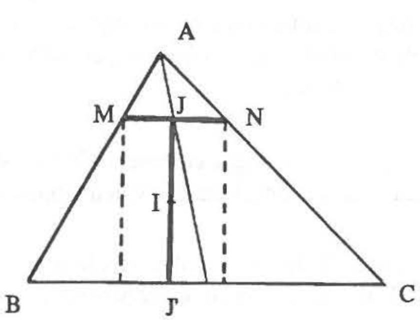
2.4.2 *Des traductions successives*

EXEMPLE 6 : "Quel est l'ensemble des centres des rectangles MNN'M' que l'on peut inscrire dans un triangle ABC donné, en sorte que [M'N'] soit porté par le segment [BC], et M, N par les deux côtés restants."

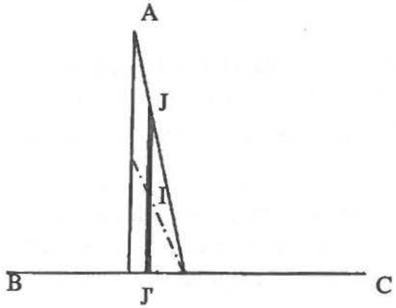
Dans un premier temps, la traduction consiste à dessiner la figure ci-dessous. Pour traduire que I est le centre du rectangle, on pense d'abord à tracer les diagonales. Cependant, elles ne constituent pas un "marchepied" efficace.



Et l'on cherche d'autres traductions possibles : celle qui semble préférable est représentée ci-dessous. Soit J et J' les milieux respectifs de [MN] et de [M'N']. Le point I est milieu de [JJ'] et il apparaît que les points M', N' sont inutiles. Le point J décrit une médiane du triangle ABC.



En dépouillant encore la figure des points M, N, M', N', B et C qui constituent "le bruit de fond" du problème, on aboutit à la solution.



Ce qui distingue les exemples 5 et 6, c'est que les éléments simples étaient évidents dans le premier cas ; il suffisait de les traduire sur la figure. Mais dans le second cas l'idée de passer par la recherche du lieu géométrique de J, considéré comme "constituant du problème", est déjà une activité créative (pour un géomètre débutant !).

On peut hésiter sur le choix de ce que l'on appellera "constituants simples". On poussera donc la décomposition à divers niveaux. En linguistique, on peut s'arrêter, selon les questions traitées, aux lettres, aux syllabes, phonèmes, mots, propositions, phrases, etc., et à chaque choix correspond un type d'"analyse".

En chimie, on peut s'arrêter aux corps purs, aux molécules, aux ions, aux atomes et même déboucher sur la recherche des particules élémentaires.

En mathématique, il convient aussi à propos de chaque problème de décider ce que l'on considérera comme élément simple. Ainsi un nombre complexe se notera z si l'on envisage comme élément primitif ou x + iy si on l'interprète comme un couple de nombres réels. Même opposition entre le vecteur et la donnée de toutes ses composantes.

Une fonction est parfois envisagée comme un "point" dans un espace fonctionnel, ou au contraire comme un tableau de valeurs numériques ou un graphe.

Après l'examen des éléments simples, distingués ou non en éléments connus ou inconnus, l'analyse comporte la recherche des relations **simples** qui relient les constituants (cf exemple 5). Ces contraintes peuvent être formulées de façon **statique** ou **dynamique** : ces dernières mettent en lumière les transformations qui permettent de passer d'un élément à tel autre, au cours d'une genèse de la situation (cf exemple 6). Par exemple, on peut dire d'une façon statique qu'un triangle ABC est **équilatéral**, ou d'une façon dynamique que l'on passe de B à C par **une rotation de 60°** de centre A ; ou encore qu'il existe une rotation qui transforme A en B, B en C, et C en A. On exprimera qu'une figure est un **parallélogramme** en évoquant **son centre de symétrie** ou la translation qui associe deux côtés "opposés".

Lorsque l'objet d'étude est une **théorie mathématique**, les constituants simples sont les énoncés (définitions, axiomes) à partir desquels tout l'édifice peut se déduire. La "décomposition" d'une théorie visera à détruire l'ordre linéaire d'exposition pour faire apparaître les liens transverses entre les divers théorèmes. Elle conduira à attribuer une valeur d'importance à ces énoncés, en distinguant les théorèmes des lemmes et des corollaires.

2.4.3 *Mise en lumière des structures sous-jacentes*

Quelle est donc la nature de ces "constituants simples" ?

Souvent ce sont les éléments qui interviennent dans la **structure** du problème traité.

Qu'est-ce qu'une structure ? D'une façon naïve, on parvient à cette idée en faisant abstraction de la **nature concrète des objets** qui interviennent dans une situation pour ne s'intéresser qu'à certaines relations qui relient ces objets.

EXEMPLE 7 : Voici deux démonstrations, qui se déroulent dans des contextes différents : cependant l'**analogie** est frappante. Il existe une **traduction** des textes qui révélera une structure commune. Les objets sont différents, mais les propriétés des lois de composition sont les mêmes.

Hypothèses	
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$
Multiplions les deux membres par $\frac{b}{c}$:	Ajoutons $\overrightarrow{CB}$ aux deux membres :
on obtient	
$\frac{b}{c} \times \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}$	$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$
En simplifiant	Par la formule de Chasles
on peut conclure	
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$

A partir de là, on comprend l'importance et l'origine de la notion de **groupe** en mathématiques.

Les groupes s'introduisent comme **ensemble des automorphismes** d'un ensemble structuré, c'est-à-dire comme ensemble des bijections d'un ensemble qui respectent des relations structurelles.

> EXEMPLE 8 : "Dans une copie d'étudiant, à qui on demandait de vérifier que l'ensemble des cinq nombres complexes exp $\left(\frac{2ik\pi}{5}\right)$ (où $k = 0, 1, 2, 3, 4$) muni de la multiplication usuelle constituait un groupe, on pouvait lire : "C'est faux ! Nous avons démontré en travaux pratiques que le seul groupe à 5 éléments est le groupe additif des entiers (mod 5)".
>
> Il n'avait pas compris qu'il s'agit de deux réalisations isomorphes d'une même structure de groupe.

Il est important de connaître à priori la structure d'un problème ; on saura alors quels sont les outils les plus appropriés pour le traiter.

Georges BOULIGAND (1935) attire l'attention sur les démonstrations causales.

*"**Démonstrations causales** - Bien des théorèmes sont susceptibles de différentes démonstrations. Les plus éducatives sont naturellement celles qui font comprendre les raisons profondes des résultats qu'on se propose d'établir. En pareille matière la notion de* domaine de causalité *fournit un guide.*

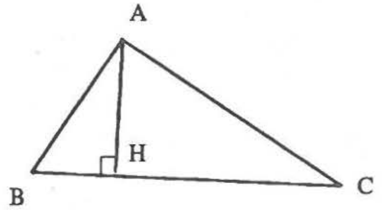
*La démonstration naturelle d'une proposition doit embrasser tous les cas où elle est vraie. Et inversement, en envisageant systématiquement tous ces cas, on sera conduit à dégager le théorème de toute supposition accessoire ; on se trouvera donc, d'emblée, dans des conditions meilleures **pour effectuer le raisonnement**".*

Il cite la célèbre démonstration suivante du théorème de Pythagore. Celui-ci peut se reformuler comme suit :

> EXEMPLE 9 : "Si trois figures semblables sont construites sur (1) les trois côtés d'un triangle rectangle, l'aire de celle qui est construite sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux autres".
> Le cas classique correspond à des figures carrées. Mais si le théorème est démontré pour le choix d'une figure particulière, il est vrai pour toutes les autres.
> En effet si les aires des figures semblables sont ka^2, kb^2, kc^2, l'égalité $ka^2 = kb^2 + kc^2$ est équivalente à $a^2 = b^2 + c^2$.

(1) Les trois côtés sont homologues dans ces similitudes

Or le théorème est évident lorsqu'on construit les trois triangles rectangles semblables ABC, ABH, et ACH sur les 3 côtés (H est le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse).



La cause de la validité du théorème de Pythagore est que les triangles rectangles sont les seuls qui peuvent être découpés en deux parties semblables au tout.

Depuis que le "Programme d'Erlangen" de Félix KLEIN (1872) souligne le rôle des groupes dans la distinction des diverses géométries, on est armé pour diagnostiquer un problème a priori, et reconnaître les arguments qui risquent d'être efficaces et rejeter ceux qui sont voués à l'échec : par exemple, un théorème est **topologique** s'il est invariant par homéomorphisme. Il se démontrera donc par des arguments topologiques. Un théorème est **métrique** (resp. **affine, projectif, anallagmatique**, etc.) s'il est invariant par isométrie (resp. transformation affine, perspective, inversion, etc.). Un théorème projectif ne peut se démontrer uniquement en se basant sur le théorème de Pythagore, car si l'on soumettait toute la démonstration à une transformation projective, le triangle rectangle utilisé ne resterait plus rectangle !

Un examen très simple permet, dans la plupart des cas, de trouver rapidement la structure sous-jacente à un problème. Il suffit de passer en revue les mots-clés de l'énoncé et de reconnaître s'ils appartiennent au vocabulaire de la structure conjecturée. Par exemple, : les mots "connexe, fermé, ouvert, continu, déformation, etc." relèvent du langage topologique.

"Droite, joindre, appartient, se coupent, parallèle, aligné, concourant, etc." appartiennent à la géométrie d'incidence.

"Droite, parallèle, milieu, barycentre, ellipse, etc." sont invariants en géométrie affine, mais non en géométrie projective.

"Longueur" et "angle" sont caractéristiques de la géométrie métrique euclidienne.

"Alignement, concourant, rapport anharmonique, division harmonique, conique" sont des mots qui signent le caractère projectif d'un problème.

Comme l'écrit CHOQUET :

"Le mathématicien moderne reconnaît assez aisément dans un problème quelles sont les structures qui sont en jeu ; il a aussitôt à sa disposition un arsenal de résultats connus concernant ces structures et il ne fait pas la faute de chercher **à résoudre le problème par le recours à des structures étrangères à la question**".

Pour certains auteurs : "Analyser, c'est dégager la structure sous-jacente".

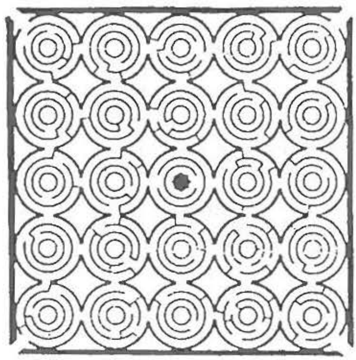
2.4.4 *Démontage*

La décomposition ne vise pas uniquement les éléments simples ou ultimes. On peut aussi **démonter un mécanisme** jusqu'à l'apparition de parties simples ayant une signification globale suffisante pour expliquer le tout;

On peut passer une automobile à la casse et la réduire en poussière : ce n'est pas là une analyse. On peut la démonter pièce à pièce jusqu'au moindre rivet, jusqu'au moindre écrou : c'est le point de vue de 2.4.1.

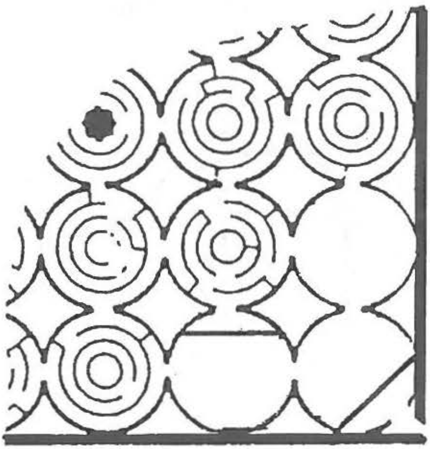
Mais on peut aussi la démonter en carrosserie, moteur, batterie, transmission, roues, pneus, etc. Alors chaque composant a une fonction propre, et l'explication de l'automobile peut s'effectuer sans poursuivre le démontage de chacun des "**modules**". On renonce à étudier leur fonctionnement interne, on les assimile à des **boîtes noires.**

> EXEMPLE 10 : " Voici un **labyrinthe** (PERELMAN 1974). Il s'agit, en entrant par un coin, d'aboutir au centre. Comme l'exercice est très simple, il est possible de trouver des solutions par tâtonnements.



Mais on peut remarquer que ce labyrinthe comporte 25 appartements: chacun d'eux est un mini-labyrinthe, comportant au plus quatre portes. On peut étudier séparément les communications entre les portes d'un même appartement, et renoncer à s'intéresser à l'enchevêtrement des couloirs internes.

C'est ainsi que les trois appartements situés au Sud-Est, peuvent être schématisés par :



En soumettant tout le labyrinthe à ce traitement, on met à jour sa structure simpliste. On peut concevoir des labyrinthes où chacun des appartements aurait une structure moins évidente : l'étude pourrait exiger un autre démontage plus fin. Dans d'autres cas, la décomposition en sous-labyrinthes pourrait être moins apparente.

En mathématique, il arrive fréquemment qu'une situation compliquée se résolve grâce à un démontage.

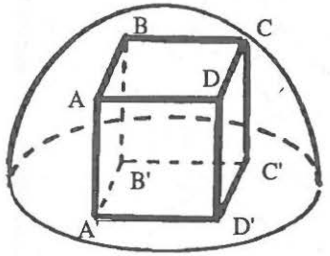
Par exemple, pour étudier un groupe fini admettant plus d'une vingtaine d'éléments, on a souvent intérêt à chercher ses sous-groupes (distingués). Chacun d'eux est alors traité comme un des "appartements" du labyrinthe précédent.

Certains démontages sont d'usage courant : décomposition d'un naturel en **facteurs premiers**, d'une fraction rationnelle en **éléments simples**, d'une forme quadratique **en somme de carrés**, d'une permutation en **cycles** :

EXEMPLE 11 : Le polynôme $x^4 + 1$ est irréductible sur Q.
Mais il se factorise en $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ dans Q ($\sqrt{2}$).
La factorisation peut se poursuivre, dans C, en quatre facteurs du 1[er] degré.

Le démontage consiste souvent à mettre en lumière **des situations partielles** dans un chaos syncrétique.

EXEMPLE 12 : "On demande d'inscrire un cube dans une demi-boule".



Les sommets A, B, C, D doivent appartenir à la demi-sphère et la base A' B' C' D' est posée sur le plan équatorial.

En géométrie dans l'espace le démontage consiste souvent à extraire des figures planes.
On résout immédiatement le problème en coupant la figure selon le plan ACC'A', en sorte que le dessin de cette coupe soit facile à reconstituer.

2.4.5 *Démontage d'un ensemble de relations*

La décomposition n'a porté, jusqu'ici, que sur l'ensemble de objets étudiés. Mais on peut aussi décomposer **l'ensemble des contraintes** auxquelles les objets sont soumis.

C'est le cas pour la méthode classique de résolution des problèmes de construction géométrique (PETERSEN 1916), que POLYA (1967) nomme **"Modèle des deux lieux géométriques"** : s'il s'agit de construire un point soumis à deux contraintes R_1 et R_2, on étudie séparément l'ensemble des points satisfaisant à R_1 (resp. R_2) et on achève en prenant l'intersection des deux lieux géométriques.

Voici comment le même thème **heuristique** peut intervenir en algèbre.

EXEMPLE 13 :

"Trouver une relation entre les coefficients a, b, c et a', b', c', qui exprime que les deux polynomes $ax^2 + bx + c$ et $a'x^2 + b'x + c$ ont un zéro commun. (On suppose que ni a ni a' ne sont nuls)"

Il s'agit ici d'éliminer x entre les deux égalités

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

mais il est plus habile d'éliminer x et y entre :

$$ay + bx + c = 0$$
$$a'y + b'x + c' = 0$$
$$y = x^2$$

Les inconnues x et y sont soumises à trois contraintes.
On peut commencer par isoler les deux premières, et en tirer y et x, en fonction des coefficients. En portant les résultats dans la troisième égalité, on obtient la classique formule du "résultant":

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$$

2.4.6 *Décomposition d'un problème*

Le démontage peut s'exercer aussi sur le **problème lui-même**, que l'on décompose en **sous-problèmes** : cela s'appelle **diviser les difficultés**

La seconde règle du "Discours de la méthode" de Descartes s'énonce ainsi : "Diviser chacune des difficultés en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre".

Jean-Marie DUHAMEL (1865), qui dans son ouvrage sous-estime systématiquement les activités de décomposition, écrit cependant :

"Lorsqu'il arrivera que la question, de quelque genre qu'elle soit, puisse être décomposée en plusieurs autres, susceptibles d'être traitées indépendamment les unes des autres, il est évident que la première réduction à faire sera de substituer ces questions partielles à la proposée : on aura ainsi ramené cette dernière à d'autres plus simples. Et même si ces questions partielles ne sont pas indépendantes, et ne peuvent être traitées isolément, il y aura encore avantage à faire la décomposition, parce qu'il sera généralement plus facile de ramener ces questions déjà plus simples à d'autres plus simples encore, que de faire la réduction sur la proposée, qui est plus compliquée puisqu'elle les renferme toutes.

La décomposition de la question en plusieurs autres, est donc la première réduction à faire quand elle est possible, et cela est si naturel, qu'il est presque superflu d'en avertir."

EXEMPLE 14 : Un cas typique est décrit par KŒHLER (1927). Des chimpanzés, avides d'atteindre une banane haut perchée, disposent de caisses (qu'ils peuvent empiler) et de bâtons.

L'expérimentateur constate qu'ils ont, en fait, à résoudre deux problèmes : le premier est d'imaginer une configuration géométrique qui relie le sol à la banane. Ils résolvent facilement ce problème, mais échouent devant le redoutable problème de statique : consolider le dispositif pour qu'il ne s'effondre pas, en cours d'opération..

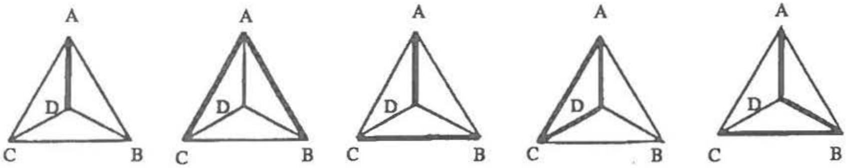
EXEMPLE 15 : "On demande de trouver toutes les configurations de quatre points du plan euclidien telles que les six distances mutuelles de ces points ne prennent que deux valeurs." (HUNGARIAN PROBLEM BOOK)

Il est facile de donner des exemples de cette situation. Mais si l'on désire opérer méthodiquement sans oublier de solutions, on est amené à décomposer le problème en deux étapes.

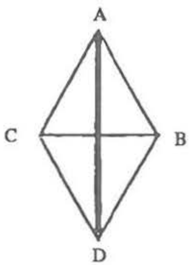
• La première consiste à trouver tous les coloriages des arêtes d'un graphe complet en deux couleurs (en identifiant les coloriages isomorphes).

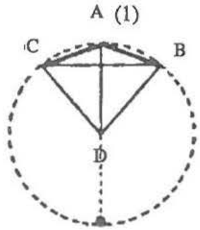
• La deuxième étape relève de la géométrie métrique. A partir de chaque graphe on réalise un graphe de même structure et tel que les côtés de même couleur correspondent aux côtés de même longueur.

Le point de vue de coloriage :

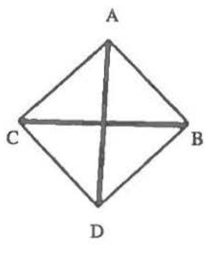


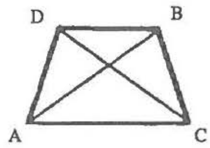
Le point de vue métrique correspondant :

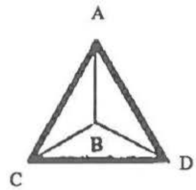




(A est sur le cercle et sur la médiatrice de [BC]







L'avantage de la technique de décomposition est de se ramener à de nouvelles questions dont les domaines de recherche sont beaucoup plus restreints. La découverte d'une décomposition efficace est un micro-eurêka qui clôt un cycle de recherches.

(1) Au second coloriage, correspondent en fait deux solutions métriques : on peut trouver deux points A et A' symétriques par rapport à D qui satisfont au problème.

2^e PARTIE : L'ENVERS ET L'ENDROIT

3. LABYRINTHES

*"L'analyse (résolution, solution à rebours) est une **démarche régressive**, qui remonte du conditionné à la condition, (de la conséquence au principe, de l'effet à la cause, du présent au passé, du composé à ses éléments, etc.)...*
La synthèse............ suit l'ordre normal................
progressant de la condition au conditionné, et avec sécurité, puisque celle-ci est déterminée univoquement par celui-là."

Robert BLANCHÉ (Encyclopaedia Universalis. Article **Raisonnement**)

Il nous reste à examiner les nombreuses acceptions des mots "analyse" et "synthèse" qui se rapportent à des **enchaînements d'arguments**, à "ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations...".

(Descartes, "Discours de la Méthode")

En gros, on ferait de l'analyse lorsqu'on raisonne **à l'envers** et de la synthèse lorsqu'on déduit **à l'endroit**... Mais la citation ci-dessus de Robert BLANCHÉ présente déjà plusieurs significations contradictoires de l'envers et de l'endroit !

3.1 Problèmes d'itinéraires

Pour suggérer ce que peut être une telle activité et épargner au lecteur l'énumération d'un grand nombre de définitions, contentons-nous d'utiliser une métaphore (cf exemple 10).

Le domaine d'un long raisonnement sera comparé à un LABYRINTHE. Celui-ci aura ses **entrées** (prémisses, données, axiomes, théorèmes invoqués...), ses **sorties** (conclusions, réponses...), ses **carrefours** (résultats de calculs ou de raisonnements intermédiaires).

Ce sont là les **sommets** d'un graphe dont les **arêtes** sont des connecteurs

ou des opérateurs. Ce graphe est **partiellement ordonné** (à cause de la présence d'arêtes sagittales : $\Longrightarrow$, $\longmapsto$).
Une **démonstration** est essentiellement un **itinéraire** joignant l'hypothèse à la conclusion. Cependant, il peut comporter des **affluents**, prenant leurs sources aux différents théorèmes ou axiomes invoqués. De même un **calcul** joint essentiellement les données à la réponse.

En général, il peut y avoir de nombreuses démonstrations possibles, dont certaines comportent des **impasses** (fausses pistes) ou des **pas inutiles** qu'il conviendra d'éliminer.

Les principales **difficultés heuristiques** concernent l'**invention** d'un tel itinéraire, les **choix** de la poursuite de l'argumentation à chaque carrefour, la découverte des **raccourcis,** etc. La partie **féconde** du processus ne réside pas, par exemple, dans la vérification de chaque implication lors d'une cascade de syllogismes telle que : $H \Rightarrow M_1 \Rightarrow M_2 \Rightarrow M_3 \Rightarrow C$. La créativité se concentre dans la découverte des moyens termes M_1, M_2, ...

Parmi des **difficultés heuristiques** concernant l'implication et l'inférence, examinons maintenant celles qui résultent de la coexistence de plusieurs **structures d'ordre.**

Sur un labyrinthe, supposé déjà tracé, apparaît en premier lieu une structure **d'ordre logique**, liée aux connexions sagittales. La valeur de vérité attribuée à certains carrefours se déduit de celles des carrefours précédents.

Mais la situation que l'on étudie se déroule parfois dans le temps... Certains carrefours sont donc antérieurs à d'autres : le labyrinthe peut ainsi être doté d'un **ordre temporel.**

L'énoncé d'un problème mentionne parfois ce que sont les **données** et les **inconnues.** Il en résulte des contraintes d'ordre pour les itinéraires : c'est l'**ordre logique des découvertes** tel qu'il apparaît dans la solution du problème, supposée rédigée.

A côté de ces ordres, que l'on peut indiquer a priori, sans référence à l'individu qui résout le problème, il existe un **ordre heuristique des découvertes**, concernant le déroulement de la recherche et un **ordre d'exposition** dans la rédaction de la solution.

Il est fondamental de comprendre que ces ordres coïncident rarement. Parconséquent, les expressions : raisonnement régressif, raisonnement à l'endroit, ou à l'envers, sont fortement ambiguës.

Et, pour juger de la difficulté d'un raisonnement, il sera souvent nécessaire de redessiner plusieurs labyrinthes, privilégiant chacun de ces ordres.

EXEMPLE 16 : Problèmes de constructions géométriques.

On demande d'obtenir une figure finale à partir de quelques **données**

initiales en respectant deux types de contraintes : d'une part, la figure finale doit satisfaire à certaines propriétés ; par ailleurs, les moyens de construction (par exemple l'usage du compas seulement) sont imposés.

Le labyrinthe de l'exécution graphique de la construction a pour entrée (resp. sortie) la figure initiale (resp. finale). L'itinéraire passe par toutes les constructions intermédiaires.

Mais, du point de vue heuristique, les figures, initiale et finale, sont les données (donc les entrées de ce second labyrinthe).
Les **inconnues** sont toutes les constructions intermédiaires !

Dans l'exposé logique de la solution, il est fréquent que l'on présente la construction, et que l'on vérifie ensuite que le dessin obtenu satisfait bien aux contraintes de l'énoncé.

EXEMPLE 17 : Démonstration d'un théorème dont l'énoncé donne la formulation explicite de la conclusion.

C'est une situation analogue à la précédente.
Supposons, pour fixer les idées, que le théorème proposé se formule sous la forme :

$\boxed{(H_1 \text{ et } H_2) \Rightarrow C}$ où les H sont les hypothèses et C la conclusion.

La démonstration pourraît se schématiser à l'aide d'un graphe analo gue au suivant :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} H_1 \Rightarrow M_1 \\ \text{et} \\ A \Rightarrow M_2 \end{array}\right\} \Rightarrow M_3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{et} \\ (H_2 \text{ et } T) \qquad \Rightarrow M_4 \end{array}\right\} \Rightarrow C$$

A est un **axiome** de la théorie et T un **théorème** classique que l'on invoque. Les inconnues principales sont les **moyens termes** M qu'il faut inventer. Quant à A et T, ce sont des énoncés "bien connus" qui figurent dans les ouvrages de référence. Mais il arrive que la recherche de ces énoncés pertinents, enfouis parmi une multitude d'autres, constitue déjà un problème.

Les auteurs classiques (et en particulier les disciples de Polya) qualifient une telle recherche d'analytique (ils emploient l'expression "Working backwards"), alors que le cheminement de la pensée va droit devant, des **données vers l'inconnue** (mais, il est vrai, du présent vers le passé).

Polya lui-même, auquel nous devons tant de notions claires concernant l'heuristique, fait fréquemment la confusion entre "but", "inconnue" et "état final".

A propos de l'exemple suivant, il commet même une étonnante bévue :

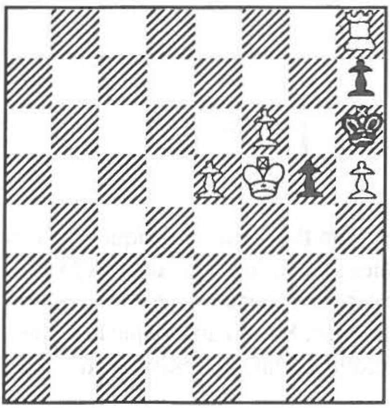
> **EXEMPLE 18 :** "Comment ferez-vous pour rapporter d'une rivière **six** litres d'eau, si vous ne disposez pour mesurer la quantité d'eau que de deux récipients, l'un de **quatre** litres, l'autre de **neuf**".

Polya écrit (1957) : "En somme nous progressons, en partant de la situation donnée au début vers la situation finale désirée, **c'est-à-dire** (??) en allant des données vers l'inconnue".

Par une étrange cécité, il ne voit dans cet exercice que deux **données** : quatre et neuf, et une **inconnue**, qui serait **six**. Or cette information est explicitement fournie par l'énoncé.

Voici un exemple où le dépaysement vis-à-vis des habitudes acquises constitue la principale difficulté :

> **EXEMPLE 19 :** Il s'agit d'un problème d'échecs, exemple très simple, du genre nommé "analyse rétrograde".



F. Amelung. DünaZeitung, 1897

Les blancs jouent et font mat en 2 coups

Il semble qu'il y ait peu de coups à la disposition des blancs. Il est possible de les épuiser tous et de constater qu'aucun d'eux ne conduit au mat annoncé (en deux coups, comme l'exige l'énoncé) contre une bonne défense.

Pourtant... Pourtant... Est-ce si sûr que cela ?

Par un processus heuristique de pensée latérale le chercheur envisage une possibilité qu'il avait rejetée implicitement : la "prise en passant". On sait que c'est une prise qui, conformément aux règles du jeu d'Echecs, ne peut se produire qu'immédiatement après une double avance du pion adverse. Si donc on était certain que les noirs viennent de jouer g7 - g5 on aurait droit de "prendre en passant", c'est-à-dire d'enlever le pion noir g5 et placer le pion blanc h5 en g6.
Ce serait la clé du problème avec la réponse forcée Rh6 - h5 suivie de Th8 x h7 mat.

Pour vérifier que cette solution-miracle est acceptable, il convient de faire une enquête, à la Sherlock Holmes.

"Quel a été le dernier coup joué par les noirs ?"

On démontre par l'absurde que ce coup n'a pu être effectué par le roi, et que les noirs ne viennent pas de jouer g6 - g5. Reste la seule possibilité :

Ils viennent de jouer g7 - g5, ce qui légitime la solution.

Examinant les ressorts heuristiques de cette solution (en laissant de côté l'inspiration latérale), on constate que l'examen rétrospectif a été mené à partir de la position **donnée** du diagramme. On a alors appliqué les rétro-règles de marche des pièces : si un déplacement est légitime à partir d'une position initiale pour obtenir la position finale, on obtient le rétro-déplacement correspondant en passant de l'état final à l'état initial (ainsi à la prise d'une pièce correspond la déprise d'une pièce). On s'habitue vite à appliquer les rétro-règles du jeu.

La démarche de pensée qui a permis de résoudre le problème s'apparente à la samba : un pas en arrière, et deux pas en avant ! Mais la démarche heuristique est de type : **des données vers les inconnues** ! La dénomination "Analyse rétrograde" ne me semble donc justifiée ici que si le mot "Analyse" est pris comme synonyme d'"Examen de la situation"

3.2 *Partir de l'inconnue.*

Le touriste : "Comment puis-je aller d'ici à la rue Pappus ?"

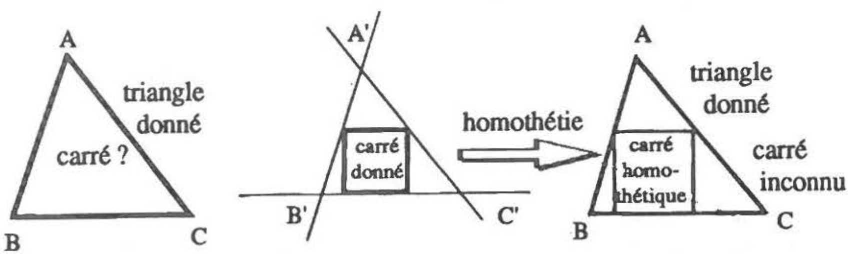
L'agent de police : "Ah ! Ce serait plus facile si vous partiez d'un autre endroit".

A priori, il paraît étrange de raisonner en prenant appui sur ce que l'on ignore, pour remonter jusqu'aux données.

Cependant cette démarche paradoxale constitue le principe de **la résolution des problèmes par l'algèbre.** Il a fallu des millénaires à l'humanité pour mettre cette méthode au point.

En fait, on commence par se poser un **problème auxiliaire**, où les rôles de certaines données et des inconnues sont inversés. Cela nécessite parfois une adaptation ingénieuse. On manœuvre en sorte que le problème auxiliaire soit facile, et que sa solution suggère les "îlots" qui guideront un raisonnement direct ultérieur (des données vers l'inconnue). C'est **la méthode du problème contraire.**

EXEMPLE 20 : "Inscrire un carré dans un triangle ABC donné".
Ah ! dirait l'agent de police, ce serait bien plus facile si l'on connaissait le carré et que l'on demande de tracer un triangle autour !.
C'est le principe de la solution :



Problème initial

Problème auxiliaire (Le carré, bien placé, est donné). Le triangle circonscrit A'B'C' s'obtient par des tracés de parallèles.

Problème initial La figure cherchée n'est qu'un agrandissement de la figure auxiliaire obtenue auparavant.

Cette savante dialectique entre le donné et l'inconnue est conceptuellement difficile à imaginer pour des élèves n'ayant pas atteint un stade suffisant. Par contre, dès que ce stade est atteint et que le "truc" est assimilé, la méthode devient question de routine.

La même démarche intervient dans l'emploi de l'algèbre littérale pour résoudre des problèmes arithmétiques. Il s'agit d'une difficile conquête de la science qui n'a vraiment été accomplie que par DIOPHANTE (325-410) et VIETE (1540-1603). Mais dès qu'un élève est capable de se livrer à cette gymnastique intellectuelle, et qu'il sait raisonner sur des quantités inconnues désignées par des lettres, il devient capable de performances spectaculaires, au point de ne plus pouvoir résoudre les problèmes élémentaires "par l'arithmétique".

EXEMPLE 21 : Les trois joueurs de Bachet de Méziriac. (C'est là un des "Problèmes playsants et délectables à faire par les nombres" Bachet 1612).

Trois joueurs (deux gagnants et un perdant à chaque partie) conviennent que le perdant doublera l'avoir des deux autres. Ils jouent trois parties, au cours desquelles chacun d'eux perd une fois. Ils se retirent du jeu avec 40 ducats chacun. Calculer leurs trois mises".

Pour résoudre ce problème par raisonnement régressif, on se pose le problème auxiliaire : "Si l'on connaissait les mises x, y, z des trois joueurs comment calculerait-on leurs avoirs en fin de jeu ?

Il est commode de remplir progressivement le tableau suivant :

	1er perdant	2e perdant	3e perdant
avant la 1re partie	x	y	z
après la 1re partie	$x - y - z$	$2y$	$2z$
après la 2^{e} partie	$2x - 2y - 2z$	$2y - (x-y-z-) - 2z$	$4z$
après la 3^{e} partie	$4x - 4y - 4z$	$4y - 2(x-y-z) - 4z$	......

Il est inutile de remplir la dernière case, car on obtient une équation évidente, en invoquant le principe de conservation :
"Rien n'est volé, rien n'est dépensé" : $x + y + z = 120$ ducats.

Il reste à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ 4(x - y - z) = 40 \\ -2x + 6y - 2z = 40 \end{cases}$$

La solution par déduction progressive est **beaucoup plus simple** : elle est accessible à des élèves qui seraient incapables de maîtriser la dialectique compliquée du donné et de l'inconnue, qui intervient dans les problèmes d'algèbre. Il suffit de remplir le tableau suivant de haut en bas : ici le labyrinthe est sans carrefour, et l'on progresse du donné vers l'inconnue. Le seul élément déroutant est qu'à la manière de l'enquêteur de l'exemple 19, on remonte le cours du temps.

	1^{er} perdant	2^e perdant	3^e perdant
avoir final	40	40	40
avant la 3^e partie	20	20	80
avant la 2^e partie	10	70	40
Réponse	65	35	20

De nombreux ouvrages consacrés à la résolution du problème dans la ligne de Polya présentent cette solution comme le paradigme d'une "démarche à l'envers", un raisonnement régressif, qui partirait du but à atteindre pour revenir au point de départ.

En utilisant le langage matriciel on peut dire que l'on est en présence d'un problème du type : $\vec{A} = M_3\, M_2\, M_1\, (\vec{X})$

La première démarche consiste à calculer la matrice $M_3\, M_2\, M_1$ puis à l'inverser. Dans la seconde, on construit successivement $M_3^{-1}\,(\vec{A})$, $M_2^{-1}\left(M_3(\vec{A})\right)$ et finalement $\vec{X}$

4. RÉDUCTION

Voici comment Paul PAINLEVE décrivait la démarche de réduction pratiquée par le polytechnicien "polarisé" :

***Problèmes** : On demande dans les deux problèmes qui suivent d'obtenir de l'eau bouillante:*

***1^{er} cas** : On dispose d'un réservoir d'eau, d'une casserole accrochée au mur, d'un réchaud à gaz et d'une boîte d'allumettes.*

***Solution** : On décroche la casserole, on y verse de l'eau. Après avoir gratté l'allumette et allumé le gaz, on pose la casserole pleine sur le feu et on attend le temps nécessaire et suffisant pour que l'eau entre en ébullition : ce qui était demandé.*

***2e cas** : On dispose d'un réservoir d'eau, d'une casserole posée sur la table, d'un réchaud à gaz et d'une boîte d'allumettes.*

***Solution** : On accroche la casserole au mur et **l'on est ramené au cas précédent"**.*

La construction des enchaînements d'arguments se traduit souvent par la formulation d'une suite de problèmes de plus en plus faciles, auxquels **se ramène** le problème posé.

Voici comment J.-M. DUHAMEL (1865), à la suite des autres auteurs classiques, explique sa conception de la **réduction**.

"Lorsque l'on aura à trouver la démonstration d'une proposition énoncée (*), on cherchera d'abord si elle peut se déduire comme conséquence nécessaire de propositions admises, auquel cas elle devra être admise elle-même, et sera par conséquent démontrée. Si l'on n'aperçoit pas de quelles propositions connues (*) elle pourrait être déduite, on cherchera de quelle proposition non admise (*) elle pourrait l'être, et alors la question sera ramenée à démontrer la vérité de cette dernière. Si celle-ci peut se déduire de propositions admises (*), elle sera reconnue vraie, et par la suite la proposée : sinon, on cherchera de quelle proposition non encore admise elle pourrait être déduite, et la question sera ramenée à démontrer la vérité de cette dernière. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'on parvienne à une proposition reconnue vraie (*); et alors la vérité de la proposée sera démontrée.

On voit donc que cette méthode, que l'on appelle analyse, *consiste à établir une chaîne de propositions commençant à celle qu'on veut démontrer, finissant à une proposition connue (*), et telles qu'en partant de la première, chacune soit une conséquence nécessaire de celle qui la suit ; d'où il résulte que la première est une conséquence de la dernière, et par conséquent vraie comme elle.*
L'analyse n'est donc autre chose qu'une méthode de réduction."

On notera que les mots employés par Duhamel, et que nous avons marqués d'un astérisque, incitent à confondre des notions que nous avons distinguées. Duhamel réserve le terme de "réduction" à une démarche où la sortie est connue, et c'est pourquoi il l'appelle "analyse" (puisque selon lui elle va de l'inconnu au connu). Mais il suffirait de peu de choses pour qu'il se trouve dans une démarche où la sortie est inconnue.

Le paragraphe suivant illustre ce phénomène.

4.1 *Réduction des équations par équivalence.*

Partant d'une **équation donnée** E, cherchons une suite d'équations E_1, E_2, ...E_n **équivalentes** à la proposée (Dans ce passage, nous entendons par là des équations ayant les mêmes racines que E).

(++) $$E \Leftrightarrow E_1 \Leftrightarrow E_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow E_n$$

Le **but** visé E_n est une équation dite "toute résolue" : par exemple $x = a$ ou $x^n = a$ (résolution par radicaux) ou encore $\cos x = \cos \alpha$, sans oublier, dans le cas des équations différentielles, celles qui se résolvent directement par quadratures.

E est une équation **donnée**, mais, bien entendu, ses **racines sont inconnues**. Il est donc possible de faire une grossière erreur de diagnostic sur ce type de problèmes, en jouant sur les mots "données" et "inconnues".

On pourrait penser que la chaîne (++) part de E (racines "inconnues") vers E_n (racines connues), et décrire le processus comme une démarche où la sortie est connue. On pourrait, au contraire, considérer que l'on part de E **donnée**, à la recherche de la sortie E_n inconnue (prise dans l'ensemble des équations "toutes résolues").

L'observation d'un chercheur occupé à résoudre une équation par équivalence ne laisse aucun doute sur cette alternative : il s'agit d'une démarche du connu vers l'inconnu, et si Duhamel en avait été conscient, il aurait dû, pour être cohérent avec son propre point de vue, l'intituler "**synthèse par réduction**" :

> **EXEMPLE 22 :** Considérons, par exemple, un débutant confronté pour la première fois à une équation du premier degré telle que :
>
> (E) $$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{4} = \frac{x}{5}.$$
>
> On supposera qu'il n'a pas encore été programmé à appliquer automatiquement une procédure, et qu'il cherche en réfléchissant !`
>
> Partant de l'entrée (E), il cheminera "droit devant lui", par exemple en "chassant les dénominateurs de E". Dans cette démarche, il ignore que la sortie du labyrinthe se fera par l'équation E_n : $x = 5$. Il se contente d'errer dans le labyrinthe masqué, en appliquant un critère de **simplification locale.**

$$(E_1) \quad 20(x+1) - 15(x-1) = 12\,x$$

est une équation équivalente à (E), mais **plus simple** et cette constatation suffit à donner confiance pour la poursuite du cheminement.

Mais l'acrobatie mentale qui s'introduit par une phrase telle que : "Pour trouver l'ensemble des solutions de (E), il suffirait que je sache résoudre (E_1)" suppose un stade intellectuel plus avancé.

Un contresens sur la nature des thèmes heuristiques risque donc, dans ce cas, de fausser le diagnostic de la difficulté de l'exercice.

4.2 *Contrôle des "équivalences imparfaites".*

Le fait que, généralement, un débutant conduit ce genre de résolution en "avançant" du connu vers l'inconnu, est confirmé indirectement par l'observation banale suivante : habitué à faire subir une suite de transformations à l'équation pour aboutir à la réponse, le novice éprouve des difficultés à comprendre comment des "transformations non régulières" risquent d'introduire des "solutions étrangères". Il croit au contraire que tout résultat fourni par son algorithme est, de droit, une réponse à son problème.

Le contrôle de ces incidents de parcours est une démarche heuristique d'un niveau plus élevé. Le cas le plus intéressant est celui où l'on prend consciemment le risque de "perdre des solutions en route" ou d'introduire des solutions étrangères, et où l'on se donne les moyens de maîtriser cette situation.

EXEMPLE 23 : Etant donné un nombre positif a, résoudre dans **R** l'équation

$$(E) \quad \sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

Il est parfaitement raisonnable de substituer à E des équations E' obtenues par des élévations au carré.

L'opération se poursuit "droit devant soi". Le critère de progrès est la diminution du nombre des radicaux.

On aboutit à

$$(E') \quad (a-x^2)^2 - (a+x) = 0$$

conscient de ce que toute solution de (E) satisfait à (E') sans que la réciproque soit assurée.

Ici se place un épisode extérieur au thème heuristique proposé : pour résoudre cette équation du 4ᵉ degré, il suffit de factoriser le premier membre. Par chance on réussit cette factorisation en considérant ce membre comme un polynome du second degré en a.

(E') s'écrit alors :

$$(E'') \quad (x^2 + x + 1 - a)\,(x^2 - x - a) = 0$$

(E") peut avoir jusqu'à quatre racines réelles faciles à calculer.

Cependant les élévations au carré successives ont risqué d'introduire des solutions étrangères : en fait les racines de (E") satisfont soit à (E), soit à l'une des équations $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = -x$; $\sqrt{a + \sqrt{a + x}} = x$; $\sqrt{a + \sqrt{a + x}} = -x$.

Le bénéfice recueilli par cette réduction est qu'au lieu d'avoir à chercher les solutions de (E) dans **R**, il suffit maintenant de les chercher dans un ensemble fini ayant, au plus, quatre éléments.

Ce n'est plus qu'une vérification de routine.

On peut aussi résoudre la même équation en enchaînant des équivalences. Cette méthode est "plus fatigante" : elle a cependant un mérite éducatif incontestable, obligeant le chercheur à mieux comprendre ce qui se passe.

Voici, sans commentaire, le début de cette démonstration

$$\boxed{\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a - \sqrt{a + x} = x^2 \\ \text{et} \\ x \geq 0 \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (a-x^2)^2 = a + x \\ \text{et } a \geq x^2 \text{ et } x \geq 0 \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

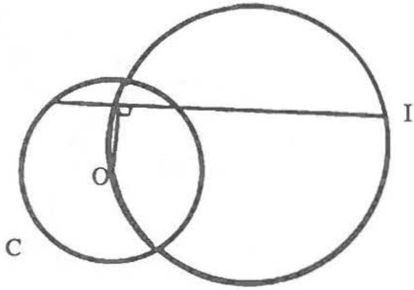
etc.

EXEMPLE 24: La même situation est fréquente en géométrie : "Etant donné un cercle C de centre O et un point I extérieur à C, trouver l'ensemble E des points qui sont les milieux des cordes de C passant par I".

On peut réduire ce problème au suivant :

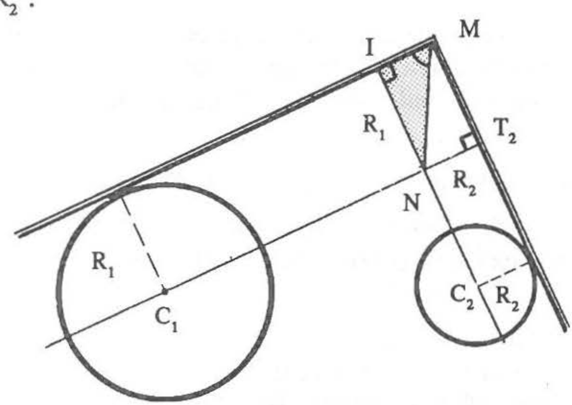
"Quel est l'ensemble E' des sommets d'un angle droit dont les côtés passent respectivement par O et I" ?

Il est clair que $E \subset E'$ et on prouve facilement que E est l'ensemble des points de E' **intérieurs au cercle** (C).



Voici, pour terminer ce paragraphe, un exemple subtil de contrôle des équivalences imparfaites.

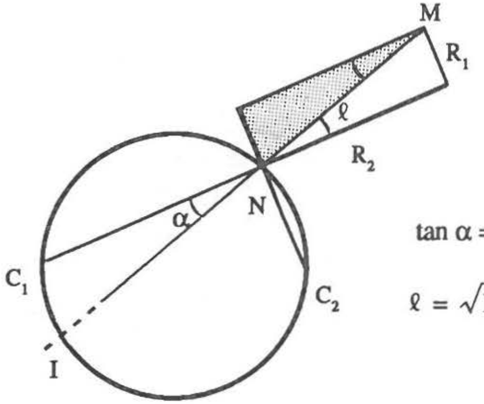
EXEMPLE 25 : "Déterminer l'ensemble des points M d'un plan euclidien d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires respectivement à deux cercles donnés de centres C_1 et C_2 et de rayons R_1 et R_2".



On en est conduit à introduire des "marchepieds" (lignes auxiliaires), ce qui aboutit à un rectangle de diagonale MN, soit $\sqrt{R_1^2 + R_2^2}$.

Extrayant une sous-figure de la précédente, on parvient au problème (O_1) suivant :

(O_1) "Quel est l'ensemble des sommets M d'un rectangle de dimensions constantes et de diagonale [MN], sachant que les deux côtés passant par N pivotent autour de deux points fixes C_1 et C_2 ? ".



$\tan \alpha = R_1 / R_2$

$\ell = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$

Traçons le cercle de diamètre $[C_1\ C_2]$, lieu géométrique de N, et remarquons que MN recoupe ce cercle en un point I **fixe** car l'angle α est **constant**. (L'erreur volontaire sera corrigée un peu plus loin) (1).

Nous voilà ramenés à un nouveau problème :

(O_2) "Une droite variable pivote autour d'un point I marqué sur un cercle donné. Elle recoupe ce cercle en N. Trouver l'ensemble des points M, alignés avec I et N, tels que la longueur MN soit égale à une constante ℓ.

On peut ensuite se poser le problème suivant :

(O_3) "Quel est l'ensemble des points dont l'équation en coordonnées polaires (ρ,θ) est (d et ℓ étant donnés) :

$\rho = d \cos\theta + \ell$.

(1) C'est à dessein que la droite MN n'est pas prolongée jusqu'au cercle : c'est la pédagogie du **flou intentionnel** déjà signalée (page 3).

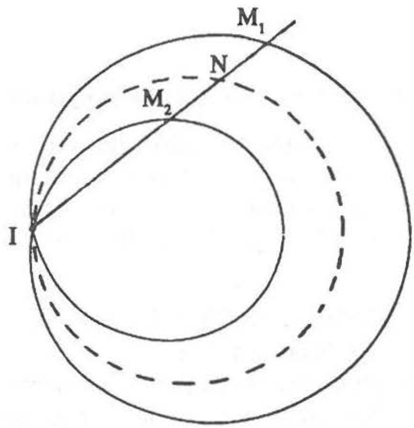
Après avoir multiplié les deux membres par ρ pour passer en coordonnées cartésiennes, on trouve :

(O_4) "Quel est l'ensemble dont l'équation cartésienne est

$(x^2 + y^2 - dx)^2 = \ell^2(x^2 + y^2)$."

Le commentaire de cet enchaînement est instructif, car il pose des problèmes typiques concernant les réductions.

Commentaire : On vérifie aisément que (O) $\Leftrightarrow$ (O_1).
Mais (O_2) n'est pas tout à fait équivalent à (O_1), car il existe deux possibilités de placer I, symétriques par rapport à la ligne des centres.
Ainsi (O_2) ne fournit que la "moitié" de l'ensemble demandé.
Mais on contrôle bien la situation, puisqu'il suffira ensuite de faire une symétrie autour de (C_1 C_2) pour obtenir l'ensemble complet.
Or la réponse de (O_2) est bien connue, de ceux qui la connaissent bien ! C'est le célèbre **limaçon d'Etienne Pascal** (le père de l'illustre Blaise).



Cette courbe est une conchoïde de cercle, qui intervient dans de nombreuses questions. C'est elle que l'on aperçoit, en buvant son petit déjeuner dans un bol, car c'est la caustique par réflexion d'un point lumineux, par rapport à un miroir sphérique.

Il s'ensuit que pour celui qui est familier avec cela, la question (O) est résolue. L'ensemble cherché est la réunion de deux limaçons de Pascal symétriques.

(Cela montre que la phrase "Résoudre le problème suivant" exige des performances qui dépendent d'un certain environnement social, et en particulier des connaissances supposées du chercheur).

Le chercheur qui ignore le fameux limaçon pourra penser que l'on attend de lui un dessin ou une équation. Dans ce cas, il pourra traduire (O_2) en coordonnées polaires.

Un examen superficiel fait craindre que (O_3) ne soit pas équivalent à (O_2), car il existe aussi des points qui satisfont à

$\rho = d \cos \theta - \ell$

Mais si l'on sait que les coordonnées (ρ,θ) et $(-\rho,\theta + \pi)$ repré sentent le même point, on vérifie sans peine que l'équation de (O_3) est équivalente à celle de (O_2).

Enfin le passage de (O_3) à (O_4) s'est effectué en multipliant par ρ , et en effectuant des élévations au carré. On en conclut que (O_4) n'est pas tout à fait équivalente à (O_3), mais la différence est aisément contrôlable.

4.3 *Enchaînement de raisons suffisantes*

Pour pouvoir apprécier les difficultés qu'éprouve un chercheur pour construire une chaîne déductive à l'envers, à partir du but, appuyons-nous sur l'exemple suivant : il a donné lieu à des observations variées de Guy BROUSSEAU et de ses élèves (cf. des publications de l'IREM de Bordeaux sur ce thème).

EXEMPLE 26 : "Qui dira 20 ? (appelé aussi "Piquet de cheval", ou encore "Course à 20").
Règle du jeu : Deux joueurs ajoutent alternativement 1 ou 2 au total déjà accumulé. On part de 0. Le gagnant est celui qui parviendra au total 20".

Il s'agit d'un cas particulier du jeu de "Qui dira n?" où l'on ajoute à chaque coup un entier strictement positif, inférieur ou égal à k. Avec n = 20 et k = 2, il est possible d'expérimenter sur de très jeunes enfants en éliminant les difficultés parasites dues à une maitrîse insuffisante de l'addition.

Les observations révèlent trois difficultés, trois seuils que le joueur doit franchir pour résoudre le problème.

D'abord, il s'agit de soupçonner, puis de prouver d'une façon suffisamment convaincante que pour dire 20, **il suffit** de dire 17. (C'est d'ailleurs nécessaire contre un adversaire qui ne joue pas des coups-suicide).

Cet obstacle est plus ou moins franchi, à la fin du stade des opérations concrètes : parvenu à 17, l'effort de prévision dans les deux éventualités où l'adversaire ajouterait 1 ou 2, ne nécessite pas un grand éloignement de la réalité tangible.

Mais le pas suivant exige un développement nettement plus avancé : il s'agit de se résoudre à jouer à "Qui dira 17 ?" bien que la règle inscrite au tableau est celle de "Qui dira 20 ?". L'enfant éprouve des difficultés à décoller de la réalité pour changer de "règles du jeu".

Mais même après avoir fait ce progrès, l'enfant doit faire un effort pour passer de 17 à 14, puis de 14 à 11, etc.

La durée des tâtonnements, pour passer d'un échelon au suivant, va en décroissant. Mais les expérimentateurs de Bordeaux n'ont jamais observé (à ma connaissance) que plusieurs écoliers brûlent rapidement les étapes : ils peuvent comprendre que pour dire 20, il suffit de dire 17 (resp. pour dire 17 ou 14 il suffit de dire 14 ou 11) sans en conclure d'un seul "mouvemement de pensée" que la chaîne peut se poursuivre jusqu'à 2.

Ce commentaire montre la nature des difficultés qui interviennent dans une recherche du type "raison suffisante" prolongée :

$$? \Rightarrow ? \Rightarrow ? \Rightarrow M_{11} \Rightarrow M_{14} \Rightarrow M_{17} \Rightarrow C_{20}$$

4.4. *Enchaînements de raisons nécessaires à partir du but et "raisonnement plausible".*

A première vue, il paraît saugrenu pour chercher à démontrer une proposition $H \Rightarrow C$ de commencer à tirer des conséquences de C !

Plus précisément, en construisant une chaîne telle que

(1) $(H\ ?) \ldots \Leftarrow M_2 \Leftarrow M_1 \Leftarrow C$

on ne pourra conclure que si l'une des conséquences M_i de C est fausse. Alors on aura démontrer que

$$\text{non}\,(H \Rightarrow C)$$

est un théorème (de la théorie que l'on étudie). Mais même si l'on parvient à descendre jusqu'à $C \Rightarrow H$ et que l'on sache que H est vrai, on ne pourra conclure.

C'est déjà ce qu'Aristote enseignait dans les "Premières Analytiques - Livre II" :

"De prémisses vraies on ne peut tirer une conclusion fausse, mais de prémisses fausses on peut tirer une conclusion vraie". Il cite, entre autres, l'exemple suivant :

"Toute pierre est un animal,
Aucun cheval n'est un animal
Donc aucun cheval n'est en pierre"

où deux prémisses notoirement fausses aboutissent à une conclusion réputée vraie. Henri POINCARÉ exprime la même idée sous une forme plaisante:

"Une proposition fausse quelconque implique toutes les autres propositions vraies ou fausses....." Il suffit (pour s'en convaincre) d'avoir corrigé une mauvaise thèse de mathématiques. Le candidat se donne beaucoup de mal pour trouver la première équation fausse ; mais dès qu'il l'a obtenue ce n'est plus qu'un jeu pour lui d'accumuler les résultats les plus surprenants, dont quelques-uns peuvent même être exacts !".

Pourtant, on utilise couramment, dans la recherche de problèmes, des chaînes telles que (1).

Citons un texte surprenant du célèbre mathématicien Gabriel LAMÉ (1795-1870) :

"Pour prouver synthétiquement une proposition, on l'énonce d'abord, et si l'on en déduit une vérité déjà connue, il n'est plus permis de douter du principe d'où l'on est parti ; on acquerrait la même certitude, si partant de résultats absolument contraires au proposé, on était conduit dans tous les cas à des conséquences évidemment absurdes. Mais de ce que la Synthèse suppose la chose existante et la démontre ensuite, il ne faut pas conclure, comme on le fait quelquefois, qu'une solution est synthétique lorsque pour la trouver on a d'abord supposé son existence. Pour être en droit de lui donner ce nom, il faut énoncer entièrement la manière de la construire, ou ce qui revient au même, la valeur de l'inconnue du problème ; il faut de plus la démontrer immédiatement".

LAMÉ (1818)

Ne commet-il pas la faute grossière qu'Aristote nous avait appris à éviter ?

Dans la pratique, il est fréquent qu'une démarche aussi fautive ne cause cependant pas trop de dégâts. En effet, il arrive que le chercheur établisse l'implication $X \Rightarrow M$ alors qu'en fait il aurait pu démontrer $C \Leftrightarrow M$. La chaîne (1) pourrait alors être remplacée par une chaîne d'équivalences. Il a ainsi la chance d'arriver à un résultat juste, par une voie incorrecte.

Mais l'utilisation de chaînes telles que (1) a une utilité heuristique incontestable dans de nombreux cas : elle conduit souvent à la découverte de nombreux îlots qui pourront servir à construire ultérieurement une démonstration correcte :

Supposons par exemple que l'on veuille démontrer un théorème T. On pourra commencer par déduire une conséquence T_1 de T, et parvenir à démontrer le théorème T_1 (a priori "plus faible" que T).
De $T \Rightarrow T_1$ et (T_1 est vrai), on ne peut rien conclure sur la valeur de vérité de T. Mais, dans la pratique, il est possible que la démonstration de T_1 constitue une étape décisive pour **deviner** une démonstration de T.

EXEMPLE 27 : "Démontrer que la fonction numérique f définie sur]0,1] par

$$f(x) = \text{Arc sin}\,(2x-1) + 2\,\text{Arc tan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

est égale à la constante $\frac{\pi}{2}$ ".

Une méthode raisonnable consistera à démontrer d'abord que la dérivée f' est nulle.

Le résultat ainsi démontré est plus faible que celui qu'on demande. Mais il est néanmoins suffisamment fort, car il implique aussitôt que f est constante, et la substitution à x d'une valeur particulière (par exemple 1 ou 1/2) permettra de déterminer cette constante.

L'emploi de chaînes de déduction non conclusives telles que (1) est un outil efficace pour formuler des conjectures. G. POLYA a consacré tout un livre remarquable à expliquer l'importance heuristique du **raisonnement plausible**. [POLYA (1957)]
Voici encore un exemple, donné par cet auteur.

EXEMPLE 28 : "Un attentat à la dynamite a été commis. Or la veille du crime, Monsieur X, habitant de la ville, s'est procuré de la dynamite". Qu'est-ce que cela prouve ?

La conjecture C est (X est coupable). Notons C_1 = (X s'est procuré de la dynamite). C implique C_1.

Des deux affirmations ($C \Rightarrow C_1$) et (C_1 est vrai), on ne peut rien conclure. Mais si le juge d'instruction prouve C_1, il renforce la plausibilité de C.

S'il s'avère que X exerce une profession qui ne lui donne jamais l'occasion de se procurer de la dynamite, la plausibilité est encore plus forte.

En tout cas, le juge d'instruction n'aura aucun scrupule à demander des comptes à Monsieur X, sans rejeter a priori la possibilité que le vrai coupable ait dérobé la dynamite à X.

C'est ainsi que la chaîne (1), non conclusive du point de vue de la rigueur, peut s'avérer très utile du point de vue heuristique.

5. LA MÉTHODE DE LA MAQUETTE

5.1 *Maquette*

Une des significations les plus répandues attribuées au mot "analyse" utilise la formule critiquable "**supposons le problème résolu**". Il s'agit d'une méthode d'examen de la situation (2.3).

Elle s'applique à des problèmes dont l'énoncé comporte des clauses restrictives sur la manière d'obtenir l'inconnue.

EXEMPLES :

- Construction géométrique, **à la règle et au compas** (ou plus généralement à l'aide d'un matériel inventorié à l'avance).
- Calcul à effectuer avec un équipement précisé.
- Résolution d'une équation en calculant les racines à partir des données à l'aide d'opérations qui ont été préalablement inventoriées.
- Découverte d'une démonstration d'un théorème, en n'invoquant que des connaissances inscrites au programme d'une classe déterminée.

Pour résoudre un tel problème, il est souvent utile de connaître au préalable des propriétés de l'objet que l'on veut reconstituer.

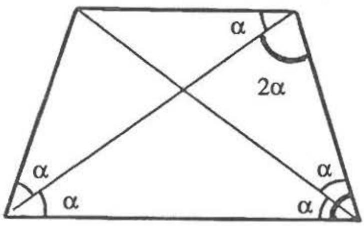
Pour y parvenir on commence par réaliser une **maquette**, une **figure d'étude** que l'on pourra contempler et sur laquelle on pourra raisonner.

On commence alors par résoudre un problème auxiliaire beaucoup **plus facile** : l'énoncé s'obtient en négligeant les clauses restrictives dans l'énoncé donné. Il est donc tout à fait abusif de proclamer "supposons le problème résolu", alors que l'on se propose d'éliminer la principale difficulté du problème !

Dans d'autres cas, la maquette peut être dessinée d'une façon approximative,et être obtenue par tâtonnements.

EXEMPLE 29 : Construire à la règle et au compas un trapèze isocèle tel que la petite base et les deux côtés obliques d'une part, et la grande base et les deux diagonales d'autres part aient même longueur. (C'est un des sous-problèmes de l'exemple 15).

Pour y voir clair, il suffit de dessiner à main levée une figure illustrant à peu près la situation à réaliser. Cela suffit pour y reconnaître la présence d'un angle α tel que $5\alpha = 180°$.



Cela suggère que la figure à construire est obtenue à partir de quatre sommets d'un pentagone régulier, figure que l'on sait construire à la règle et au compas.

Un procédé courant pour tracer une figure d'étude est de se poser provisoirement un problème auxiliaire où le rôle des données et des inconnues est interverti. (3)

Par exemple s'il s'agit du problème classique :

"Construire un cercle Γ tangent à trois cercles données C_1, C_2, C_3", on obtiendra une maquette en commençant par tracer le cercle Γ et en ajoutant à la figure trois cercles C_1, C_2, C_3 tangents à Γ. En réalisant ce dessin on s'efforcera de ne pas "particulariser" la situation : on évitera des cercles de même rayon disposés d'une façon symétrique. On obtiendra ce qu'on appelle une **figure générique**. Ce sera l'occasion de remarquer que les cercles C_i peuvent être tangents intérieurement ou extérieurement à Γ, ce qui suggère a priori de nombreux cas de figures.

Si l'on craint d'être trop influencé, dans la recherche, par un seul de ces cas, on n'hésitera pas à dessiner plusieurs maquettes d'aspect fort différent et on raisonnera simultanément sur ces figures.

Le champ d'application de la méthode de la maquette déborde celui des problèmes de construction géométrique. En voici un exemple :

EXEMPLE 31 : On se propose de résoudre l'équation $x^3 + px + q = 0$ **par radicaux.**

On sait (théorème de d'Alembert-Gauss) que cette équation admet trois racines (non nécessairement distinctes) que l'on appellera x_1, x_2, x_3.
Cela ne résout pas le problème de leur calcul par radicaux, mais on peut obtenir une sorte de maquette de la situation en écrivant

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x-x_2)(x - x_3)$$

On en déduit $$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = p \\ x_1 x_2 x_3 = -q \end{array}\right.$$

et grâce au théorème de Newton on trouve que les fonctions algébriques de x_1, x_2, x_3 qui peuvent s'exprimer en fonction rationnelle de p et q sont précisément celles qui sont symétriques.
Poursuivant l'examen de la situation on aboutira au calcul de :

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

(qui est le discriminant de l'équation).

Δ n'est pas symétrique, mais son carré Δ^2 l'est. Ainsi Δ se calcule comme une racine carrée d'une fonction algébrique rationnelle en p et q.

Le raisonnement se poursuit jusqu'à l'obtention de la formule de Cardan : nous n'insisterons ici que sur la pratique qui consiste à raisonner sur des quantités qu'il s'agissait précisément de déterminer à l'aide de procédés préalablement énumérés.

5.2 L'aller et le retour

L'examen de la situation, à l'aide d'une maquette, fait intervenir un problème auxiliaire. Il est donc indispensable de revenir, en fin de recherche, aux conditions strictes du problème posé.

Les auteurs classiques ont beaucoup insisté sur ce flux et ce reflux, sur les deux étapes du processus de recherche :

La première phase est traditionnellement appelée "analyse". Elle l'est à plus d'un titre : c'est une méthode de recherche et de découverte (2.2), un examen de la situation (2.3), une traduction de l'énoncé en une figure ou un diagramme (2.3.3), un démontage (2.4.4), l'illustration d'un problème contraire (3.2) et par conséquent un "raisonnement à l'envers".

Dans **la seconde phase** (appelée généralement "synthèse") on revient au problème initial. L'esprit chemine maintenant **des données** vers **les inconnues**, en respectant cette fois-ci toutes les contraintes de l'énoncé.

Comme l'abandon de certaines conditions de l'énoncé passait naguère pour du laxisme (même lorsque cet abandon était conscient et délibéré) on admettait que la "synthèse" était la phase **rigoureuse** du raisonnement. La première phase heuristique ne fournissait que les idées, sans offrir de garantie de discipline intellectuelle.

Cette seconde phase conduit à élaborer un **algorithme** qui permet de construire ou de calculer les inconnues à partir des données. L'invention de cet algorithme n'offre généralement plus aucune difficulté lorsque la première phase s'est déroulée de façon satisfaisante.

On met donc cet algorithme en œuvre, et c'est le moment d'examiner si, pour certains choix des données, l'exécution de l'algorithme ne se heurte pas à des obstacles. Cet épisode s'appelle la **discussion du problème** : par exemple, s'il est demandé de prendre l'intersection de deux cercles C_1 et C_2 qui viennent d'être construits, l'algorithme tournera court si C_1 et C_2 sont disjoints, et il se poursuivra peut-être dans des voies différentes selon que C_1 et C_2 sont sécants ou tangents.

Généralement cet épisode peut s'effectuer presque machinalement, après un dressage approprié. Les qualités requises sont la minutie et l'attention.

On remarquera que dans l'enseignement français fortement orienté vers la bachomanie, on surestime quelque peu l'importance des rites de cette seconde phase et notamment de la discussion. Le candidat moyen au baccalauréat et même au concours d'entrée dans une Grande Ecole n'aura généralement pas à faire preuve d'une grande capacité d'invention : l'énoncé du "problème" fournira explicitement les idées nécessaires pour résoudre le problème. Mais, par contre, le jury ne pardonnera pas un faux pas, dans la conduite de la discussion d'un problème. Et au milieu du siècle, on jugeait la réussite d'une éducation mathématique sur l'aptitude à discuter un problème du second degré : cet abus a été dénoncé sous le nom de "trinomite".

Cependant, il y a quelques cas où la discussion n'est pas un rite aussi stérile : parfois elle révèle les relations qui doivent être satisfaites entre les données pour que le problème admette des solutions.

Par exemple, en discutant le problème "Trouver deux nombres réels dont la somme et le produit sont donnés", on aboutit au théorème :

" Le produit de deux nombres réels est toujours inférieur ou égal au quart du carré de leur somme".

6. LA SYNTHÈSE, SYNONYME DE DISSIMULATION DE L'HEURISTIQUE

Lorsque l'aller-retour a été mené à bien, il reste encore à accomplir une tâche. C'est de gommer toute allusion à la démarche qui a servi à trouver la solution, et d'éliminer tous les pas inutiles pour aboutir à un discours aussi concis que possible.

Et c'est ainsi qu'apparaît le dernier trait généralement attribué à ce que traditionnellement on nomme "synthèse" :

"Opérer une "synthèse", c'est dépersonnaliser et déshumaniser le discours mathématique" !!

7. CONCLUSION

Nous venons de décrire et d'énumérer une cinquantaine de significations que l'on attribue généralement à "l'analyse" et à la "synthèse". Les différences sont patentes. Cependant il arrive que certains des thèmes heuristiques se mélangent dans un même processus de recherche : nous venons de le dire à propos de la méthode de la maquette. De plus, on peut signaler quelques analogies superficielles qui apparaissent dans des démarches intellectuelles différentes. Ces analogies ont contribué à renforcer la confusion entre des cheminements de pensée distincts :

Par exemple, la traduction offre deux volets : **la version** et le **thème**, le **décryptage** et le **codage**, qui évoquent l'opposition entre **démontage** et **reconstruction**, entre enchaînement **direct** d'arguments et raisonnement **à l'envers.**

Et ce sont ces analogies qui ont contribué à embrouiller la question. C'est ainsi que tous les auteurs classiques ont célébré les louanges de la citation suivante de PAPPUS, où en quelques phrases apparaît un mélange confus de cinq significations distinctes :

> *" L'* ἀναλυόμενος, *pour l'appeler par son nom, est, en résu-*
> *mé, une doctrine spéciale à l'usage de ceux qui, après avoir*
> (1) *étudié les éléments ordinaires, désirent s'attaquer à la solution*
> *des problèmes mathématiques ; et elle ne sert qu'à cela. Elle*
> *est l'œuvre de trois hommes : Euclide, auteur des Eléments,*
> *Apollonius de Perga et Aristaeus l'aîné. Elle enseigne les mé-*
> *thodes d'analyse et de synthèse.*
> *Dans l'analyse, partant de ce qui est demandé, nous le*
> (2) *considérons comme admis, nous en tirons les conséquences,*
> *puis les conséquences de celles-ci, jusqu'à atteindre un point*
> *que nous puissions utiliser comme point de départ pour une*
> (3) *synthèse. Car dans l'analyse nous admettons que ce qu'on nous*
> *demande de faire est déjà fait, ce qu'on cherche, déjà trouvé,*
> *ce qu'il faut démontrer, exact. Nous cherchons à partir de quel*
> *précédent on pourrait déduire le résultat désiré ; ensuite nous*
> (4) *cherchons quel pourrait être le précédent de ce précédent, et*
> *ainsi de suite, jusqu'à ce que, passant d'un précédent à un*
> *autre, nous trouvions finalement quelques chose de connu, ou*
> (5) *d'admis comme exact. Nous appelons ce processus analyse, ou*
> *solution à rebours, ou raisonnement régressif."*

cité entre autres dans POLYA (1957) et DUHAMEL (1865).

(1) Méthode de recherche (2.2)
(2) Déduction par raison nécessaire à partir du but
(3) Méthode de la maquette
(4) Déduction par raison suffisante à partir du but
(5) Raisonnement "à l'envers"

8. RETOUR SUR LES TAXONOMIES (1.2)

On a déjà signalé que B.S. BLOOM situait en haut de son échelle de compréhension cognitive deux niveaux appelés respectivement "niveau 4" ("Analyse") et "niveau 5" ("Synthèse").

Cette classification est inadaptée à l'enseignement des mathématiques, parce qu'elle ne tient pas compte du "décorticage" auquel nous nous sommes livrés dans cet article.

Par exemple, nous venons de voir (5) que la discussion d'un problème était traditionnellement considérée comme une activité synthétique. Mais on aura peine à admettre que le candidat-bachelier qui restitue la discussion d'un problème-standard est nécessairement doué d'esprit synthétique.

En réalité la distinction ne se fera pas sur l'exécution (automatique) d'une discussion ou d'une vérification mais plutôt sur une prise de conscience.

EXEMPLE 30 : Trouver deux nombres entiers positifs tels que

$$(E)\quad \begin{cases} n^{17} + m^{17} = 232\,632\,643\,127\,370 \\ n^{13} - m^{13} = 96\,887\,416\,084 \end{cases}$$

Si (n, m) est une solution de E, n et m doivent être inférieurs à 10 et satisfaire aux congruences (mod 10)

$$(E')\quad \begin{cases} n^{17} + m^{17} \equiv 0 \\ n^{13} - m^{13} \equiv 4 \end{cases} \qquad (\text{mod } 10)$$

On en déduit (après avoir remarqué que, pour tout entier p , $p \equiv p^{17} \equiv p^{13}$ (mod 10)) que la solution (si elle existe) est (7 ; 3).
Il reste à s'assurer que ce couple (7 ; 3) satisfait bien à (E). Mais un argument (mod 3) montre que ce n'est pas le cas. Le chercheur qui vient de trouver que le couple (7 ; 3) demande impérativement à être vérifié se situe à un niveau très haut du développement intellectuel. Par contre, celui qui n'entreprend cette vérification que par sécurité sans en ressentir la nécessité inéluctable accomplit la même vérification sans faire preuve "d'esprit synthétique".

De même l'aptitude au "démontage" ne correspond pas à un seul niveau cognitif.

Mais nous ne suivrons pas le discrédit porté sur tout effort de recherche en direction des taxonomies.

La didactique des mathématiques réclame des instruments de plus en plus raffinés pour évaluer les objectifs pédagogiques, pour apprécier où se situent les difficultés des exercices que l'on soumet aux élèves, et pour juger de l'efficacité de certaines stratégies didactiques.

La voie qui mène à des taxonomies efficaces (qui ne sont pas seulement dirigées vers l'objectif dérisoire des "tests") se situe en prolongement de l'effort qui a été entrepris dans ce chapitre.

Tout cela doit donner lieu à des observations, des expériences, des épreuves et des contre-épreuves.

C'est ainsi que progressera une didactique des mathématiques vivantes.

BIBLIOGRAPHIE

ARNAULD et NICOLE (1662). La logique ou l'art de penser
(dite : "La logique de Port-Royal") FLAMMARION - Paris 1978

BERGE (Claude) - Théorie des graphes et ses applications
Dunod - Paris 1967

BERTIN Jacques - La graphique - L'analyse des images - Communication n° 15 - 1970 (publié par le Centre d'Etude des Communication de masse) - Paris

BISHOP Allen - Visual mathematics
Schriftenreihe des Institut für Didaktik der Mathématik 3 / 1974
Universität Bielefeld

BLOOM B.S. Taxonomie des objectifs pédagogiques - Traduction française de M. Lavallée - Edition moderne - Montréal 1969

BOULIGAND Georges - Premières leçons sur la théorie générale des groupes - Paris Vuibert 1935

BOUTROUX Pierre - L'idéal scientifique des mathématiciens
F. ALCAN 1970

CHOQUET (Gustave) - Algèbre des ensembles
(Les cours de la Sorbonne CDU - SD)

DUHAMEL (Jean-Marie) - Des méthodes dans les sciences du raisonnement
Paris Gauthier - Villars 1865

GLAESER Georges - Comment l'histoire de la géométrie analytique peut aider les professeurs dans leur enseignement - 4ème Ecole d'Eté de Didactique (1986) IREM Paris 7 ou "L'Ouvert" n° 46 sept. 1986

HUNGARIAN PROBLEM BOOK - New Mathematical Library

IREM de Strasbourg - Le Livre du Problème - Fasc. 1 - Pédagogie de l'exercice et du problème (L. P. 1) - Cedic Paris 1973

KLEIN (Félix) - Le programme d'Erlangen
Paris Gauthier - Villars 1977

KŒHLER (Wolfgang) - L'intelligence des singes supérieurs
Paris Alcan 1927

LAMÉ (Gabriel) - Exposé des méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie - Paris Hermann (1818)

PERELMAN (Jacques) - Expériences et problèmes récréatifs
Editions MIR - Moscou 1974

PETERSEN (Julius) - Méthodes et théories des constructions géométriques
Gauthier -Villars 1916

PERRIN (Jean) - Les Atomes
(P.U.F. Paris 1948)

PLUVINAGE (François) - Difficultés des exercices scolaires
(Thèse - Strasbourg 1977)

POINCARÉ (Henri) -Science et méthode
Flammarion Paris.

POLYA (Georges) - Comment poser et résoudre un problème
Paris Dunod 1957

POLYA (Georges) - La découverte des mathématiques
Paris Dunod 1967

SALMON (Georges) - Traité de géométrie analytique
Gauthier -Villars 1870

Y. TOURNEUR - Taxonomie des objectifs pédagogiques
Etude du modèle NLSMA - Mathematica et Paedagogia (Bruxelles) n° 57-1972

DIVERSES ACCEPTIONS DES TERMES "ANALYSE" ET "SYNTHÈSE"

(1.3) * Des sciences appelées ANALYSE

(2.1) * L'ANALYSE c'est le calcul	* SYNTHÈSE = raisonnement verbal.
(2.2) * ANALYSE = heuristique = méthode de résolution = méthode d'invention	* SYNTHÈSE = méthode d'exposition = méthode de doctrine
(2.3) * ANALYSE de la situation (2.3.1) traduction en langage scientifique (version) (2.3.2) mise en équation (2.3.3) traduction iconique	* SYNTHÈSE = traduction en langue vulgaire (thème)
(2.4) * ANALYSE = méthode de décomposition (2.4.3) en constituants simples (2.4.3) en structures sous-jacentes (2.4.4) démontage	* SYNTHÈSE = méthode de composition = méthode de reconstruction
(3) * ANALYSE = raisonnement à l'envers de la conclusion à l'hypothèse ; des inconnues aux données ; du présent au passé.	* SYNTHÈSE = raisonnement à l'endroit = phase rigoureuse du raisonnement

ISBN 2-902680-52-X

IGR Imprimerie Lyon - Compo P.A.O. et montage : Atelier M. MICHAUD Lyon
Façonnage ALAIN