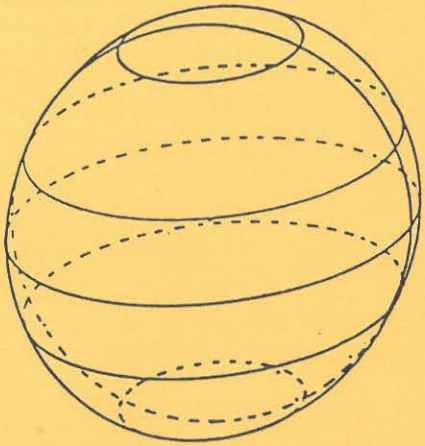
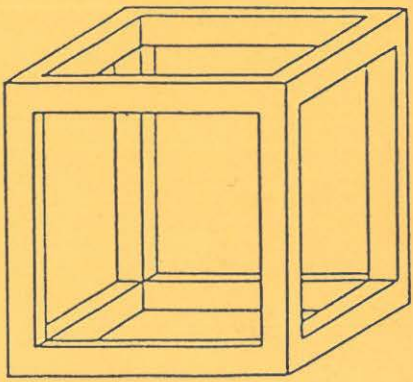
GÉRARD
AUDIBERT



LA PERSPECTIVE CAVALIÈRE



Publication de
l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Publics) 1990

N° 75

QU'EST-CE QUE L'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe des enseignants concernés par les mathématiques de la Maternelle à l'Université.

Ces maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux (de la Maternelle à l'Université), mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique et conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec les Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association, ainsi qu'un Bulletin Grande Vitesse (BGV) (6 numéros par an) qui est un supplément au bulletin vert, contenant des informations... qui ne peuvent attendre. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3e, Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

A.P.M.E.P.
26 rue Duméril, 75013 PARIS
(1) 43.31.34.05

PRÉFACE

Bien que rédigé et signé par une seule personne ce livre est en fait l'émanation d'une collectivité.

Il est dû pour l'essentiel aux recherches sur l'enseignement de la géométrie réalisées depuis 1976 à l'IREM de Montpellier par une équipe que dirige l'auteur. Les enseignants ayant fait partie de cette équipe durant les années 1987, 1988 et 1989 sont les suivants : AMSALEM A., AUDIBERT G., BASCOU N., BELLECAVE Y., BONAFÉ F., BRUNET R., CHEVALIER A., DRAY L., JABOT H., LEROUGE A., MURGIER T., NAUDEILLO J., PAIS L.C., RIOS G., SAUTER M.

Cette équipe a reçu une aide morale et matérielle de divers organismes sans lesquels ses travaux n'auraient pas pu aboutir. Cette aide provient du Greco Didactique et acquisition des connaissances scientifiques ; de l'Institut National de Recherche Pédagogique ; de la Mission Académique de Montpellier ; de l'Inspection Pédagogique Régionale de cette même académie.

Nous remercions chaleureusement l'APMEP qui a accepté d'éditer ce livre.

Dans l'introduction Robert BRUNET propose un aperçu pédagogique et historique tandis que Jean FAGES examine l'aide apportée par les ordinateurs à la vision de l'espace. Les treize dessins humoristiques ont été réalisés par Joël DOUDOUX.

Le texte qui suit est divisé en trois parties et en dix-septs chapitres, accompagnés d'un lexique. Chaque chapitre est précédé d'un résumé de quelques lignes.

La première partie et surtout utile à l'enseignement du premier cycle. Les parties deux et trois sont plus proches de l'enseignement du second cycle.

Le chapitre de conclusion et certains paragraphes des chapitres qui le précèdent, sont réservés à une réflexion didactique, alors que la plupart des paragraphes présentent essentiellement des aspects mathématiques et techniques.

Ce livre s'adresse à tous les scientifiques ; tout d'abord aux enseignants de l'enseignement secondaire et technique dans les disciplines telles que : technologie, mathématique, physique, chimie, sciences naturelles, géographie ; ensuite aux étudiants de terminale et des deux premières années d'études supérieures ; enfin à tous les techniciens utilisant l'espace à trois dimensions et ne maîtrisant aucun dessin technique.

Son objectif est de présenter une technique de dessin, la perspective cavalière, qui n'a fait l'objet d'aucun traité à notre connaissance jusqu'à ce jour, d'examiner ses règles de traçages et les concepts qui la fondent. Ce livre veut accroître ainsi les connaissances nécessaires à la maîtrise de l'espace par un usage réfléchi d'un dessin technique qui peut être abordé très tôt dans l'enseignement (le premier chapitre est directement utilisable en classes de 6e et 5e) et qui fait souvent défaut à un niveau relativement élevé des études scientifiques (au niveau des licences de mathématique ou de physique par exemple).

Certaines parties du texte ont été utilisées en formation des maîtres. C'est le cas notamment des chapitres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 15 et 16.

Cette perspective cavalière sera complétée ultérieurement par un fasciscule d'exercices ; c'est du moins notre volonté...

Pour les besoins de la mise en page certaines figures ont été agrandies ou rapetissées ; donc, parfois, deux figures comparables ne le sont qu'à une similitude près.

INTRODUCTION

APERÇU PÉDAGOGIQUE et HISTORIQUE
par R. BRUNET

Le passage de l'étude et de l'enseignement de la géométrie plane à l'étude et à l'enseignement de la géométrie dans l'espace pose aux enseignants des problèmes nouveaux et présente pour les élèves des difficultés d'un autre ordre.

Ces difficultés sont souvent perçues ou énoncées comme une fatalité, certains élèves étant supposés "voir dans l'espace" d'autres "ne pas voir dans l'espace", cette vision ayant le caractère d'un don du ciel.

Si nous essayons d'analyser les difficultés/différences, par exemple en regardant travailler des élèves, on s'aperçoit qu'en géométrie plane la figure qu'on réalise pour résoudre le problème est elle-même l'objet de l'étude. Si l'énoncé donne un triangle, pour celui qui trace le triangle il y a naturellement indentification entre l'objet et le dessin. On peut mesurer les éléments de la figure, on peut la modifier, étudier des cas particuliers, ce qui a fait dire que la géométrie plane élémentaire était une science expérimentale. Cela tient au fait que nous travaillons sur des surfaces planes, tableaux, feuilles de papier et que nous pouvons réaliser ainsi des représentations à l'identique des objets étudiés.

Quand on passe à l'étude des objets à trois dimensions, cette démarche d'identification n'est plus possible. Il faut, pour la prolonger, travailler sur des maquettes ; mais on connaît les limites de cette méthode. Si, au début de l'apprentissage, les maquettes sont incontournables - il semble difficile de les éléminer - on est rapidement confronté à des difficultés techniques importantes qui se doublent rapidement de blocages idéologiques pour certains : réaliser une maquette cela n'est pas faire des mathématiques, c'est tout au plus bricoler, alors que réaliser une construction avec des instruments c'est déjà une activité mathématique. On se trouve donc devant la nécessité de dessiner dans un plan des objets tridimensionnels.

La première solution théorique en a été donné à Florence au début du XV^{e} siècle avec l'invention et la théorisation de la perspective linéaire. Les historiens s'accordent pour attribuer l'invention à un architecte de terrain Filippo Brunelleschi (1377-1446) et la première théorie à un architecte lettré Léon Baptiste Alberti (1404-1470), dans son traité "De Pictura" (1435). Le premier a réalisé

l'expérience suivante : après avoir dessiné sur des tablettes de bois le baptistère de la cathédrale de Florence et une vue de la place de la seigneurie, il perçait un trou dans le bois et plaçait les tablettes, in situ, face à un miroir. On observait par le trou l'image du dessin dans le miroir. Le génie du dispositif est de rapprocher la vision de la projection centrale en obligeant d'une part à regarder avec un seul œil, ce qui élimine la paralaxe des deux yeux, et d'autre part à empêcher les mouvements de balayage de l'œil. Ces expériences devaient montrer l'efficacité de la méthode utilisée pour réaliser les dessins c'est-à-dire de la perspective linéaire.

Mais Brunelleschi n'a pas laissé de description des procédés qu'il utilisait pour dessiner. Le premier ouvrage sur la perspective était du à Alberti qui dans un livre destiné aux peintres décrit la première construction géométrique aboutissant à une représentation en perspective : la "construction légitime" ou construction selon des règles. C'est la naissance de la perspective linéaire qui allait avoir une importance fondamentale tant dans le domaine artistique que dans le domaine scientifique puisque deux cents ans plus tard Desargues faisait explicitement référence à Alberti pour poser les fondements de la géométrie projective.

A partir de ce moment, les études et les traités sur la perspective se multipliaient pendant près d'un siècle et on voit l'évolution des idées : partant d'une représentation conventionnelle d'un objet de type géométrique on arrivait à la conception de l'espace infini en passant par ce qu'on appellait à l'époque une "boîte d'espace" c'est-à-dire un pavé droit de grandes dimensions, une salle vue de l'intérieur. Cette progression n'est pas sans intérêt pour l'enseignement et on peut penser que pour faciliter aux élèves l'accès aux géométries de l'espace, il est important de leur enseigner la géométrie dans l'espace c'est-à-dire de les familiariser avec les objets tridimensionnels et leurs propriétés par l'intermédiaire d'une représentation codifiée.

Des modes de représentations codifiés nous en possédons plusieurs qui sont utilisés dans divers domaines et choisis en fonction de leur efficacité à mettre en évidence certaines propriétés des objets étudiés ou de l'espace dans lequel on travaille. C'est ainsi, par exemple, qu'on utilise des projections stéréographiques en astronomie et en cristallographie.

Dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace et dans les ouvrages qui en traitent, le mode de représentation utilisé est la perspective cavalière c'est-à-dire une projection oblique faite sur un tableau vertical parallèle à l'une des trois faces principales de l'objet. Construire une perspective cavalière revient à dessiner une ombre solaire complète.

L'origine de cette perspective est mal connue, on sait qu'elle a été souvent

utilisée et depuis fort longtemps dans les dessins de projets de travaux de fortification et en particulier dans les projets de terrassement, mais l'origine de son nom reste incertaine. Certains avancent qu'il vient du mot cavalier (1546) qui désigne un ouvrage de fortification à la Vauban, cet ouvrage dominant les retranchements à l'arrière, la perspective cavalière serait une vue d'arrière et de haut. D'autres pensent plus simplement que la perspective cavalière rend ce que voyait un cavalier arrivant en vue des fortifications. D'autres, enfin, trouvent l'origine du mot dans les travaux d'un italien Cavalieri.

Même si l'on repère avant le XVe siècle des représentations d'objets selon des procédés qui font penser à la perspective cavalière, l'antériorité de la théorie de la perspective linéaire conduit à penser que la codification de la cavalière y trouve ses origines, même si nous ne connaissons pas le processus historique de passage de l'une à l'autre.

Quelles que soient ses origines et quelle que soit l'origine de son nom, la perspective cavalière est depuis fort longtemps liée à la géométrie dans l'espace. Cette permanence tient à un certain nombre de propriétés.

En particulier, une figure de front a pour projection cylindrique une figure égale et de plus deux figures égales situées dans deux plans frontaux différents ont pour projections cylindriques des figures égales ce qui est contraire à la vision mais conforme à la réalité des objets. D'autre part, les droites de l'espace perpendiculaires au plan du tableau, c'est-à-dire au plan de projection et donc parallèles entre elles, ont des projections parallèles entre elles suivant la direction des fuyantes du dessin. Enfin, en perspective cavalière, les rapports des longueurs parallèles se conservent ainsi que l'équipollence des vecteurs, les barycentres et en particulier les milieux et les symétries centrales. Ces propriétés expliquent d'une part la facilité de mise en œuvre de la perspective cavalière et d'autre part la possibilité d'utiliser ces figures comme support de raisonnement dans la résolution des problèmes de géométrie dans l'espace. En effet, le dessin en perspective cavalière nécessite de se donner la direction des fuyantes c'est-à-dire la perspective d'une droite perpendiculaire au plan de projection et un nombre, le rapport suivant lequel les longueurs sur cette perpendiculaire sont modifiées. Avec un angle et un rapport convenablement choisis, le dessin se réalise avec une règle et une équerre, instruments simples et faciles à utiliser.

La conservation dans le dessin d'un maximum de propriétés tant affines que métriques de l'objet permet, sans atteindre à la puissance des dessins à l'identique de la géométrie plane, d'utiliser les perspectives cavalières comme une aide importante à la résolution des problèmes de géométrie dans l'espace. si on se

place à un niveau théorique, les travaux de P. Lobry et F. Verrier à l'IREM de Lille étudiant les modes de représentation en tant que transformation plane, montrent que la perspective cavalière est une affinité qui conserve la droite à l'infini du plan et de ce fait on peut penser que cette représentation induit au niveau du plan une géométrie affine ce qui n'est pas en contradiction avec l'enseignement de la géométrie élémentaire dans les collèges et les lycées.

Enfin, il est tout à fait remarquable de constater que les figures, dans les ouvrages de géométrie de l'espace, sont généralement des perspectives cavalières, y compris dans ceux dont le but est de décrire d'autres modes de représentation comme le "Traité de géométrie descriptive" de C. Roubaudy (1916) ou le "Traité de perspective linéaire" de J. Pillet (1888).

Il serait dommage de se priver dans l'enseignement de la géométrie de l'espace d'un procédé simple à mettre en œuvre, efficace pour atteindre les objectifs fixés et utilisé de façon générale pour représenter la plupart des objets étudiés. Encore faut-il bien connaître la perspective cavalière, c'est ce à quoi le livre nous aidera.

VISION DE L'ESPACE et ORDINATEURS

par J. FAGES

Le problème de la représentation dans un plan d'un objet de l'espace conduit, quel que soit le mode de représentation choisi, à de nombreux calculs, souvent complexes si l'objet à représenter n'est pas très simple. Il est naturel de faire prendre en charge tous ces calculs par une machine ; si cette machine a de plus vocation à réaliser des dessins géométriques plans par l'intermédiaire d'un écran graphique, d'une imprimante graphique ou d'une table traçante, c'est-à-dire si l'on prend un ordinateur, on obtient un outil privilégié pour réaliser cette représentation plane des objets de l'espace.

Il y a déjà longtemps que dans l'industrie s'utilisent les logiciels de Dessin Assisté par Ordinateur ou de Conception Assistée par Ordinateur pour réaliser les projets. Dans les bureaux d'études, les ordinateurs couplés à des tables traçantes remplacent peu à peu les tables à dessin. Dans certaines sections de l'enseignement technique, on utilise parfois des logiciels de D.A.O. comme AUTOCAD ou GEO3D. Dans les nouveaux programmes de Technologie des Collèges, figure l'utilisation par les élèves de logiciels de dessin technique. Mais il n'est pas encore entré dans les mœurs des professeurs de Mathématiques des Lycées et Collèges d'utiliser un ordinateur comme auxiliaire pédagogique pour enseigner la géométrie dans l'espace.

Il existe quelques logiciels, non professionnels, écrits par des professeurs de Mathématiques, dont l'utilisation pertinente permet de débloquer de nombreuses situations dans lesquelles certains élèves **"ne voient pas"**, et pour cause, ce que le professeur s'évertue à leur faire percevoir. Une liste forcément incomplète, de ces logiciels comprend EUCLIDE-ESPACE, DIM3D, DESSINER L'ESPACE, GEOMÉTRIE DANS L'ESPACE...

Tous ces logiciels fonctionnent sur des ordinateurs de type IBM PC (une version d'Euclide-Espace fonctionne sur les Nano-Réseaux mais au prix d'une gestion très fastidieuse de l'espace mémoire). Ils permettent de créer des objets de l'espace, en entrant par exemple les coordonnées des sommets de l'objet (coordonnées dans un repère de l'espace). Le logiciel se charge alors d'effectuer

les calculs lui permettant de dessiner sur l'écran la représentation de l'objet en perspective. Le plus souvent il s'agit de la perspective linéaire, dans certains cas (Euclide-Espace), on peut choisir entre perspective cavalière et linéaire. Euclide-Espace propose même la représentation en géométrie descriptive et DIM3D possède une option qui donne sur le même écran les 3 vues de l'objet (face, dessus, côté) et sa représentation en perspective.

On peut modifier la vision de l'objet en déplaçant le point de vue (œil de l'observateur) ce qui revient à tourner autour de l'objet ou(et) à s'éloigner (se rapprocher) de l'objet, dans le cas d'une perspective linéaire.

On peut choisir le mode de représentation de l'objet :
- mode fil de fer
- arêtes cachées en pointillés
- arêtes cachées non dessinées.

On peut également agir sur l'objet en lui appliquant les transformations classiques : rotation par rapport à l'un des axes de coordonnées, translation, homothétie, symétries.

On peut enfin obtenir des renseignements sur les éléments constitutifs de l'objet :
- appartenance d'un élément à un autre (point dans plan, point dans droite, droite dans plan...)
- parallélisme ou orthogonalité d'éléments
- distance de deux éléments.

Bien que traitant du même sujet, ces logiciels n'ont pas les mêmes objectifs.

DESSINER L'ESPACE, produit par l'IREM de Lorraine, est livré avec des fichiers déjà réalisés qui permettent d'illustrer les corrections d'exercices de géométrie dans l'espace fournis dans un livre d'accompagnement. Le produit contient déjà ses applications pédagogiques, mais l'utilisateur peut évidemment construire ses propres applications.

DIM3D est plus axé sur le dessin technique. On peut créer des prismes droits ou des pyramides en dessinant leur face inférieure puis en indiquant leur hauteur, on peut coller des solides entre eux puis utiliser toutes les possibilités décrites précédemment pour examiner ces solides. Le choix : perpective ou 3 vues est très intéressant pour la non bijectivité de la correspondance entre l'ensemble des points d'un objet et l'ensemble des points de sa représentation en perspective.

EUCLIDE-ESPACE est actuellement le logiciel le plus complet concernant la géométrie dans l'espace enseignée en mathéma tiques au collège ou au lycée. Il permet de visualiser les réponses à de nombreux problèmes qu'un élève peut se poser : dessin de section d'un solide sur un plan, changement instantané du type en perspective, conservation ou non des milieux, du parallélisme selon le type de perspective. Il permet de dessiner des "vecteurs liés", de calculer des produits scalaires ou vectoriels, de déterminer des barycentres, de projeter des éléments sur un plan, sur une droite...

Une possibilité particulièrement intéressante permet de choisir comme plan frontal tout plan défini par des éléments de l'objet, ce qui permet d'obtenir en vraie grandeur n'importe quelle section plane de l'objet représenté.

Ce logiciel, écrit en LOGOPLUS, nécessite cependant pour sa mise en œuvre des connaissances de programmation en langage LOGO et, pour être efficace, une bonne pratique de ce langage. Une version dotée de menus déroulants et d'une saisie avec la souris permettrait, pour un enseignant, de développer de manière plus aisée ses applications.

Tous ces logiciels possèdent un mode de fonctionnment dit "DEMO" qui permet d'enregistrer une séquence de construction puis de la restituer sous la forme d'un dessin animé. Cette possibilité est très utile pour préparer des applications (corrections d'exercices, constructions de solides, situations de conjectures...) et les exploiter en direct, en classe en utilisant les différents outils décrits plus haut.

Ceci conduit à évoquer les modes d'utilisation d'un ordinateur pour l'enseignement des mathématiques. Le matériel implanté massivement dans les établissements scolaires il y a quelques années, a été plus souvent disposé dans des salles spécialisées, destinées à une utilisation en travaux pratiques ou travaux dirigés qui constituent le plus souvent une application du cours. Il est une autre utilisation de l'ordinateur tout aussi intéressante qui consiste à disposer d'un ordinateur dans la salle de cours, avec une sortie sur un ou plusieurs écrans de grande dimension (ou bien en projetant l'écran de l'ordinateur à l'aide d'un rétro-projecteur). Ceci permet de disposer à tout instant des énormes possibilités de calcul, de graphisme, d'animation de cette machine pour vérifier ou introduire des conjectures, pour visualiser ou simuler des comportements.

Dans un domaine aussi délicat que l'apprentissage de la représentation dans l'espace, l'ordinateur est un outil pédagogique très performant. Il ouvre de nouvelles possibilités à l'enseignant, il permet aux élèves de comprendre beaucoup plus vite (en particulier grâce aux possibilités d'animation des objets représentés) le principe de la représentation dans un plan d'un objet de l'espace. Il faut encourager son utilisation surtout dans les premières phases d'apprentissage.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE I

INTRODUCTION III
Aperçu pédagogique et historique par R. BRUNET
Vision de l'espace et ordinateurs par J. FAGES

TABLE DES MATIÈRES X

PREMIÈRE PARTIE : DESSIN 1

1. **Le dessin d'un pavé** 3
   Variété des approches
2. **Quatre objets à dessiner** 9
   Cube-piano - Cube entaillé - Tiers de cube
   Tétraèdre régulier
3. **Dépassement des règles** 21
   Pavé - Cube-piano, figure 10 - Cube-piano, figure 12
   Tiers de cube - Cube entaillé - Tétraèdre régulier -
   D'autres perspectives cavalières
4. **Dessins des cinq polyèdres réguliers** 35
   Le tétraèdre régulier - Le cube - L'octaèdre régulier
   Le dodécaèdre régulier - L'icosaèdre régulier
5. **Réalisation d'une maquette** 47
6. **Différents dessins associés au dessin d'un objet** 55
   Technique et vision - Dessin et objet

DEUXIÈME PARTIE : PROJECTION 63

7. **Projection cylindrique** 65
   Projection cylindrique - PC (1/2, 60°) et projection
   PC (r, α) - PC (r, α) et projection -
   Epure d'une projection et PC - Est-ce le dessin d'un cube ?
   Axonométrie - Conservation du rapport des aires -
   Projection et règles de traçage.
8. **Paramètres d'une PC** 81
   Point de vue et position de l'objet - Nombre de
   paramètres - Symétries - Technique, projection
   point de vue, déplacement.

9. **Théorème de Pohlke** 89
Enoncé - Démonstration - Coin de cube - Une construction - Projection du cube - Existence ou construction

10. **Trois dessins du cube** 105
Vues - Perspective cavalière - Perspective linéaire (PL) Perspective cavalière et perspective linéaire

11. **Les principales représentations** 111
La perspective cavalière - Les vues - Perspective axonométrique ou axonométrie - L'épure de géométrie descriptive - L'épure de géométrie cotée - La perspective linéaire (PL) - Comparaison des représentations

12. **La bijectivité** 137

TROISIÈME PARTIE : CORPS RONDS 147

13. **Ellipse** 149
Rayons conjugués - Equation du second degré Ellipse et affinité - Ellipsographe - Table numérique D'autres tracés d'ellipse

14. **Les cercles de l'espace** 167
Affinité et projection - Trois cercles du cube - Les cercles de l'espace en PL.

15. **Le cylindre et le cône** 177
Le cylindre - Le cône

16. **La sphère** 187
Projection orthogonale - PC (1/2, 90°) de la sphère - PC (1/2, 60°) ; pp' fuyante ; méridiens - PC (1/2, 60°) ; pp' vertical ; méridiens - PC (1/2, 60°) ; pp' vertical ; parallèles - Les corps ronds dans l'enseignement

17. **Conclusion ou le dessin et la démarche expérimentale** 197
Contradiction observée et démarche expérimentale - Un dessin technique - La non-bijectivité - Objet-dessin Les concepts, le raisonnement - Vœux

LEXIQUE 207

PREMIÈRE PARTIE

DESSIN

Chapitre 1

DESSIN DU PAVÉ

Résumé

Les six premiers chapitres présentent les techniques de dessin en perspective cavalière (P.C.) de rapport de réduction 1/2 et d'angle de fuite 60°. Seuls sont dessinés des polyèdres.

Le premier chapitre donne les règles de dessin du parallélépipède rectangle. Il est directement utilisable pour un enseignement de la P.C. en classe de 6e et 5e (11-13 ans).

Pavé est le nom que nous utilisons pour désigner un parallélépipède rectangle. Toutes les faces d'un pavé sont des rectangles. Un pavé a huit sommets, six faces et douze arêtes. La boîte d'allumettes d'usage courant est un pavé. Le cube est un pavé particulier ; ses faces sont des carrés.

Pour dessiner un pavé, par exemple un pavé en bois que nous avons entre les mains, nous choisissons tout d'abord une de ses six faces qui sera dite "face arrière". La face qui lui est opposée, dite "face avant" est alors dessinée en vraie grandeur. Nous obtenons ainsi un rectangle. C'est la première étape du dessin représentée par la figure 1.

Figure 1

Les quatre arêtes perpendiculaires aux faces avant et arrière sont alors représentées par quatre segments. Chaque segment a comme origine un sommet du rectangle déjà tracé, comme direction celle d'une droite faisant 60° avec le bord inférieur de la feuille de dessin et comme longueur la moitié de la longueur commune à ces quatre arêtes. Mais ce segment, lorsqu'on le trace, doit monter vers la droite et non monter vers la gauche, comme l'indique la figure 2. Une droite ou un segment incliné à 60° et montant vers la droite est appelé une fuyante.

PAVÉ!!!
MAIS NOOOONN! PARALELEPIPEDE RECTANGLE!!
J'VOOS ASSURE!

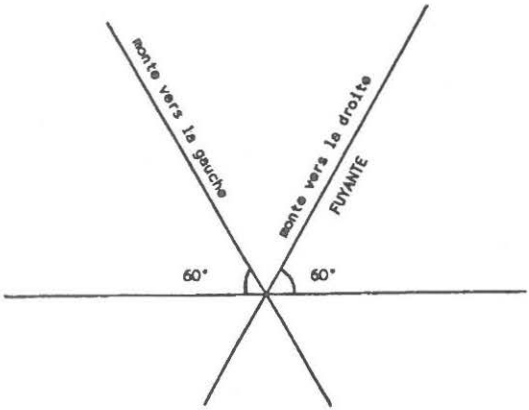


Figure 2

La deuxième étape du dessin consiste à tracer ces quatre segments. A la fin de cette étape, on obtient la figure 3.

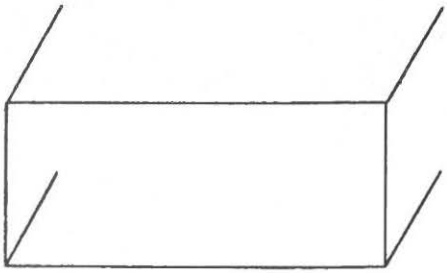


Figure 3

La troisième et dernière étape revient à achever le dessin, c'est-à-dire à tracer un rectangle représentant la face arrière. Cette dernière étape du dessin conduit à la figure 4.

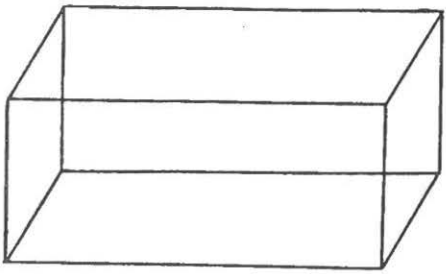


Figure 4

Plaçons le pavé en bois sur la table devant laquelle on est assis, à bout de bras et légèrement à gauche. Quatre arêtes sont verticales ; chacune des huit autres étant parralèle à un bord de la table. Trois arêtes sont alors cachées à nos yeux par le pavé lui-même. Sur le dessin du pavé, nous représentons ces trois arêtes par des segments en pointillés, tandis que les neuf autres arêtes sont représentées par des segments en traits pleins. Nous avons ainsi obtenu une perspective cavalière du pavé, ses arêtes cachées étant dessinées en pointillés. La figure 5 est cette perspective cavalière. Les dimensions du pavé dont la figure 5 est une représentation sont : 5 cm de long, 3 cm de large et 2,2 cm de haut.

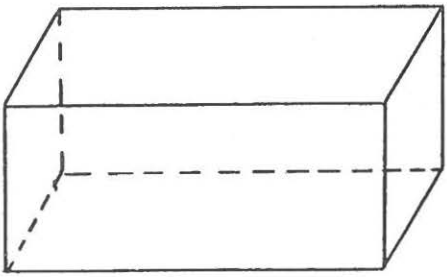


Figure 5

On peut ainsi dessiner un cube d'arête donnée en perspective cavalière. Si une petite boîte d'allumettes est posée sur une grosse boîte d'allumettes, on peut dessiner l'ensemble de ces deux boîtes.

VARIÉTÉ DES APPROCHES

Dans un travail de classe, la première approche du dessin d'un pavé ne doit pas se cantonner au seul dessin technique qui précède, bien que cette technique nous paraisse essentielle.

Une analyse de photographies d'objets parallélépipédiques est instructive ; une comparaison entre ce qui est vu et ce qui est dessiné, sensibilise la réflexion ; une discussion portant sur les dessins spontanés des élèves permet de mieux cerner la progression pédagogique possible ; l'observation de l'ombre au soleil d'un pavé constitué de tiges justifie mieux l'usage du dessin choisi...

Nous gardons aussi à l'esprit le fait que la perspective cavalière n'est pas le seul moyen technique de représenter l'espace. En effet, les vues du dessin industriel, la perspective axonométrique, l'épure de géométrie descriptive, l'épure de géométrie cotée et la perspective linéaire sont d'autres représentations que nous analysons dans le chapitre 11.

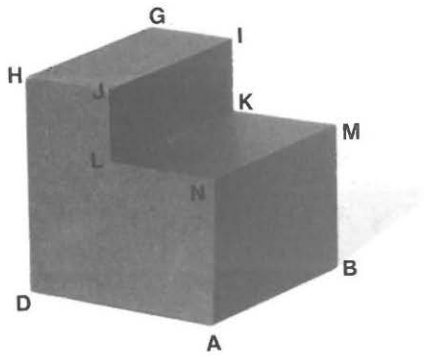
Chapitre 2

QUATRE OBJETS A DESSINER

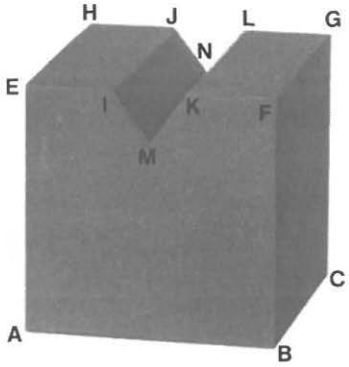
Résumé

Le chapitre 2 conduit à la réalisation de plusieurs dessins en P.C. Les quatre objets qu'on se propose de dessiner sont deux cubes tronqués., le cube-piano et le cube entaillé et deux pyramides, le tiers de cube et tétraèdre régulier. Ces objets sont dessinés dans différentes positions.

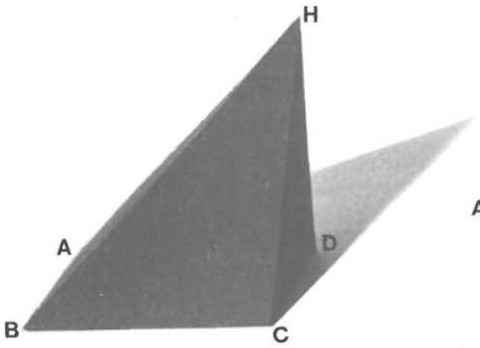
Nous allons dessiner quatre objets en bois que nous appelons cube-piano, cube entaillé, tiers de cube, tétraèdre régulier. Ce paragraphe a pour but d'inciter le lecteur à prendre en main un objet puis à réaliser son dessin en perspective cavalière. Puisque ces objets sont nécessairement absents d'un document écrit, nous fournissons leurs quatre photograhies ci-dessous.



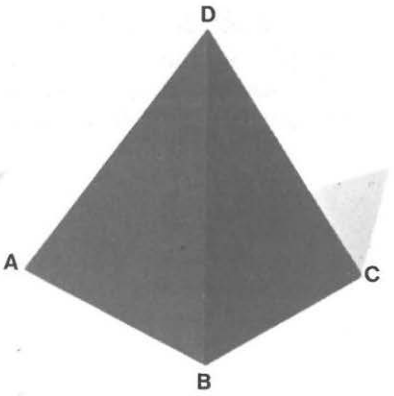
Photographie 6
Cube-piano



Photographie 7
Cube entaillé



Photographie 8
Tiers du cube



Photographie 9
Tétraèdre régulier

Chaque objet sera préalablement décrit. Nous le dessinerons ensuite en nous inspirant des règles utilisées pour le dessin du pavé.

CUBE -PIANO

Le premier objet que nous voyons sur la photographie 6 est un cube en bois dont on a enlevé un morceau. Nous l'appelons cube-piano à cause d'une certaine ressemblance avec le piano droit. On a ajouté sur la photographie les lettres A B D G H I J K L M N désignant des sommets du cube piano. Le sommet C est caché par l'objet. La base ABCD est un carré de 4 cm de côté en contact avec la table. Les faces GHIJ et KLNM sont parallèles à la table. Elles sont horizontales. Les cinq autres faces sont verticales. Les arêtes CB, CD et CG, cachées sur le piano-cube, n'apparaissent pas sur la photographie. La face verticale ABMN est un rectangle dont les dimensions sont 2,2 cm et 2,8 cm. La face IJLK verticale est un rectangle de dimensions 2,8 cm et 0,7 cm. Les arêtes MK et IG mesurent chacune 1,4 cm.

Pour dessiner le cube-piano, nous choisissons tout d'abord la face GCBMKI qui sera dite face arrière. La face HDANLJ qui lui est opposée est alors dessinée en vraie grandeur. Nous traçons ensuite les six fuyantes.

La troisième étape consiste à tracer les segments gc, cb, bm, mk, ki, ig. Ce sont alors les segments cg, cb et cd qui représentent les arêtes cachées de notre cube-piano ; ils sont tracés en pointillés. La figure 10 représente le cube-piano. Cette représentation est une perspective cavalière avec comme angle de fuite 60° et comme rapport de réduction 1/2. Nous écrivons plus brièvement PC(1/2, 60°).

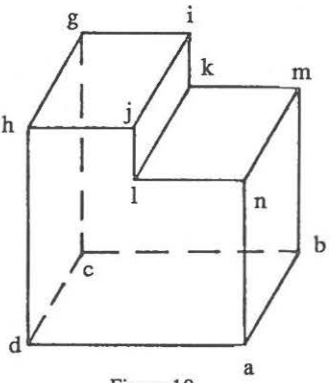


Figure 10

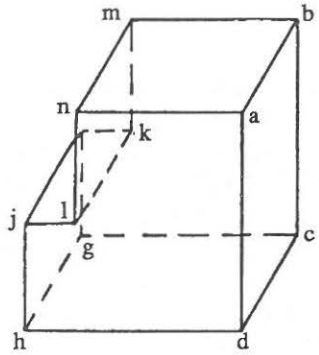


Figure 11

Ajoutons quelques remarques.

La position de la présentation de la face avant (ou arrière) par rapport aux bords de la feuille de papier peut être choisie différemment. Le segment dh peut être tracé parallèlement au bord inférieur de la feuille de dessin. Le segment dh est quasiment toujours parallèle à l'un ou à l'autre bord de la feuille. Si nous choisissons les mêmes faces avant et arrière mais avec dh parallèle au bord inférieur de la feuille, les trois étapes du dessin restent les mêmes, seul le tracé des pointillés est plus délicat. Ce choix conduit à la figure 11 ci desssus.

Rappelons, toutefois, que le dessin du cube-piano est facilité par la présence de l'objet.

Choisissons maintenant DCGH comme face arrière pour réaliser le dessin du cube-piano au moyen d'une PC (1/2, 60°). La face avant est ABMN ; nous la représentons au moyen du rectangle abmn. Nous traçons aussi les fuyantes ad, bc, mk, et nl. Nous achevons ensuite le carré dcgh. Puis, nous traçons les deux fuyantes gi et hj en faisant attention au sens donné à ces segments orientés. Nous achevons enfin le dessin en traçant le rectangle jikl. Le résultat de tous ces tracés donne, après la détermination des pointillés, la figure 12 ci-dessous.

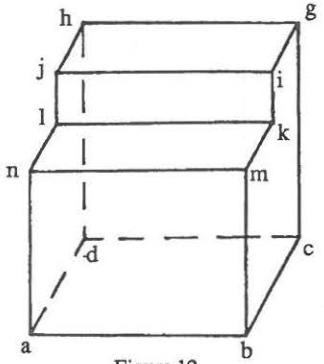


Figure 12

CUBE ENTAILLÉ

L'objet que nous voyons sur la photographie 7 est un cube en bois reposant sur une table et dans lequel on a pratiqué une entaille en V symétrique. On a ajouté sur la photo les lettres ABCEFGHIJKLMN désignant les sommets du cube entaillé. Les sommets N et D sont cachés par le cube entaillé. La face ABCD est horizontale. Le cube avant qu'il ne soit entaillé avait pour seuls sommets A, B, C, D, E, F, G, H. Les treize arêtes AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EH, FG, IJ, KL et MN mesurent 4,2 cm. Les arêtes EI et KF parallèles à AB mesurent 1,4 cm. L'entaille en V a une profondeur de 0,7 cm et une largeur maximum de 1,4 cm. Cette entaille va de la face ABFE jusqu'à la face DCGH. Les trois arêtes IJ, KL, MN de cette entaille sont parallèles à l'arête BC.

Pour dessiner le cube entaillé, choisissons ABFKMIE comme face avant et DCGLNJH comme face arrière. Dessinons en vraie grandeur le polygone abfkmie représentant la face avant, puis les fuyantes ad, bc, fg, kl, mn, ij, eh. Achevons alors le dessin et plaçons convenablement les pointillés. Nous obtenons ainsi la figure 13.

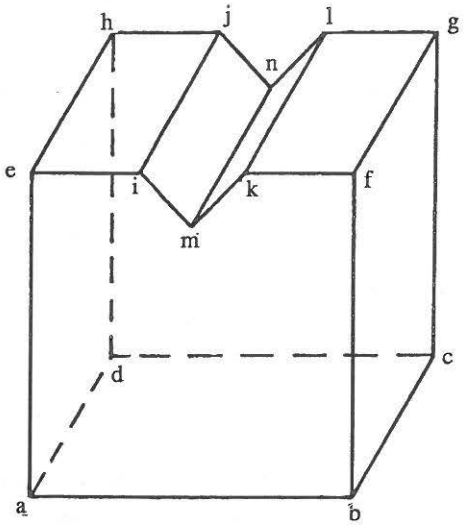


Figure 13

Dessinons maintenant ce même cube entaillé en choisissant ABCD comme face arrière. Nous avons maintenant deux faces avant FGLK et EHJI. Nous allons modifier la procédure permettant de dessiner le cube entaillé dans ce cas. Nous dessinons tout d'abord le cube non entaillé. Il est représenté par abcdefgh. Nous plaçons ensuite sur le segment ef les points i et k, puis sur le segment hg les points j et l :

$$ei = fk = hj = gl = 1{,}4 \text{ cm},$$

car des faces parallèles à la face arrière sont dessinées en vraie grandeur. Nous traçons ensuite la fuyante uw joignant les milieux des segments ef et ab ; puis la fuyante vz joignant les milieux des segments hg et dc. Nous plaçons sur ces fuyantes les points m et n tels que um = 0,35 cm et vn = 0,35 cm. Ces différents éléments sont représentés sur la figure 14 ci-dessous.

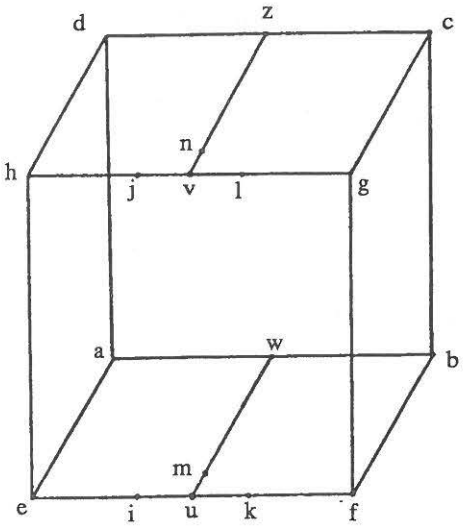


Figure 14

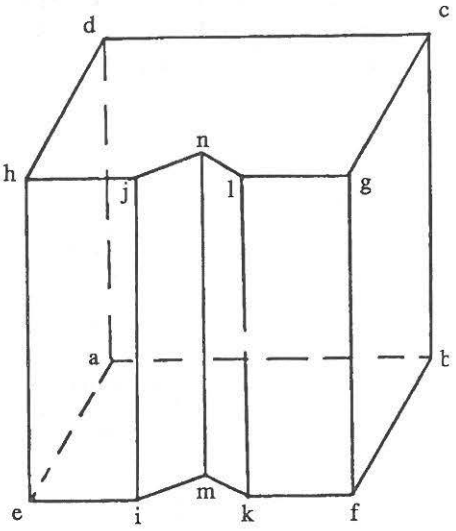


Figure 15

Nous effaçons alors les segments qui ne représentent pas des arêtes du cube entaillé c'est-à-dire les segments ik, uw, jl, vz ainsi que les points qui ne représentent pas des sommets, c'est-à-dire les points u, w, v et z. Nous traçons tous les segments représentant des arêtes du cube entaillé, en respectant la règle des pointillés. Nous obtenons ainsi la figure 15 ci-dessus.

TIERS DU CUBE

Cet objet que nous voyons sur la photographie 8 est une pyramide en bois. On ajoute sur la photographie les lettres ABCDH désignant des sommets de cette pyramide. La face ABCD qui repose sur la table est carrée et horizontale. Ce carré a 3,6 cm de côté. L'arête DH est verticale et mesure aussi 3,6 cm.

En juxtaposant convenablment trois pyramides identiques à celle que nous venons de décrire, nous formons un cube. C'est pour cette raison que nous appelons notre pyramide : tiers du cube.

Pour dessiner le tiers de cube, nous choisissons HCD comme face arrière. Puisque l'objet n'a pas de face avant, nous dessinons hcd représentant en vraie grandeur cette face arrière. Les deux arêtes DA et CB perpendiculaires à la face arrière sont représentées par les segments de fuyante da et cb. Nous achevons alors le dessin et plaçons convenablement les pointillés ce qui nous donne la figure 16 ci-dessous.

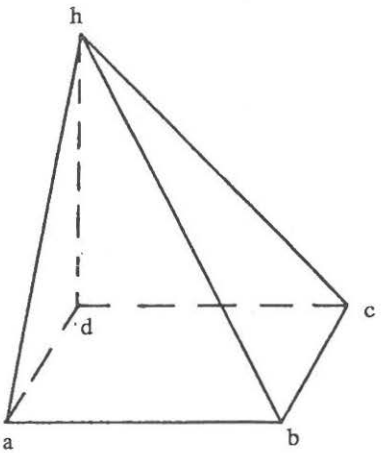


Figure 16

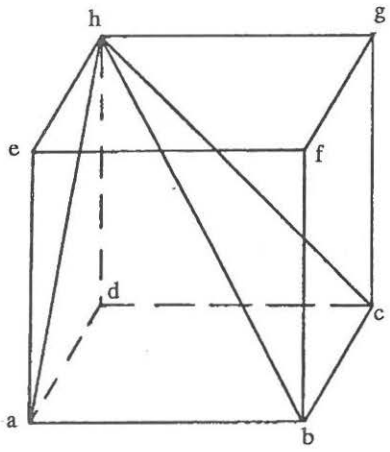


Figure 17

On peut aussi, pour réaliser le figure 16, dessiner tout d'abord un cube de 5 cm d'arête ; ce qui donne la représentation abcdefgh de la figure 17. Puis, on trace les segments ha, hb, hc. Si on ne conserve alors, de la figure 17, que les segments correpondant au tiers du cube, on retrouve la figure 16 représentant le tiers de cube.

Si maintenant on souhaite dessiner ce tiers de cube en prenant HDA comme face avant, nous n'avons plus de face arrière. Le dessin s'exécute en traçant d'abord hda, puis les fuyantes ab et dc en achevant le tracé et en plaçant convenablement les pointillés ; cela nous donne la figure 18.

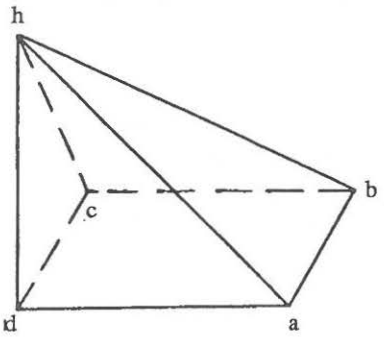


Figure 18

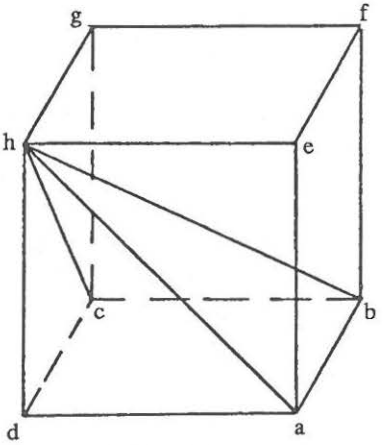


Figure 19

On peut aussi représenter le cube par abcdefgh puis tracer les segments ha, hb, hc ; cela nous donne la figure 19.

Si on ne conserve alors de la figure 19 que les segments correspondant au tiers de cube, on retrouve la figure 18 ; il faut, toutefois, modifier convenablement la place des pointillés.

TÊTRAÈDRE RÉGULIER

Le tétraèdre régulier est un objet ayant quatre sommets, six arêtes et quatre faces. Chaque face est un triangle équilatéral. Les six arêtes sont égales entre elles et mesurent dans le cas particulier qui nous occupe 4,2 cm. Sur la photographie 9, on voit ce tétraèdre régulier. On a ajouté les lettres ABCD désignant les sommets. L'arête AC est cachée. ABC est une face horizontale en contact avec la table.

Nous allons réaliser deux dessins différents de ce tétraèdre régulier. Tout d'abord, nous allons prendre comme sommets du tétraèdre quatre sommets d'un cube dont les arêtes mesurent $\frac{4,2}{2}\sqrt{2}$ cm c'est-à-dire environ 3 cm. Nous dessinons donc le cube, choisissons les quatre points abcd représentant les sommets convenables que nous joignons deux à deux ; cela nous donne la figure 20 ci-dessous.

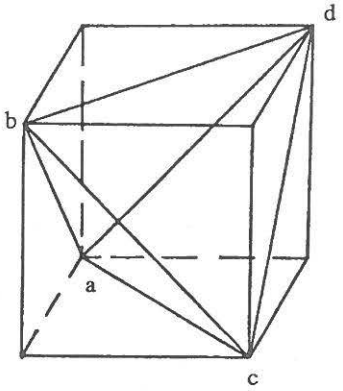


Figure 20

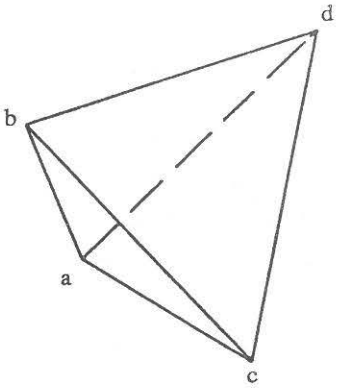


Figure 21

Nous effaçons alors les segments inutiles et plaçons correctement les pointillés ; cela nous donne la figure 21 ci-dessus qui est une représentation du tétraèdre régulier à partir du cube.

Représentons ce tétraèdre en prenant ABC comme face avant. Nous introduisons une construction auxialiaire faisant intervenir le pied H de la hauteur abaissée de D sur la face ABC. HD sera représenté par une fuyante de longueur $\frac{4,2}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm soit approximativement 1,7 cm. Après avoir effacé toutes les constructions auxiliaires, nous obtenons la figure 22 qui n'est pas très satisfaisante car le point d est très près de bc.

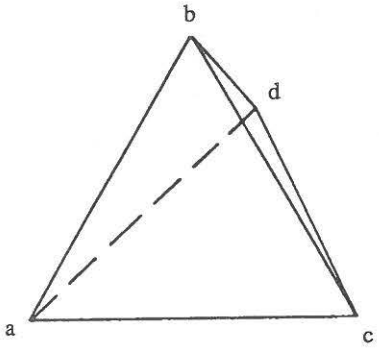


Figure 22

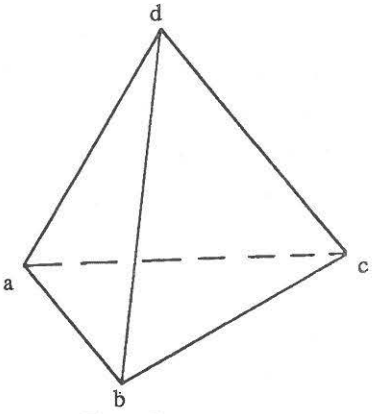
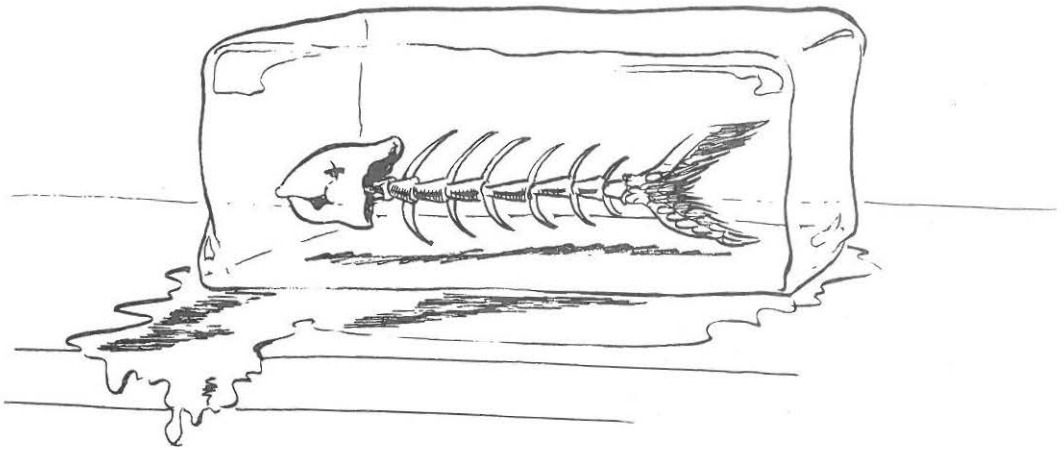


Figure 23

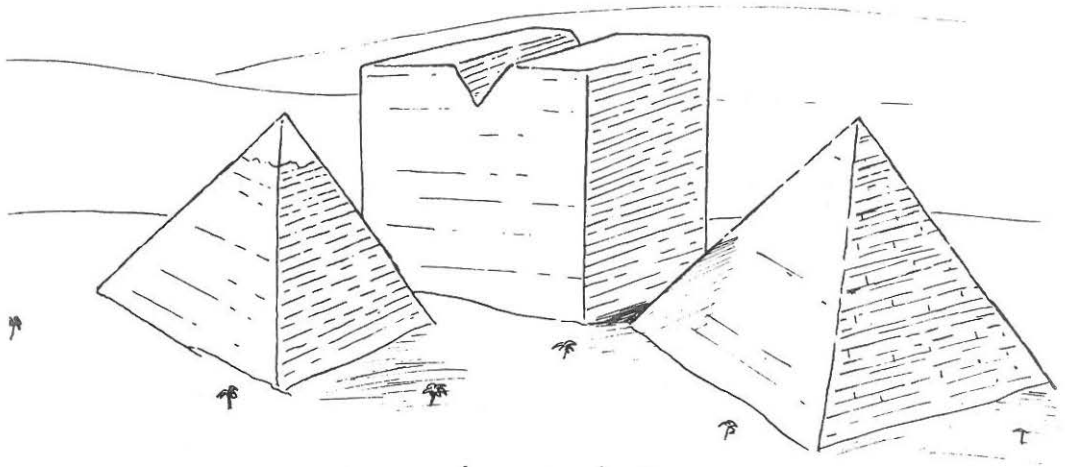
Nous pouvons aussi prendre comme plan arrière, un plan vertical passant par l'arête AC, le sommet B étant devant ce plan et la face ABC étant horizontale ; ce plan qui ne contient aucune face du tétraèdre régulier joue le rôle de face arrière. La hauteur BM du triangle ABC est représentée par une fuyante qui permet de dessiner le triangle abc représentant ABC. Si g est le centre de gravité du triangle abc alors gd est un segment parallèle au bord latéral de la feuille de dessin et mesurant $4,2\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm soit approximativement 3,4 cm. Nous obtenons en définitive, après avoir effacé toutes les constructions auxiliaires la figure 23 comme représentation du tétraèdre régulier.

Les trois représentations du tétraèdre régulier données par les figures 21, 22 et 23 sont des PC (1/2, 60°).

Toutes les représentations de ce paragraphe, de la figure 10 à la figure 23, sont des PC (1/2, 60°).



UN CUBE A 12 ARÊTES
VIVAGEL BIEN SUR !



PERSPECTIVE CAVALIERE
DITE DE :
"GIZEH AVANT L'EROSION.

Chapitre 3

DÉPASSEMENT DES RÈGLES

Résumé

Le chapitre 3 analyse la succession des dessins proposés au chapitre 2. Il montre comment ont été complétées les premières règles de dessin proposées au chapitre 1, en utilisant des polyèdres de plus en plus complexes dans des positions de plus en plus délicates.

Les trois premiers chapitres sont une initiation au dessin en perspective cavalière d'objets matériels à la disposition du dessinateur. Ils paraissent suffisants pour entreprendre un enseignement de la P.C. dans les collèges.

Dans notre premier chapitre intitulé "Dessins du pavé", nous avons donné des consignes de dessin permettant de représenter un pavé dans une PC (1/2, 60°). C'est ainsi que nous avons introduit les règles 1.0 et 2.0 énoncées ci-après.

1.0 Choisir une face qui sera dite face arrière.
2.0 Dessiner la face avant en vraie grandeur ; ce dessin est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille de dessin.

Au cours de notre deuxième chapitre, nous avons réalisé différents dessins. Mais les règles du premier chapitre étaient alors insuffisantes pour dessiner le cube-piano ou le tétraèdre régulier. Nous avons donc, pour chaque nouveau dessin, utilisé de nouvelles règles complétant les précédentes. Les règles s'élaborent en se heurtant aux nécessités de chaque dessin particulier. Nous avons là un dépassement permanent, par confrontation avec un nouvea u problème de dessin, de règles antérieures ; nous parlons plus brièvement de dépassement des règles.

Dans ce qui suit, nous présentons pour chaque dessin ou groupe de dessins, l'ensemble des consignes ou règles qui régissent son élaboration. Cette correspondance entre dessins et règles est résumée par le tableau 27 proposé à la fin de ce troisième chapitre.

PAVÉ

Figure 5

Les règles de dessin du pavé représenté par la figure 5 sont explicitées ci-après.

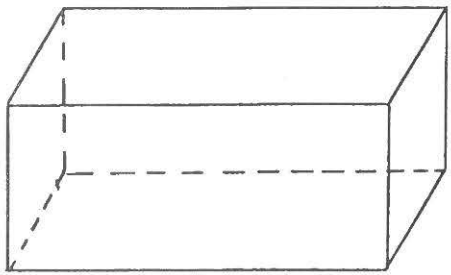


Figure 5

1.0 Choisir une face qui sera dite face arrière.
2.0 Dessiner la face avant en vraie grandeur ; ce dessin est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille de dessin.
3.0 Représenter les arêtes perpendiculaires à la face avant par des segments de fuyantes ayant comme longueur la moitié de la longueur de ces arêtes.
4.0 Achever le dessin, c'est-à-dire tracer le rectangle présentant la face arrière.
5.0 Les arêtes vues sont représentées par des segments en traits pleins ; les arêtes cachées par des segments en pointillés.

Ces règles s'appliquent sans difficulté au dessin du cube qui n'est qu'un pavé particulier.

CUBE-PIANO

Figure 10

Le cube-piano représenté sur la photograhie 6 est dessiné, figure 10, avec BCGIKM comme face arrière.

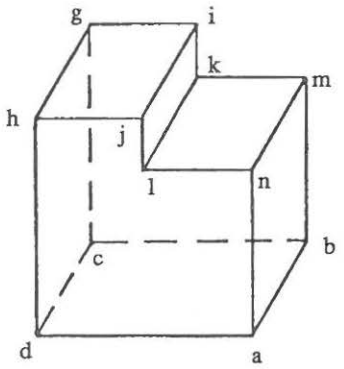


Figure 10

Pour réaliser la figure 10, deux des cinq règles précédentes sont modifiées. En effet, les consignes 2.0 et 4.0 faisant intervenir des particularités du pavé sont remplacées par les règles 2.1 et 4.1 écrites ci-après.

2.1 Dessiner la face avant en vraie grandeur.

4.1 Achever le dessin, c'est-à-dire tracer le polygone représentant la face arrière.

Précisons que pour dessiner en vraie grandeur, il suffit de conserver dans le dessin les mesures des longueurs et des angles de la face avant. Pour que le dessin soit achevé, il faut que deux des sommets, extrémités d'une même arête soient représentés par deux points, extrémités d'un même segment. Les règles 1.0, 2.1, 3.0, 4.1, 5.0 sont encore suffisantes pour réaliser les figures 11 et 13 représentant respectivement le cube-piano et le cube entaillé.

Bien qu'on dessine le plus souvent la face avant selon un polygone ayant des côtés parallèles aux bords de la feuille de dessin, ce qui est le cas de nos figures 10 et 11, on peut aussi donner au dessin de la face avant n'importe quelle position par rapport aux directions des bords de la feuille ; c'est ainsi qu'on obtient les figures 24 et 25 ci-dessous. Ce sont des représentations du cube-piano en PC (1/2, 60°) régies par les règles utilisées pour la figure 10.

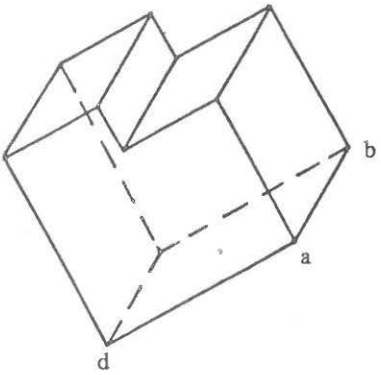


Figure 24

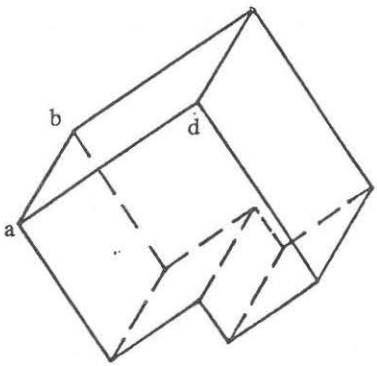


Figure 25

Mais les dessins que nous venons d'examiner, ceux du pavé ou du cube-piano, font appel à une autre règle qui n'a pas été explicitée. Il s'agit de la règle implicite suivante :

Soit une arête orientée AB perpendiculaire à la face avant et telle que A soit sur la face avant et B sur la face arrière. Soit ab le segment orienté qui représente l'arête AB. Alors a est plus près du bord inférieur de la feuille de dessin que b.

Ces règles implicites sont inévitables car nous devons limiter raisonnablement les consignes de dessin et nous ne prenons pas toujours conscience des choix que nous faisons dans la pratique. Mais dans une séquence d'apprentissage, les implicites du maître et de l'élève ne sont pas toujours les mêmes et leur existence inévitable doit conduire à une grande prudence.

CUBE-PIANO

Figure 12

Considérons maintenant le dessin du cube-piano réalisé en prenant DCGH comme face arrière. IL s'agit de la figure 12.

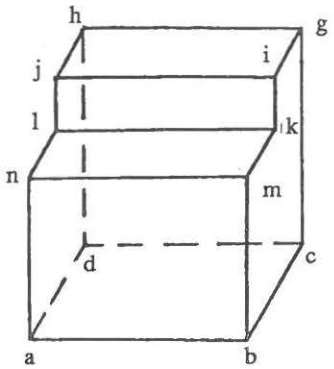


Figure 12

On peut appliquer les règles 1.0, 2.1, 3.0. Mais alors la règle 4.1 n'est plus applicable. La face IJLK du cube-piano perturbe nos règles. Nous abandonnons donc les règles 2.1, 3.0 et 4.1 pour les règles 2.2 et 3.2.

2.2 Toute face parallèle à la face avant ou à la face arrière est dessinée en vraie grandeur.

3.2 Toute arête perpendiculaire à la face avant ou à la face arrière est dessinée selon un segment de fuyante dont la longueur est égale à la moitié de l'arête qu'il représente.

Là encore, jouent des implicites portant sur l'orientation des arêtes et des segments qui s'apparentent à la règle implicite énoncée un peu plus haut. De plus, les règles 2.2 et 3.2 sont utilisées conjointement. On abandonne la correspondance entre l'ordre des règles et la chronologie des réalisations qui a présidé à l'élaboration des premiers dessins. En effet, pour réaliser la figure 12, on utilise successivement les règles 1.0, 2.2 appliquée à la face avant (ou 2.1), 3.2 (ou 3.0) appliquée aux arêtes AD, BC, MK et NL, 2.2 appliquée à la face arrière, 3.2 appliquée aux arêtes HJ et GI, 2.2 pour tracer ijlk et 5,0.

Les règles 1.0, 2.2, 3.2, 5.0 permettent de réaliser les figures 5, 10, 11, 13, 24, 25 et 12 précédemment citées dans ce chapitre. Elles ne permettent pas de réaliser les figures 15 ou 16.

TIERS DE CUBE

Figure 16

Pour réaliser la figure 16, nous avons proposé deux méthodes.

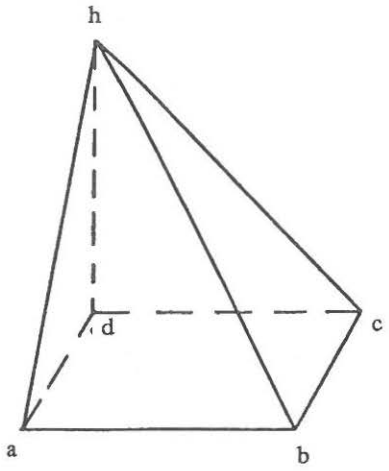


Figure 16

Une de ces méthodes consiste à placer le tiers de cube dans un cube, ce qui conduit à la figure 17. Cette méthode s'appuie sur une nouvelle règle, notée 6, que nous énonçons ci-dessous.

6. Placer l'objet dans un cube ou un pavé de référence. Dessiner ce cube ou ce pavé. Représenter les sommets de l'objet sur ce dessin. Joindre deux à deux les points du dessin représentant les extrémités d'une même arête de l'objet. Obtenir ainsi le dessin de toutes les arêtes de l'objet. Effacer tous les traits qui ne représentent pas les arêtes de l'objet.

Le tiers de cube, figure 18, et le tétraèdre régulier, figure 20, sont aussi dessinés grâce à la règle 6.

CUBE ENTAILLÉ

Figure 15

Pour réaliser le cube entaillé représenté par la figure 15, on peut aussi utiliser la règle 6.

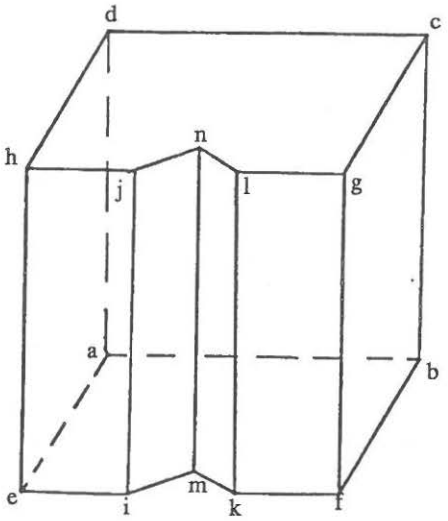


Figure 15

Mais "représenter les sommets de l'objet sur ce dessin" du cube comme l'indique la règle 6 peut offrir certaines difficultés. C'est ainsi que les segments vn et um de la figure 14 sont réalisables à condition d'introduire une règle supplémentaire qui peut être considérée comme une règle dépassant 3.2 ; il s'agit de la règle 3.4 énoncée ci-après :

3.4 Tout segment de l'espace perpendiculaire à la face avant ou à la face arrière est représenté par un segment de fuyante dont la longueur est égale à la moitié du segment de l'espace qu'il représente.

TÉTRAÈDRE RÉGULIER

Figure 22

Examinons maintenant la manière dont nous aboutissons à la figure 22 sans utiliser la règle 6.

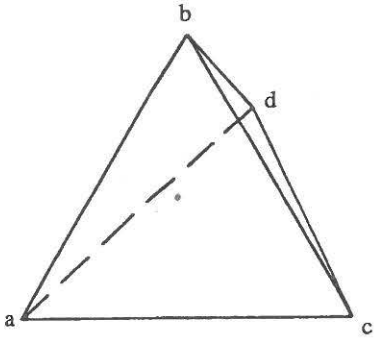


Figure 22

La règle 1.0 est inutilisable car aucune face du tétraèdre ne peut jouer le rôle de face arrière. Par contre, on peut considérer le plan passant par D et parallèle à la face ABC. Nous introduisons une nouvelle règle, notée 1.5.

1.5 Choisir un plan qui sera dit plan arrière.

Nous modifions donc alors les règles 2.2 et 3.4 afin de les généraliser tant soit peu ; ce qui nous donne les règles 2.5 et 3.5.

2.5 Toute figure plane de l'espace contenue dans un plan parralèle au plan arrière est représentée en vraie grandeur.

3.5 Tout segment de l'espace perpendiculaire au plan arrière est représenté par un segment de la fuyante dont la longueur est égale à la moitié du segment de l'espace qu'il représente.

La figure 23 représentant le tétraèdre régulier est alors réalisable au moyen de ces règles 1.5, 2.5, 3.5. Le plan arrière passe par l'arête AC et il est perpendiculaire à la face ABC. On dessine alors le triangle abc et son centre de gravité g grâce à la règle 3.5. Puis on trace d en appliquant la règle 2.5.

En ce qui concerne la figure 23, on peut aussi faire intervenir un cube de référence et la règle 6, une face du cube de référence matérialise le plan arrière, une autre face du cube contient la face ABC du tétraèdre régulier. La figure 26 ci-après représente le tétraèdre régulier ABCD dans ce cube de référence (sans les pointillés).

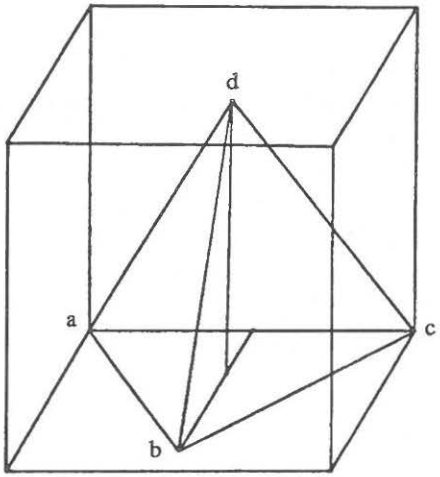


Figure 26

Le tableau 27 ci-dessous résume l'évolution des figures et le dépassement des règles.

	Règles	Figures
PAVÉ *Figure 5*	1.0; 2.0; 3.0; 4.0; 5.0	5
CUBE-PIANO *Figure 10*	1.0; 2.1; 3.0; 4.1; 5.0	10; 11; 13; 24; 25
CUBE-PIANO *Figure 12*	1.0; 2.2; 3.2; 5.0	12
TIERS DE CUBE *Figure 16*	1.0; 2.2; 3.2; 5.0; 6	16; (17); 18; (19); (20); 21
CUBE ENTAILLÉ *Figure 15*	1.0; 2.2; 3.4; 5.0; 6	(14); 15
TÉTRAÈDRE RÉGULIER *Figure 22*	1.5; 2.5; 3.5; 5.0; 6	22; 23; 26

Tableau 27

Dans ce tableau, les nombres entre parenthèses représentent des numéros de dessins auxiliaires. Sur une même ligne, nous indiquons les numéros des règles utilisées et les figures réalisées à partir de ces règles. Si un objet peut être dessiné à partir des règles d'une ligne du tableau alors il peut aussi être réalisé à partir des règles de la ligne suivante. A chacune des six lignes du tableau correspond les explications d'un des six paragraphes de ce chapitre 3.

Dans ce chapitre, nous avons vu que les règles s'élaborent en se heurtant aux nécessités de chaque dessin particulier. Leurs dépassements successifs sont susceptibles de multiples variations ; dès les premières règles, le rôle des faces avant et arrière peut être échangé. On peut aussi introduire la règle 6 pour réaliser la figure 10, etc. Ces règles doivent encore évoluer puique nous n'avons pas vu apparaître de règles explicites de conservation du parallèlisme ou des proportions ; puiqu'elles sont insuffisantes pour dessiner des corps ronds. Il nous semble pourtant que ce dépassement permanent, de règles antérieures par confrontation avec un nouveau problème de dessin, est une démarche didactique fructueuse.

Toutefois, au cours de l'apprentissage de la perspective cavalière dans les collèges, le nombre de règles énoncées reproduites par écrit et mémorisées explicitement par les élèves doit être très limité. Les règles 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 et 5.0 associées au pavé et données au début du chapitre nous paraissent nécessaires et à peu près suffisantes pour le premier cycle.

Pour conclure, insistons sur deux points. Les trois premiers chapitres sont une initiation au dessin en perspective cavalière d'objets matériels à la disposiion du dessinateur. Ils nous paraissent suffisants pour entreprendre, à l'heure actuelle, un enseignement de la perspective cavalière dans nos collèges.

D'AUTRES PERSPECTIVES CAVALIÈRES

Au cours des six premiers chapitres, nous insistons beaucoup sur une technique de dessin, la perspective cavalière de rapport de réduction 1/2 et d'angle de fuite 60°, notée plus brièvement PC(1/2, 60°). Nous estimons que dans le premier cycle de notre enseignement secondaire, l'élève doit maîtriser au moins une technique pour ne pas être noyé dans la diversité des dessins possibles. Mais d'autres perspectives cavalières présentent un intérêt indéniable pour de jeunes élèves.

Tout d'abord la perspective cavalière PC(1/2, 30°) de rapport de réduction 1/2 et d'angle de fuite 30° offre les mêmes possibilités que la PC(1/2, 60°), comme le montre les figures 28 et 29 représentant un cube respectivement en PC(1/2, 60°) et en PC(1/2, 30°).

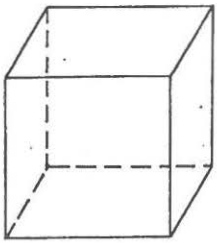


Figure 28

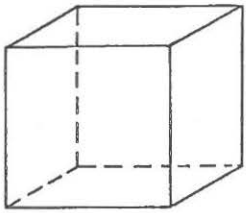


Figure 29

Dans la PC (1/2, 60°) la face latérale droite est représentée par un parallélogramme dont la surface est inférieure à celui représentant la face supérieure. Tandis que dans la PC(1/2, 30°) ce rapport est inversé.

L'Association Française de Normalisation (AFNOR) recommande comme seule perspective cavalière la PC(1/2, 45°) qu'elle appelle la projection cavalière courante. Cette perspective cavalière présente l'inconvénient de donner aux fuyantes le même direction que celle d'une diagonale du carré représentant la face avant du cube comme le montre la figure 30.
La repésentation du cube admet alors un axe de symétrie et cette symétrie est souvent gênante.

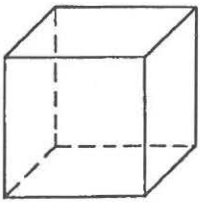


Figure 30

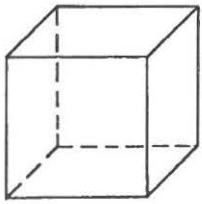


Figure 31

Il est quelquefois commode d'employer, pour dessiner des perspectives cavalières, du papier quadrillé 5 x 5. Il est alors facile de représenter un cube au moyen d'une perspective cavalière PC ($\sqrt{2}/2$, 45°) de rapport de réduction $\sqrt{2}$ et d'angle de fuite 45°. Cette perspective bénéficiant du quadrillage est illustrée par la figure 31. L'apprentissage du dessin sur feuille blanche reste toutefois fondamental car il conduit à plus de clarté, à plus de variété et il évite des blocages dûs à la présence du quadrillage.

Le cône et le cylindre de révolution sont le plus souvent représentés par les figures 32 et 33.

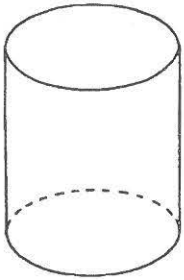


Figure 32

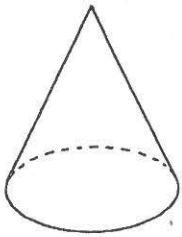


Figure 33

Ces deux derniers dessins sont des PC(1/2, 90°) ; le rapport de réduction est 1/2 ; il détermine le rapport des axes de l'ellipse ; l'angle de fuite est de 90°. Le cylindre et le cône sont plus difficiles à représenter si on utilise une perspective cavalière ayant un angle de fuite différent de 90° et de - 90°.

Les élèves utilisent aussi quelquefois spontanément la PC (1, α) où α est égal à 30°, 45° ou 60°. Les arêtes d'un cube sont alors repésentées par des segments de même longueur. Les élèves parlent de dessin "à l'échelle". Cela induit, à tort, que cette représentation conserve les longueurs. En PC(1, 45°), par exemple, le cube a une allure allongée comme le montre la figure 34 ; ce qui appraît comme contradictoire avec l'image attendue; cette situtation permet une réflexion intéressante sur le codage associé à la perspective cavalière.

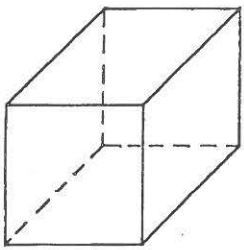


Figure 34

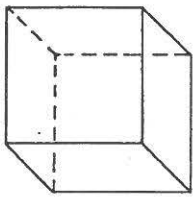


Figure 35

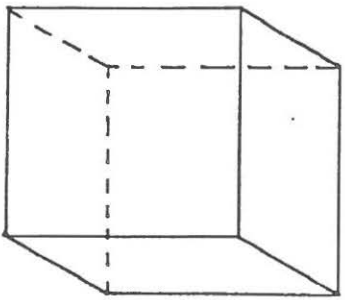


Figure 36

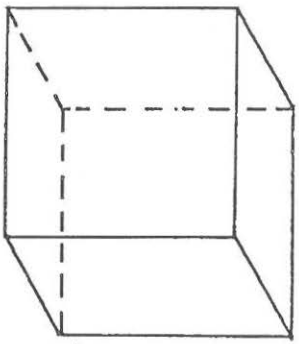


Figure 37

Les perspectives cavalières PC(1/2, -45°), PC(1/2, -30°) ET PC(1/2, - 60°) donnent des représentations correspondant à un objet placé au-dessus et à gauche de l'observateur, les figures 35, 36 et 37 représentent le cube au moyen de ces trois perspectives cavalières.

Nous venons d'examiner toute une série de perspectives cavalières : PC(1/2, 60°); PC(1/2, 30°); PC(1/2, 45°), PC ($\sqrt{2}/2$, 45°); PC(1/2, 90°), PC(1, 30°); PC(1,45°); PC(1/2, -45°); PC(1/2, -30°); PC(1/2, -60°). Elles peuvent être abordées assez tôt par nos élèves du premier cycle. D'autres encore peuvent être introduites en fonction des nécessités créées par les problèmes.

Chapitre 4

DESSINS DES CINQ POLYÈDRES RÉGULIERS

Résumé

Ce chapitre est consacré au tracé en PC(1/2, 60°) des cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers.

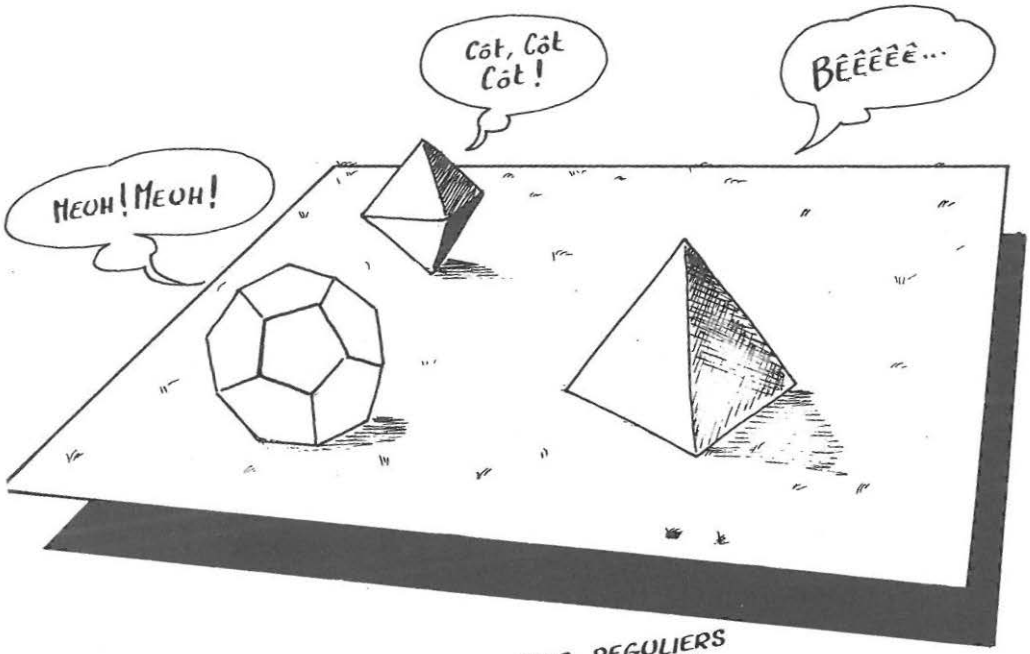
Remarquons tout d'abord que toute arête ou tout segment de l'espace peut être considéré comme une diagonale d'un pavé. Nous en déduisons deux règles fondamentales:

I. Soient deux segments orientés de l'espace AB et CD portés par la même droite ayant le même sens et tels que leur rapport soit égal à k. Alors leurs représentations respectives dans la PC(1/2, 60°) sont en général deux segments ab et cd, portés par la même droite, de même sens et tels que leur rapport soit égal à k. Le cas particulier où les segments AB et CD sont représentés par un même point est la seule exception.

II. Si deux droites de l'espace AB et CD sont parallèles, alors elles sont représentées en PC (1/2, 60°) soit par deux points a et c, soit par deux droites ab et cd parallèles.

Ces deux règles seront appelées règles de conservation du parallélisme et des proportions.

Nous faisons intervenir ces règles pour faciliter les tracés des cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre, l'isosaèdre. Nous tenons compte du fait que le cube et l'octaèdre sont duaux ainsi que le dodécaèdre et l'isoaèdre. Ces polyèdres sont représentés par des PC (1/2, 60°).



TROUPEAU DE POLYEDRES REGULIERS PAISSANT PAISIBLEMENT DANS UN PLAN EUCLIDIEN.

LE TÉTRAÈDRE RÉGULIER

La figure 38 représente un tétraèdre régulier. Il s'agit de la figure 23 légèrement agrandie. La sphère circonscrite à ce tétraèdre a un rayon de 3,6 cm environ.

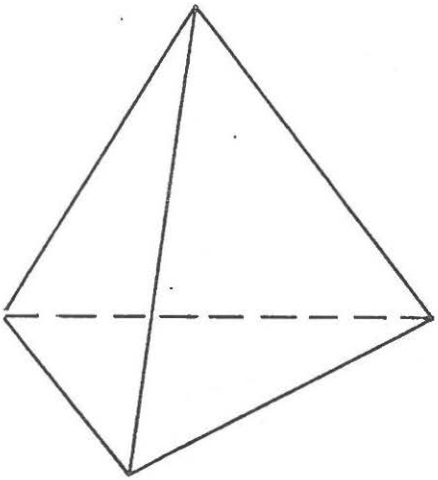


Figure 38

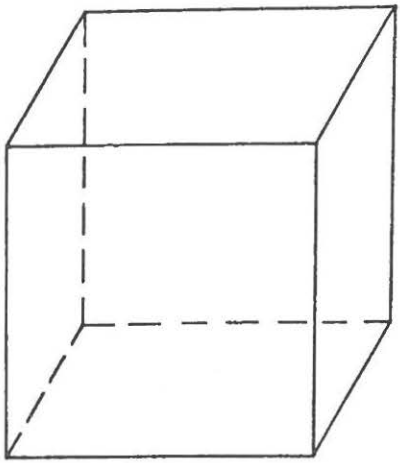


Figure 39

LE CUBE

La figure 39 ci-dessus représente un cube.
La sphère circonscrite à ce cube a un rayon de 3,6 cm environ.

L'OCTAÈDRE RÉGULIER

La figure 40 ci-dessous représente l'octaèdre régulier. Il s'agit d'un agrandissement de l'ocataèdre dual du cube représenté par la figure 39 ; l'ocataèdre dual de ce cube a ses sommets au centre des faces du cube. La sphère circonscrite à cet octaèdre a un rayon de 3,6 cm environ.

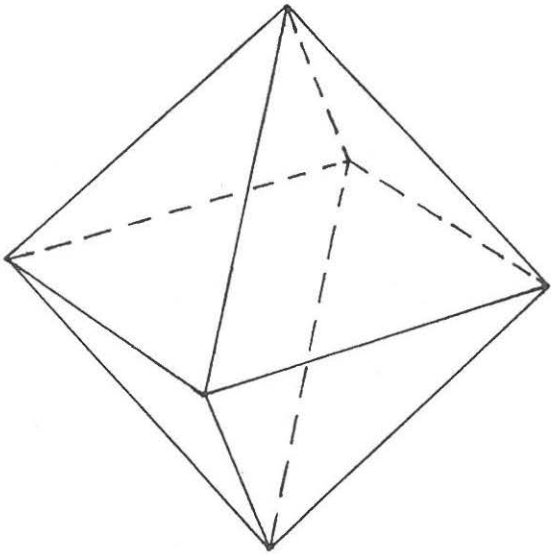


Figure 40

LE DODÉCAÈDRE RÉGULIER

Son dessin est assez délicat. Les figures 41 et 42 fournissent le patron d'un dodécaèdre régulier dont les arêtes mesurent 1,3 cm environ.

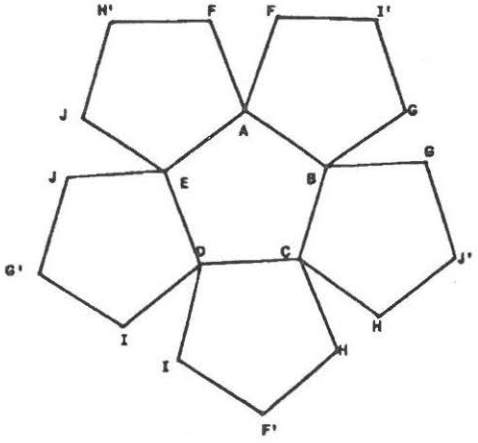


Figure 41

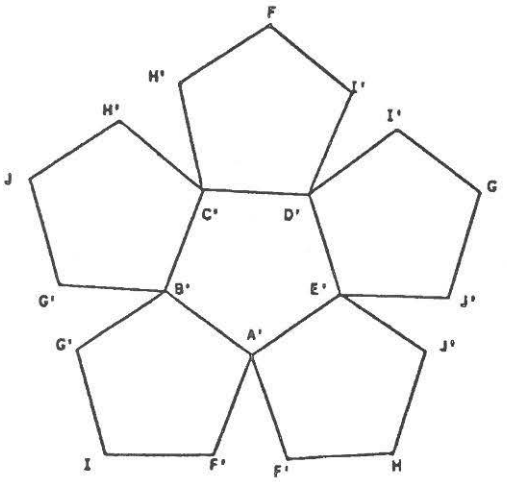


Figure 42

Le pentagone ABCDE reste fixe, posé sur la table. Plions les cinq pentagones qui l'entourent jusqu'à ce que les deux points F se confondent ainsi que les points G, J, I, H. Nous avons ainsi obtenu la moitié du dodécaèdre. Les six autres pentagones permettent de compléter le demi-dodécaèdre et d'obtenir ainsi le dodécaèdre régulier. Examinons de façon plus précise le demi-dodécaèdre avec sa face ABCDE posée sur la table. Les deux pentagones FGHIJ et F'G'H'I'J' sont respectivement aux distances x et x' de la table.

Appelons z la mesure d'un côté du pentagone ABCDE, O et r le centre et le rayon du cercle circonscrit à ce pentagone. La formule

$$\text{Cos } 36° - \cos 72° = \frac{1}{2}$$

se déduit de l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = O.$$

Cette formule associée aux égalités $\frac{z}{2} = r \sin 36°$ et $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$,

conduit aux relations : $z = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ et $r = z\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$

Le pentagone de l'espace FGHIJ est inscrit dans un cercle de rayon R; son côté a pour mesure AC = 2rsin72°. Des formules précédentes, nous déduisons les relations :

$$R = r\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad r = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad z = R\sqrt{5-2\sqrt{5}} \qquad R = z\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

Nous pouvons alors calculer x et x' en utilisant les résultats précédents :

$$x = r \qquad \text{et} \qquad x' = R$$

Appelons ρ le rayon de la sphère circonscrite au dodécaèdre ABCDEFGHIJE'F'G'H'I'J'A'B'C'D'E' une fois ce dodécaèdre construit, alors

$$\rho = \sqrt{R^2 + \left(\frac{x' - x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}(R^2 + r^2)}$$

Nous obtenons encore les relations

$$\rho = z\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)}{4} \text{ et } z = \rho\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)}{3}$$

Ces relations permtettent de réaliser la représentation du dodécaèdre régulier dans une PC(1/2, 60°). Si nous choisissons le rayon ρ comme unité, nous obtenons les valeurs approchées suivantes :

$$z = 0{,}71 \qquad r = 0{,}61 \qquad R = 0{,}98$$

Pour représenter ce dodécaèdre, nous choisissons comme plan arrière (se référer à la règle 1.5 du chapitre 3) un plan parallèle au plan médiateur de l'arête CD. L'axe de rotation d'ordre 5 du pentagone ABCDE qui est un axe perpendiculaire à la table puisque le pentagone ABCDE est posé sur la table est dessiné selon une droite parallèle aux bords latéraux de notre feuille. O et O' sont les centres des cercles circonscrits repectivement à ABCDE et A'B'C'D'E'. On les représente par les points o et o'. Sur le segment oo', marquons les points m et m' tels que om = o'm' = r et om' = o'm = R. Ces deux points m et m' représentent les intersections M et M' de l'axe OO' et des plans FGHIJ et F'G'H'I'J'.

Nous dessinons alors les quatre pentagones abcde, fghij, a'b'c'd'e', f'g'h'i'j'. Pour cela, nous utilisons le fait que les huit droites cd, be, hi, gj, c'd', b'e,, h'i', g'j' sont des fuyantes. Nous utilisons ainsi différentes mesures ; celle du côté du pentagone ; celle du rayon du cercle circonscrit au pentagone ainsi que la distance de deux sommets non consécutifs d'un pentagone et la distance d'un sommet au côté opposé. Nous obtenons ainsi la figure 43 ci-après.

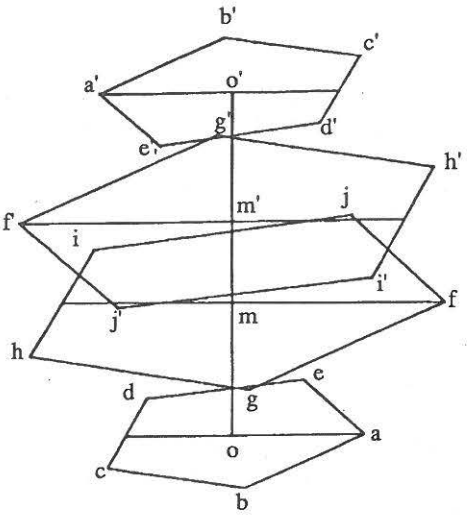


Figure 43

Les vingt points abcdefghija'b'c'd'e'f'g'h'i'j' de la figure représentent les 20 sommets du dodécaèdre régulier dont les arêtes mesurent environ 2 cm.

La figure 44 ci-dessous représente le dodécaèdre régulier au moyen de ses arêtes, les arêtes cachées étant représentées par des pointillés. Il s'agit encore d'une PC(1/2, 60°). Les arêtes mesurent environ 2 cm

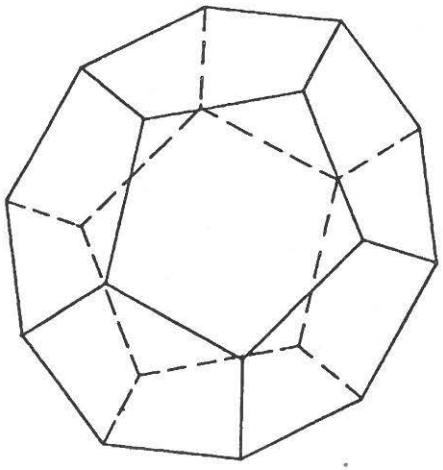


Figure 44

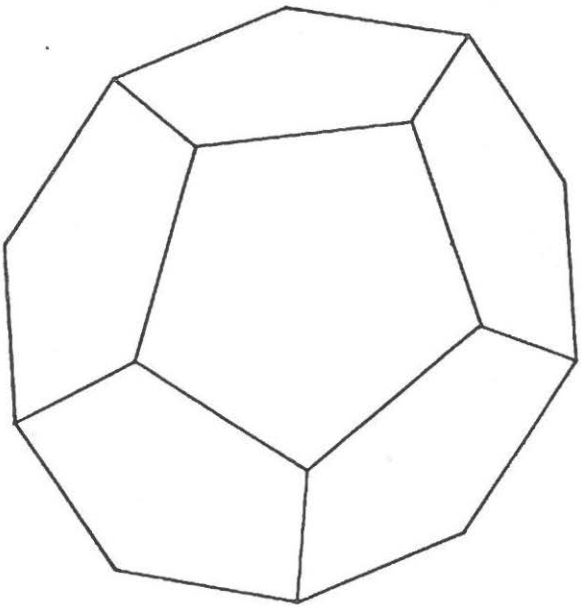


Figure 45

La figure 45 ci-dessus est la PC(1/2, 60°) du dodécaèdre régulier légèrement plus grand que le précédent. Dans ce dernier cas, les arêtes cachées ne sont pas représentées.

L'ICOSAÈDRE RÉGULIER

Les figures précédentes permettent de représenter le centre du dodécaèdre régulier ainsi que les centres de chaque face qui représentent les sommets d'un icosaèdre régulier.

La figure 46 ci-après est la PC(1/2, 60)) de l'icosaèdre régulier, les arêtes cachées étant représentées en pointillés. Les figures 45, 46, 47 et 48 représentent des dodécaèdres et des icosaèdres réguliers inscrits dans la même sphère.

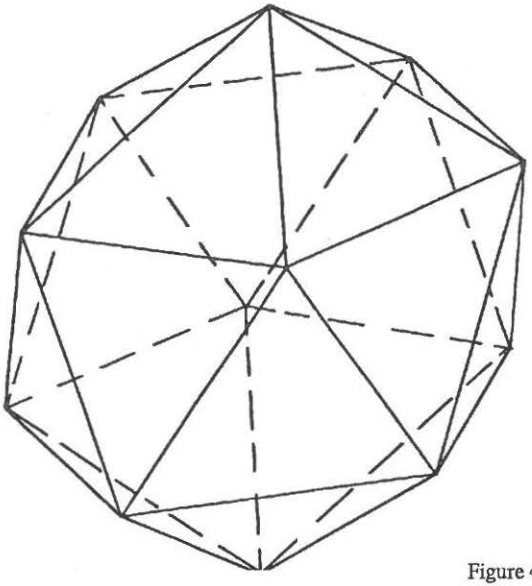


Figure 46

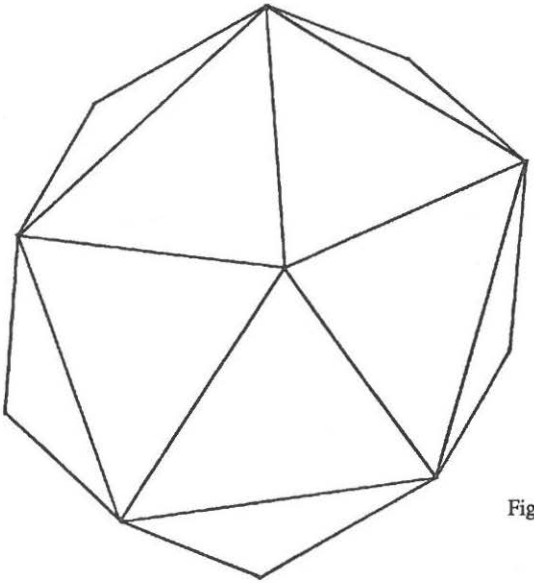


Figure 47

La figure 47 ci-dessus est la PC(1/2, 60°) de l'icosaèdre régulier mais dans ce dernier cas, les arêtes cachées ne sont pas représentées.

La figure 48 ci- dessous est une PC(1/2, 60°) . Elle représente le dodécaèdre régulier et l'isocaèdre régulier dans les positions duales correspondant aux figures 45 et 47. Les arêtes cachées ne sont pas représentées.

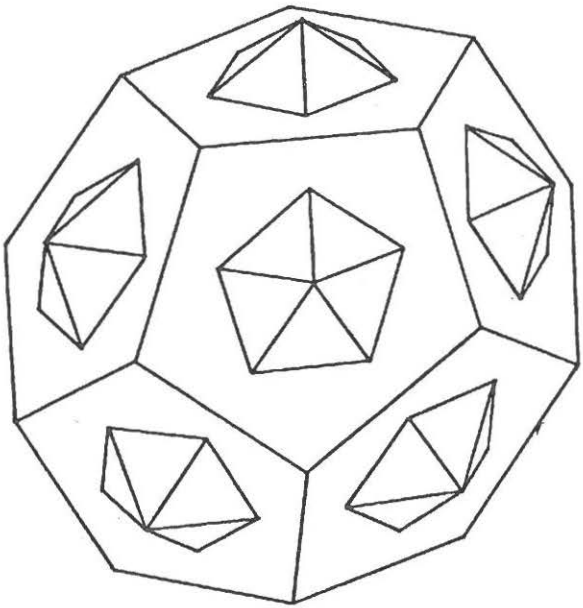


Figure 48

Chapitre 5

RÉALISATION D'UNE MAQUETTE

Résumé

Le chapitre 5 montre comment réaliser le patron d'une maquette dont on donne le dessin en PC(1/2, 60°). Les questions soulevées sont traitées dans un cas particulier ; le polyèdre choisi est un prisme.

Dans ce chapitre, nous montrons comment peut s'élaborer une maquette d'un polyèdre dont on connaît le dessin. Pour réaliser une telle maquette, nous nous heurtons à deux difficultés.

La première difficulté provient du fait qu'un dessin seul correspond à plusieurs maquettes. Pour illustrer cette dernière affirmation, considérons le tétraèdre ABEM représenté par le dessin abem de la figure 49 ci-dessous.

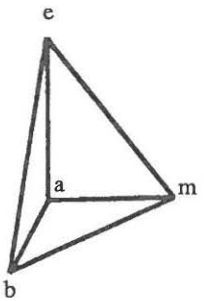


Figure 49

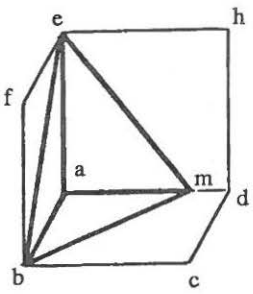


Figure 50

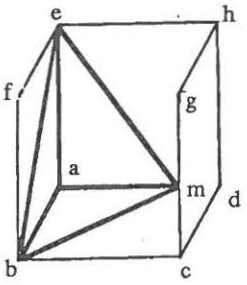


Figure 51

Repérons le tétraèdre ABEM dans le cube ABCDEFGH. Les sommets A, B et E sont identifiés aux sommets A, B, et E du cube. Le point m peut représenter un point de l'arête AD du cube, ce qu'illustre la figure 50 sur laquelle abem représente le tétraèdre et abcdefh sept des huit sommets du cube. Dans ce cas, les trois arêtes AB, AE et AM du tétraèdre forment un trièdre trirectangle. Le point m peut aussi représenter un point de l'arête GC du cube, ce qu'illustre la figure 51 sur laquelle abem représente le tétraèdre et abcdefgh les huit sommets du cube. Dans ce cas, l'arête AM du tétraèdre n'est perpendiculaire ni à l'arête AB ni à l'arête AE. Sur les figures 50 et 51, les arêtes du cube ne sont pas toutes représentées. Les dessins des figures 49, 50 et 51 sont des PC(1/2, 60°).

Pour pallier à cette difficulté provenant des insuffisances du dessin, nous devons ajouter des informations portant sur l'objet ou le dessin nécessaires à la réalisation de l'objet.

C'est ainsi que pour réaliser la maquette représentée par la figure 52 ci-dessous, nous donnons les indications suivantes :

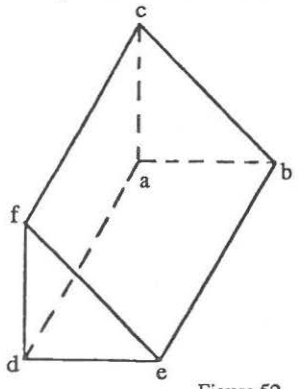


Figure 52

Le dessin est une PC(1/2, 60°). La fuyante fait ici un angle de 60° avec le bord inférieur de la feuille de dessin . Ce dessin représente un prisme droit à bases triangulaires On a choisi pour dessiner ce prisme les bases comme faces arrière et avant représentées respectivement par abc et def. Les trois autres arêtes du prisme sont représentées par les fuyantes ad, be, et cf. Ces indications sont alors suffisantes pour construire les 5 faces du prisme dont nous nous donnons les dessins sur la figure 53 ci-après. Les deux figures 52 et 53 sont à la même échelle.

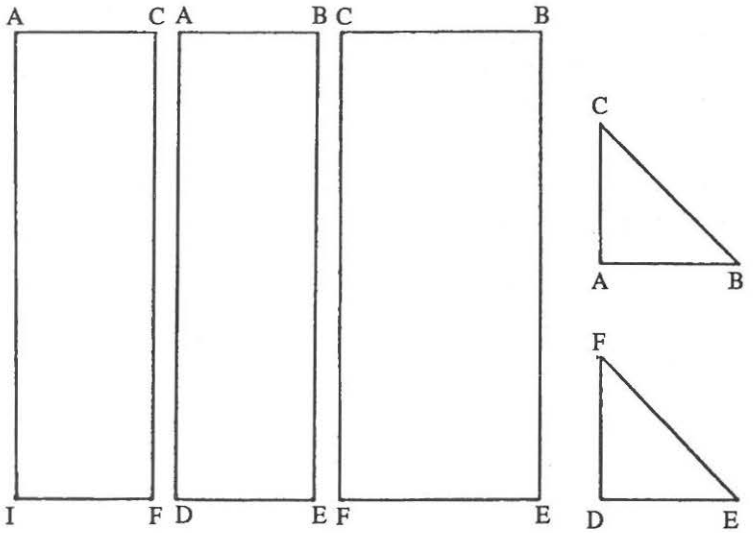


Figure 53

Dans le cas où l'objet est parfaitement déterminé par son dessin et différentes informations portant sur l'analyse de l'objet ou du dessin, la réalisation peut présenter encore une deuxième difficulté. En effet, le dessin et les informations peuvent ne pas fournir directement les vraies grandeurs des faces de l'objet. On doit alors procéder à des constructions auxiliaires ou à des raisonnements plus ou moins complexes avant d'obtenir ces faces. Considérons par exemple le prisme droit correspondant à la figure 54.

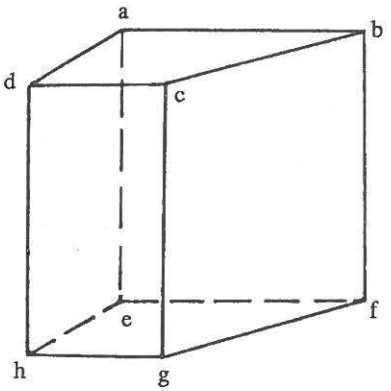


Figure 54

Sachant que abcdefgh est la PC(1/2, 30°), que abfe et dcgh représentent respectivement les faces arrière et avant de ce prisme, que ad et eh sont des fuyantes représentant des arêtes perpendiculaires à ces faces avant et arrière, le prisme est parfaitement déterminé. Mais on ne peut pas obtenir immédiatement le face représentée par cbfg car la vraie grandeur des arêtes représentées par cb et gf n'est pas connue. Il nous faut par exemple tracer d'abord le patron des faces supérieure et inférieure du prisme représentées respectivement par abcd et efgh afin de déterminer la longueur des arêtes CB et GF. On peut ainsi réaliser la maquette en traçant successivement les faces rectangulaires ABFE, AEHD, DCGH, puis les faces trapézoïdales ABCD et EFGH et enfin la face CBFG. Nous représentons ces différentes faces sur la figure 55.

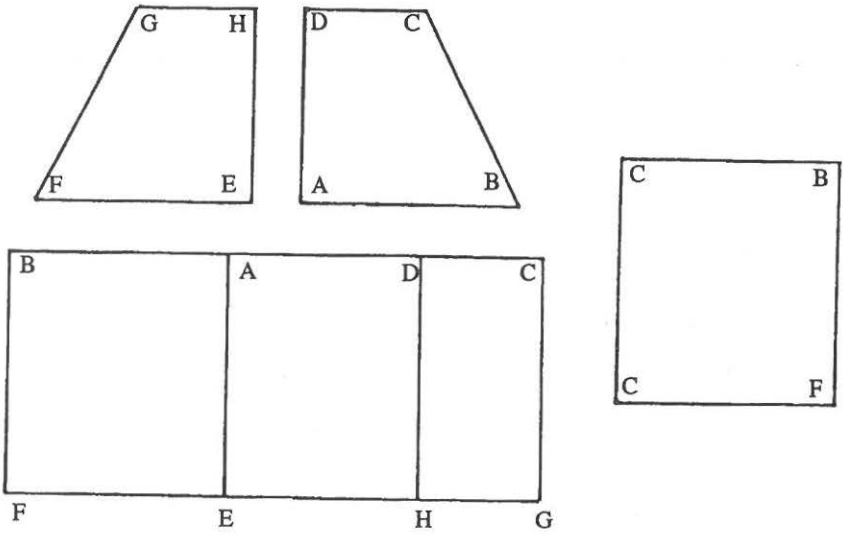


Figure 55

Nous avons distingué deux sortes de difficultés. Dans les deux cas, une analyse de l'objet, en l'absence de cet objet, est indispensable. Cette analyse repose sur le dessin, le raisonnement et une image mentale, celle qu'on peut avoir de l'objet absent.

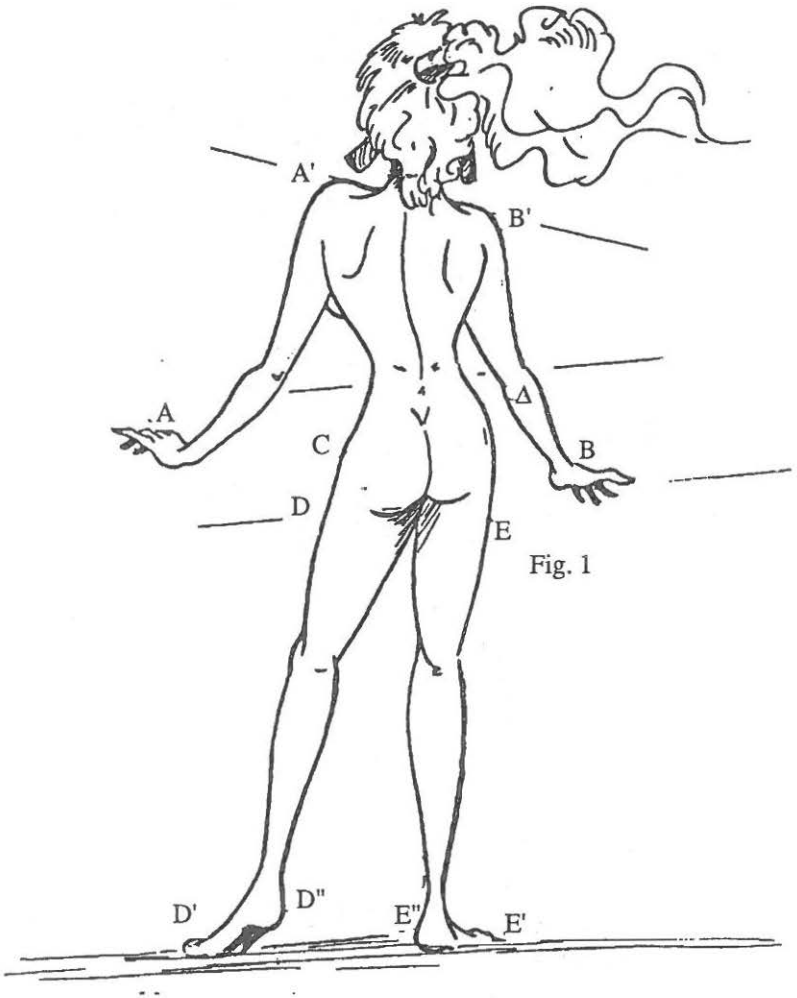


Fig. 1

Problème :
Soit l'objet dont la fig. 1 représente la face arrière.

Construisez la maquette

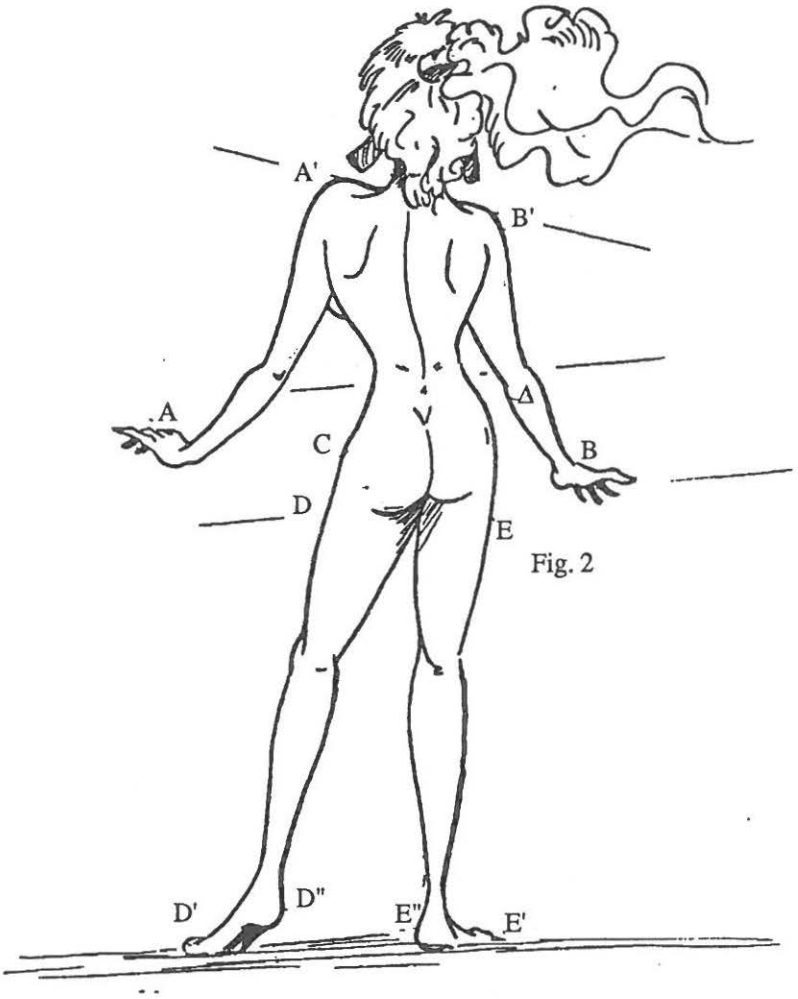


Fig. 2

Problème :
Soit l'objet dont la fig. 2 représente la face arrière.

Représentez la face avant.

Pointillés permettant de déchirer la page si le livre est mis entre des mains innocentes

Chapitre 6

DIFFÉRENTS DESSINS ASSOCIÉS AU DESSIN D'UN OBJET

Résumé

Le chapitre 6 présente différents dessins d'un même objet. L'objet absent est imaginé dans différentes positions.

Nous abordons ici une nouvelle étape nous permettant d'avancer dans la maîtrise de l'espace. Nous avons, dans une première étape, insisté sur la nécesité de dessiner des objets en présence de ces objets. (cf. chapitre 1, 2, 3 et même 4), puis nous avons examiné comment réaliser un objet dont la représentation est donnée (chapitre 5). Etudions dans ce chapitre comment, étant donné le dessin d'un objet absent, tracer d'autres dessins de cet objet.

Il est nécessaire d'avoir non seulement le dessin de l'objet mais encore, comme dans le chapitre précédent, une analyse de cet objet. Proposons le dessin d'un polyèdre ayant neuf faces et représenté par la figure 56 ci-dessous au moyen d'une PC(1/2, 60°).

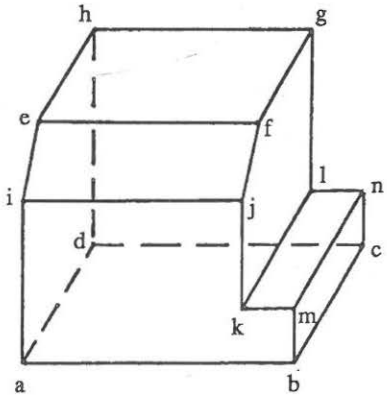


Figure 56

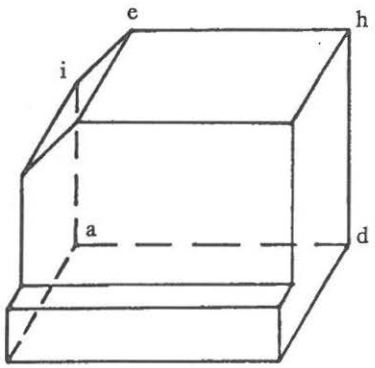


Figure 57

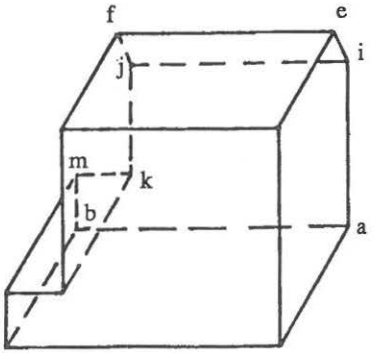


Figure 58

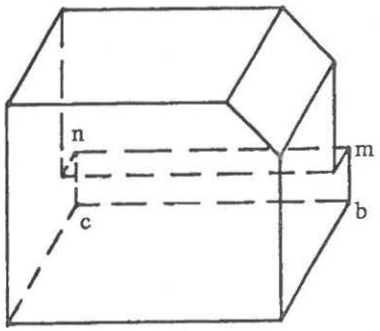


Figure 59

Les faces arrière et avant sont représentées respectivement par dcnlgh et abmkji. Les 6 fuyantes ad, bc, mn, kl, fg et eh représentent des perpendiculaires à ces deux faces.

Les figures 57, 58, et 59 représentent encore ce polyèdre à neuf faces avec pour face arrière respectivement adhei, baijkm, cbmn.

Nous choisissons, en dernier lieu, un dessin tel que le plan arrière soit parallèle aux droites représentées par eg et gl sur la figure 56 ; gl devient une droite parallèle au bord latéral de la feuille selon la disposition proposée par la figure 60 ci-dessous. La figure 61 représente notre polyèdre à neuf faces dans ces conditions particulières.

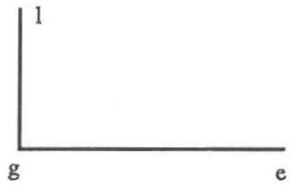


Figure 60

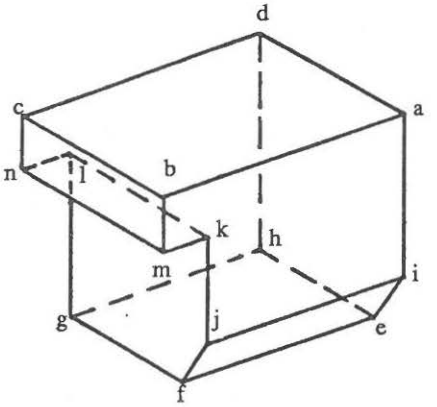


Figure 61

Les figures 57, 58, 59 et 61 sont réalisables grâce à la figure 56 et aux informations portant sur la face avant, la face arrière et les fuyantes.

TECHNIQUE ET VISION

Examinons dans ce paragraphe comment interviennent et interfèrent la technique de traçage et la vision de l'objet.

Les règles utilisées pour dessiner un objet apparaissent tout d'abord comme des techniques de dessin ne faisant intervenir ni les positions de l'objet par rapport à un repère fixé de l'espace, ni la place occupée par l'œil de l'observateur. On peut choisir une face de l'objet et la dessiner en vraie grandeur (cf. les règles 1.0 et 2.0 du chapitre 3), on peut ensuite tracer les fuyantes passant par les points représentant certains sommets de cette face (règle 3.0).

Une règle de nature différente, la règle 5.0 est bientôt introduite.. Enonçons-la à nouveau : les arêtes vues sont représentées par des segments en traits pleins ; les arêtes cachées par des segments en pointillés. Cette règle fait intervenir un repère dans l'espace, la table et ses bords et oblige le dessinateur à se placer en un certain point de vue. Pour l'appliquer, la vision s'avère indispensable.

En fait, les diverses règles de dessin font à la fois intervenir des techniques de traçage indépendantes des repères et des points de vue, et des relations spatiales dépendantes de la vision que l'on a de l'objet. Une face particulière de l'objet ou un plan privilégié associé à cet objet est choisi.

Et quoique le dessin puisse être réalisé grâce à ce choix et à des conventions portant sur le sens à donner aux segments orientés de fuyante, cette face ou ce plan va être positionné par rapport à l'observateur, ce sera une face arrière ou un plan arrière. L'observateur qui est aussi le dessinateur, aura donc l'objet devant lui avec une face plus proche de lui, la face avant et une face plus éloignée, la face arrière. Les fuyantes orientées de la feuille de dessin correspondront à des segments de l'espace orientés vers l'avant ou vers l'arrière. Pour mieux maîtriser encore la situation spaciale, les faces avant et arrière sont vues frontales. On introduit aussi des arêtes et des faces horizontales, verticales ou de bout.

L'observateur doit toutefois se méfier de son coup d'œil qui peut induire des règles fausses, comme par exemple la règle : des parallèles aux bords latéraux de la feuille de dessin représentent des verticales de l'espace (cf. le segment mc dans la figure 50 et 51). Mais en définitive, le dessinateur va utiliser à la fois des techniques de dessin et la vision de l'objet . C'est la seule démarche économique ; il suffit, pour s'en rendre compte, d'imaginer une règle pour les pointillés remplaçant la règle 5.0 et ne faisant pas appel à la vision.

La vision de l'objet fort utile à la réalisiation du dessin se heurte pourtant à deux écueils.

Tout d'abord, la vue qu'on a de l'objet ne correspond pas exactement aux règles de la perspective cavalière ; par exemple, un segment est vu de plus en plus petit lorsqu'il s'éloigne de l'œil dans un mouvement de translation, alors qu'il reste invariant dans la représentation en perspective cavalière. Les règles de la perspective linéaire dont nous parlerons dans la deuxième partie sont donc plus proches de la vision.

Ensuite, la position de l'œil n'étant pas très précise, l'image de l'objet peut donner des informations contradictoires avec les techniques de dessin. C'est ainsi que les arêtes NL et MN du cube entaillé représenté par la figure 13 peuvent ne pas être vues si l'œil est un peu trop bas, alors que les segments mn et nl sont nécessairement en trait continu dans une PC(1/2, 60°).

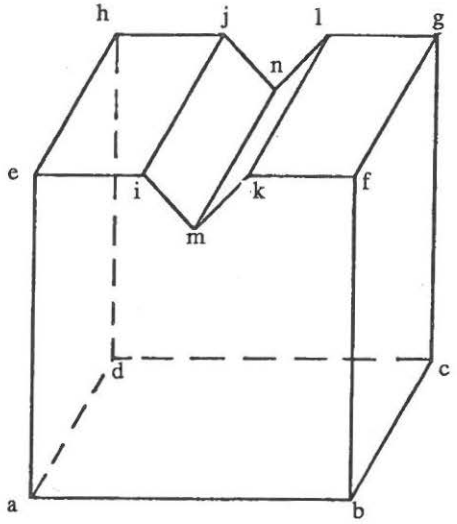


Figure 13

On devra donc utiliser prudemment un coup d'œil qui correspond mieux à une perspective linéaire qu'à une perspective cavalière et qui entraîne une certaine approximation.

Toutefois, dans la mesure où les objets examinés sont des polyèdres de petite dimension avec leurs arêtes rectilignes et leurs faces planes, technique et vision font assez bon ménage et mettent ainsi la perspective cavalière à la portée de nos élèves du secondaire.

Remarquons enfin que pour certains dessins, il vaut mieux ne pas tracer les arêtes cachées. Ainsi lorsque le nombre d'arêtes devient important, plutôt que de représenter les arêtes cachées par des pointillés il vaut mieux ne pas les représenter. Les figures 62 et 63 illustrent notre dernière affirmation.

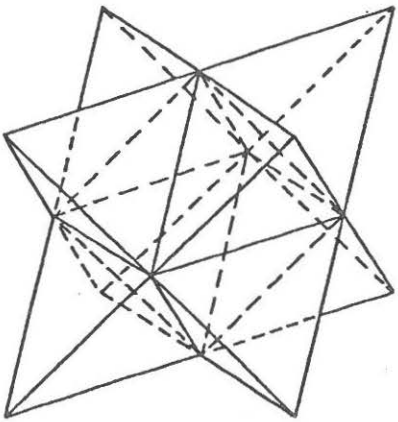


Figure 62

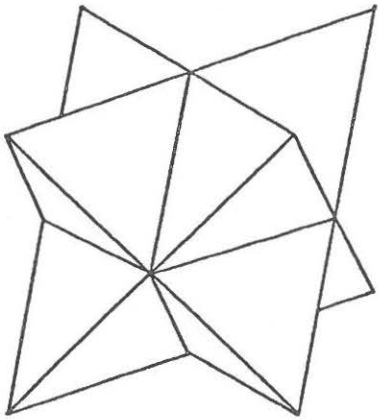


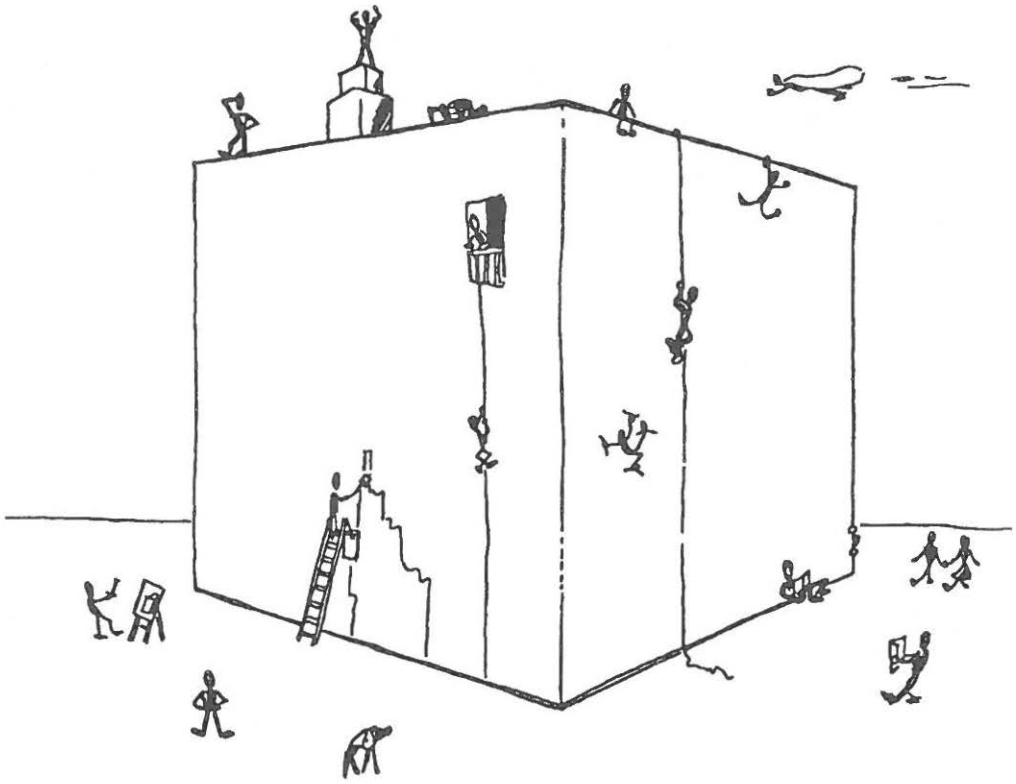
Figure 63

Ces figures représentent deux tétraèdres réguliers dont les centres de gravité sont confondus. Ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à ce centre de gravité commun. Leurs huit sommets sont les sommets d'un cube. La représentation utilisée est une PC(1/2, 60°). Sur la figure 62, les arêtes cachées sont dessinées en pointillés, sur le figure 63, ces arêtes ne sont pas représentées.

DESSIN ET OBJET

Nous avons nettement disitingué le long de ces six premiers chapitres, l'objet et le dessin. L'objet est un polyèdre avec ses sommets, ses arêtes et ses faces tandis que le dessin est composé de points, de segments. Les sommets de l'objet sont désignés par des lettres majuscules, les points du dessin par des lettres minuscules. Pourtant, ce double langage est lourd, et il impose un usage fréquent du verbe "représenter" (cf. par exemple les règles 3.4 ou 3.5 du chapitre 3).

Afin d'alléger le langage, nous n'hésitons pas à identifier objet et dessin de l'objet dans certains cas. Nous utilisons cet abus de langage lorsque la situation n'induit pas en erreur. Nous avons, d'ailleurs, déjà glissé dans notre texte certain abus ; c'est ainsi que dans le paragraphe précédent, nous avons écrit : "pour certains dessins, il vaut mieux ne pas tracer les arêtes cachées", nous aurions du dire en toute rigueur : "pour certains dessins, il vaut mieux ne pas tracer les segments en pointillés représentant les arêtes cachées".



DEUXIÈME PARTIE

PROJECTION

Chapitre 7

PROJECTION CYLINDRIQUE

Résumé

La première partie de ce livre (chapitre 1 à 6) a pour but de mettre à la portée de tous une technique de dessin : la PC(1/2, 60°). Elle permet, en particulier, à des élèves du second cycle du secondaire et du technique de s'initier à la PC et donc à la géométrie à 3 dimensions

Elle donne aux professeurs des disciplines scientifiques des collèges, les éléments facilitant leur enseignement de la géométrie de l'espace. Elle est utilisable en formation des maîtres des disciplines scientifiques (technologie, mathématique, physique, chimie, sciences-naturelles, géographie).

La deuxième partie qui commence avec le chapitre 7 met en évidence les concepts permettant d'approfondir le dessin en perspective cavalière.

Le chapitre 7 introduit le concept de projection cylindrique et ses liens avec toutes les perspectives cavalières obtenues lorsqu'on fait varier le rapport de réduction r et l'angle de fuite α. Il aborde l'axonométrie.

PROJECTION CYLINDRIQUE

Etant donné dans l'espace à trois dimensions un plan P et une droite D non parallèle à P, on apelle projection cylindrique sur le plan de projection P selon la direction de la droite D, l'application qui à tout point M de l'espace fait correpondre le point M' de P tel que M' et M appartiennent à une droite de direction D.

Tout objet de l'espace peut être projeté sur P selon la direction de la droite D. A un objet, nous pouvons donc toujours associer sa projection cylindrique qui est une figure plane. Cette projection nous donne un dessin de l'objet ; de ce fait elle offre un grand intérêt.

La figure 64 ci-après est une perspective cavalière (1/2, 60°). Elle représente trois faces d'un cube. Les huit sommets du cube sont désignés par les lettres majuscules ABCDEFGH. Sept de ces sommets sont représentés sur notre figure 64 par les lettres minuscules a,b, c, e, f, g, h ; abfe représente la face arrière du cube, efgh la face gauche et bcgf la face inférieure. Considérons une projection cylindrique associée à un plan P et à une droite D particulière. P est la plan défini par la face latérale gauche EFGH. La droite D passe par le centre A' de cette face et le sommet A du cube ; elle est représentée par la droite d. Dans ces conditions, le point M milieu d l'arête AB se projette en M' milieu de l'arête FG. Considérons encore le centre I de la face arrière ABFE et le milieu N de l'arête EA. I et N se projettent en I' et N'. Tous ces points de l'espace M, M', I, I', N, N' sont représentés sur la figure 64 et désignés respectivement par m, m', i, i', n, n'. La projection du carré AMIN sur le plan P selon la direction de la droite D est un parallélogramme A'M'I'N'.

A'M'I'N' est représenté sur la figure 64 par le parallélogramme a'm'i'n'. Mais a'm'i'n' n'est pas le dessin du carré AMIN obtenu par projection, ce dessin ou cette projection est un parallélogramme que nous reproduisons sur la figure 65; nous reproduisons aussi sur cette figure 65 la face carrée EFGH.

Sur la figure 65, nous désignons par EFGH et A'M'I'N' la face latérale du cube et la projection du carré AMIN ; c'est la représentation, en vraie grandeur, sur notre feuille de dessin, d'une figure contenue dans le plan P.

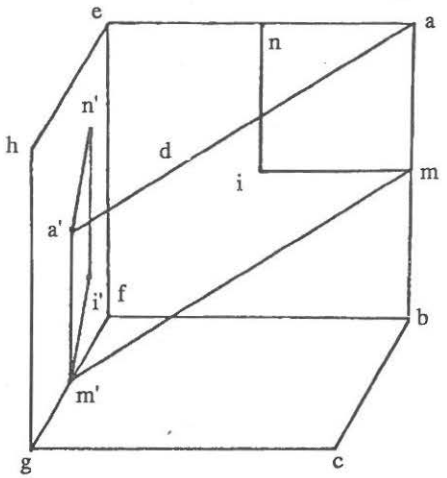


Figure 64

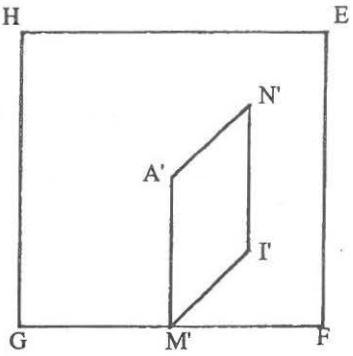


Figure 65

Le parallélogramme A'M'I'N' de la figure 65 est donc le dessin ou la projection, du carré AMIN ; tandis que le parallélogramme a'm'i'n' de la figure 64 est le dessin (la perspective cavalière) du dessin (de la projection) du carré A M I N.

On distingue deux sortes de projections cylindriques. Si D est perpendiculaire à P, alors on parle de projection cylindrique orthogonale ou plus brièvement de projection orthogonale. Si D n'est pas perpendiculaire à P, alors on parle de projection cylindrique oblique, ou plus brièvement de projection oblique.

Cette projection cylindrique s'accompagne de certaines propriétés utiles à la réalisation de dessins d'objets.

La projection d'une droite parallèle à D est un point. La projection d'une droite non parallèle à D est une droite.

La projection de deux droites parallèles entre elles, et non parallèles à D, est constituée par deux droites parallèles (ou confondues, si les deux droites de l'espace sont dans un plan parallèle à la droite D).

Toute figure contenue dans un plan parallèle au plan de projection P est projetée en vraie grandeur.

La projection d'un cercle contenu dans un plan parallèle à D est un segment. La projection d'un cercle contenu dans un plan parallèle à P est un cercle. Dans tous les autres cas, la projection d'un cercle est une ellipse, et deux diamètres orthogonaux du cercle ont pour projection deux diamètres conjugués de l'ellipse.

PC (1/2, 60°) et PROJECTION

Dans ce paragraphe, nous montrons qu'une PC (1/2, 60°) est une projection oblique.

Considérons un cube ABCDEFGH. Choisissons les lettres désignant les sommets de telle sorte que ABCD et EFGH soient deux faces opposées, que AE, BF, CG, et DH soient les arêtes perpendiculaires à ces faces et que le trièdre formé par les arêtes de même sommet AB, AE, AD soit direct. Considérons un point C' appartenant au plan de la face EFGH dont la position est donnée par la figure 66 et les égalités $\widehat{HGC'} = 60°$ et $GC' = \frac{1}{2} HG$.

La projection cylindrique sur un plan parallèle à la face EFGH selon la direction de la droite CC' fournit un dessin du cube ABCDEFGH.

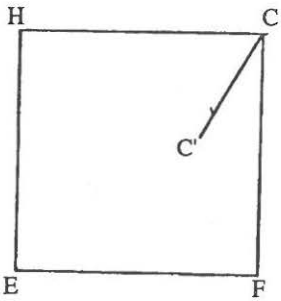


Figure 66

La PC(1/2, 60°) admettant ABCD comme face avant (EFGH est alors la face arrière) est dessinée de telle sorte que le carré abcd représentant la face ABCD soit orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre) avec ab parallèle au bord inférieur de la feuille de dessin et orienté de la gauche vers la droite. Cette PC(1/2, 60°) est un autre dessin du cube. Nos deux dessins sont alors isométriques. Tout objet de l'espace repéré par rapport au cube ABCDEFGH a une PC(1/2, 60°) définie par ce cube de référence.

Cette perspective cavalière est isométrique à la projection cylindrique de l'objet sur un plan parallèle à la face EFGH selon la direction de la droite CC'. Nous introduisons une isométrie pour comparer la perspective et la projection car cette dernière est réalisée sans qu'il soit fait référence aux bords de la feuille de dessin et à l'orientation de cette feuille ; mais plus brièvement, nous disons que perspective et projection fournissent le même dessin.

PC (r, α)

Tout objet de l'espace est parfaitement repéré grâce à un cube de référence. Puisque nous utilisons une représentation qui conserve le parallélisme et les proportions, nous nous contentons de représenter un cube ABCDEFGH. Les carrés ABCD et EFGH sont deux faces opposées de ce cube. AE, BF, CG et DH sont les arêtes perpendiculaires à ces faces. Le trièdre AB, AE, AD est direct. (L'espace est orienté selon la règle des trois doigts de la main droite : pouce, index, majeur donnant le sens direct).

La feuille de dessin est orientée selon le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le bord inférieur de cette feuille définit un segment OO' orienté de gauche à droite. Nous choisissons une face du cube comme face avant. Ici ABCD est la face avant choisie ; EFGH est donc la face arrière.

Nous représentons ABCD en vraie grandeur selon le carré abcd parcouru dans le sens direct. Sa position sur la feuille est définie à une isométrie directe près. Nous marquons alors le point e, représentant le sommet E, défini par les relations $(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{ae}) = \alpha$ et $\frac{ae}{AE} = \frac{ae}{ab} = r$;

α s'appelle l'angle de fuite et r le rapport de réduction.

Dans le cas particulier où $\alpha = -30°$, $r = \frac{2}{3}$ avec $(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{ab}) = 15°$, le cube est représenté, à une translation près, par la figure 67.

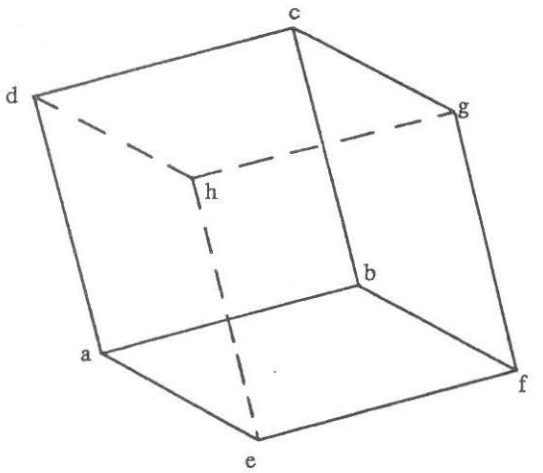


Figure 67

Tout point de l'espace, repéré par rapport au cube de référence, est alors parfaitement représenté par un point grâce aux règles de conservation du parallélisme et des proportions. Ces règles, énoncées au début du chapitre 4 pour la PC (1/2, 60°) s'étendent à la PC (r, α).

Nous avons pris en compte, pour cette définition générale de la PC (r, α) les orientations de l'espace et de la feuille de dessin.

PC (r, α) et PROJECTION

Considérons un pavé ABCDEFGH dont les trois dimensions sont différentes. ABCD et EFGH sont deux faces rectangulaires opposées. AE, BF, CG, DH sont les arêtes perpendiculaires à ces faces. Les trois arêtes issues d'un même sommet AB, AE, AD forment un trièdre direct. Donnons-nous un nombre réel $r > 0$ et une mesure d'angle orienté de vecteurs. Montrons que la PC (r, α) de notre pavé est aussi le dessin obtenu dans une projection oblique que nous déterminerons.

Pour réaliser la PC (r, α) du pavé, choisissons la face avant : ABCD. EFGH est alors la face arrière. Représentons la face avant par le rectangle abcd parcouru dans le sens direct. (Sens contraire des aiguilles d'une montre). Traçons le segment ab parallèlement au bord inférieur de la feuille de dessin et orienté de gauche à droite. On peut alors dessiner la PC (r, α) du pavé ; dans le cas particulier où $\alpha = 40°$ on obtient la figure 68.

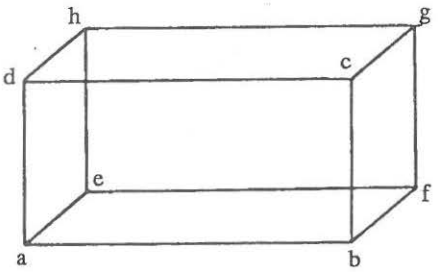


Figure 68

Choisissons maintenant un plan de projection P et une direction Δ faisant avec la normale au plan P un angle θ tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $\text{tg}\,\theta = r$. Choisissons un plan P et un pavé tels que la face ABCD du pavé soit parallèle au plan P. ABCD se projette selon un rectangle A'B'C'D' dont le sens de parcours définit le sens direct de P. Si on regarde le plan P du bon côté A'B'C'D' est parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On peut alors procéder de deux manières différentes. Ou bien, on fait tourner le solide autour de AE jusqu'à ce qu'on obtienne une projection identique, à une isométrie près, à la PC (r, α) précédente. Dans ce cas, c'est le rectangle A'B'C'D' qui tourne autour de A', les points A' et E' étant fixes (cf. figure 69 vue du bon côté de P), ou bien on fait tourner la direction Δ autour de la perpendiculaire à P, l'angle θ restant fixe, jusqu'à ce qu'on obtienne une projection identique à une isométrie près, à la PC (r, α) précédente. Dans ce cas, c'est le segment A' E' qui tourne autour de A', le rectangle A'B'C'D' étant fixe (cf. figure 70 vue du bon côté de P).

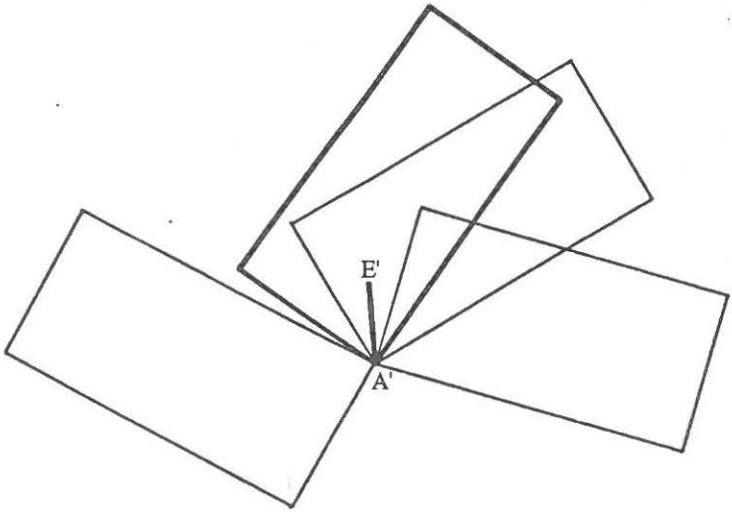


Figure 69

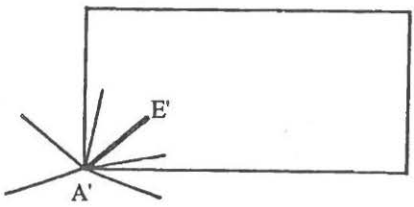


Figure 70

Réciproquement, étant donné le même pavé ABCDEFGH, donnons-nous maintenant la projection. Sa direction Δ fait avec la normale au plan P un angle θ tel que $o < \theta < \frac{\pi}{2}$. Son plan de projection est parallèle à la face ABCD. ABCD se projette selon un rectangle A'B'C'D' dont le sens de parcours définit le sens direct de P. Si on regarde le plan P du bon côté, A'B'C'D' est parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. La projection donne un dessin, la figure 71 par exemple (vue du bon côté).

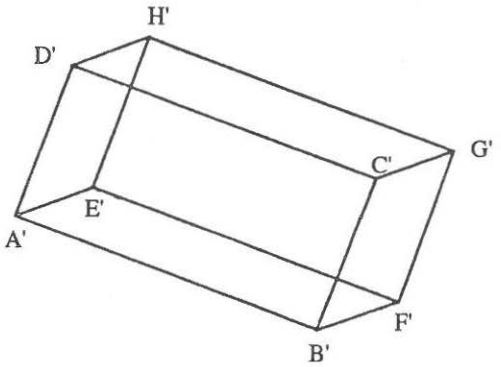


Figure 71

Choisissons maintenant $r = tg\,\theta$ et $\alpha = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'E'})$, angle orienté de vecteur. La figure 71 correspond à $r = \frac{2}{3}$ et $\alpha = 40°$. La PC(r, α) du pavé, pour laquelle ABCD est la face avant représentée par un rectangle abcd parcouru dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre), donne un dessin identique, à une isométrie près, à la projection du pavé.

Dans le cas général, nous disons sommairement, que perspective cavalière et projection oblique fournissent le même dessin.

La figure 72 ci-après est une PC (1/2, 60°) elle représente la feuille de dessin plane tenant lieu de plan de projection horizontal. Ses quatre bords, inférieurs, supérieurs, latéraux droit et gauche sont indiqués. Le segment unité AE représente une perpendiculaire au plan de la feuille, E étant dans ce plan et A au-dessus du plan. La droite Δ passant par A rencontre le plan en A' ; A' est la projection de A et Δ définit la direction de la projection. $\widehat{A'AE}$ représente l'angle θ. Le rapport de réduction r et l'angle de fuite, sont représentés sur le dessin.

Le rapport r est représenté par A'E puisque AEest le segment unité. La demi-droite EX parallèle au bord inférieur est orienté de gauche à droite.

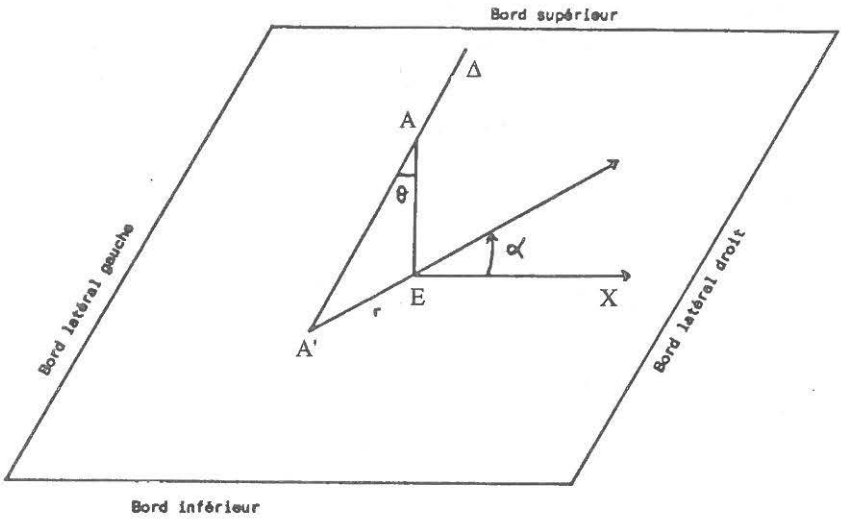


Figure 72

EPURE D'UNE PROJECTION ET PC

La figure 73 est l'épure du cube ABCDEFGH avec sa projection horizontal $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1h_1$ et sa projection frontal $a'_1b'_1c'_1d'_1e'_1f'_1g'_1h'_1$.

Considérons la projection oblique du cube sur le plan frontal selon la direction de projection δ, δ'. On obtient cette projection en cherchant l'intersection avec le plan frontal des droites parallèles à δ δ' et passant respectivement par les points $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$, $d_1d'_1$, $e_1e'_1$, $f_1f'_1$, $g_1g'_1$, $h_1h'_1$. Ces points d'intersections sont : aa', bb', cc', dd', ee', ff', gg', hh', puisque les quatre derniers points ont été placés, pour simplifier l'épure, dans le plan frontal. Orientons la ligne de terre xy de gauche à droite et donnons comme sens direct à notre feuille de dessin le sens contraire des aiguilles d'une montre. Choisissons comme unité de longueur l'arête du cube. Donnons nous α un angle orienté (ou sa mesure), et r un nombre réel strictement positif.

choisissons une direction δ telle que $(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{a'a'_1}) = \alpha$

choisissons une direction δ telle que $\overline{ae_1} = r \cos \alpha$.

Les vecteurs $\overrightarrow{a'e'_1}$ et $\overrightarrow{a'a_1}$ ont dans le plan de l'épure, pour directions respectives δ' et δ.

La projection frontale de cette projection cylindrique du cube, $a'b'c'd'e'_1f'_1g'_1h'_1$ n'est rien d'autre qu'une PC (r, α) du cube. Elle est d'ailleurs identique à la perspective cavalière donnée par la figure 67 car la face $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$, $d_1d'_1$ a été choisie sur l'épure pour qu'il en soit ainsi.

Pour obtenir les segments en pointillés de notre dessin $a'b'c'd'e'_1f'_1g'_1h'_1$ nous procédons de la manière suivante. Traçons le point $h_2h'_2$ se rouvant à l'intersection de la face $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$, $d_1d'_1$ et de la droite de direction $\delta\delta'$ passant par $h_1h'_1$. Si on oriente la direction $\delta\delta'$ dans un sens tel que les points de cette droite qui se trouvent devant le plan frontal soient avant les points de cette droite qui se trouvent derrière, alors le point $h_2h'_2$ est devant le point $h_1h'_1$. On dit encore que $h_1h'_1$ est caché par $h_2h'_2$. Nous avonslà une règle permettant de tracer en pointillés les arêtes (dites) cachées par des faces du cubes. Nous avons reproduit ces pointillés sur la figure 73.

Nous savons que toute projection oblique sert à définir une perspective cavalière et que toute perspective cavalière est une projection oblique. De plus, par l'intermédiaire d'une épure, nous savons associer au couple (α, r) où α est la mesure d'un angle orienté de vecteurs et r un nombre entier strictment positif, un couple (δ,δ') définissant la direction d'une projection oblique sur le plan frontal.

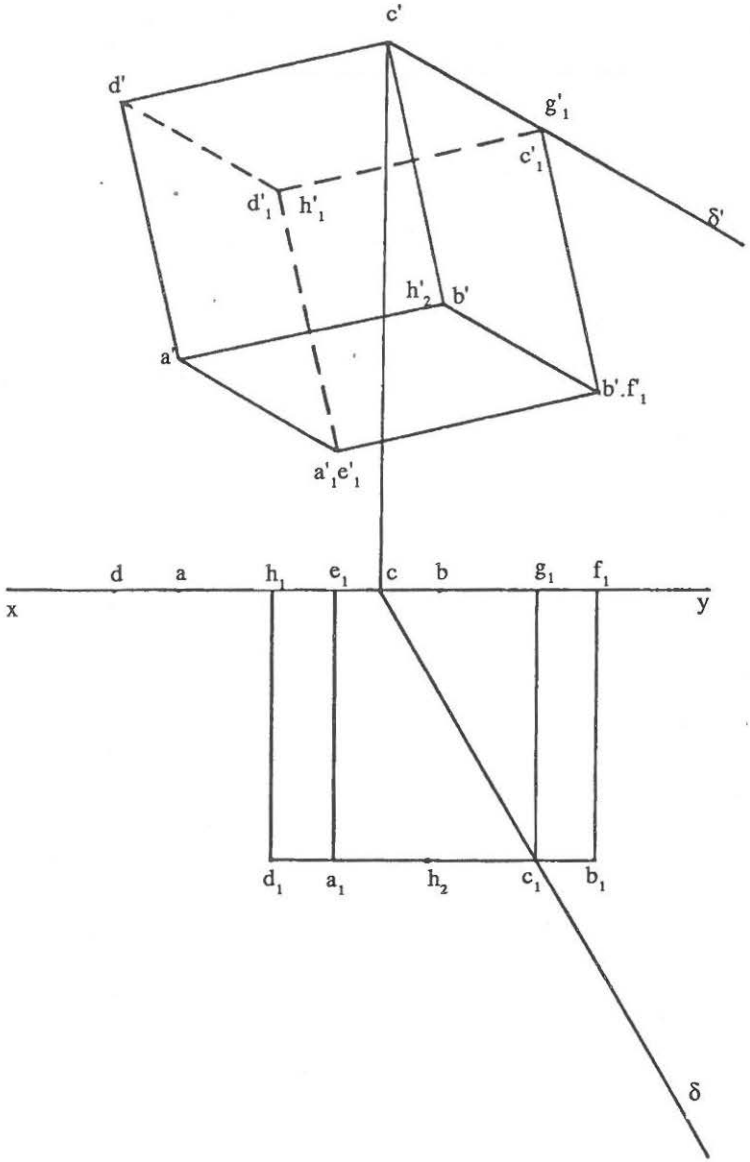


Figure 73

EST-CE LE DESSIN D'UN CUBE ?

Si nous représentons la figure 74 ci-après, certains disent catégoriquement : "ce n'est pas le dessin d'un cube".

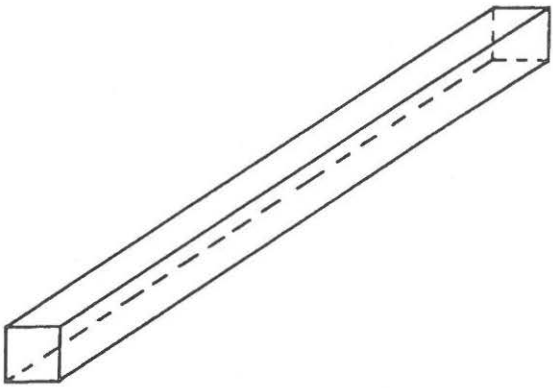


Figure 74

Ils refusent de reconnaître dans la figure 64 la perspective cavalière d'un cube. Par contre, ils acceptent comme représentation du cube en perspective cavalière la PC (1/2, 30°) de la figure 75, la PC (1/2, 45°) de la figure 76, ou la PC (1/2, 60°) de la figure 77.

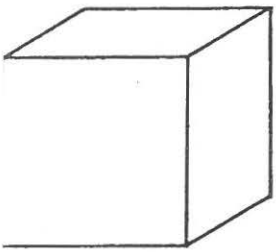


Figure 75

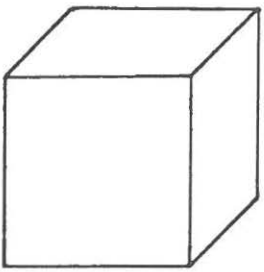


Figure 76

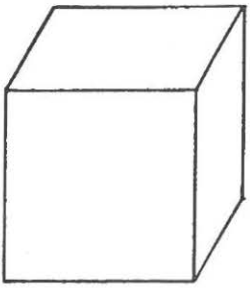


Figure 77

Ils demandent donc à la perspective cavalière de vérifier une propriété qualitative : elle ne doit pas choquer l'œil. Nous devons tenir compte de l'existence de cette propriété très subjective dans les processus d'apprentissage, même si pour une rigueur plus commode nous appelons perspective cavalière les PC (r, α) quels que soient α et $r>0$, ainsi que nous l'avons dit dans le paragraphe précédent. Pour nous, la figure 74 est une prespective cavalière d'un cube, mais nous acceptons qu'elle soit rejetée comme telle car il est choquant pour l'œil qu'elle représente un cube. Remarquons toutefois qu'un cube au soleil peut donner une ombre identique à la figure 74. Il suffit pour cela que les rayons du soleil soient suffisamment rasants.

AXONOMETRIE

Nous avons pu définir la PC (r, α) comme une projection oblique. La projection d'un cube de référence dont une face est parallèle au plan de projection donne le dessin du cube. Le dessin d'un objet, repéré par rapport à ce cube, est alors parfaitement déterminé.

On peut procéder d'une autre manière. Ayant choisi un plan de projection, un cube de référence n'ayant aucune arête parallèle à ce plan est projeté orthogonalement sur ce plan. La projection de ce cube est reproduite sur la feuille de dessin de telle sorte que quatre de ses arêtes soient représentées par des segments parallèles aux bords latéraux de la feuille de dessin. Nous appelons axonométrie du cube un tel mode de représentation. La perspective cavalière et l'axonométrie se distinguent donc de deux manières. Les directions de projections sont différentes, l'une est oblique par rapport au plan de projection, l'autre est orthogonale. Les cubes de référence ont des positions différentes, l'un a une face parallèle au plan de projection, l'autre n'a pas de face parallèle au plan de projection. Les axonométries se distinguent entre elles par les positions données au cube de référence. Quatre positions principales sont utilisées définissant la projection isométrique, trimétrique, dimétrique usuelle et dimétrique redressée.

La figure 78 représente le cube unité de référence en projection isométrique. les arêtes cachées dè sommet commun G ne sont pas tracées.

La figure 79 représente le cube unité de référence en projection trimétique. Les arêtes cachées de sommet commun G ne sont pas tracées.

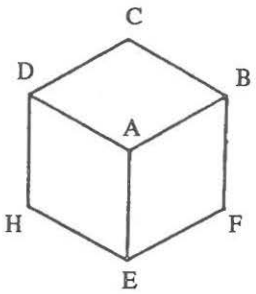


Figure 78

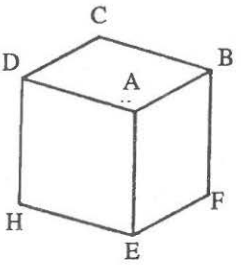


Figure 79

la figure 80 représente le cube unité de référence en projection dimétrique usuelle. Les arêtes cachées de sommet commun G ne sont pas tracées.

La figure 81 représente le cube unité de référence en projection dimétrique redressée. Les arêtes cachées de sommet commun G ne sont pas tracées.

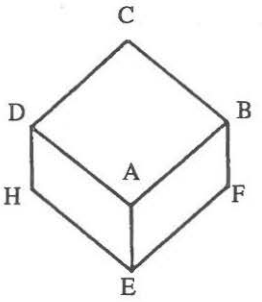


Figure 80

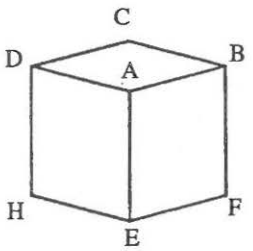


Figure 81

Le chapître 11 propose une étude plus détaillée de l'axonométrie.

CONSERVATION DU RAPPORT DES AIRES

Au début du chapître 4 nous avons énoncé les règles de conservation du parallèlisme et des propositions (I et II) associées à la PC (1/2 , 60°). Ces règles se généralisent à la PC (r, α) et peuvent s'enoncer en utilisant le concept de projection. Nous allons énoncer une troisième règle (III) dite règle de conservation du rapport des aires qui se déduit immédiatement du concept de projection.

III : Si deux surfaces planes appartiennent à des plans parallèles entre eux mais non parallèles à la direction d'une projection cylindrique donnée, alors le rapport des aires de ces deux surfaces est égal au rapport des aires de leurs projections.

PROJECTION ET REGLES DE TRACAGE

Nous avons jusqu'ici proposé deux possibilités pour définir la perspective cavalière.

La perspective cavalière peut tout d'abord être obtenue comme l'aboutissement de certaines règles de dessin. C'est ainsi que nous l'avons présentée dans nos trois premiers chapitres. Une suite d'actions de traçage débouche sur la représentation de l'objet. Cette procédure est à la portée des élèves débutant dans le premier cycle ($6^{ème}$, $5^{ème}$). Elle leur donne un outil leur permettant d'agir immédiatement et rigoureusement. Ils peuvent ainsi gravir les premieres marches conduisant à la maîtrise d'une représentation de l'espace, donc à la maîtrise de l'espace.

La perspective cavalière peut, en second lieu, être définie par une projection cylindrique oblique. C'est alors un concept qui est introduit. Il permet une grande rigueur mathématique et des échanges efficaces entre personnes qui le maîtrisent. Mais, il semble complètement inadapté pour nos élèves de l'enseignement obligatoire (ceux ayant moins de 16 ans). Il peut, au mieux, être abordé utilement par nos élèves des classes scientifiques en fin de second cycle. Mais son accès est grandement facilité par une introduction préalable de la perspective cavalière au moyen des règles de traçage. L'apprentissage de la PC dans l'enseignement secondaire ne doit faire intervenir le concept de projection cylindrique oblique qu'avec beaucoup de prudence.

Chapitre 8

PARAMÈTRES D'UNE P.C.

Résumé

Le chapitre 8 complète le précédent. Il étudie les effets sur le dessin dus au déplacement de l'objet et au changement de point de vue.

POINT DE VUE ET POSITION DE L'OBJET

Lorsqu'on veut dessiner un objet en utilisant une projection cylindrique, on est amené à introduire :

un repère fixe de l'espace,
un objet,
un plan sur lequel on projette l'objet,
une direction, celle de la projection.

C'est ainsi que le repère peut être matérialisé par une table, l'objet par une boîte, le plan par le plateau de la table, la direction étant une verticale ou une oblique.

Lorsqu'on change la direction de la projection, on dit qu'on change de point de vue. On peut aussi déplacer l'objet. Pour une première position de l'objet et une première direction de la projection, on obtient un premier dessin d_1. Mais, on peut choisir une deuxième position de l'objet et une deuxième direction de la projection de telle sorte que le dessin correspondant d_2 soit directement isométrique au dessin d_1. Les notions de point de vue et de position de l'objet sont donc étroitement liées.

Par définition, ayant dessiné un objet dans une PC (r,α) avec r et α donnés, nous disons que nous changeons de point de vue si nous dessinons ce même objet dans une PC (r', α') avec un couple (r', α') différent du couple (r, α).

Si l'objet change de position mais si la perspective cavalière choisie pour le dessiner est toujours la PC (r, α), nous disons qu'il y a eu déplacement de l'objet sans changement de point de vue.

Cette définition implique donc que les figures 75, 76 et 77 représentant un même cube ne correspondent pas au même point de vue ; tandis que les figures 56, 57, 58 et 61 correspondent au même point de vue d'un objet dans cinq positions différentes.

NOMBRE DE PARAMETRES

Considérons un plan vertical que nous appelons plan du tableau. La demi-droite OX horizontale appartient à ce plan. OZ est la demi-droite verticale ascendante. OY est la demi-droite perpendiculaire en O au plan du tableau telle que le tièdre OX, OY, OZ soit direct.

La position du pavé par rapport à OXYZ dépend de 6 paramètres, 3 coordonnées du point A et 3 angles d'Euler, par exemple. La projection cylindrique du pavé sur le plan OXZ dépend des deux paramètres déterminant la direction de la projection. Le couple (pavé, projection) qui détermine le dessin du pavé dépend donc de 8 paramètres. Mais nous pouvons réduire ce nombre de paramètres.

Pour cela, nous allons nous donner cetaines contraintes. Tout d'abord, nous constatons que, pour une projection donnée, deux positions du pavé dans l'espace en translation l'une par rapport à l'autre conduisent à deux dessins plans translatés l'un de l'autre. Nous ne différencions pas de tels dessins, ce qui fixe 3 paramètres. Nous supposons, en second lieu, que notre pavé a une face, toujours la même, parallèle au plan OXZ du tableau. Le dessin ne dépend plus alors que de la direction de la projection (2 paramètres réels), des rotations autour d'un axe perpendiculaire à OX (1 paramètre réel) et d'une symétrie par rapport à un axe parallèle OX (1 paramètre ne prenant que deux valeurs).

Nous reprenons les questions liées à la symétrie dans le paragraphe suivant. Signalons, toutefois, que deux positions symétriques du pavé donnent deux dessins identiques du pavé, puisque translatés l'un de l'autre ; mais deux segments qui se correspondent dans cette translation ne représentent pas la même arête du pavé, ce que montrent les figures 82 et 83 ci-dessous à partir d'une projection associée à la PC (1/2, 60°).

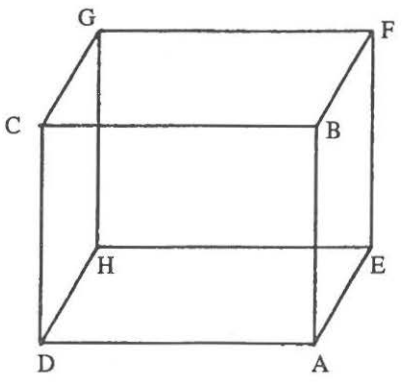


Figure 82

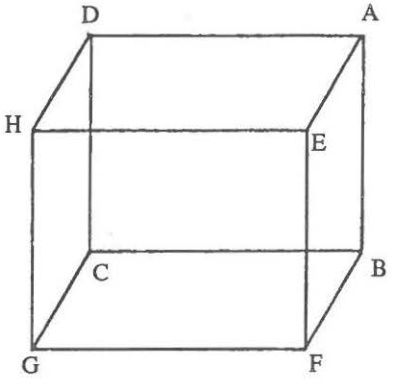


Figure 83

Mise à part cette question de symétrie, le dessin ne dépend plus que de 3 paramètres réels. Pour éviter cette variation du paramètre due à la symétrie, supposons que la demi-droite OY et l'arête orientée AE aient le même sens. Regardons le plan de projection du côté qui oriente le couple OX et OZ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. C'est ainsi que nous le dessinons sur la figure 84 ci-après. Alors les sommets ABCDEFGH de notre pavé se projettent respectivement en abcdefgh. Ce dessin dépend des trois paramètres

$r = \frac{ae}{AE}$ nombre réel > 0

$\alpha = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{ae})$ angle orienté de vecteurs

$\varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{ab})$ angle orienté de vecteurs

Les deux premiers paramètres sont fixés dès qu'on connaît la direction de la projection et le troisième est fixé par la position du pavé.

Mais, à une isométrie directe près, le dessin ne dépend que de deux paramètres :

$r = \frac{ae}{AE}$

et $\varphi = (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ae})$, angle de vecteurs

Les demi-droites OX, OZ et une projection abcdefgh du pavé sont dessinées sur la figure 84

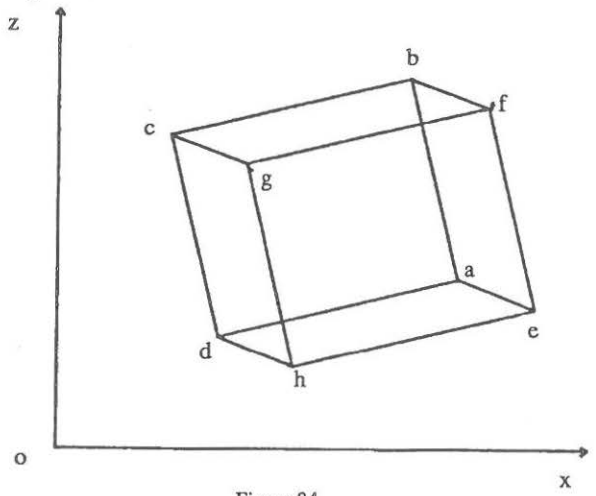


Figure 84

Avec le paramètre $\alpha - \varphi$ nous retrouvons le fait, énoncé au paragraphe précédent, que point de vue et position de l'objet sont étroitement liés. De plus, à deux couples $(\alpha_1 - \varphi_1, r_1)$ et $(\alpha_2 - \varphi_2, r_2)$ distincts correspondent deux dessins non directement isométriques. Nous disons donc que la perspective cavalière, dans les conditions précisées ci-dessus, est fonction de deux paramètres indépendants.

SYMETRIES

A un ensemble de deux droites du plan on peut associer un ensemble de quatre angles orientés de vecteurs. C'est ainsi que les deux droites X'X et Y'Y de la figure 85 ci-contre définissent quatre angles orientés de vecteurs : $\overrightarrow{(OX\ OY)}$, $\overrightarrow{(OY\ OX)}$, $\overrightarrow{(OX'\ OY')}$, $\overrightarrow{(OY'\ OX')}$, O étant l'intersection de ces deux droites.

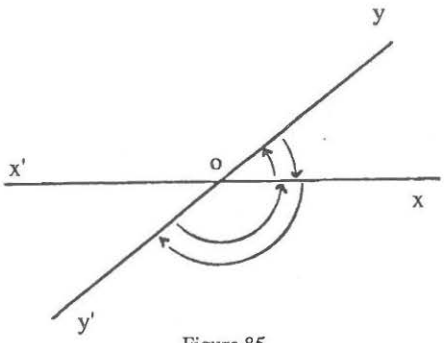


Figure 85

introduisons les perspectives cavalières associées aux 4 angles de fuite :

$$\alpha,\ -\alpha,\ \pi - \alpha,\ \pi + \alpha$$

De façon plus particulière, donnons-nous un pavé dont les trois dimensions sont différentes. Représentons le en prenant toujours la même face arrière et en choisissant successivement les PC de rapport de réduction 1/2 et d'angles de fuite 60°, 120°, -60°, -120°. Nous obtenons la figure 86 et 86'. Les quatre dessins du pavé sont isométriques. Si nous plaçons les pointillés, les dessins restent encore isométriques.

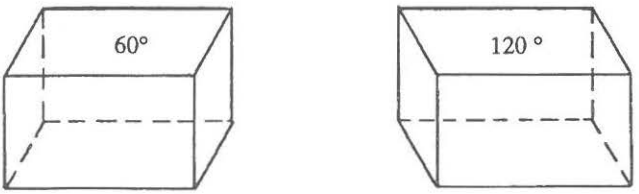
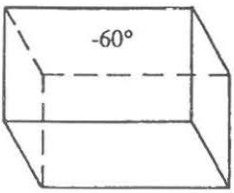


Figure 86



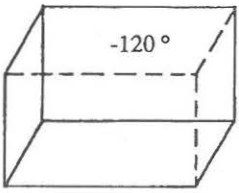


Figure 86'

Si nous permutons la face arrière et la face avant, nous obtenons les mêmes dessins. Malgrè les quatre angles de fuites différents et les deux faces arrières différentes, nous n'obtenons qu'un seul dessin du pavé à une isométrie plane près. Mais cela est dû aux propriétés symétries d'un pavé qui admet trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux. Le groupe des isomètries de l'espace qui conservent ce pavé est un groupe à huit éléments.

Prenons maintenant un objet n'admettant pas d'éléments de symétrie. Choisissons une face qui sera considérée d'abord comme face avant ; donnons-lui une position fixe et dessinons quatre perspectives cavalières : la PC (1/2, 60°) donnant la figure 87, la PC (1/2, 120°) donnant la figure 88, la PC (1/2, -60°) donnant la figure 89, la PC (1/2, -120°) donnant la figure 90.

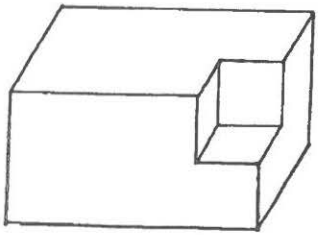


Figure 87 (60°)

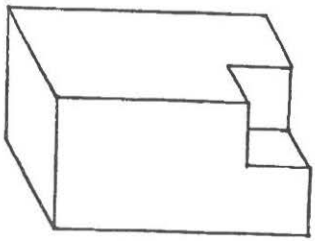


Figure 88 (120°)

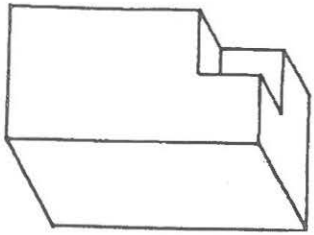


Figure 89 (- 60°)

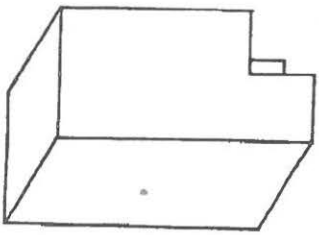


Figure 90 (- 120°)

Avec cette même face considérée comme la face arrière à laquelle nous donnons une position fixe, dessinons encore les quatre perspectives cavalières. On obtient les figures 91 (60°), 92 (120°), 93 (-60°), et 94 (-120°).

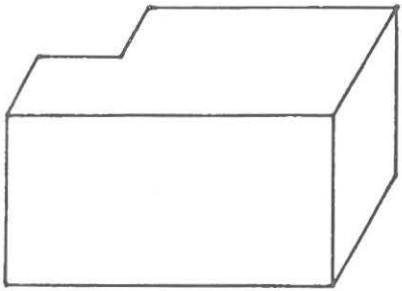


Figure 91 (60°)

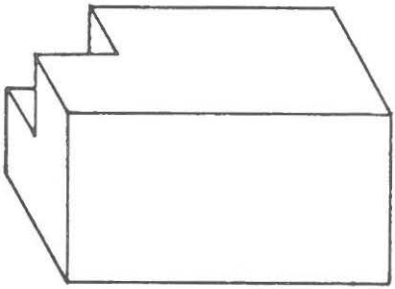


Figure 92 (120°)

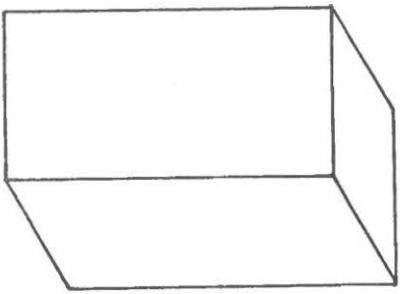


Figure 93 (- 60°)

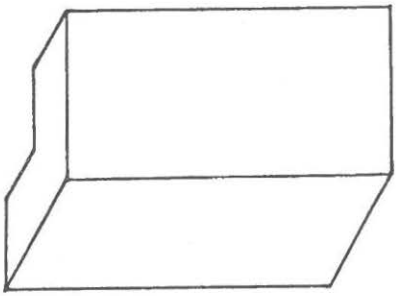


Figure 94 (- 120°)

Les huit dessins que nous venons d'obtenir sont tous différents, c'est-à-dire que deux quelconques d'entre eux ne sont pas isométriques. En définitive, nous devons rester très prudents lorsque nous utilisons des objets symétriques qui peuvent donner des perspectives cavalières isométriques ou non isométriques ; nous pouvons avoir de nombreuses possibilités entre les deux cas extrêmes (figures 86 et 86' d'une part et figures 87 à 94 d'autre part) que nous venons de voir.

TECHNIQUE, PROJECTION, POINT DE VUE, DEPLACEMENT

Dans le chapitre précédent, nous avons donné une définition de la PC (r, α) permettant de dessiner tout objet de l'espace avec des règles de tracé. Nous avons aussi défini la projection cylindrique oblique.

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous avons défini le point de vue, ou du moins ce qu'on entend par changement de point de vue qui correspond uniquement à une modification du couple (r, α). Des déplacements d'objets, rotations et translations, entraînent des modifications dans le dessin.

Nous avons constaté tout au long des chapitres précédents (surtout au cours des six premiers chapitres) que la vision de l'objet joue un rôle important. Une représentation en PC d'un objet est un dessin rigoureusement codé donnant, dans certaines conditions, une image approximative de ce que voit l'œil regardant l'objet.

Dessinons un cube de référence avec sa face avant représentée par un carré aux côtés parallèles aux bords de la feuille de dessin. Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ le cube est vu de-dessus et de droite ; si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ le cube est vu de-dessus et de gauche; si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ le cube est vu de-dessous et de gauche ; si $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi$ le cube est vu de-dessous et de droite. La notion de changement de point de vue prend un sens tout à fait visuel (cf. par exemple les figures 87, 88, 89 et 90). Nous préférons parler de vision approximative plutôt que d'œil amené à l'infini. (cf. le paragraphe du chapitre 6 portant sur la technique et la vision).

Nous distinguons nettement changement de point de vue et déplacement de l'objet (cf. le premier paragraphe du chapitre 8). Nous faisons jouer dans l'apprentissage un rôle différent à la technique de dessin et au concept de projection (cf. le dernier paragraphe du chapitre 7).

Chapitre 9

THÉORÈME DE POHLKE

Résumé

Le chapitre 9 présente le théorème de POHLKE et une démonstration de ce théorème. Ce théorème permet d'affirmer que quatre points d'une feuille de dessin représentent généralement une perspective cavalière des quatre sommets d'un coin de cube.

ÉNONCÉ

Si A', B', C' et D' sont quatre points non alignés et appartenant à un même plan P et si A_o, B_o, C_o et D_o sont quatre points non coplanaires, alors il existe une droite Δ, une projection cylindrique sur le plan P selon la direction de la droite Δ , et un tétraèdre ABCD de l'espace directement semblable au tétraèdre A_o, B_o, C_o, D_o tels que les points A', B',C',D' soient les projections respectives des points A, B, C,D. La figure 85 est une PC(1/2, 60°) qui illustre l'énoncé du théorème de Pohlke. Le tétraèdre $A_oB_oC_oD_o$, le plan P et les points A', B', C', D' du plan P donnés par hypothèse sont représentés sur cette figure. Le théorème affirme qu'il leur est associé un tétraèdre ABCD et une directrice Δ qui sont représentés sur la figure 95. Dans ce chapitre nous utilisons, si cela est ,nécessaire, les abus de langage, signalés dans le dernier paragraphe du chapitre 6. Démontrons maintenant ce théorème.

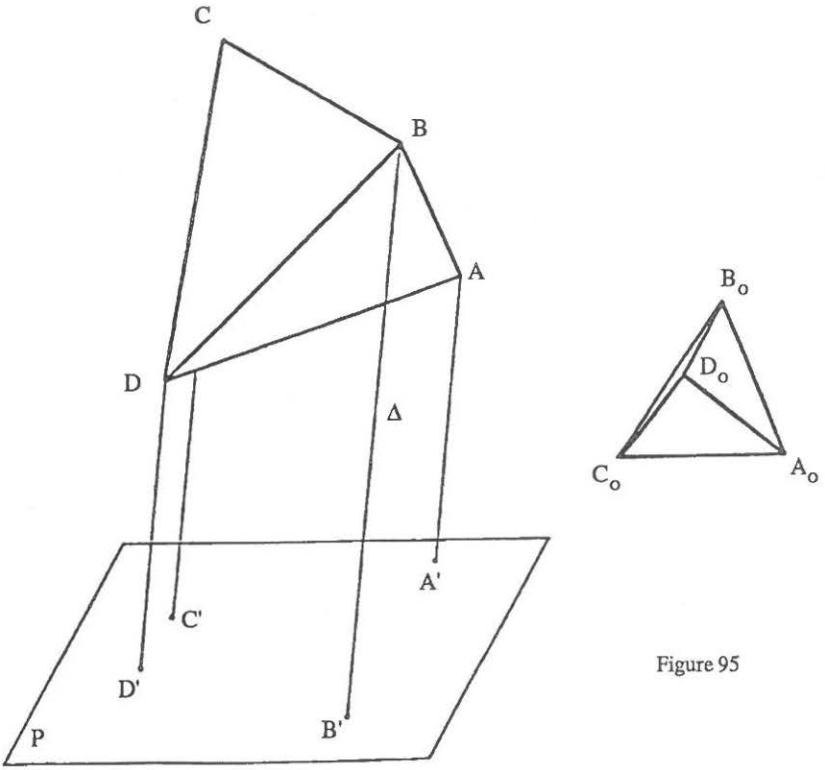


Figure 95

DÉMONSTRATION

Parmi les points A', B', C' et D' trois d'entre eux ne sont pas alignés. Supposons que ce soit A', B' et C'. Le point D' est alors le barycentre des points A', B' et C' affectés respectivements des cœfficients α, β, γ. Introduisons le point D_1 barycentre des points A_o, B_o, C_o affectés respectivement des cœfficients α, β, γ.

Considérons alors la barre prismatique à section triangulaire dont les trois arêtes sont parallèles à la droite D_oD_1 et passant respectivement par A_o, B_o, C_o. Nous allons montrer qu'il existe un plan coupant cette barre prismatique selon un triangle A"B"C" semblable au triangle A'B'C'. En appelant D" l'intersection de la droite D_oD_1 et du plan A"B"C", nous aurons alors démontré que les points A_o,B_o,C_o,D_o se projettent sur le plan A"B"C" selon la direction de la droite D_oD_1 respectivement en A", B", C", D" constituant un quadrilatère semblable au quadrilatère donné A'B'C'D'. Ce résultat est équivalent à l'énoncé du théorème de Pohlke. La figure 96 ci-dessous est une perspective cavalière illustrant la situation précédente.

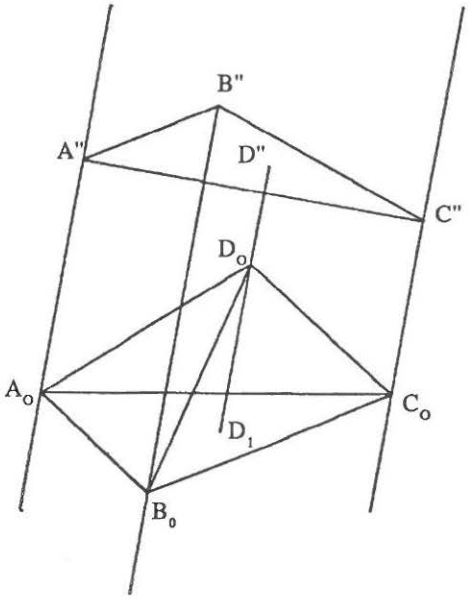


Figure 96

Démontrons l'existence du triangle A"B"C ".

Appelons UVW une section droite de la barre prismatique. Les points U, V, et W appartiennent respectivement aux arêtes passant par A_o, B_o et C_o. L'un au moins des trois angles du triangle UVW est aigu. Supposons que l'angle $\hat{U}$ soit aigu. L'une des deux inégalités suivantes est vérifiée :

$$\frac{UV}{UW} \leq \frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{ou} \quad \frac{UW}{UV} \leq \frac{A'C'}{A'B'}$$

Supposons que $\frac{UV}{UW} \leq \frac{A'B'}{A'C'}$. La figure 97 est une PC(1/2, 60) représentant la situation que nous venons de décrire. Les trois arêtes de la barre prismatique sont verticales et dessinées parallèlement aux bords latéraux de la feuille. Le triangle UVW est horizontal et le segment UW définit avec les deux arêtes de la barre passant par U et W, le plan arrière de notre perspective cavalière. Tous les segments de ce dessin sont en traits continus.

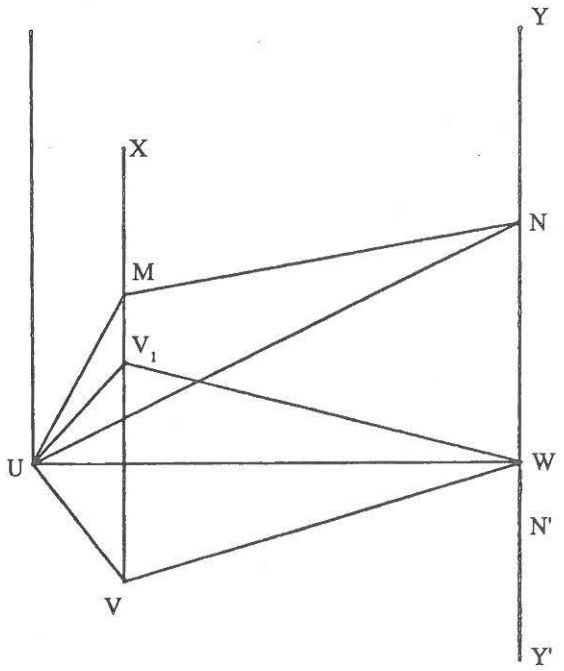


Figure 97

L'arête de la barre prismatique passant par V définit une demi-droite VX verticale ascendante. L'arête passant par W définit deux demi-droites WY verticale ascendante et WY' verticale descendante. Sur la demi-droite VX, il existe un point V_1 tel que

$$\frac{UV_1}{UW} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

A chaque point M de la demi-droite V_1X, on associe un point N de la demi-droite WY et un point N' de la demi-droite WY' tels que

$$\frac{UM}{UN} = \frac{UM}{UN'} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Lorsque M parcourt continuement la demi-droite V_1X, N parcourt continuement la demi-droite WY et N' parcourt continuement la demi-droite WY'. Dans ces conditions, l'angle $\widehat{MUN}$ prend toutes les valeurs comprises entre O et $\widehat{V_1UW}$ et l'angle $\widehat{MUN'}$ prend toutes les valeurs comprises entre $\widehat{V_1UW}$ et π. Il existe donc un point B" appartenant à la demi-droite V_1X et un point C" appartenant à la droite YY' tels que

$$\frac{UB"}{UC"} = \frac{A'B'}{A'C'} \text{ et } \widehat{B"UC"} = \widehat{B'A'C'}$$

Si nous appelons A" le point U, nous pouvons affirmer qu'il existe un plan coupant la barrre prismatique selon un triangleA"B"C" semblable au triangle A'B'C' ; ce qu'il nous fallait démontrer.

COIN DU CUBE

Appelons coin de cube le tétraèdre défini par les quatre sommets S, A, B, C d'un cube tels que SA, SB, SC soient des arêtes issues du même sommet. Un cube et un coin de cube sont représentés sur le figure 98 qui est une PC(1/2, 30°).

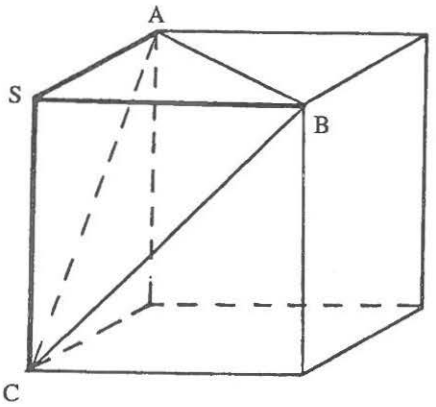


Figure 98

Le théorème de Pohlke énoncé précédemment se particularise dans le cas où le tétraèdre de l'espace est un coin du cube SABC, sous la forme suivante. Si S'A'B'C' sont quatre points non alignés appartenant à un mêmeplan P, alors il existe une droite , une projection cylindrique sur le plan P selon la direction de la droite et un coin de cube SABC tels que les points S', A', B', et C' soient les projections respectives des points S, A, B et C.

UNE CONSTRUCTION

Donnons nous quatre points S', A', B', C' d'un même plan. Ces points sont représentés sur la figure 99.

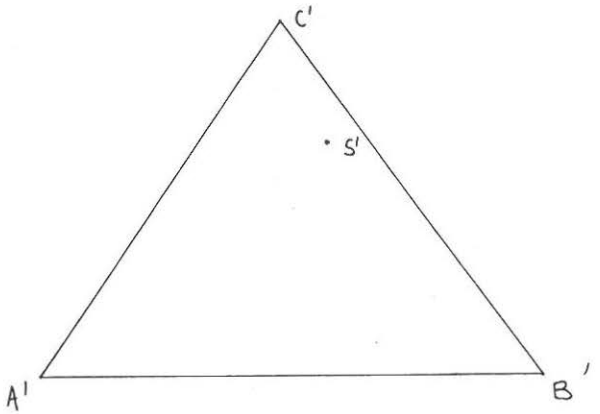


Figure 99

Nous allons dessiner en utilisant une PC(1/2, 60°) le coin du cube SABC et sa projection S'A'B'C' dans une projection cylindrique sur un plan P.
Pour réaliser ce dessin nous passons par six étapes succesives.

ÉTAPE 1

Considérons le coin de cube $S_oA_oB_oC_o$.

Si S' est le barycentre de A', B', C' affecté des cœffcients α, β, γ alors le point Σ_o est le barycentre de A_o,B_o,C_o affectés des mêmes cœefficients α, β, γ.

La figure 100 représente ces points S_o,A_o,B_o,C_o,Σ_o selon une PC(1/2, 60°). Les points S_o et Σ_o sont placés dans le plan de projection définisant cette PC, appelé aussi plan frontal de projection. Le plan du triangle $A_oB_oC_o$ est horizontal.

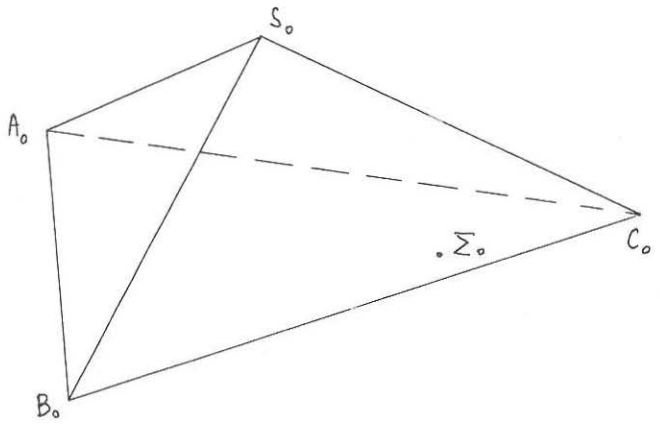


Figure 100

ÉTAPE 2

Considérons le prisme ayant pour base le triangle $A_oB_oC_o$ et des génératrices parallèles a $S_o\Sigma_o$.

Si nous repérons les points A_o,B_o,C_o par rapport à la frontale du triangle $A_oB_oC_o$ passant par Σ_o nous pouvons construire en vraie grandeur la section droite de ce prisme. La figure 101 est le dessin de cette section droite $A_1B_1C_1$ en vraie grandeur. Rappelons qu'une droite frontale, ou plus brièvement une frontale, est une droite parallèle au plan (frontal) de projection.

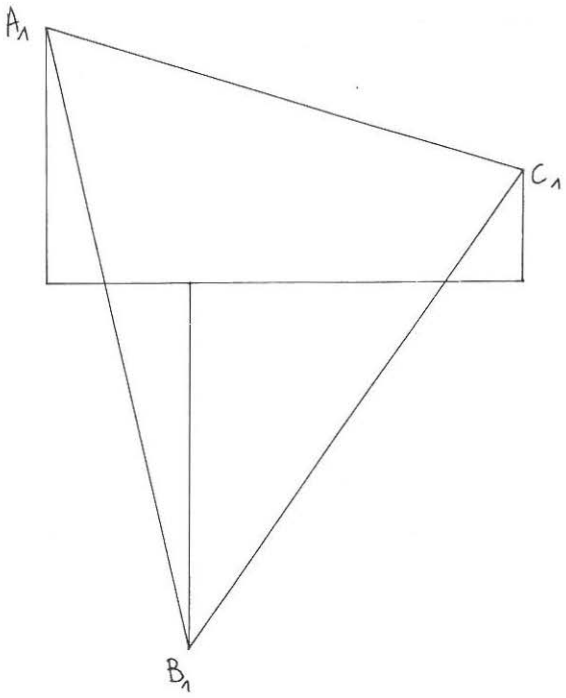


Figure 101

ÉTAPE 3

Nous dessinons maintenant en PC(1/2, 60°) un tronc de prisme dont les bases sont $A_oB_oC_o$ et $A_1B_1C_1$. Les arêtes A_oA_1, B_oB_1 et C_oC_1 sont parallèles à $S_o\Sigma_o$. $A_oB_oC_o$ est le triangle équilatéral associé à notre coin de cube (cf. figure 100) et $A_1B_1C_1$ est une section droite de ce prisme. Cette section droite peut être obtenue grâce à des constructions auxiliaires portant sur cette PC(1/2, 60°). Nous avons aussi placé sur la figure 102 les points S_o et Σ_o.

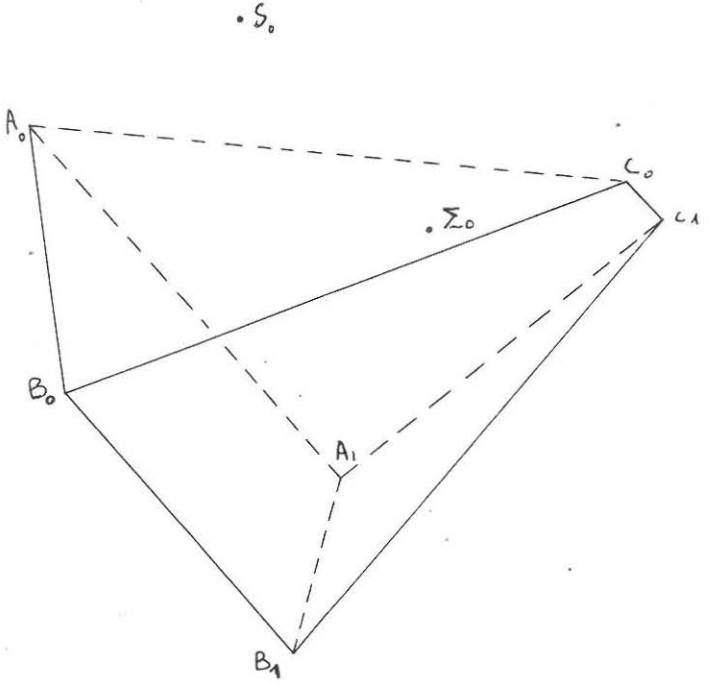


Figure 102

ÉTAPE 4

Nous développons ensuite le prisme. Le triangle $A_1B_1C_1$ se développe selon $a_{10}b_1c_1a_{11}$. Nous construisons, en utilisant des calculs ou des approximations successives, un triangle $A_2B_2C_2$ semblable au triangle A'B'C'. La figure 103 représente ce développement à l'échelle 1/2.

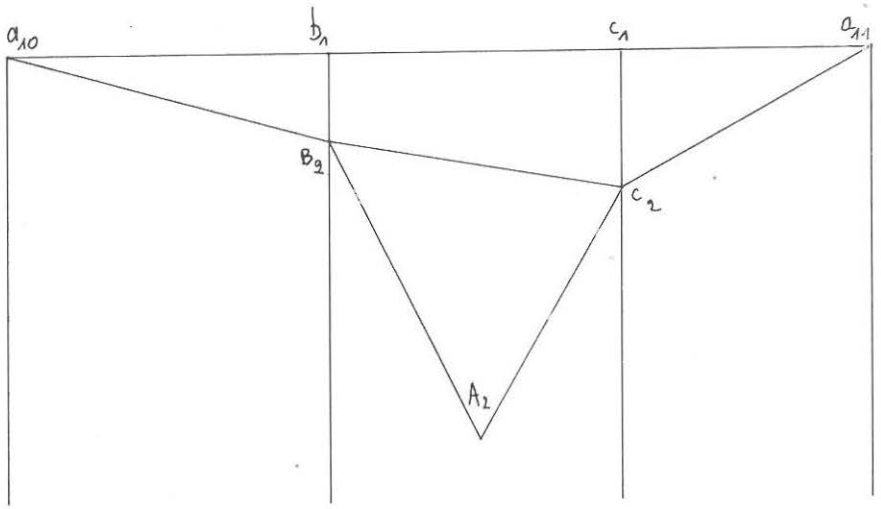


Figure 103

ÉTAPE 5

Nous complétons alors notre perspective cavalière initiale (cf. figures 100 et 102) en plaçant les points A'B'C' respectivement sur les droites A_oA_1, B_oB_1 et C_oC_1 de telle sorte que

$$B_1B' = 2b_1B_2 + A_1A' \quad \text{et} \quad C_1C' = 2c_1C_2 + A_1A'$$

Nous obtenons ainsi la figure 104.

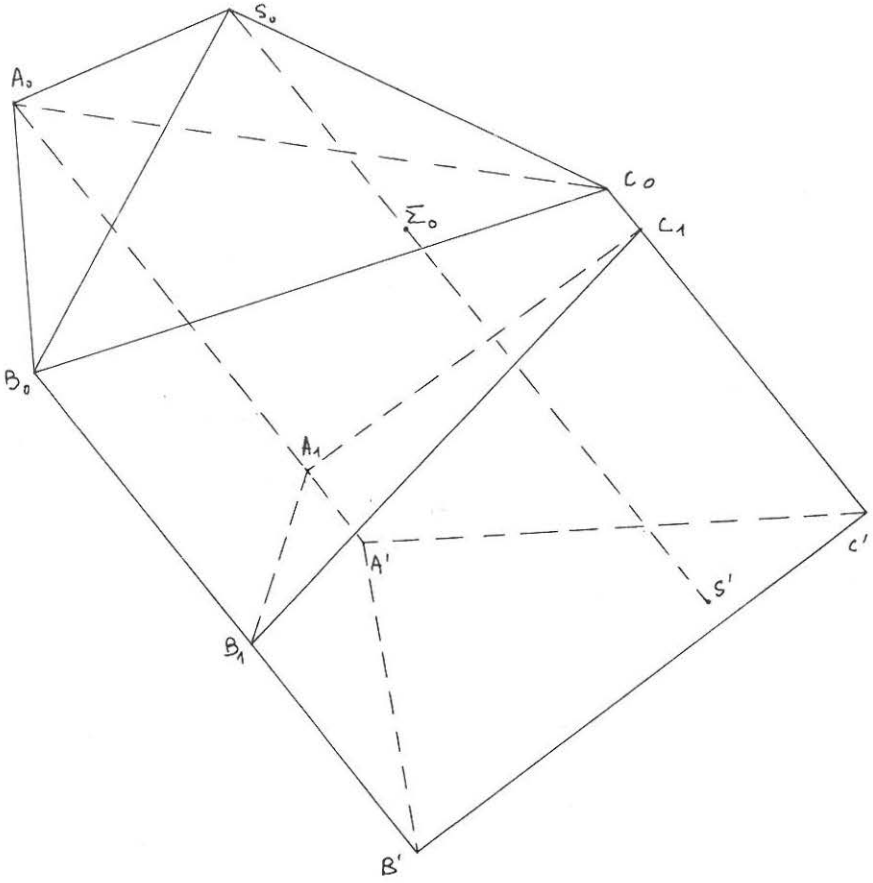


Figure 104

ÉTAPE 6

Pour répondre au problème posé il nous faut encore transformer cette dernière figure en utilisant une similitude de telle sorte que les quatre points S',A',B',C' soient ceux donnés initialement.

La figure 105 représente dans une PC(1/2, 60°) un coin du cube SABC et sa projection S'A'B'C' dans une projection cylindrique sur le plan des quatre points donnés.

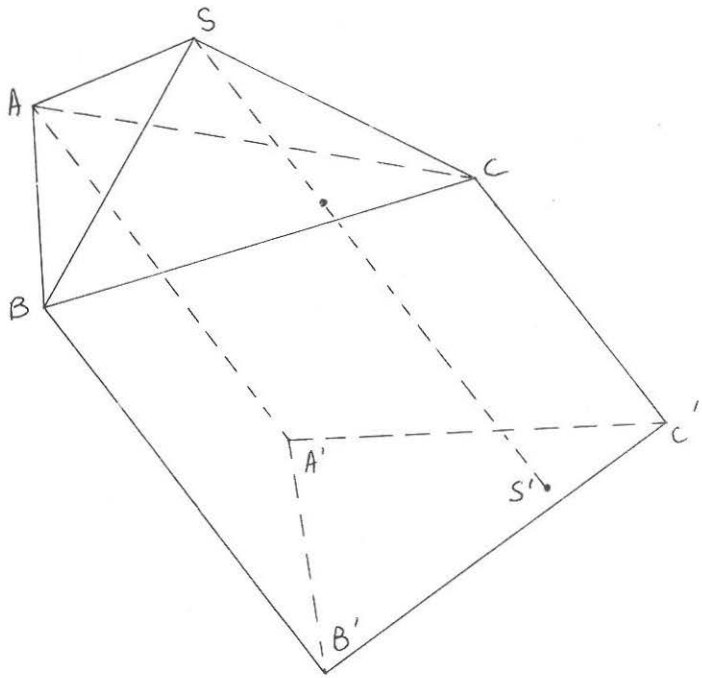


Figure 105

PROJECTION DU CUBE

Si le coin de cube SABC se projette en S'A'B'C' sur le plan P et si les quatre points sont disposés selon la figure 99 alors le cube défini par le coin SABC se projette sur le plan P selon la figure 106.

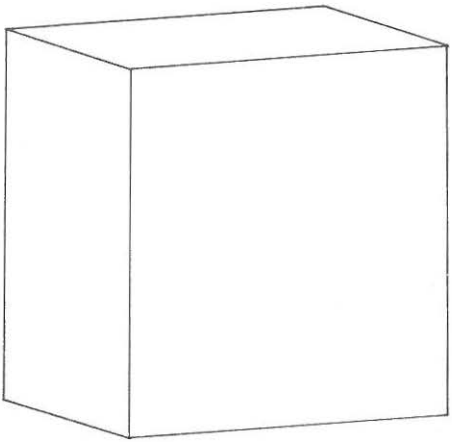
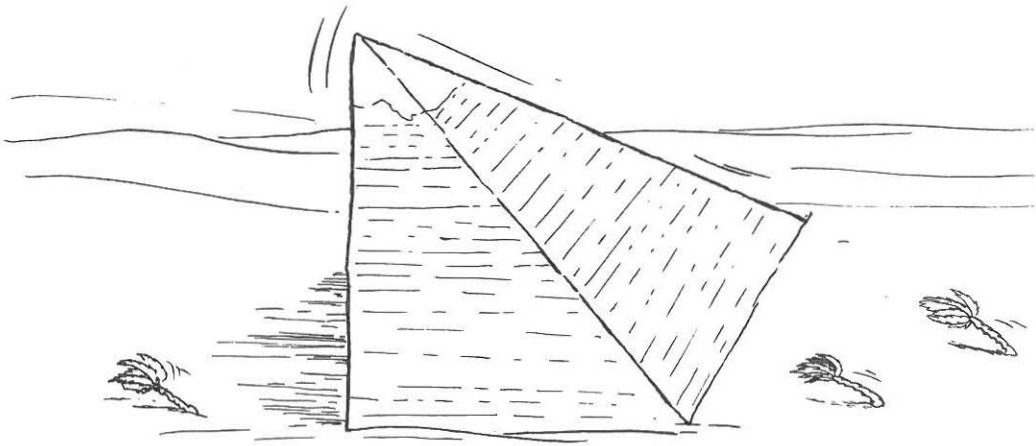


Figure 106

En définitive, le théorème de Pohlke prouve qu'un cube donne, en projection cylindrique, un dessin constitué à partir de quatre points quelconques non alignés. On imagine d'ailleurs facilement que l'ombre au soleil d'un cube en fil de fer peut prendre des formes aussi allongées qu'on veut. Tout dépend de l'inclinaison du plan de projection par rapport aux rayons de soleil. Il prouve encore que quatre points non alignés représentent toujours les sommets d'un tétraèdre régulier dans une certaine projection cylindrique.



PYRAMIDE DE KHÉOPS POSITION "VENT EN POUPE"

EXISTENCE OU CONSTUCTION

Le théorème de Pohlke nous donne l'occasion d'aborder une question concernant les traditionnels problèmes de construction.

Nous avons distingué d'une part le théorème d'existence, c'est l'énoncé du théorème de Pohlke et sa démonstration, et d'autre part une construction effective en six étapes. Dans tout problème de construction, ces deux aspects, existence et construction effective, apparaissent. On ne peut pas réduire le problème à un seul de ces aspects sans en prendre conscience. Le premier aspect se caractérise par sa généralité et la nécessité d'un raisonnement faisant appel aux quantificateurs universels ; le résultat doit être vrai quels que soient A'B'C'D' et $A_oB_oC_oD_o$. Le deuxième aspect conduit à l'étude d'un cas particulier ; le point de départ est la figure 99. La construction effective pour ne pas être trop lourde fait appel à des calculs et à des mesures ; elle met en jeu des approximations.

Dans le cas du théorème de Pohlke, la construction effective nous oblige à faire un choix. Deux possibilités sont offertes : va-t-on construire une maquette? Va-t-on réaliser un dessin ? Le dessin est matériellement plus facile. Il s'impose en tout cas dans le cadre d'un écrit. Mais encore faut-il disposer d'un dessin technique. C'est le cas avec la perspective cavalière. Remarquons toutefois, que sans perspective cavalière, les autres représentations n'étant pas utilisées dans l'enseignement secondaire, cet enseignement ne peut pas faire appel à des constructions effectives en géométrie de l'espace. Dans ce cas, on voit clairement que l'enseignement donne la priorité au savoir-penser (théorème d'existence) et élimine le savoir-faire (construction effective). Nous avons là une source de difficultés propre à l'apprentissage des mathématiques qui se répercute certainement sur la formation générale de nos élèves.

Chapitre 10

TROIS DESSINS DU CUBE

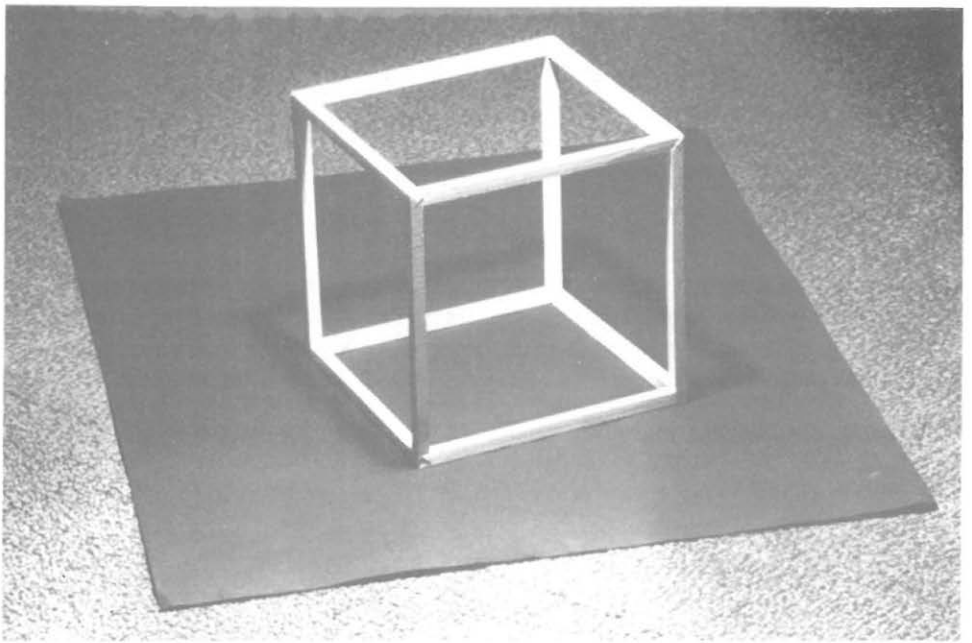
Résumé

Le chapitre 10 a essentiellement pour objectif de comparer les dimensions des dessins d'un cube obtenu au moyen de la perspective linéaire et au moyen de la perspective cavalière. Dans certaines conditions nouvelles ces deux représentations sont peu différentes.

Comment dessiner un cube ?

Notre cube est en bois. Il est constitué de 12 barres de bois collées. Ses arêtes mesurent 6 cm. Posons le cube sur une plaque horizontale. Cette plaque et le cube sont reproduits sur la photographie 107.

Nous allons dessiner ce cube de trois manières différentes en représentant les arêtes par de simples segments.



Photographie 107

VUES

Les droites verticales passant par les sommets du cube rencontrent la plaque horizontale sur laquelle nous avons placé une feuille de papier blanc, en huit points confondus deux à deux.

A chaque arête du cube joignant deux de ses sommets, on associe un segment, dessiné sur la feuille de papier blanc, joignant les deux points correspondants. Le dessin du cube est alors un carré que la figure 108 représente. On dit que ce dessin est une vue du cube.

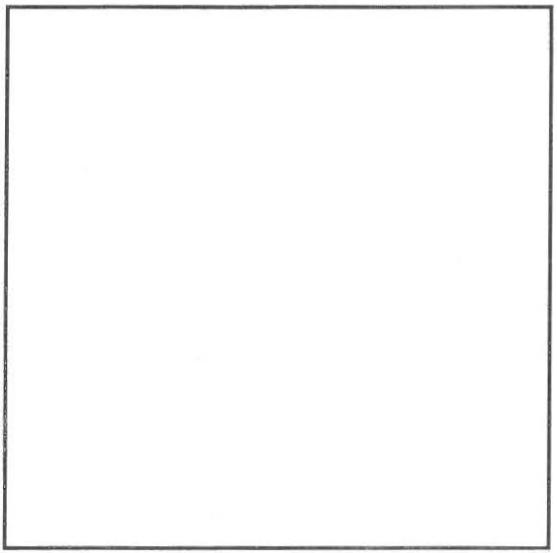


Figure 108

PERSPECTIVE CAVALIÈRE

Huit droites ni verticales ni horizontales, mais parallèles entre elles passent par les huit sommets du cube. Elles rencontrent la feuille de papier blanc en huit points. C'est ainsi qu'à chaque sommet correspond un point de la feuille. A chaque arête du cube joignant deux de ses sommets, on associe le segment joignant les deux points correspondants. L'ensemble des douze segments correspondant aux douze arêtes du cube est une représentation du cube dite représentation en perspective cavalière. La figure 109 est le dessin obtenu en choisissant pour les huit droites une direction particulière. Chaque segment tracé sur la figure 109 représente une arête du cube.

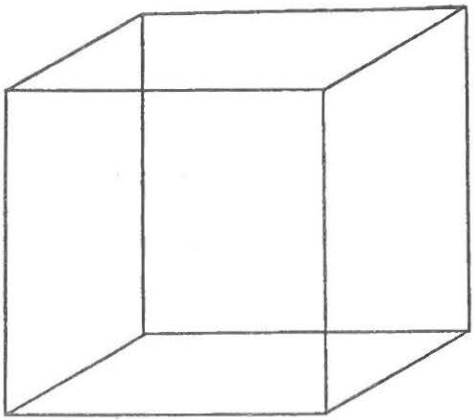


Figure 109

PERSPECTIVE LINÉAIRE (PL)

Un point O est fixé au-dessus du cube. Huit droites issues de O passent par les huits sommets du cube. Elles rencontrent la feuille de papier blanc en huit points. C'est ainsi qu'à chaque sommet correspond un point de la feuille. A chaque arête du cube joignant deux des sommets, on associe le segment joignant les deux points correspondants. L'ensemble des douze segments correspondant aux douze arêtes du cube est une représentation du cube dite représentation en perspective linéaire, le centre étant O. La figure 110 est le dessin obtenu en choisissant un point O particulier. Chaque segment tracé sur la figure 110 représente une arête du cube.

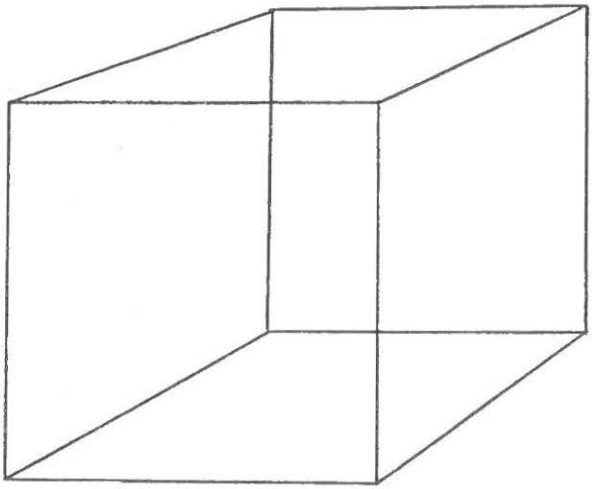


Figure 110

Lorsque notre cube est éclairé par le soleil, son ombre sur la plaque horizontale est une perspective cavalière du cube. Lorque notre cube est éclairé par une petite ampoule placée au point O, son ombre sur la plaque est une perspective linéaire du cube.

PERSPECTIVE CAVALIÈRE ET PERSPECTIVE LINÉAIRE

La figure 111 juxtapose des représentations en perspective cavalière et en perspective linéaire du même cube ABCDEFGH (cf. aussi photographie 107). La face EFGH du cube est posée sur la feuille de papier blanc. Ses sommets sont en contact avec les points e,f,g,h de la feuille.

Les trois arêtes de sommet E sont représentées par ef, eh, et ea en perspective cavalière comme en perspective linéaire. Le point O se trouve à un mètre au-dessus de la plaque horizontale ; il est placé de telle sorte que ae =2,15 cm et $\widehat{aef}$ = 150°.

Le cube est représenté par la vue e f g h, par la perspective cavalière e f g h a b_1 c_1 d_1 et par la perspective linéaire e f g h a b_2 c_2 d_2. Le point O étant à 1m au-dessus de la plaque et le cube ayant des arêtes de 4,3 cm, on en déduit que

$$\frac{ab_2}{4,3} = \frac{ad_2}{4,3} = \frac{100}{95,7}$$

Les segments ab_2 et ad_2 mesurent donc approximativement 4,1 cm alors que ab_1 mesure 4,3 cm.

Les deux représentations de l'arête AB diffèrent donc de 2 millimètres alors que AB = 4,3 cm. La variation de l'une à l'autre représentation est donc de l'ordre de 5 %.

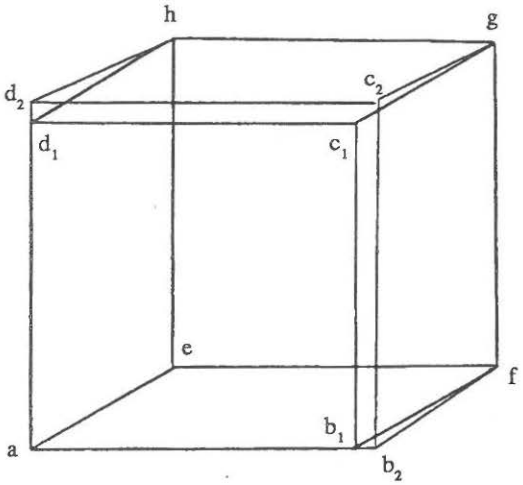


Figure 111

Chapitre 11

LES PRINCIPALES REPRÉSENTATIONS

Résumé

Le chapitre 11 examine les principales représentations de l'espace autres que la PC et plus particulièrement :

- les vues du dessin industriel,
- la perspective axonométrique,
- l'épure de géométrie descriptive,
- l'épure de géométrie cotée,
- la perspective linéaire (ou conique, ou centrale, ou vraie ...).

Dans ce chapitre, nous examinons les six principales représentations de l'espace intervenant dans l'enseignement secondaire ou technique de façon non négligeable. Ces représentations sont :

- La perspective cavalière (PC)
- Les vues du dessin industriel
- La perspective axonométrique (PA)
- L'épure de géométrie descriptive,
- L'épure de géométrie cotée,
- La perspective linéaire (PL).

LA PERSPECTIVE CAVALIÈRE

Nous ne l'analysons pas dans ce paragraphe puisque tout le livre lui est consacré. Toutefois, nous proposons avec les figures 112 et 113 les représentations d'une pièce de bois dans deux positions différentes et selon les PC(1/2, - 30°) et PC(1/2, + 60°). Tout au long du chapitre 11, cette pièce de bois est dessinée selon les différentes représentations que nous examinons.

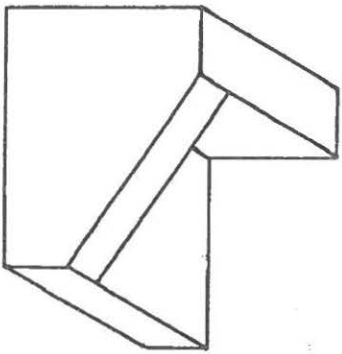


Figure 112

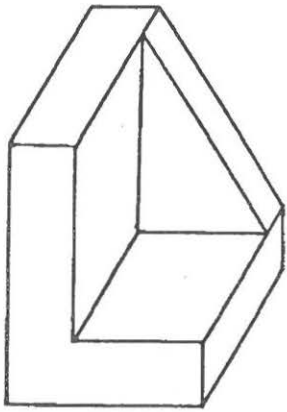


Figure 113

LES VUES

Considérons trois faces d'un cube qui est représenté sur la figure 114 par une PC(1/2, 30°). Ces faces sont la faces arrière, la face gauche et la face inférieure.

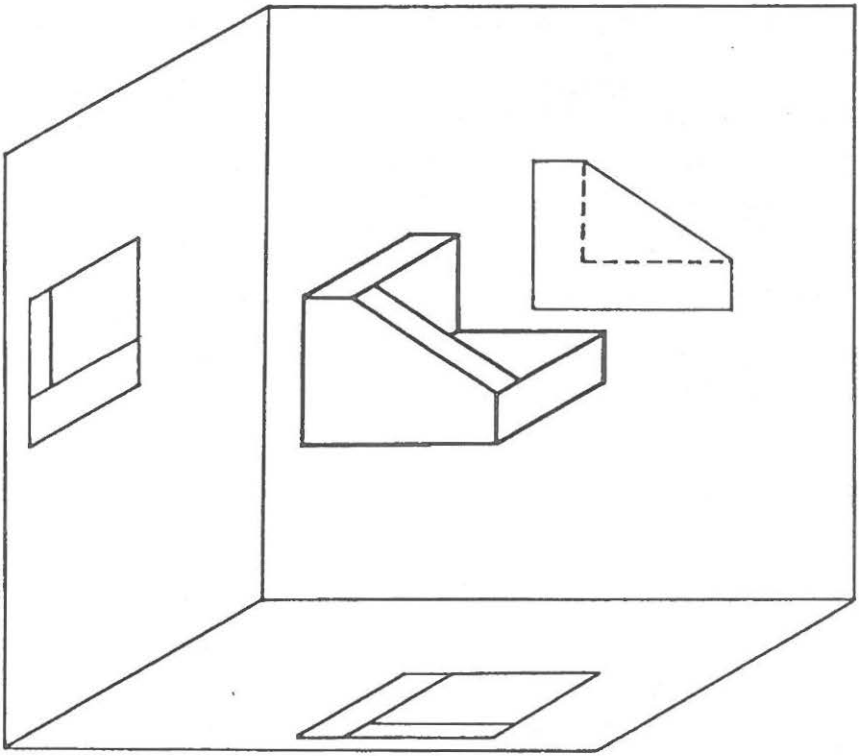


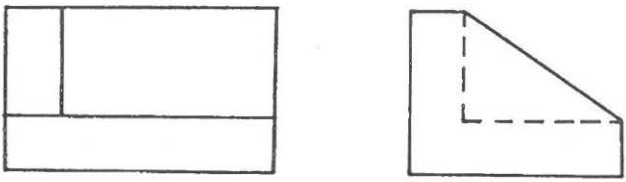
Figure 114

Plaçons notre pièce de bois à l'intérieur du cube donc entre ces trois faces ; elle est aussi représentée sur la figure 114. La pièce est disposée de telle sorte que ses plans principaux soient parallèles aux faces du cube de référence. Sa projection orthogonale sur la face arrière du cube donne un dessin appelé vue de face. Toutes les arêtes de l'objet sont représentées sur cette vue, soit par un segment, soit par un point ; les traits sont continus ou interrompus.

Deux arêtes peuvent avoir la même projection et donc être représentées par le même segment ou le même point. Dans le cas de notre pièce de bois, le dessin de la projection est constitué de 7 segments. Deux de ces segments sont dessinés en traits interrompus.

Le dessinateur se place alors face à la pièce, c'est-à-dire devant la pièce et le plan arrière du cube. Son œil est aussi sur une perpendiculaire à la face arrière rencontrant la pièce. S'il dessine les arêtes qu'il voit en traits continus et les arêtes cachées par la face avant en traits interrompus, il obtient approximativement le dessin de la projection que nous avons appelé vue de face. Une vue en dessin industriel de même qu'une représentation en PC d'un objet, est un dessin rigoureusement codé qui donne une image approximative de ce que perçoit l'œil regardant l'objet dans certaines conditions.

Examinons la procédure permettant d'obtenir le vue de droite. La pièce de bois a toujours la même position relativement aux faces du cube (cf. Fig. 114). Sa projection sur la face gauche est aussi représentée dans une PC(1/2, 30°) sur la figure 114. Le rabattement de la face gauche du cube sur le plan de la face arrière dans une rotation autour de la droite commune aux deux faces amène les deux dessins dans le même plan. La face de gauche du cube est rabattue vers la gauche. Ces deux dessins constituent la vue de face et la vue de droite. Nous les proposons dans la figure 115.



Vue de droite Vue de face

Figure 115

Lorsque le dessinateur se place à droite de la pièce de bois en regardant cet objet selon une direction perpendiculaire à la face gauche du cube, il voit approximativement le dessin de la projection que nous avons appelé vue de droite.

La vue de dessus est obtenue au moyen d'une projection sur la face inférieure du cube suivie d'un rabattement vers le bas amenant la face inférieure du cube dans le plan de la face arrière.

Trois autres vues : la vue de gauche, la vue d'arrière et la vue de dessous sont mises en place. Elles proviennent respectivement des projections de la pièce sur la face droite, la face avant et la face supérieure du cube qu'on peut imaginer grâce à la figure 114. La projection sur la face droite est rabattue sur le plan de la face arrière et donne un dessin placé à droite de la vue de face ; ce dessin est la vue de gauche. La projection sur la face avant est rabattue sur le plan de la face droite, lui-même rabattu dans un deuxième temps sur le plan de la face arrière. Nous obtenons en définitive un dessin placé à droite de la vue de gauche. La projection sur la face supérieure du cube est rabattue sur le plan de la face arrière et donne un dessin placé au-dessus de la vue de face; ce dessin est la vue de dessous.

Pour obtenir les vues d'un objet, il suffit donc de projeter l'objet sur les six faces d'un cube à l'intérieur duquel il se trouve, puis de développer ce cube de manière à faire apparaître les unes à proximité des autres les six vues. Le développement du cube choisi est celui schématisé par la figure 116.

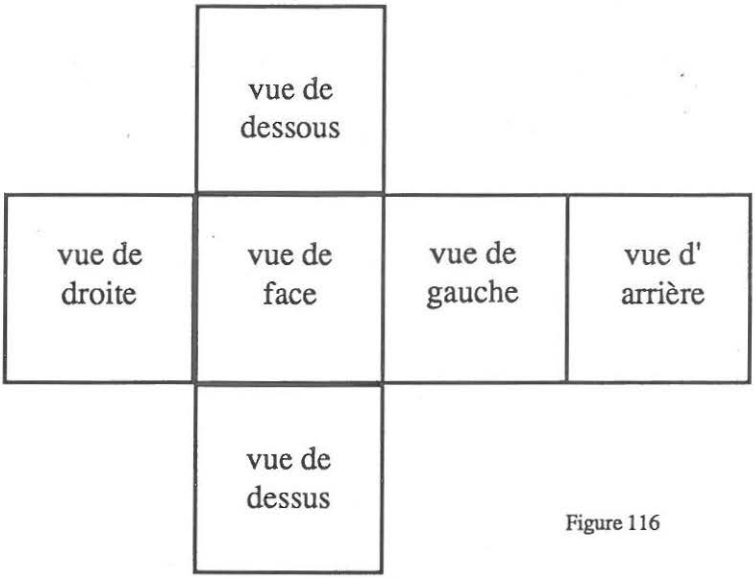
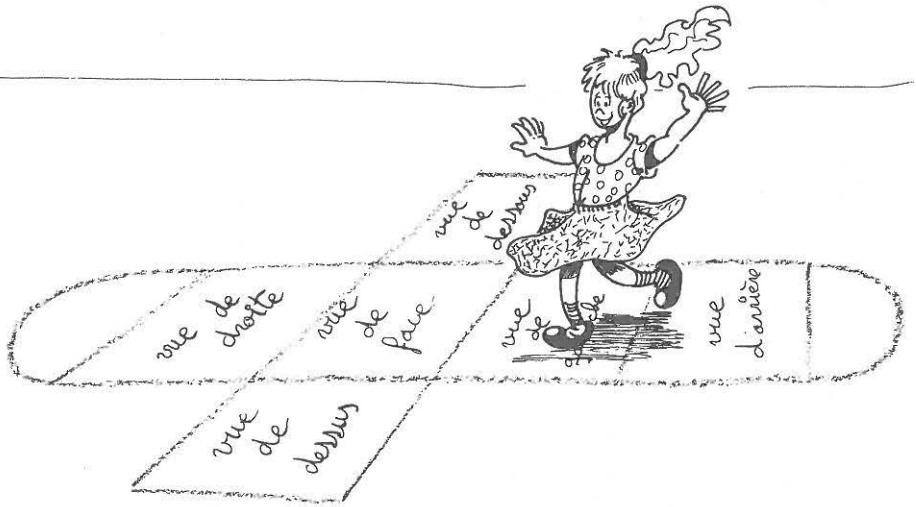


Figure 116

Notre pièce de bois nous conduit aux six vues représentées par la figure 117.

Les distances entre les différents dessins sont laissées à l'appréciation du dessinateur ; sur la figure 117, elles ne correspondent pas à celles déduites de la figure 114 et des rabattements. La vue d'arrière peut aussi être dessinée à gauche de la vue de droite, le dessin est simplement translaté.

Figure 117


vue de droite
vue de face
vue de dessus
vue de face
vue de dessous
vue d'arrière

Quels sont les principaux avantages d'une telle représentation ?

Comme il s'agit de projections cylindriques orthogonales de nombreux segments et de nombreux angles sont conservés en vraie grandeur sur l'une ou l'autre vue. Un objet est le plus souvent observé dans une position frontale. Cette situation correpond à la vue de face qui est privilégiée dans les vues du dessin industriel. La vue de face s'appelle d'ailleurs vue principale.

L'apprentissage d'une telle représentation rencontre certaines difficultés.

Tout d'abord, on doit bien distinguer une vue en tant que codage s'appuyant sur les concepts de projection et de rabattement, et une vue (une vision) de l'objet que l'observateur peut avoir en se plaçant dans certaines conditions. L'identification des deux est commode pour la règle des traits interrompus. Pourtant, ces deux notions sont de nature différente et leur identification peut entraîner des erreurs.

Les changements de direction de projection et de plan de projection que nous appelons changements de point de vue demandent une bonne orientation de l'espace. Le fait qu'il y ait six vues rend la coordination difficile. L'objet peut aussi être déplacé et alors déplacement de l'objet et changement de point de vue demandent, pour être ajustés, une bonne maîtrise des relations spatiales;

PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE OU AXONOMÉTRIE

Choisissons un plan de projection T. Un cube de référence n'ayant aucune arête parallèle à ce plan, est projeté orthogonalement sur ce plan. Le cube de référence est noté ABCDEFG. On peut toujours trouver un plan T_1 parallèle à T coupant trois arêtes du cube issues d'un même sommet. Nous supposons que AB, AE et AD sont ces trois arêtes, et qu'elles sont coupées respectivement en B_1, E_1 et D_1. La figure 118 est une PC(1/2, 60°) sur laquelle sont représentés les points A, B, E, D, B_1, E_1, D_1 ainsi que H_1 la projection orthogonale du point A sur le plan défini par $E_1B_1D_1$. Les différents points du dessin sont notés au moyen des lettres minuscules.

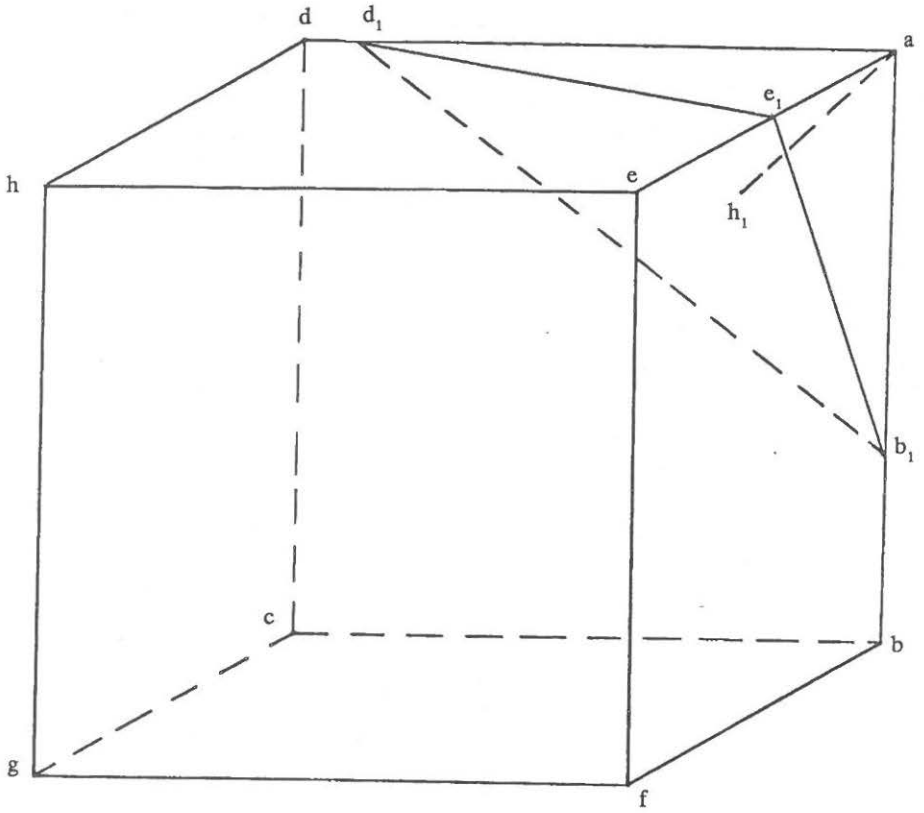


Figure 118

Puisque le trièdre ABED est trirectangle et que les demi-droites AB, AE, AD sont coupées respectivement en B_1, E_1, D_1, le triangle $B_1E_1D_1$ est nécessairement acutangle (tous ses angles sont aigus) et H_1 est orthocentre de ce triangle.

Réciproquement, donnons-nous un trièdre trirectangle ABED, ou encore un cube de référence ABCDEFGH. Mais au lieu de considérer un plan de projection T, donnons-nous un triangle acutangle Θ. On peut toujours trouver trois points B_2, E_2, D_2 respectivement sur les demi-droites AB, AE, AD tels que les triangles Θ et $B_2E_2D_2$ soient isométriques. Alors A se projette orthogonalement sur le plan $B_2E_2D_2$ en un point H_2 qui est l'orthocentre du triangle $B_2E_2D_2$.

Nous disons sommairement qu'une projection orthogonale d'un cube n'ayant pas d'arête parallèle au plan de projection est caractérisée par un triangle acutangle (et son orthocentre).

Indiquons maintenant comment dessiner le cube de référence ABCDEFGH une fois donné le triangle acutangle $B_2D_2E_2$ (et son orthocentre H_2). Ces quatre points déterminent le plan de la figure 119 ci-dessous. Le segment H_2E_2 est, par un choix délibéré, parallèle aux bords latéraux de la feuille de dessin.

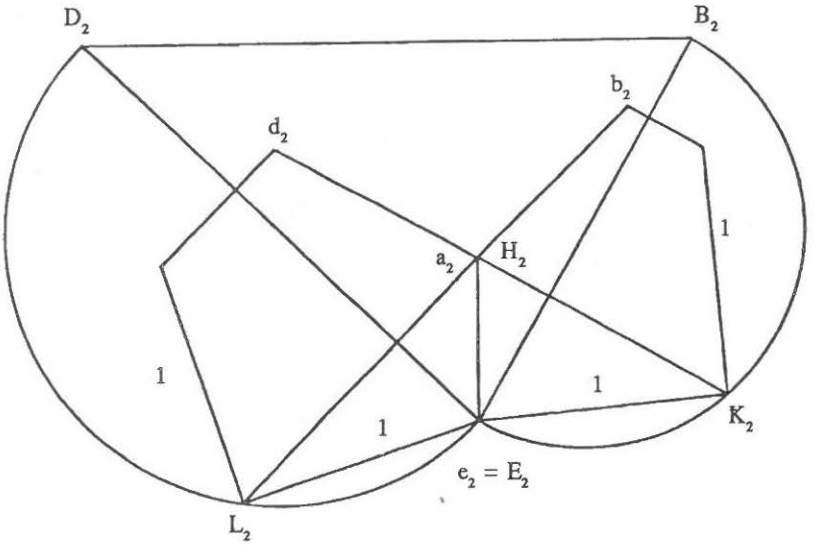


Figure 119

Appelons $a_2,b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,g_2,h_2$ les projections des sommets A,B,C,D,E,F,G,H du cube de référence sur le plan $B_2D_2E_2$. Nous nous plaçons dans deux situations particulières. D'une part, comme nous l'avons déjà dit, la droite H_2E_2 est parallèle aux bords latéraux de la feuille de dessin. D'autre part choisissons un cube de référence d'arête AE_2 ($E = E_2$) ; c'est ainsi que dans le plan $B_2D_2E_2$ du dessin E, E_2 et e_2 sont des points confondus ; les points H_2 et a_2 sont aussi confondus.

Si nous rabattons le sommet A sur le plan $B_2D_2H_2$ du dessin autour des charnières B_2E_2 et E_2D_2 nous obtenons respectivement les points K_2 et L_2 et les segments E_2K_2 et E_2L_2 sont égaux à l'arête du cube de référence que nous avons pu choisir comme unité, comme nous l'indiquons sur la figure 119. Par un relèvement autour de ces deux charnières, nous obtenons les points b_2 et d_2 projections respectives sur le plan $B_2D_2E_2$ du dessin, des sommets B et D du cube.

Connaissant les projections orthogonales des sommets ABDE du cube de référence sur le plan $B_2D_2E_2$ du dessin, nous pouvons achever le dessin de ce cube. Nous obtenons la figure 120. Le dessin $a_2b_2c_2d_2e_2f_2g_2h_2$ du cube de référence est une projection axonométrique du cube ABCDEFGH.

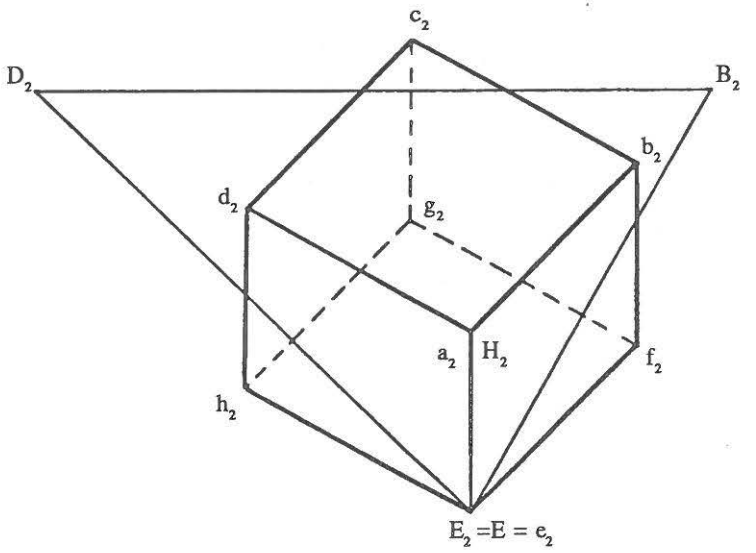


Figure 120

La projection axonométrique d'un cube est parfaitement déterminée par la connaissance des deux angles $\widehat{e_2a_2b_2}$ et $\widehat{e_2a_2d_2}$ et des trois longueurs a_2b_2, a_2d_2, a_2e_2. Montrons que les deux angles $\widehat{e_2a_2b_2}$ et $\widehat{e_2a_2d_2}$ et la longueur a_2e_2 déter minent les deux autres longueurs a_2b_2 et a_2d_2.

Reprenons certains éléments représentés sur la figure 119 pour réaliser la figure 121 sur laquelle nous introduisons quelques nouveaux éléments.

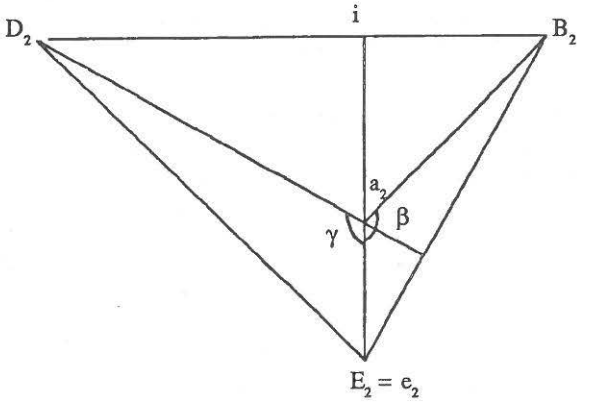


Figure 121

Notons sur cette figure 121 les angles $\beta = \widehat{e_2a_2B_2}$ et $\gamma = \widehat{e_2a_2D_2}$ ainsi que le point i intersection des droites e_2a_2 et B_2D_2.

Puisque le triangle $B_2D_2E_2$ est acutangle nous avons :

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi \qquad \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi \qquad \text{et} \qquad \pi < \beta + \gamma < \frac{3\pi}{2}$$

Le triangle iAe_2 de l'espace est un triangle rectangle. Nous avons donc la relation :

$$a_2e_2 = \frac{1}{ie_2}$$

Puisque $\widehat{ie_2B_2} = \gamma - \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{ia_2B_2} = \pi - \beta$, nous obtenons :

$$iB_2 = ie_2 \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = (ia_2) \tan(\pi - \beta)$$

Les relations précédentes impliquent la formule

(1) $$(a_2e_2)^2 = 1 - \frac{1}{\tan\beta \tan\gamma}$$

Cette formule se déduit donc du fait que le triangle $B_2D_2E_2$ est acutangle, c'est-à-dire que ses trois angles sont strictement compris entre O et $\frac{\pi}{2}$.

Reprenons les figures 120 et 121 que nous simplifions et complétons de manière à obtenir la figure 122 ci-dessous.

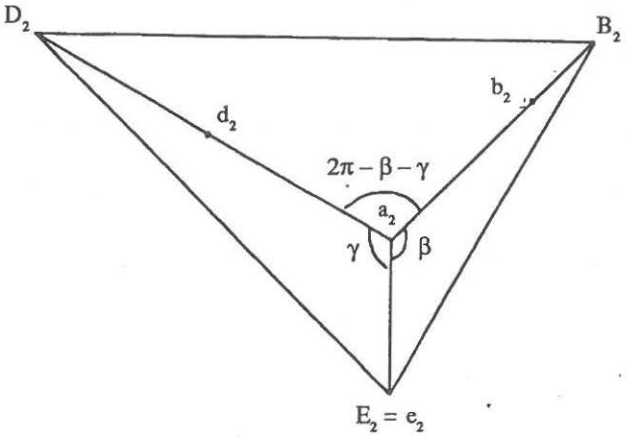


Figure 122

La formule (1) établit une relation entre les éléments a_2e_2, $\widehat{e_2a_2B_2}$ et $\widehat{e_2a_2D_2}$.

Nous obtenons une formule analogue reliant a_2b_2, $\widehat{b_2a_2E_2}$ et $\widehat{b_2a_2D_2}$, soit :

$$(2) \qquad (a_2b_2)^2 = 1 + \frac{1}{\tan\gamma \tan(\beta+\gamma)}$$

La prise en considération de a_2d_2, $\widehat{d_2a_2E_2}$ et $\widehat{d_2a_2B_2}$ nous conduit à une troisième formule :

$$(3) \qquad (a_2d_2)^2 = 1 + \frac{1}{\tan\beta \tan(\beta+\gamma)}$$

Les trois formules (1), (2) et (3) impliquent aussi la relation suivante

$$(a_2e_2)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_2d_2)^2 = 2$$

En définitive, si on nous donne les angles β et γ, les formules (1), (2) et (3) déterminent a_2e_2, a_2b_2 et a_2d_2; Elles déterminent donc une projection axonométrique d'un cube.

Mais parmi toutes les perspectives axonométriques, quatre sont plus particulièrement utilisées ; ce sont les projections isométriques, trimétriques, dimétriques usuelles et dimétriques redressées.

Chacune de ces perspectives est déterminée par deux angles, les angles β et γ et trois longueurs, celles des segments a_2e_2, a_2b_2 et a_2d_2 calculées au moyen des formules (1), (2) et (3). C'est ainsi que la projection isométrique est déterminée par les cinq nombres : 120°, 120°, 0,82, 0,82, 0,82. Les huit figures qui suivent reproduisent pour chacune des quatre axonométries citées un cube de référence, en prenant 2,75 cm pour unité (figures 123, 125, 127, 129) et le dessin de la pièce de bois (figures 124, 126, 128 et 130).

Projection isométrique
120° 120° 0,82 0,82 0,82

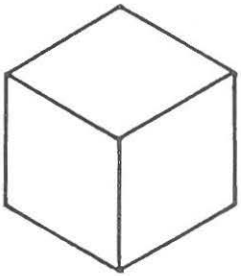


Figure 123

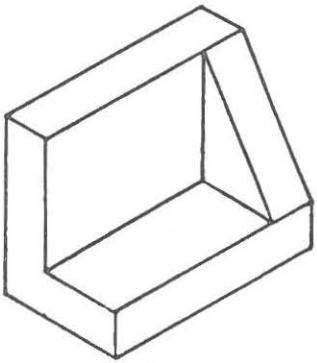


Figure 124

Projection trimétrique
120° 105° 0,92 0,65 0,86

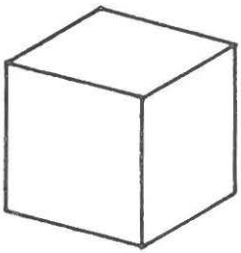


Figure 125

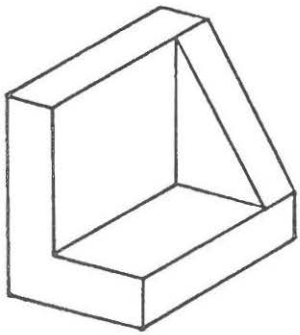


Figure 126

Projection dimétrique usuelle
131°30' 131°30' 0,47 0,94 0,94

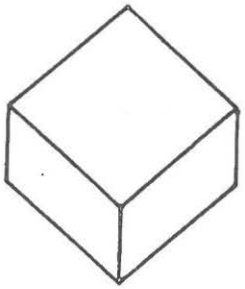


Figure 127

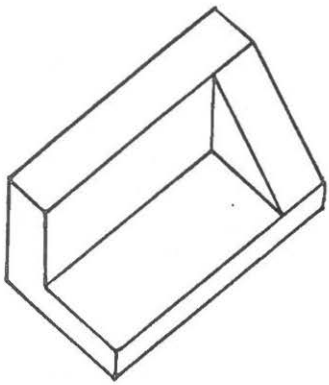


Figure 128

Projection dimétrique redressée
105° 105° 0,96 0,73 0,73

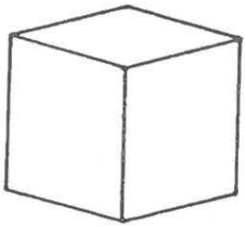


Figure 129

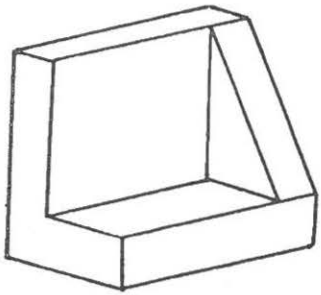


Figure 130

L'ÉPURE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Pour représenter un objet au moyen d'une épure de géométrie descriptive, on repère tous les points de l'espace, et en particulier l'objet, au moyen de deux plans perpendiculaires. Le premier est le plan horizontal et le deuxième est le plan frontal. L'objet est alors projeté orthogonalement sur le plan horizontal. Il est aussi projeté orthogonalement sur le plan frontal. La figure 131 est une PC (1/2, 30) représentant l'objet en bois proposé au début de ce chapitre et ses deux projections, horizontale et frontale. L'intersection des deux plans de projection s'appelle la ligne de terre. Elle limite deux demi-plans horizontaux et deux demi-plans frontaux.

Choisissons un demi-plan horizontal comme demi-plan horizontal avant et un demi-plan frontal comme demi-plan frontal supérieur. Orientons l'espace et la ligne de terre de telle sorte que le demi-plan horizontal avant soit le transformé du demi-plan frontal supérieur selon une rotation de + 90°. Pour faciliter la visualisation on peut imaginer un observateur en position verticale, les pieds sur le demi-plan horizontal avant, ayant en face de lui le demi-plan frontal supérieur et voyant une ligne de terre orientée de gauche à droite. Nous avons choisi le sens positif de cette orientation selon la règle habituelle du tire-bouchon (ou du bonhomme d'Ampère).

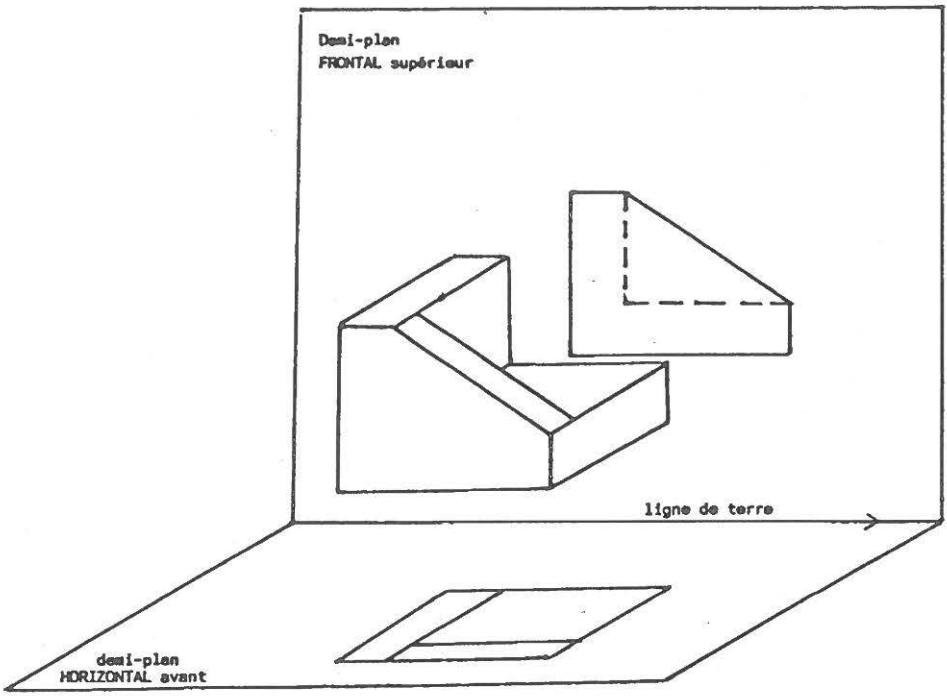


Figure 131

Afin que la représentation de l'objet soit un dessin plan, nous rabattons le plan frontal sur le plan horizontal au moyen d'une rotation dont l'axe est la ligne de terre et dont l'angle orienté est - 90°. Nous obtenons donc les deux projections de l'objet sur le même plan.

Ce dessin est l'épure de l'objet. Chaque point de l'objet est représenté par deux points sur l'épure. Ces deux points sont les extrémités d'un segment orthogonal à la ligne de terre ; ce segment est appelé ligne de rappel. La figure 132 est l'épure de notre objet en bois. Chaque sommet de cet objet est représenté par deux points sur l'épure, dont l'un, a par exemple, est sa projection horizontale et dont l'autre a' est sa projection frontale.

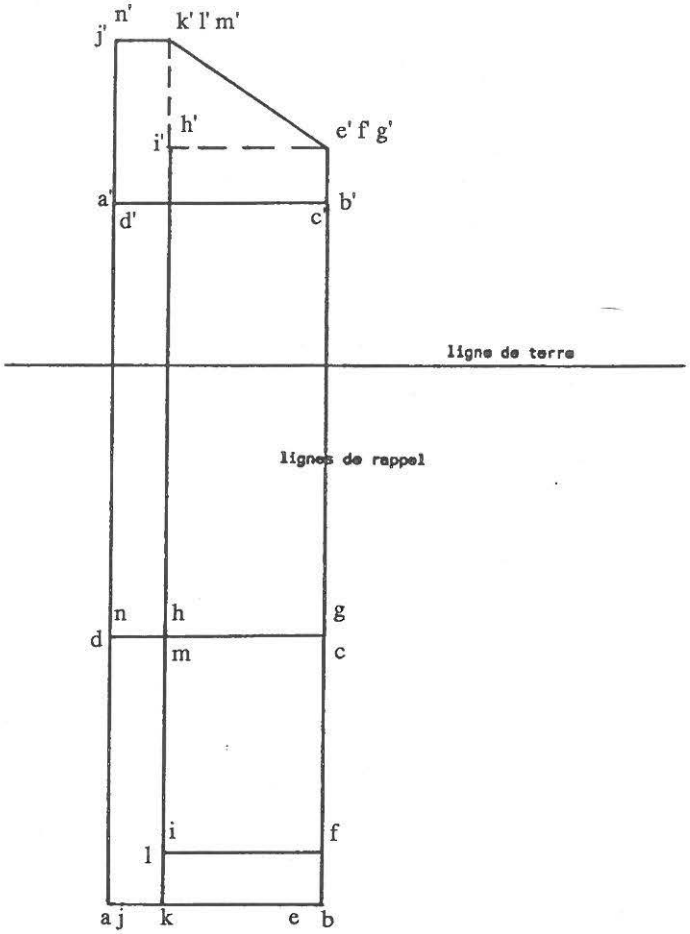
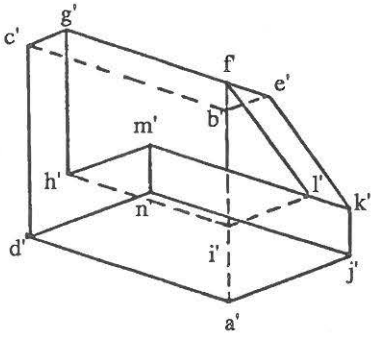


Figure 132

L'épure (figure 132) de notre objet a été obtenue pour une position particulière de notre objet ; celle correspondant à la figure 131. Mais, on peut donner une autre position de l'objet par rapport aux plans de projection. La figure 133 est une autre épure du même objet.

L'objet a été placé de telle sorte que sa projection horizontale soit une projection dimétrique usuelle, ce qui détermine, à une translation verticale près, sa projection frontale. Chaque sommet est désigné par ses deux projections. Sur l'épure (figure 133) nous n'avons pas tracé les lignes de rappel.



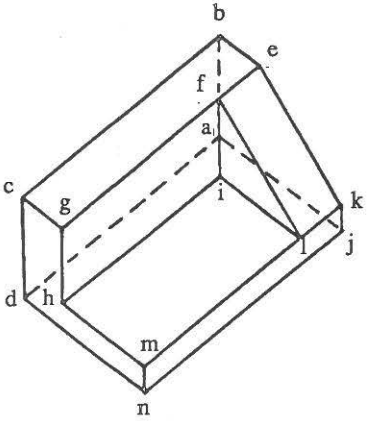


Figure 133

L'ÉPURE DE GÉOMÉTRIE COTÉE

Si un objet est représenté par sa projection orthogonale sur un plan, accompagnée de cotes numériques mesurant les distances des points de l'objet au plan, on dit que cette représentation est l'épure de l'objet en géométrie cotée. On peut considérer que le plan de projection est horizontal. Si les points de l'objet sont au-dessus du plan, les cotes sont positives ; si les points sont au-dessous, elles sont négatives.

La figure 134 est une épure en géométrie cotée de notre objet. Les 14 sommets sont cotés avec une unité égale approximativement à 0,7 cm. Les figures 134 et 112 représentent le même objet à des échelles différentes.

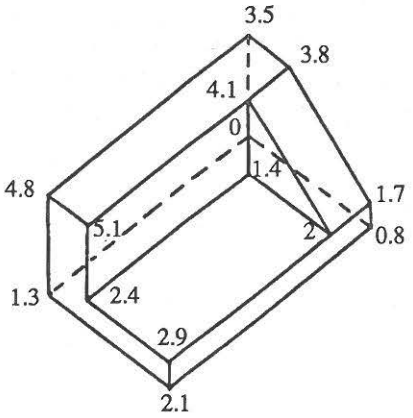


Figure 134

L'objet a été placé de telle sorte que sa projection soit une projection dimétrique usuelle. Les cotes ont été calculées au moyen des formules (1), (2) et (3) établies dans ce chapitre lors de l'étude de l'axonométrie. Ces mêmes calculs ont permis de réaliser la projection frontale de l'épure présentée par la figure 133.

LA PERSPECTIVE LINÉAIRE (PL)

Donnons-nous un plan T et un point O. La projection conique d'un objet sur le plan T, le centre de projection étant O, est appelée perspective linéaire (PL) de l'objet. Le plan T est souvent appelé plan du tableau. Un point A de l'objet est représenté par A_1, le point d'intersection de la droite OA et du plan T.

Nous voulons maintenant dessiner notre pièce de bois en PL. Pour ne pas introduire les notions associées traditionnellement à la PL, ce qui allongerait inutilement notre propos, nous allons réaliser ce dessin à partir d'une épure de géométrie descriptive en choisissant comme plan du tableau le plan frontal.

Examinons comment dessiner ainsi un point A de l'espace et illustrons la situation au moyen de la figure 135. Le point A est déterminé par son épure a, a'. Le point O est représenté sur cette épure par o,o'. Le plan T est le plan frontal. Alors A_1 est représenté par a_1, a'_1, l'intersection de la droite oa, o'a et du plan frontal.

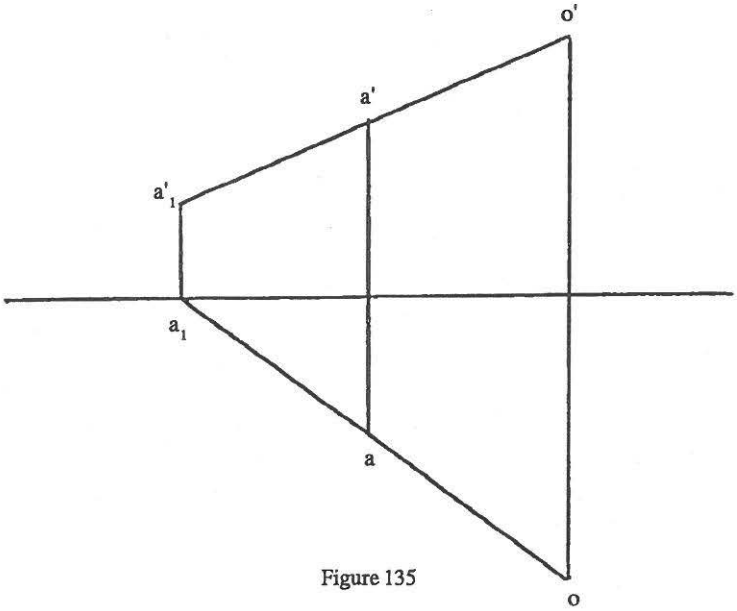


Figure 135

Si la pièce de bois est déterminée par son épure, alors en construisant des intersections de droites avec le plan frontal, nous obtenons tous les points a'_1 qui permettent de réaliser le dessin de l'objet en PL.

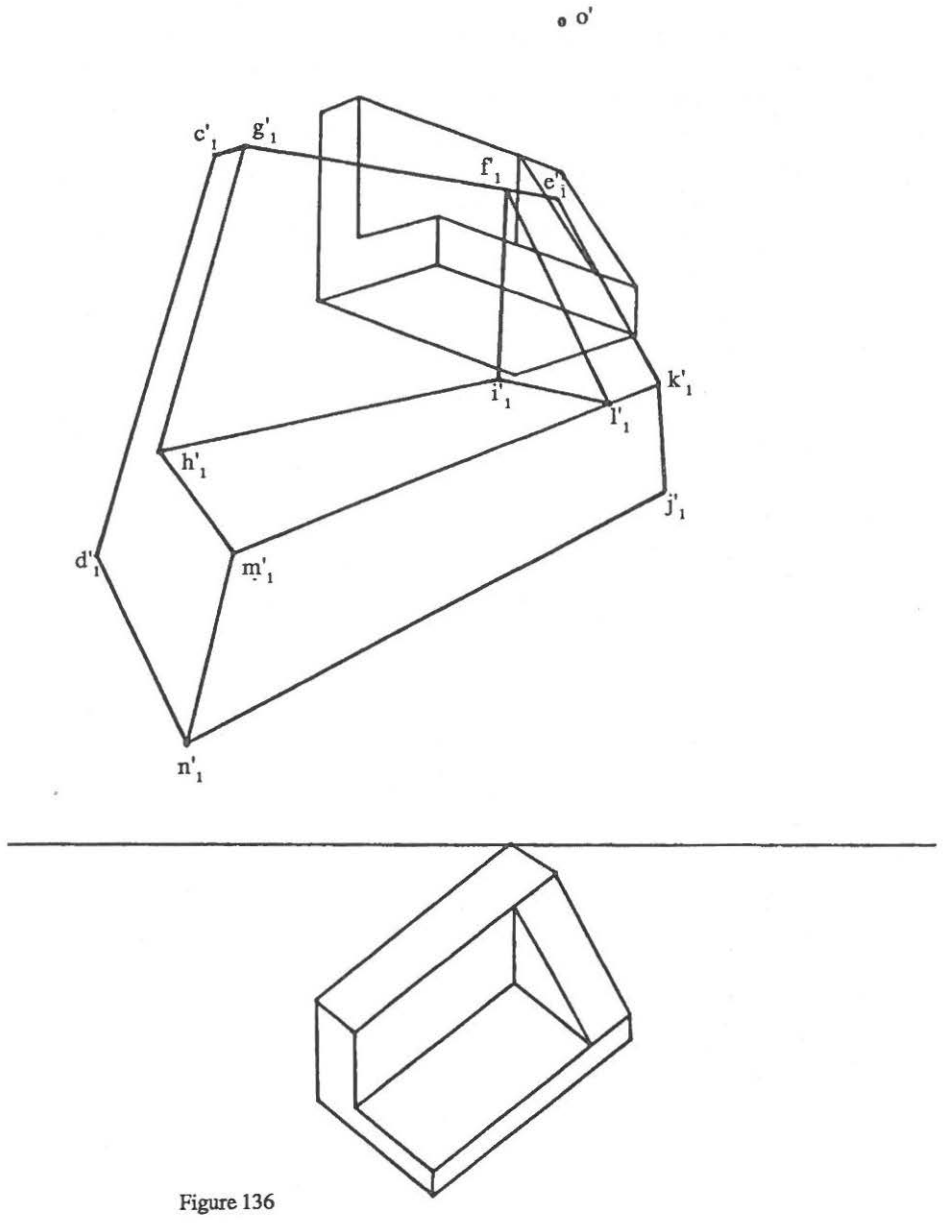


Figure 136

Considérons la représentation de notre objet en bois fournie par la figure 136. Cette épure (figure 136) diffère légèrement de l'épure proprosée à la figure 133, les projections frontales et horizontales ont été translatées par rapport à la ligne de terre et les arêtes cachées n'ont plus été représentées. Plaçons le point oo'et considérons la PL définie par oo' et le frontal comme plan au niveau du tableau T. Notre objet est représenté dans cette PL par $c'_1d'_1e'_1f'_1g'_1h'_1i'_1j'_1k'_1l'_1m'_1n'_1$.

La figure 137 fournit un dessin séparé de l'objet en PL extrait de la figure 136.

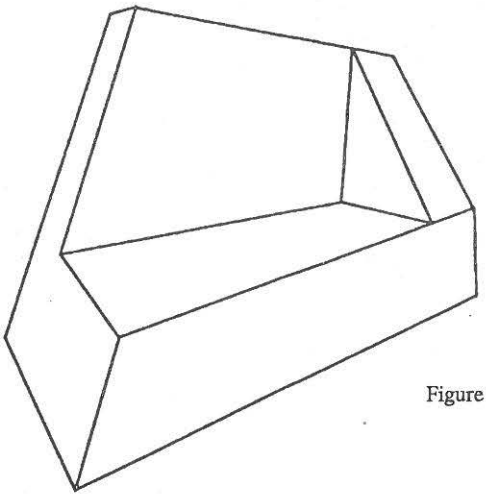


Figure 137

La PL de notre objet proposée par la figure 138 est obtenue par projection conique sur le plan frontal de l'objet ayant la position proposée par la figure 132, les pointillés sont utilisés pour les arêtes cachées.

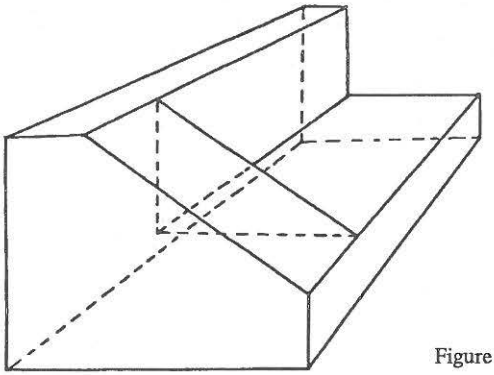


Figure 138

Si on ne dessine pas les arêtes cachées, on obtient la figure 139 ci-dessous (qui est légèrement plus grande que la précédente).

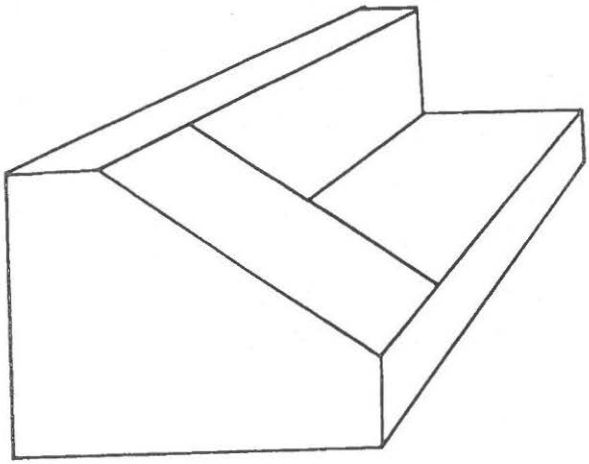


Figure 139

COMPARAISON DES REPRÉSENTATIONS

Nous venons d'examiner six représentations de l'espace. Il en existe bien d'autres.

Etant donné un cylindre à directrice circulaire et un point O de son axe, à chaque point M de l'espace n'appartenant pas à l'axe on peut associer le point M' du cylindre tel que M' soit sur la demi-droite OM ; et à chaque point M' du cylindre on peut associer le point M" d'un plan obtenu au moyen du développement du cylindre sur ce plan. L'application qui à M fait correspondre M" définit une réprésentation de l'espace. On peut appeler cette représentation : perspective cylindrique développée.

Examinons une deuxième représentation. Etant donnée une demi-sphère de rayon 1 et de centre O, à chaque point M ($\neq 0$) de l'espace, associons le pont M' de la demi-sphère aligné avec O et M.

Associons ensuite à chaque point M' de la demi-sphère un point M" du plan de notre feuille de dessin. M" représente alors le point M de l'espace. M" est déterminé par ses coordonnées polaires ρ et σ.

Les coordonnées ρ et σ sont liées aux coordonnées sphériques α, φ et 1 du point M' de la demi-sphère au moyen des équations :

$$\rho = \frac{\pi}{2} - \varphi \; ; \sigma = \alpha \text{ avec } o < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } o < \varphi \leq 2\pi$$

ou avec $\varphi = o$ et $o < \varphi \leq \pi$

La figure 140 est une PC(1/2, 90°) sur laquelle nous avons représenté un point M' de la demi-sphère dont les cooordonnées sphériques sont définies par

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Il lui correspond le point M" appartenant au disque de rayon $\frac{\pi}{2}$ représenté par la figure 141. (La technique permettant de tracer la figure 140 est expliquée dans la troisième partie traitant des corps ronds).

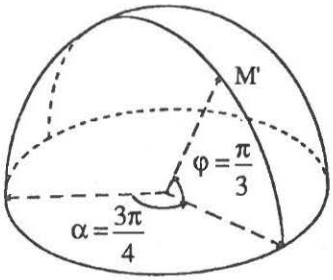


Figure 140

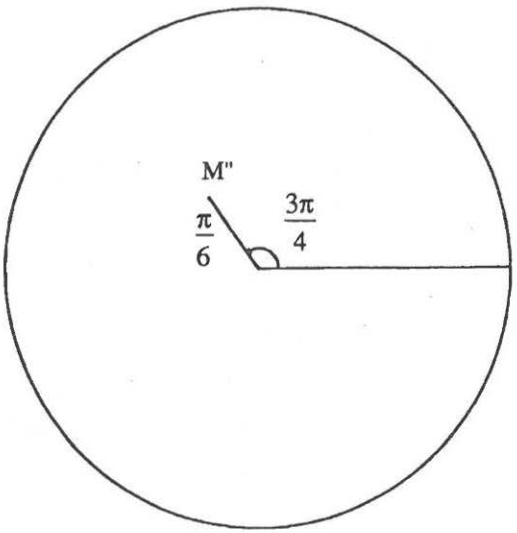


Figure 141

Nous pouvons appeler cette représentation : perspective curviligne.

Parlons encore d'une troisième représentation appelée la perspective militaire. Elle peut être déterminée à partir d'un cube de référence, comme celui présenté par la figure 142 avec $\widehat{dab} = 90°$, $\widehat{eab} = \widehat{ead} = 135°$ et $ae = \frac{2}{3}$

ad = ab = 1

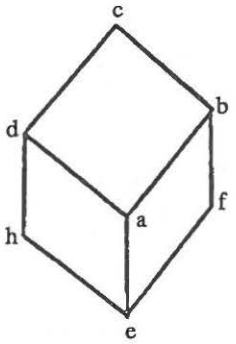


Figure 142

En fait, il s'agit de la PC(2/3, - 90°) avec un cube de référence ayant subi une rotation de 45° par rapport au cube habituel ; ou bien d'une PC(2/3, - 135°), le dessin du cube de référence ayant subi ensuite une rotation de 45° dans la feuille de dessin. Nous retouvons la stucture mathématique de la perspective cavalière; seule a été modifiée la position du cube de référence ou la position du dessin sur la feuille.

Certains auteurs distinguent la projection axonométrique de la projection orthogonale ; dans la seconde, la direction de la projection est perpendiculaire au plan de projection, dans la première elle est oblique. Cette définition n'est pas conforme à celle que nous avons choisie. Nous avons là des fluctuations de vocabulaire très fréquentes dans le domaine des représentations de l'espace. Mais cette projection axonométrique ainsi que la perspective militaire, ne fait pas intervenir des structures mathématiques différentes de celles que nous avons introduites.

Par contre, les stuctures mathématiques sont changées dans les perspectives cylindrique développée ou curviligne et leur complexité augmente. Ainsi un segment est en général représenté dans le premier cas par un arc de sinusoïde, dans le deuxième cas par un arc de cercle.

En définitive, nous négligeons dans le cadre de l'enseignement secondaire et technique l'étude des différentes représentations dont nous venons de parler dans ce paragraphe, soit parce que la technique de dessin est trop complexe soit parce qu'elle fait double emploi avec les six représentations que nous avons introduites. Mais parmi les six principales représentations étudiées nous privilégions les vues et la perspective cavalière.

Les vues sont prioritaires dans les professions de l'industrie qui font appel à la représentation de l'espace. Elles font appel au concept le plus simple, celui de projection orthogonale sur un plan et, implicitement ou explicitement à un cube de référence dans sa position la plus facile à utiliser (ses faces principales sont parallèles aux plans de projection). Ces raisons justifient la place que nous lui donnons. Nous devons toutefois souligner les difficultés suscitées par la nécessité de coordonner les différentes vues pour maîtriser cette représentation.

La représentation la plus proche des démarches spontanées des élèves liée à l'espace est la perspective cavalière. La simplicité relative de son codage, le fait qu'un objet est représenté par un seul dessin, en font un outil essentiel pour aborder l'apprentissage de l'espace. La maîtrise des propriétés spatiales ainsi que les techniques des différentes représentations peut s'appuyer efficacement sur la perspective cavalière. La PC nous semble prioritaire pour l'apprentissage de la géométrie de l'espace s'adressant aux élèves de l'enseignement obligatoire (élèves ayant moins de 16 ans). Nous devons toutefois nous méfier du fait que l'objet et son dessin en PC ne se correpondent pas bijectivement (cf. le chapitre suivant).

La perspective axonométrique ne fait pas intervenir de dessin en vraie grandeur ; son codage est plus délicat ; elle représente donc moins d'intérêt que la PC pour nos jeunes élèves.

La géométrie descriptive, qui n'existe pas dans notre enseignement obligatoire, est devenue actuellement une spécialité étudiée très tardivement. Ses épures ont l'inconvénient de faire correspondre à un objet de l'espace une paire de dessins (la projection frontale et la projection horizontale) qui doivent être minutieusement coordonnés.

La géométrie cotée joue encore un cetain rôle en géographie, mais elle a disparu de l'enseignement des mathématiques et n'est utilisée ni en physique ni en dessin industriel. On peut pourtant s'interroger quant à son rôle dans la démarche spontanée des jeunes élèves.

La PL, techniquement trop complexe et ne respectant pas des invariants fondamentaux comme le milieu, est, malgré son importance historique et artistique, peu utilisable, notamment dans l'enseignement obligatoire.

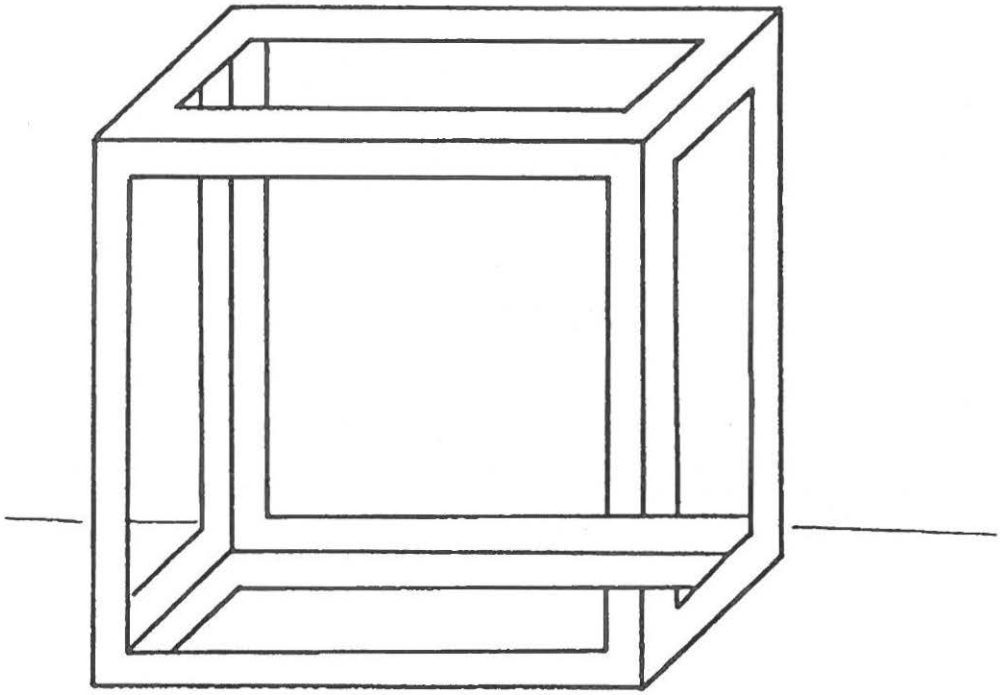
En conclusion, pour l'apprentissage de la représentation de l'espace dans l'enseignement secondaire et technique, nous considérons comme prioritaires la PC et les vues. La PA et les épures de géométrie descriptive nous paraissent secondaires. Les épures de géométrie cotée et la PL ne peuvent jouer qu'un rôle tout à fait mineur. Nous négligeons les autres représentations (perspective cylindrique développée, perspective curviligne, ...).

Chapitre 12

LA BIJECTIVITÉ

Résumé

Le chapitre 12 analyse les difficultés dues au fait que l'objet et son dessin en PC ne sont pas en correspondance bijective. Il aborde une nouvelle représentation faisant intervenir une PC et une vue de face.



ARME TOTALE CONTRE LES PROFS DE PERSPECTIVE.

USAGE INTERDIT SANS AUTORISATION

D'APRÉS "ESCHER"

La figure 143 représente un cube en PC(1/2, 60°).

Les points abcedefgh représentent les sommets du cube ABCDEFGH. Il y a donc une correspondance bijective entre l'ensemble des huits sommets du cube et l'ensemble de leurs huit représentants. Mais le point i, intersection des segments bc et ef, représente à la fois un point de l'arête BC du cube et un point distinct de l'arête EF. D'une manière générale, la correspondance entre l'ensemble des points d'un objet et l'ensemble des points de sa représentation en PC n'est pas bijective.

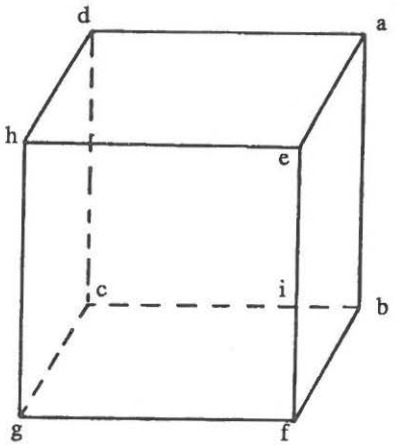


Figure 143

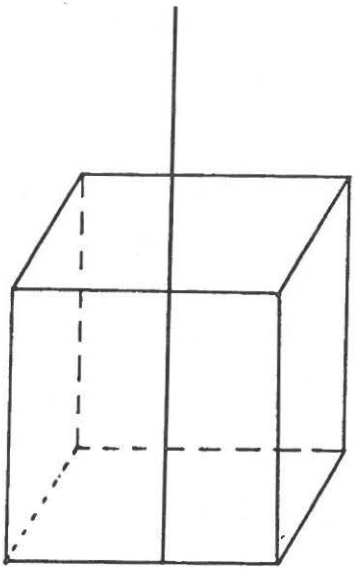


Figure 144

Même lorsque nos élèves ont admis cette non-bijectivité, ils ont du mal à se détacher dans la pratique du fait qu'une PC n'est pas identifiable à l'objet qu'elle représente.

C'est ainsi que, si nous représentons la figure 144 qui est la PC(1/2, 60°) d'un cube et d'une tige, l'élève est toujours surpris par le fait que la tige puisse occuper les deux positions suivantes : elle peut être appuyée verticalement sur la face avant du cube ou bien posée de guingois sur la face supérieure de ce même cube.

La PC représente un objet au moyen d'un seul dessin. La bijectivité semble donc impossible. Mais deux dessins n'arrangent pas nécessairement les choses, puisque deux vues d'un même objet ne déterminent pas nécessairement cet objet.

En effet considérons les deux objets représentés en PC (1/2, 60°) par les figures 145 et 146. Ce sont deux cubes entaillés de façons différentes. leurs vues de face et de dessus données par la figure 147 sont identiques.

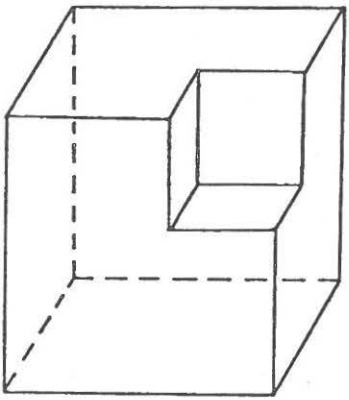


Figure 145

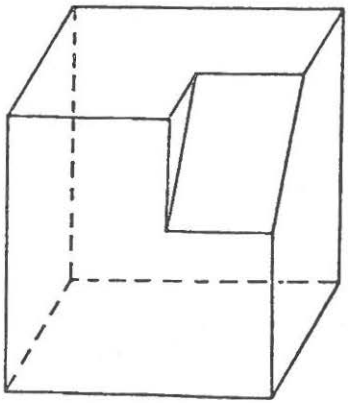
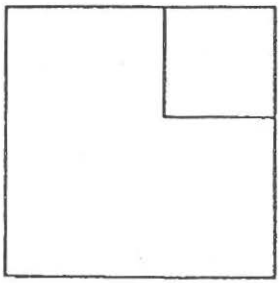


Figure 146



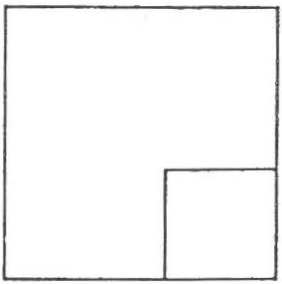


Figure 147

On peut toutefois penser, puisque les objets se trouvent dans un espace à trois dimensions, que trois vues de l'objet déterminent l'objet. Nous allons montrer que la connaissance des six vues de l'objet ne déterminent pas nécessairement l'objet. Pour cela, nous considérons un cube en bois constitué uniquement par des arêtes faites de barres dont la section droite est un carré de côté unité. On parlera d'un cadre cubique représenté en PC(1/2, 30°) par la figure 148. Son arête extérieure est égale à 10 unités. On considère un cube en bois plein dont l'arête est égale à 8 unités. Ce dernier cube est représenté en PC(1/2, 30°) par la figure 149. Lorsque le cube plein est placé à l'intérieur du cadre cubique, nous obtenons un cadre cubique plein, sinon nous avons un cadre cubique vide.

Chaque vue du cadre cubique, qu'il soit plein ou qu'il soit vide, est identique à la figure 150. Les six vues identiques à la figure 150 ne permettent pas de savoir si elles représentent le cadre cubique vide ou plein.

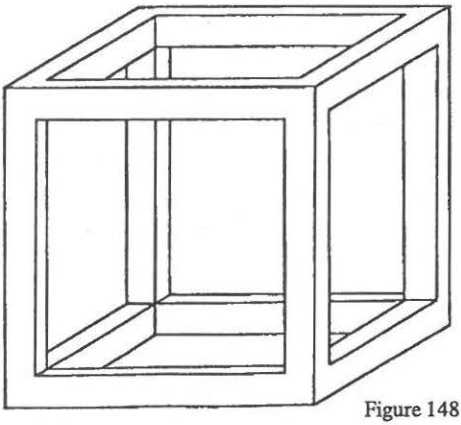


Figure 148

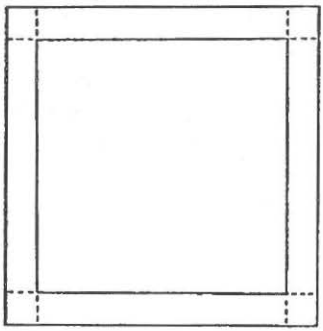


Figure 150

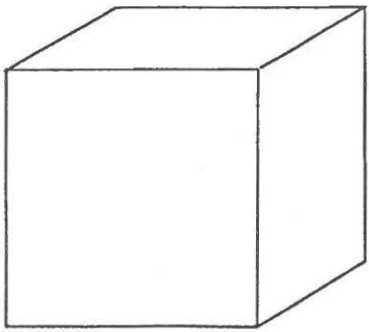


Figure 149

Pourtant l'ensemble des points de l'espace est en correspondance bijective avec l'ensemble des couples de points de l'épure de géométrie descriptive. Mais si on veut déterminer un objet à partir de son épure encore faut-il connaître tous les couples de points de l'épure représentant cet objet. Il en est ainsi par exemple si on donne tous les couples de points de l'épure représentant toutes les arêtes de ce polyèdre, si on donne tous les couples de segments représentant toutes les arêtes de ce polyèdre, et si on admet que ce polyèdre est réduit à un ensemble d'arêtes. Pour définir tous ces couples, on ne peut pas se contenter des dessins de deux projections horizontale et frontale. Pour associer les deux éléments d'un même couple on les nomme par exemple au moyen d'une lettre accompagnée d'indices distinctifs (en général, l'une est primée, l'autre ne l'est pas : a' et a). C'est ainsi que les figures 132 et 133 définissent parfaitement un polyèdre considéré comme une famille d'arêtes.

Nous obtenons dans certaines conditions et notamment en ajoutant au dessin proprement dit un codage littéral, une bijection entre l'objet et son épure. Mais pour obtenir cette bijection, deux projections sont nécessaires bien qu'elles ne soient pas suffisantes ; elles doivent être complétées par un codage ou des explications avec ou sans dessins supplémentaires (sections, coupes, ...).

Cette double projection nous permet d'envisager, afin de pallier tant soit peu à la non-bijectivité entre le dessin et l'objet, une autre représentation, celle constituée par le couple de dessins : perspective cavalière, vue de face.

Considérons, en effet, un objet représenté en PC(1/2, 60°) par la figure 151. Dans cette perspective cavalière, les arêtes cachées ne sont pas représentées. Par contre, dans la représentation en PC(1/2, 60°), donnée par la figure 152, de ce même objet, les arêtes cachées sont représentées par des segments en traits interrompus.

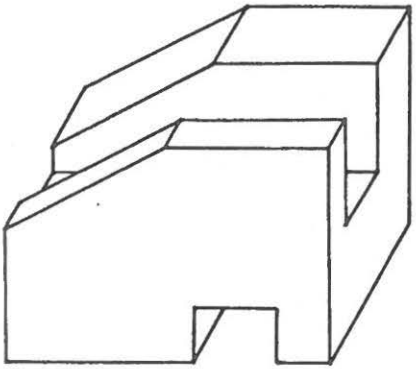


Figure 151

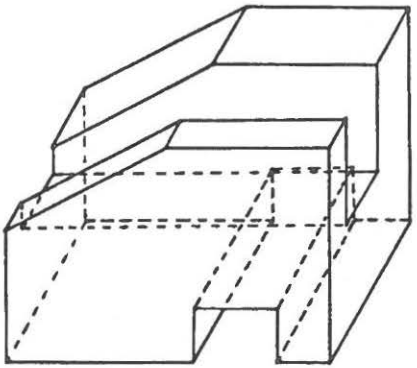


Figure 152

Même en sachant que cet objet est un polyèdre dont toutes les arêtes (il y en a 42) sont représentées sur la figure 152, ce seul dessin ne permet pas de déterminer l'objet. Par contre, associons à cette PC une vue de face (VF) ; accouplons les points qui représentent le même sommet (a'a ; b'b ; ...) et plaçons chaque couple sur la même ligne de rappel inclinée à 60° (angle de fuite de la PC). Dans ces conditions, nous obtenons la figure 153. Et le polyèdre, en tant qu'ensemble d'arêtes, est parfaitement déterminé.

Grâce à l'épure constituée par la PC et la VF (figure 153), on peut déterminer la vue de dessus (VD), on a donc aussi l'épure de l'objet en géométrie descriptive. Et l'épure constituée par la PC et la VF offre des possibilités de bijectivité identiques à celles offertes par l'épure en géométrie descriptive (VF, VD). La figure 154 regroupe les trois représentations PC, VF, VD associées deux à deux. PC et VF sont associées au moyen de lignes de rappel inclinées à 60° ; seule la ligne de rappel rr' a été tracée. VF et VD sont associées au moyen de lignes de rappel parallèles aux bords latéraux de la feuille de dessin ; seule e_1e' a été tracée.

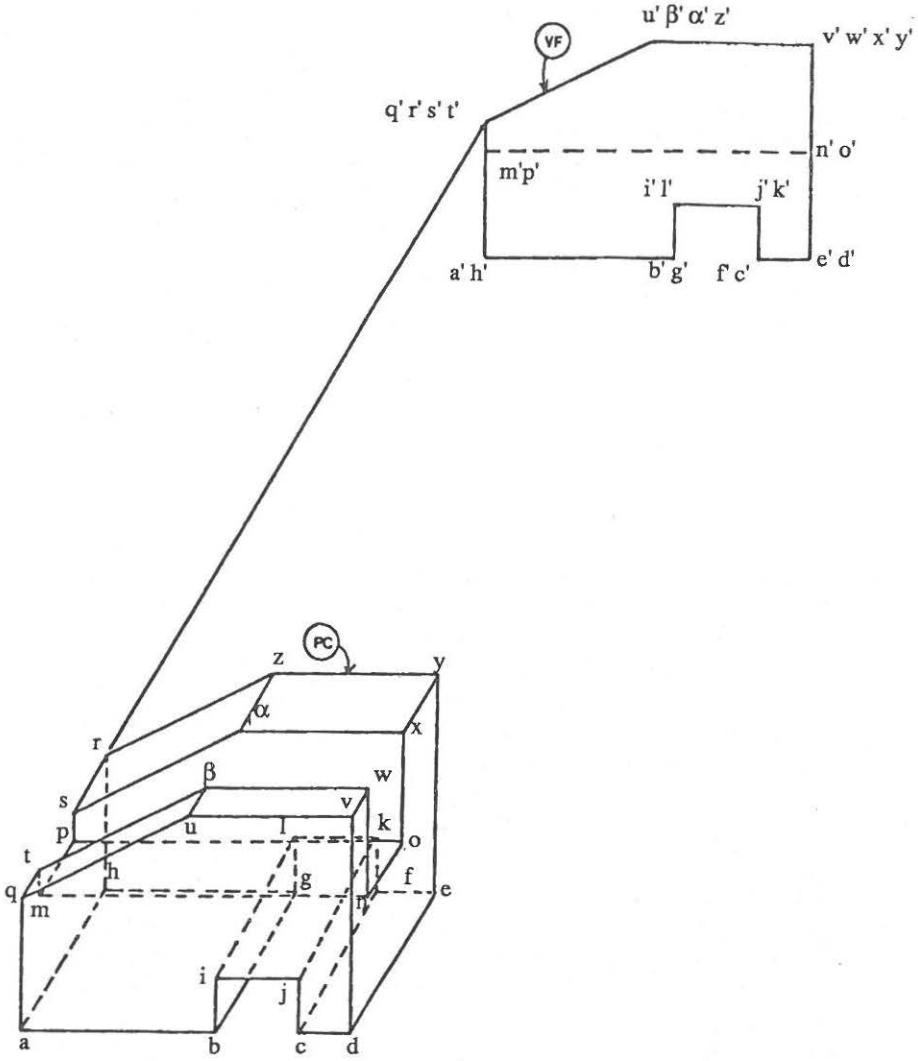

VF
u' β' α' z'
v' w' x' y'
q' r' s' t'
n' o'
m' p'
i' l'
j' k'
a' h'
b' g'
f' c'
e' d'
PC
z
y
α
x
r
β
w
s
v
p
u
l
k
o
t
h
g
f
q
m
n
e
i
j
a
b
c
d

Figure 153

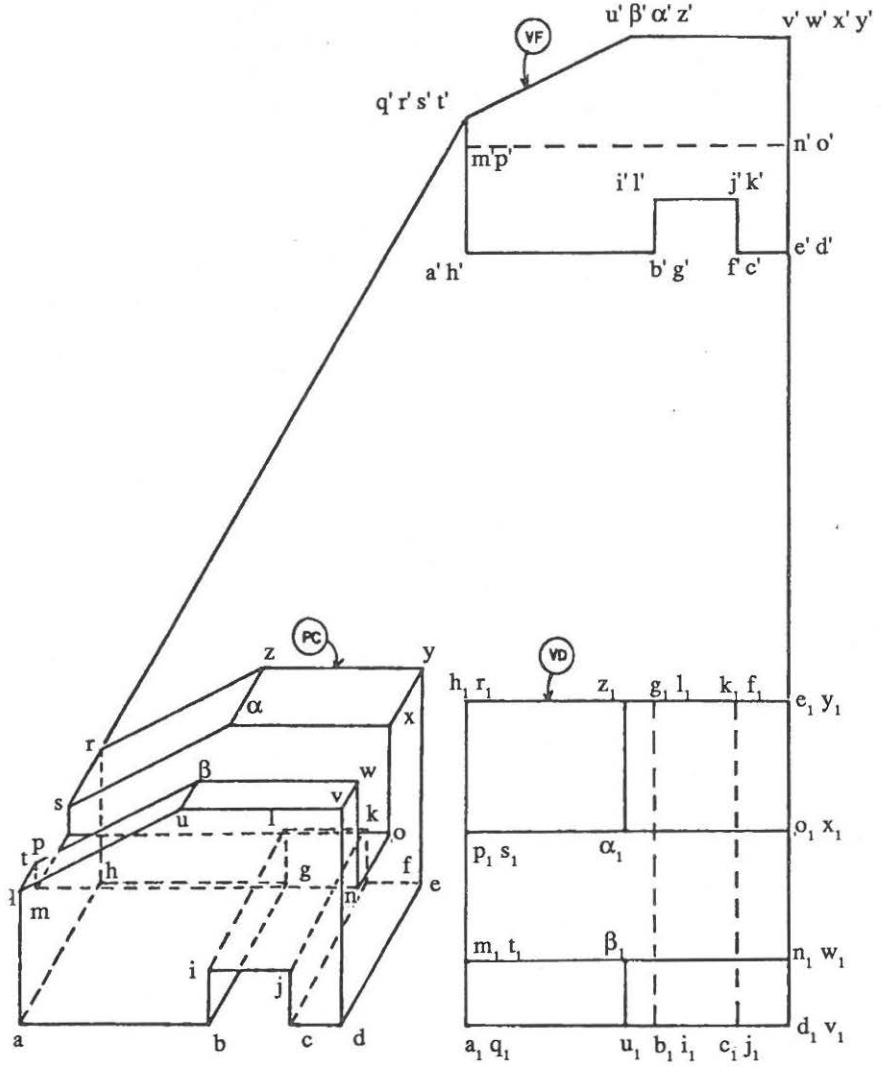
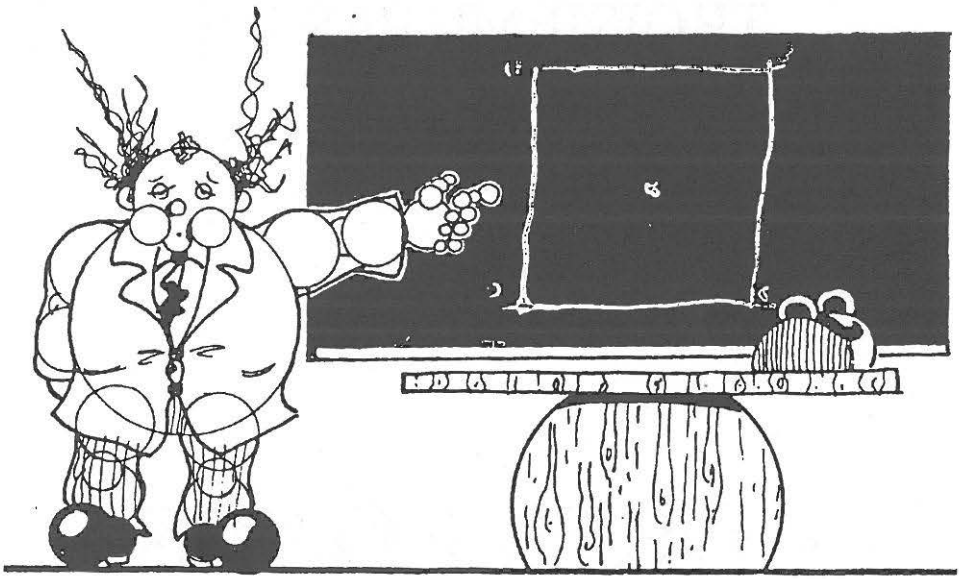

VF
u' β' α' z'
v' w' x' y'
q' r' s' t'
m' p'
n' o'
i' l'
j' k'
a' h'
b' g'
f' c'
e' d'
PC
z
y
α
x
r
β
w
s
v
k
u
l
o
p
t
h
g
f
e
m
n
i
j
a
b
c
d
VD
h1 r1
z1
g1 l1
k1 f1
e1 y1
o1 x1
p1 s1
α1
m1 t1
β1
n1 w1
d1 v1
a1 q1
u1
b1 i1
c1 j1

Figure 154

Nous avons maintes fois constaté en expérimentant auprès des élèves qu'une des principales source d'erreur provient de la non-bijectivité entre l'objet et sa représentation. L'épure PC-VF telle que nous la proposons à la figure 153 permet de réduire les possibilités d'erreur. Le couple PC, VF est le couple de représentation le plus proche des démarches spontanées. Toutefois, le traitement de cette épure PC-VF est au moins aussi difficile que celui d'une épure de géométrie descriptive. A l'heure actuelle, aucune expérience fiable ne nous permet d'affirmer que les épures PC-VF faciliteront la résolution des problèmes dus à la non-bijectivité entre l'objet et sa représentation.

TROISIÈME PARTIE

CORPS RONDS



LES CORPS RONDS DANS L'ENSEIGNEMENT !

Chapitre 13

ELLIPSE

Résumé

La troisième partie étudie les dessins en PC des trois principaux corps ronds : le cylindre et le cône de révolution, la sphère. L'ellipse joue un rôle important dans la représentation en PC des corps ronds. Le chapitre 13 est consacré à une étude de l'ellipse. Il établit des formules et une table numérique permettant de tracer avec un ellipsographe une ellipse dont on ne connait que deux rayons conjugués.

RAYONS CONJUGUÉS

La transformation plane appelée affinité est définie de la manière suivante. On se donne une droite D et deux points M et M' distincts et n'appartenant pas à D tels que la droite MM' rencontre D en un point H. La transformation ponctuelle plane qui laisse fixe tous les points de D, qui transforme M en M' et qui conserve le barycentre est appelée affinité. Si N est un point du plan et K la projection de N sur D parallèlement à la droite MM', alors le point N' est le transformé de N si et seulemnt si

$$\frac{\overline{N'K}}{\overline{NK}} = \frac{\overline{M'H}}{\overline{MH}}$$

La droite D s'appelle la droite des points fixes de l'affinité, MM' définit la direction de l'affinité et $k = \frac{\overline{M'H}}{\overline{MH}}$ en est le rapport ($k \neq 0$ et $k \neq 1$).
Lorsque la droite MM' est perpendiculaire à D on parle d'affinité orthogonale.

La figure 155 illustre une affinité orthogonale.

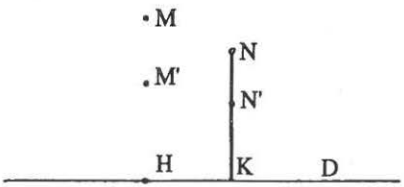


Figure 155

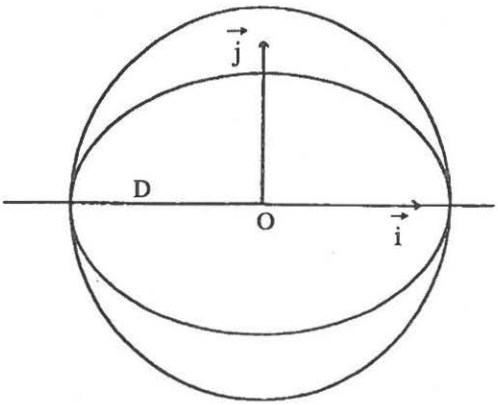


Figure 156

Etant donné un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan et un cercle de centre O et de rayon R, l'équation du cercle dans ce repère est

$$x^2 + y^2 = R^2$$

où un point M du cercle est tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

Appelons D la droite passant par O et ayant même direction que $\vec{i}$.

L'affinité orthogonale de droite de points fixes D, et de rapport k avec $O < k < 1$, transforme le cercle en une courbe d'équation

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{k^2R^2} = 1,$$

où un point M de cette courbe est tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Cette courbe est une ellipse dont le grand axe est égal à 2R et le petit à 2kR.

Sur la figure 156 sont dessinés le cercle et l'ellipse avec $k = \frac{2}{3}$.

L'ensemble des milieux des cordes de l'ellipse ayant toutes la même direction est un diamètre de l'ellipse ; la direction de ce diamètre est appelée direction conjuguée de la direction des cordes. Pour démontrer ce résultat, il suffit de se ramener au cas du cercle en utilisant l'affinité orthogonale ; pour ce cercle, les directions conjuguées sont des directions orthogonales. Deux rayons (ou deux diamètres) de l'ellipse dont les directions sont conjuguées sont appelés rayons (ou diamètres) conjugués.

La figure 157 représente une ellipse et sept cordes ayant une même direction, ainsi que le diamètre de direction conjuguée. La figure 158 représente une ellipse et deux rayons conjugués ainsi que le cercle et ses rayons leur correspondant grâce à l'affinité orthogonale précédemment introduite.

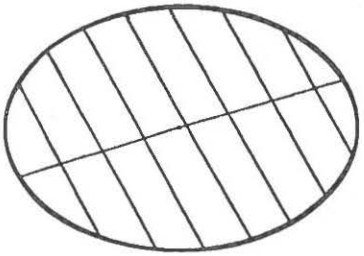


Figure 157

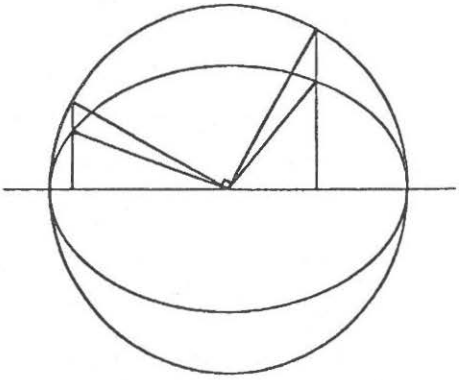


Figure 158

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Etant donné un repère orthonormé du plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$ faisons l'inventaire des différentes courbes admettant comme équation

$$(1) \qquad ax^2 + 2b\,xy + cy^2 + 2\,dx + 2\,ey + f = O$$

où un point générique M de la courbe est donné par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

a, b, c, d, e, f, étant des paramètres réels.

Soit $(O, \vec{I}, \vec{J})$ le repère déduit de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ au moyen d'une rotation de centre O et d'angle θ. Introduisons les variables X et Y telles que

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Représentons sur la figure 159 les différents éléments :

$$O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{I}, \vec{J}, \theta.$$

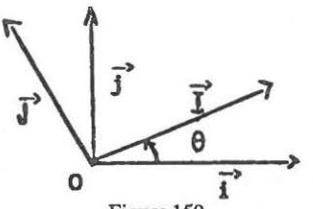


Figure 159

Puisque $\vec{I} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{J}$ et $\vec{J} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$,

alors $x\vec{i} + y\vec{j} = X(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + Y(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$,

Nous avons donc, entre x, y, X, Y et θ les relations suivantes :

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta \quad \text{et} \quad y = X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

Le point M est sur la courbe définie par l'équation (1) si et seulement si il est sur celle définie par l'équation (2) :

(2) $(a\cos^2\theta + c\sin^2\theta + b\sin 2\theta)X^2 + ((c-a)\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta)\,XY$
$+ (a\sin^2\theta + c\cos^2\theta - b\sin 2\theta)Y^2 + 2(d\cos\theta + e\sin\theta)X + 2(e\cos\theta - d\sin\theta)Y$
$+ f = O$

Il est toujours possible de choisir pour θ une valeur particulière θ_o telle que
$(c-a)\sin 2\theta_o + 2b\cos 2\theta_o = O.$

On définit alors A, C, D, E par

$A = a\cos^2\theta_o + c\sin^2\theta_o + b\sin 2\theta_o$; $C = a\sin^2\theta_o + c\cos^2\theta_o - b\sin^2\theta_o$
$D = d\cos\theta_o + e\sin\theta_o$; $E = e\cos\theta_o - d\sin\theta_o$.

Pour un changement d'axes correspondant à l'angle θ_o, nos courbes sont définies par

(3) $AX^2 + CY^2 + 2DX + 2EY + f = O.$

Nous distinguons deux cas.

Si $A.C \neq O$, introduisons une translation du repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ telle que

$$X_1 = X + \frac{D}{A} \quad \text{et} \quad Y_1 = Y + \frac{E}{C},$$

où X_1 et Y_1 sont les coordonnées de M dans ce nouveau repère ; nous pouvons écrire comme équation des courbes :

(4) $AX_1^2 + CY_1^2 + F = O$, avec $F = -\frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} + f.$

Nous obtenons donc comme courbes possibles définies par (4) :

- L'ensemble vide, si $F = O$ et si A et C sont de même signe.
- Deux droites concourantes, si $F = O$ et si A et C sont de signes contraires.
- Une ellipse, si $F \neq O$ et si A et C sont de même signe.
- Une hyperbole, si $F \neq O$ et si A et C sont de signes contraires.

Le deuxième cas analysé est celui pour lequel $A.C = O$; Il nous faut examiner à nouveau l'équation (3).

Nous trouvons une parabole si $A \neq O$, $C = O$ et $E \neq O$ ou si $A = O$, $C \neq O$ et $D \neq O$.

Dans les autres cas, nous trouvons ou bien l'ensemble vide, ou bien une droite, ou bien deux droites parallèles ou confondues.

On appelle courbe du second degré une courbe définie par une équation (1) pour laquelle au moins l'un des trois coefficients a, b, c est différent de zéro. D'après ce qui précède, l'ensemble des courbes du second degré est constitué par les ellipses, les hyperboles, les paraboles, les couples de droites parallèles, concourantes ou confondues, l'ensemble vide. Si dans l'équation (1) les trois coefficients a, b, c sont nuls, nous parlons de l'équation d'une courbe du premier degré et cette courbe est une droite ou l'ensemble vide.

ELLIPSE ET AFFINITÉ

Une ellipse dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$, O étant le centre de l'ellipse et $\vec{i}, \vec{j}$ étant de même direction que ses axes, a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ où a et b sont des nombres réels non nuls.}$$

Donnons-nous une affinité définie par la droite des points fixes D, la direction Δ et le rapport k. Soient A un point de D et $\vec{I}$ et $\vec{J}$ des vecteurs de direction D et Δ, alors

$$\vec{I} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{J} = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres réels, non tous nuls, déterminés par les quatre vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{I}, \vec{J}$.

La figure 160 représente les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(A, \vec{I}, \vec{J})$, les droites D et Δ, un point M et son transformé par affinité M'. (Nous utilisons une même lettre D ou Δ pour désigner tantôt une droite, tantôt sa direction).

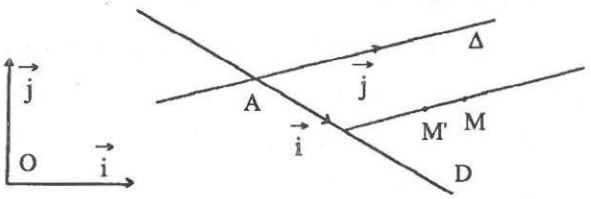


Figure 160

Si u et v sont les coordonnées de A, c'est-à-dire si $\overrightarrow{OA} = u\vec{i} + v\vec{j}$ et si les coordonées d'un point M sont x, y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et X, Y dans le repère $(A, \vec{I}, \vec{J})$, alors

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = u\vec{i} + v\vec{j} + X\vec{I} + Y\vec{J}.$$

Nous avons donc entre x, y, X, Y, les relations suivantes :

$$x = \alpha X + \gamma Y + u \quad \text{et} \quad y = \beta X + \delta Y + v.$$

Dans le repère $(A, \vec{I}, \vec{J})$, une équation de l'ellipse est :

$$\frac{(\alpha X + \gamma Y + u)^2}{a^2} + \frac{(\beta X + \delta Y + v)^2}{b^2} = 1$$

C'est une équation de degré 2, puisque les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ne sont pas tous nuls.

L'affinité transforme un point M de coordonnées X,Y en un point M' de coordonnées X', Y' tel que

$$X' = X \quad \text{et} \quad Y' = kY$$

L'ellipse est transformée en une courbe du second degré puisque $k \neq 0$.

Mais une affinité transforme un ensemble borné de points en un ensemble borné de points et parmi les courbes du second degré l'ellipse est la seule courbe non réduite à l'ensemble vide et bornée.

En définitive, une affinité transforme une ellipse en une autre ellipse.

L'ELLIPSOGRAPHE

Pour tracer une ellipse dont on connaît les axes en grandeur et en direction, l'usage d'un ellipsographe ou trace-ellipse est recommandé.

Tracer une ellipse définie par deux rayons conjugués ; solution géométrique

Deux segments OA et OB sont dessinés sur la feuille. On veut tracer l'ellipse E admettant OA et OB comme rayons conjugués perpendiculaires OR et OS ou encore deux demi-axes de l'ellipse E.

Si OA = OB, les axes sont les bissectrices de l'angle $\widehat{AOB}$. L'ellipse est obtenue en particularisant la figure 158. Par la suite, on suppose que OA $\neq$ OB.

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser, dans ce paragraphe, l'affinité. C'est une solution plus géométrique que celle utilisée dans le paragraphe suivant qui faisant appel à des calculs, est donc plus analytique.

Nous allons choisir une droite D et un point O' de telle sorte que l'affinité admettant D comme droite des points fixes et transformant O en O' donne comme transformé de l'ellipse cherchée un cercle ; un cercle est une ellipse dont tous les rayons sont égaux.

Nous pouvons choisir AB comme droite des points fixes et O' sommet d'un triangle rectangle isocèle O'AB. La figure 161 illustre cette situation.

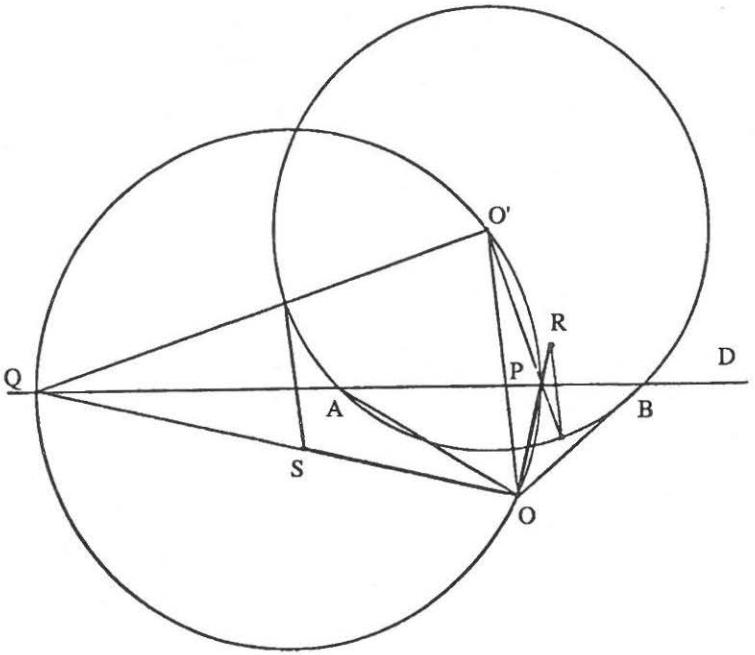


Figure 161

L'affinité transforme E en une ellipse E' de centre O' dont OA et OB sont des rayons conjugués puisque l'affinité conserve les milieux.

Mais si les deux rayons conjugués O'A et O'B de l'ellipse E' sont orthogonaux, ces rayons sont portés par les axes de l'ellipse E' ; comme de plus O'A = O'B cette ellipse E' est un cercle. Donc E est transformé en un cercle de centre O' et de rayon O'A.

Le cercle centré sur D et passant par O et O' existe toujours puisque $\overset{\frown}{OA} \neq \overset{\frown}{OB}$. Il coupe D en P et Q extrémités d'un de ses diamètres. Les angles $\overset{\frown}{POQ}$ et $\overset{\frown}{PO'Q}$ sont des angles droits se correspondant dans l'affinité. Les droites OP et OQ sont donc conjuguées et orthogonales.

Elles déterminent les axes de l'ellipse E. Les extrémités R et S des axes sont obtenues grâce à l'affinité permettant de passer du cercle E' à l'ellipse E.

On peut aussi choisir comme droite des points fixes D, la droite passant par B et parallèle à OA. Le point O' est alors le centre d'un cercle E" tangent en B à la droite D et de rayon égal à OA. La droite D et le couple (O, O') définissent l'affinité. Le cercle centré sur D et passant par O et O' coupe D en P_1 et Q_1. Les droites OP_1 et OQ_1 sont les axes de l'ellipse E. Leurs extrémités R et S sont obtenues grâce à l'affinité permettant de passer du cercle E" à l'ellipse E. La figure 162 ilustre ce deuxième algorithme de constuction fondé lui aussi sur l'affinité entre l'ellipse et le cercle.

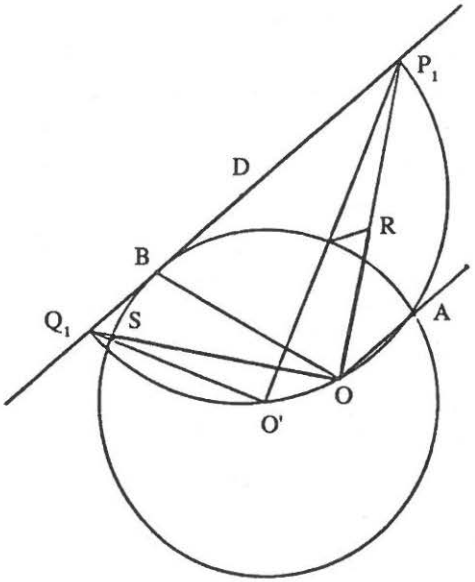


Figure 162

Tracer une ellipse définie par deux rayons conjugués ; solution analytique

Nous voulons résoudre le même problème que celui présenté au paragraphe précédent.

Deux segments OA et OB sont dessinés sur une feuille. On veut tracer l'ellipse E admettant OA et OB comme rayons conjugués.

Remarquons tout d'abord que si une ellipse a pour équation rapportée à ses axes : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

il existe un nombre réel φ pour lequel les rayons vecteurs conjugués $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour composantes : $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ et $-a\sin\varphi$, $b\cos\varphi$.
Rapportée au repère défini par le centre O de l'ellipse et les rayons vecteurs conjugués $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, l'équation de l'ellipse est donc :

$$\frac{(Xa\cos\varphi - Ya\sin\varphi)^2}{a^2} + \frac{(Xb\sin\varphi - Yb\cos\varphi)^2}{b^2} = 1,$$

soit $$X^2 + Y^2 = 1.$$

Nous supposons notre plan orienté et choisissons une unité telle que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ soit de longueur 1. Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est alors de longueur $r > 0$ et l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est appelé α.

Nous supposons que α n'est pas un multiple de π ; le cas contraire est examiné à la fin de ce paragraphe.

Introduisons le vecteur $\overrightarrow{OC}$ tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ mesure $\frac{\pi}{2}$ et tel que $OA = OC$. Une rotation de centre O et d'angle θ transforme $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OC}$ en $\overrightarrow{OB'}$. Illustrons par la figure 163 les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OB'}$, le point O et les angles θ et α.

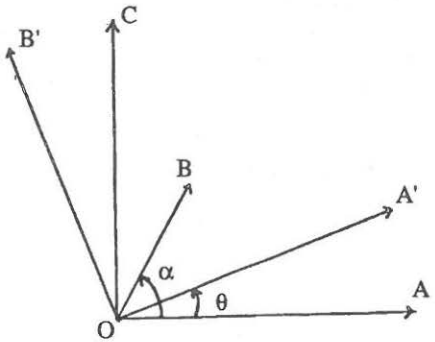


Figure 163

L'équation de l'ellipse dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est

$x^2 + y^2 = 1.$

L'équation de l'ellipse dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est

$$x^2 - 2\cot g\alpha xy + (\cot g^2\alpha + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha})y^2 = 1.$$

L'équation de l'ellipse dans le repère $(O, \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})$ est

$Rx^2 + Sxy + Ty^2 \neq 1$;

Les coefficients R , S et T valent respectivement

$$R = \cos^2\theta - \cot g\,\alpha \sin 2\,\theta + (\cot g^2\alpha + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}) \sin^2\theta$$

$$S = (\cot g^2\alpha + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha} - 1) \sin 2\,\theta + 2\cot g\alpha \,.\, \cos 2\,\theta$$

$$T = \sin^2\theta + \cot g\,\alpha \sin 2\theta + (\cot g^2\alpha + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}) \cos^2\theta$$

Choisissons θ de telle sorte que $S = O$. Deux cas se présentent alors.

Dans le premier cas : $\cot g^2\alpha + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha} - 1 = O.$

Dans les conditions définissant r et α, l'égalité précédente est équivalente à $\cos 2\alpha = -\frac{1}{r^2}$.

Une rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ donne la direction des axes.

La valeur du demi axe des abcisses est alors

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \cot g\alpha}}$$

La valeur du demi-axe des ordonnées est

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot g\alpha}}$$

Dans le deuxième cas, nous supposons que

$$\cot g^2\alpha + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha} - 1 \neq O.$$

Ce qui revient à dire de façon équivalente que

$$\cos 2\alpha \neq -\frac{1}{r^2}$$

Nous rencontrons ce cas notamment lorsque $r < 1$.

Pour que S = O, nous choisissons un angle θ tel que

$$tg2\,\theta = \frac{2\cot g\alpha}{\cot g^2\alpha + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha} - 1}$$

Soit $$tg2\,\theta = \frac{r^2\sin 2\alpha}{1 + r^2\cos 2\alpha}$$

La valeur du demi-axe des abcisses est alors

$$\sqrt{\cos^2\theta + r^2\cos^2(\alpha - \theta)}$$

L'autre demi-axe qui lui est perpendiculaire a pour valeur

$$\sqrt{r^2\sin^2(\alpha - \theta) + \sin^2\theta}$$

Dans le cas particulier où α est un mutiple de π, c'est-à-dire dans le cas ou les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires, l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dégénère en un segment MM' tel que $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'} = \sqrt{1 + r^2}\,\overrightarrow{OA}$

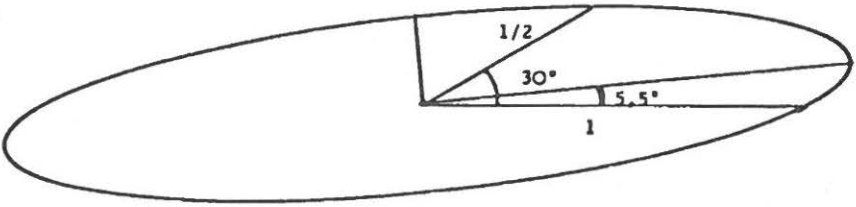


Figure 164

Dans le cas où $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 30°$, on trouve pour θ une valeur à peu près égale à 5,5°, tandis que 1,09 et 0,23 sont approximativement les valeurs respectives des demi-axes des abcisses et des ordonnées. La figure 164 reproduit l'ellipse correspondant à ce cas.

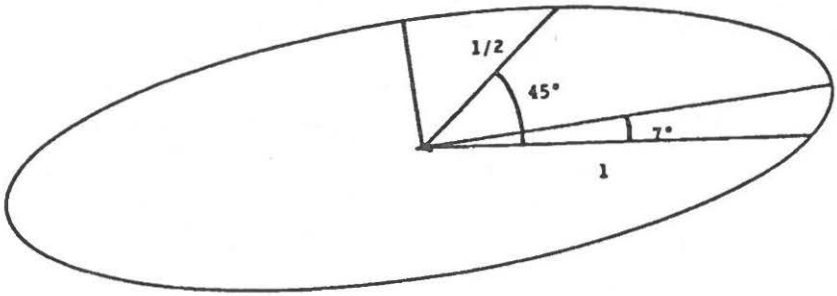


Figure 165

Dans le cas où $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 45°$, on trouve pour θ une valeur à peu près égale à 7°, tandis que 1,07 et 0,34 sont approximativement les valeurs respectives des demi-axes des abcisses et des ordonnées. La figure 165 reproduit l'ellipse correspondant à ce cas.

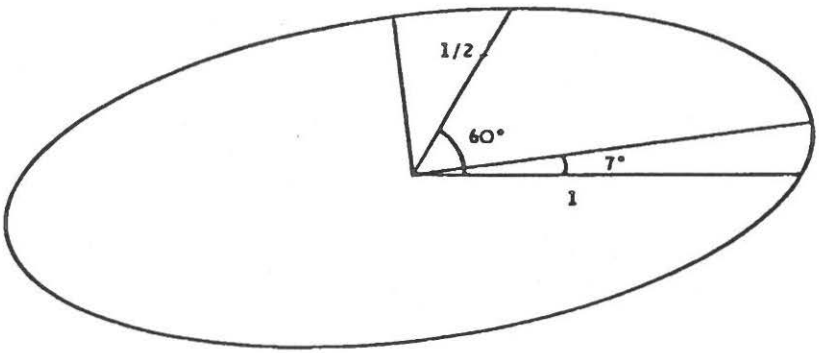


Figure 166

Dans le cas où $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 60°$, on trouve pour θ une valeur à peu près égale à 7°, tandis que 1,04 et 0,43 sont approximativement les valeurs respectives des demi-axes des abcisses et des ordonnées. Le figure 166 reproduit l'ellipse correspondant à ce cas.

TABLAU NUMÉRIQUE

Dans les tableaux numériques ci-après, nous donnons les trois valeurs, θ, le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse en fonction de α et r. L'angle α varie de 5° en 5° et le rapport r prend les neuf valeurs : 0,1 ; 0,2 ; 0,3; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9.

r \ α	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
0,1	0.05 1.01 0.01	0.10 1.00 0.02	0.14 1.00 0.03	0.18 1.00 0.03	0.22 1.00 0.04	0.25 1.00 0.05	0.27 1.00 0.06	0.28 1.00 0.06
0,2	0.19 1.02 0.02	0.38 1.02 0.03	0.55 1.02 0.05	0.71 1.02 0.07	0.86 1.02 0.08	0.97 1.02 0.10	1.06 1.01 0.11	1.12 1.01 0.13
0,3	0.41 1.04 0.03	0.81 1.04 0.05	1.20 1.04 0.07	1.55 1.04 0.10	1.86 1.04 0.12	2.13 1.03 0.15	2.35 1.03 0.17	2.49 1.03 0.19
0,4	0.69 1.08 0.03	1.36 1.08 0.06	2.01 1.07 0.10	2.62 1.07 0.13	3.17 1.07 0.16	3.66 1.06 0.19	4.06 1.05 0.22	4.36 1.05 0.25
0,5	1.00 1.12 0.04	1.98 1.12 0.08	2.93 1.11 0.12	3.84 1.11 0.15	4.68 1.10 0.19	5.45 1.09 0.23	6.11 1.09 0.26	6.64 1.08 0.30
0,6	1.32 1.17 0.04	2.63 1.16 0.09	3.91 1.16 0.13	5.14 1.15 0.18	6.31 1.14 0.22	7.40 1.14 0.26	8.38 1.13 0.31	9.23 1.11 0.35
0,7	1.64 1.22 0.05	3.27 1.22 0.10	4.88 1.21 0.15	6.45 1.20 0.20	7.97 1.20 0.25	9.41 1.18 0.30	10.76 1.17 0.34	11.99 1.16 0.39
0,8	1.95 1.28 0.05	3.89 1.28 0.11	5.82 1.27 0.16	7.72 1.26 0.22	9.58 1.25 0.27	11.39 1.24 0.32	13.13 1.22 0.37	14.78 1.21 0.43
0,9	2.24 1.34 0.06	4.47 1.34 0.12	6.69 1.33 0.17	8.91 1.33 0.23	11.10 1.31 0.29	13.27 1.30 0.35	15.40 1.28 0.40	17.48 1.27 0.46

r \ α	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
	0.29	0.28	0.27	0.25	0.22	0.19	0.14	0.10	0.05
0,1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	0.07	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.10	0.10	0.10
	1.15	1.14	1.09	1.01	0.90	0.76	0.59	0.41	0.21
0,2	1.01	1.01	1.01	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.19	0.20	0.20
	2.57	2.57	2.49	2.33	2.09	1.78	1.40	0.96	0.49
0,3	1.02	1.02	1.02	1.01	1.01	1.01	1.00	1.00	1.00
	0.21	0.23	0.24	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.30
	4.55	4.60	4.52	4.28	3.89	3.34	2.65	1.84	0.94
0,4	1.04	1.04	1.03	1.02	1.02	1.01	1.01	1.00	1.00
	0.27	0.30	0.32	0.34	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40
	7.02	7.22	7.20	6.95	6.43	5.62	4.53	3.19	1.65
0,5	1.07	1.06	1.05	1.04	1.03	1.02	1.01	1.00	1.00
	0.33	0.36	0.39	0.42	0.44	0.46	0.48	0.49	0.50
	9.90	10.36	10.55	10.41	9.87	8.86	7.33	5.27	2.77
0,6	1.10	1.09	1.07	1.06	1.04	1.03	1.02	1.01	1.00
	0.39	0.42	0.46	0.49	0.52	0.55	0.57	0.59	0.60
	13.05	13.90	14.47	14.67	14.36	13.38	11.53	8.63	4.67
0,7	1.14	1.12	1.10	1.09	1.07	1.05	1.03	1.01	1.00
	0.43	0.48	0.52	0.56	0.60	0.63	0.66	0.68	0.69
	16.31	17.67	18.80	19.59	19.90	19.45	17.84	14.39	8.37
0,8	1.19	1.17	1.15	1.12	1.10	1.07	1.05	1.02	1.01
	0.48	0.52	0.57	0.62	0.66	0.70	0.74	0.77	0.79
	19.50	21.43	23.24	24.85	26.16	26.96	26.80	24.62	17.40
0,9	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14	1.11	1.08	1.04	1.01
	0.51	0.56	0.62	0.67	0.72	0.76	0.81	0.85	0.88

D'AUTRES TRACÉS D'ELLIPSES

Soucieux de mettre en place un dessin technique, nous avons privilégié dans ce chapitre le trace-ellipse ou ellipsographe. Mais pour dessiner une ellispe, on peut utiliser d'autres méthodes, utiliser par exemple un pochoir ou réaliser un tracé à main levée après avoir marqué un certain nombre de points de l'ellipse.

Les pochoirs permettant des tracés d'ellipses sont des plaques perforées en matière plastique. La figure 167 représente une telle plaque à échelle réduite. Ces plaques sont d'un usage relativement facile pour les élèves.

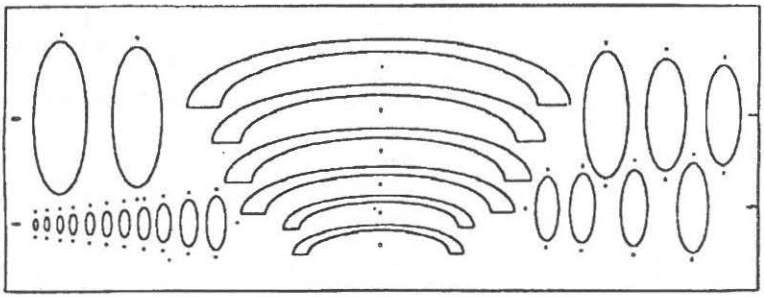


Figure 167

Pour obtenir des points d'une ellipse, on peut construire au compas les points M tels que MF + MF' = 2a où F et F' sont les foyers de l'ellipse et a un nombre tel que 2a > FF'. La figure 168 illustre le tracé de cette ellipse. Le procédé dit "de la bande de papier" détermine aussi les points d'une ellipse. Pour cela, on trace deux droites perpendiculaires D et D' ; puis on déplace une bande de papier AB, A et B restant en contact respectivement avec D et D' comme l'indique la figure 169 ; le point C de la bande pour chaque position de cette dernière détermine un point de l'ellipse.

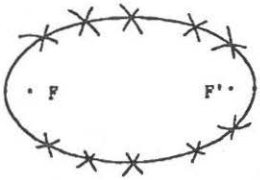


Figure 168

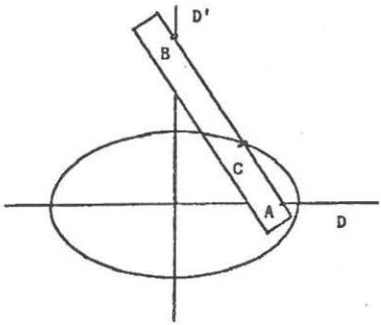


Figure 169

Une autre construction de l'ellipse par points est obtenue au moyen de deux cercles de même centre O et de deux axes orthogonaux D_1 et D_2 passant par O. Traçons une demi-droite d'origine O qui coupe les grand et petit cercles en A et B comme l'indique la figure 170 ; la parallèle à D_1 passant par A et la parallèle à D_2 passant par B se coupent en M qui est un point de l'ellipse. En faisant varier la demi-droite autour de O, on obtient autant de points qu'on veut de l'ellipse.

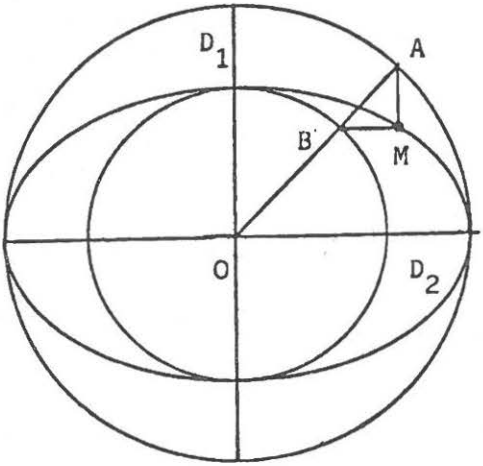


Figure 170

Pour trouver des points d'une ellipse inscrite dans un parallélogramme ABCD et passant par les milieux IJKL des côtés de ce parallélogramme, on fait correspondre une ellipse au cercle inscrit dans les carré ABEF (cf. figure 171) en procédant de la manière suivante. A un quadrillage du carré ABEF représenté sur la figure 172, on associe un quadrillage oblique du parallélogramme ABCD. Ce deuxième quadrillage est obtenu, grâce à la conservation des rapports et au théorème de Thalès, en traçant des familles de droites parallèles entre elles comme l'indique la figure 172. Les points d'intersection correspondants des deux quadrillages permettent d'associer aux points du cercle des points de l'ellipse cherchée.

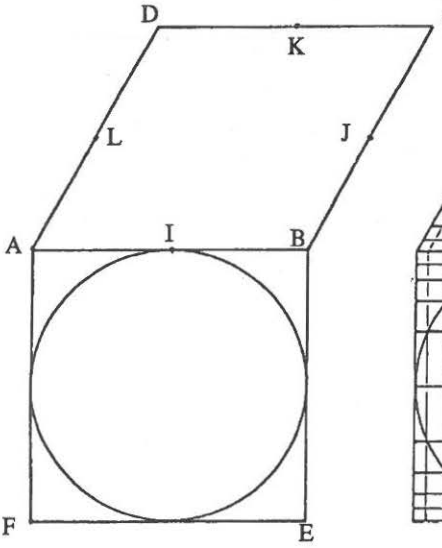


Figure 171

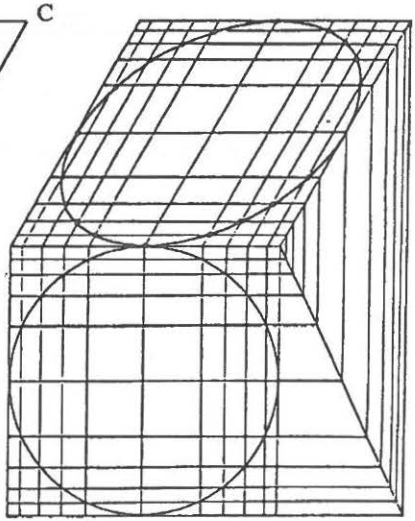


Figure 172

Nos trois constructions illustrées par les figures 169, 170 et 172 reposent fondamentalement sur l'utilisation d'affinités permettant de transformer un cercle en une ellipse. La construction précédente, illustrée par la figure 168 repose sur l'utilisation directe de la définition bifocale de l'ellipse.

Chapitre 14

LES CERCLES DE L'ESPACE

Résumé

Le chapitre 14 met en relation affinité plane et projection cylindrique. Il montre comment est réalisée l'ellipse représentant un cercle quelconque de l'espace.

AFFINITÉ ET PROJECTION

La figure 173 est une PC(1/2, 60°) représentant la face ABCD d'un cube. On dit aussi que ABCD représente le plan de cette face ; ce plan est horizontal. Le quadrilatère ABEF représente un rectangle de l'espace dont AB est un côté ou encore représente le plan de ce rectangle. Les deux plans ABCD et ABEF de l'espace ne sont pas confondus. Ils ont en commun une droite représentée par AB sur la figure 173.

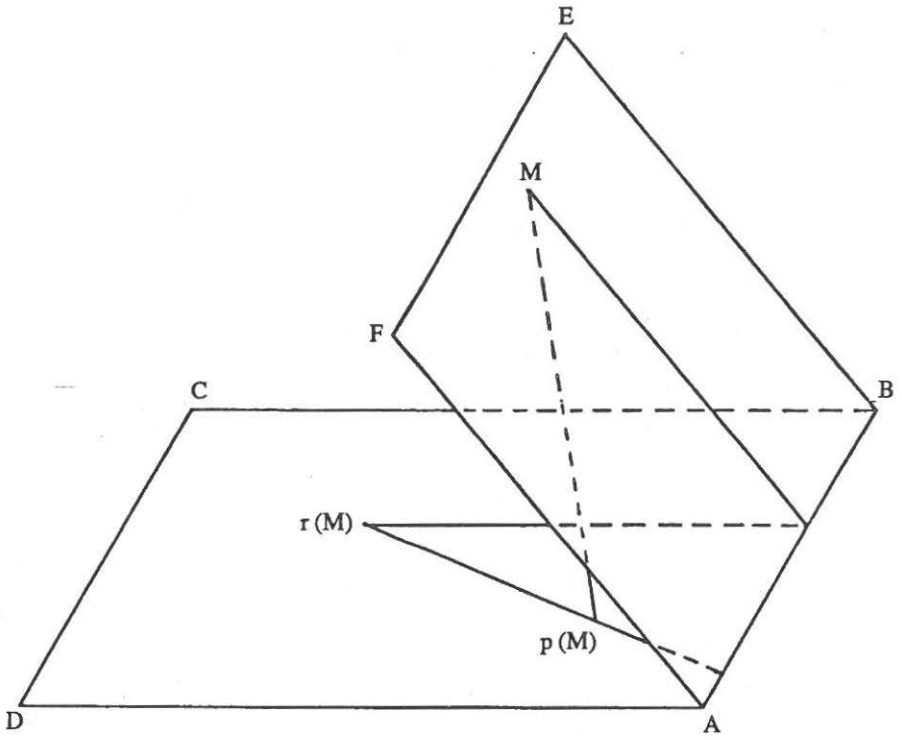


Figure 173

Considérons alors deux transformations particulières, une projection p et une rotation r.

La projection p est définie par le plan de projection ABCD et par une direction de projection : celle d'une droite Δ qui n'est parallèle à aucun des deux plans ABCD et ABEF. Cette projection transforme un point M du plan ABEF en un point p(M) du plan ABCD.

Le demi-plan passant par A, B, E, F et limité par la droite AB peut se rabattre sur le demi-plan passant par A, B, C, D,et limité par AB selon une rotation autour de la droite AB. Appelons r cette rotation et α l'angle de cette rotation ; dans le cas particulier de la figure 173 cet angle α est égal à 50°. Cette rotation transforme un point M du plan ABEF en un point r(M) du plan ABCD. Nous appelons r^{-1} la rotation inverse de r. Puisque r est dans notre cas de figure une rotation de 50° autour de AB, r^{-1} est une rotation de - 50° autour du même axe.

La composée $p \circ r^{-1}$ des deux transformations r^{-1} et p fait correspondre au point r(M) le point p(M). La composée $p \circ r^{-1}$ transforme donc tout point du plan ABCD en un point du plan ABCD. Cette transformation $p \circ r^{-1}$ restreinte au plan ABCD est donc une transformation plane qui conserve le barycentre et qui laisse fixe tous les points de la droite AB.

Si les deux points r(M) et p(M) sont distincts et définissent une droite non parallèle à la droite AB, alors $p \circ r^{-1}$ est une affinité du plan ABCD.

Si les deux points r(M) et p(M) sont confondus alors $p \circ r^{-1}$ laisse fixe tous les points du plan ABCD.

Si les deux points r(M) et p(M) sont distincts et s'ils définissent une droite parallèle à AB alors choisissons un point N du plan ABCD n'appartenant ni à la droite AB ni à la droite r(M)p(M). La figure 174 représente les différents points A, B, r(M), p(M) et N du plan ABCD.

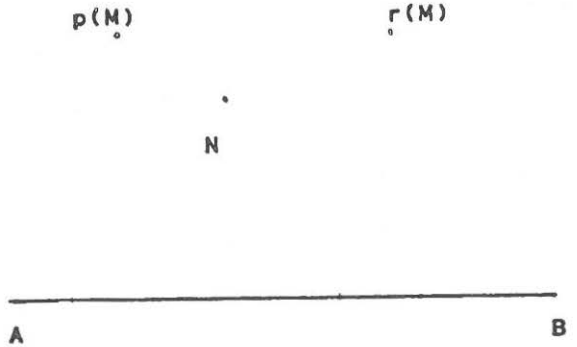


Figure 174

La restriction de $p \circ r^{-1}$ au plan ABCD est alors la composée de deux affinités ayant toutes les deux comme points fixes ceux de la droite AB. La première de ces affinités transforme r(M) en N, et la deuxième transforme N en p(M). Cette composée est encore appelée une transvection, c'est-à-dire une transformation ponctuelle du plan, conservant le barycentre, laissant fixe tous les points de la droite AB et transformant r(M) en p(M).

A la projection cylindrique d'un cercle de l'espace, on peut associer le plan de projection ABCD et le plan du cercle ABEF. Dans ces conditions, la projection du cercle est une courbe tranformée d'un cercle au moyen d'une ou deux affinités planes, c'est donc toujours une ellipse. En perspective cavalière, un cercle de l'espace est donc toujours représenté par une ellipse.

TROIS CERCLES DU CUBE

Si ABCDEFGH est un cube représenté en PC(1/2, 30°) sans ses arêtes cachées, représentons sur les trois faces visibles les cercles inscrits dans chacune des faces. Sur la face avant nous avons un cercle et sur les deux autres faces nous avons des ellipses.

Pour dessiner l'ellipse représentant le cercle inscrit dans la face supérieure du cube, on fait appel aux résultats du chapitre 13. La face est représentée par un parallélogramme EFGH dessiné sur la figure 175. Le centre du parallélogramme I est le centre de l'ellipse. deux diamètres conjugués l'un parallèle au bord inférieur de la feuille de dessin, l'autre ayant la direction d'une fuyante sont connus. L'un est le double de l'autre. D'après les formules du chapitre 13, le grand axe de notre ellipse fait un angle de 5,45 degrés avec le bord inférieur de notre feuille de dessin. Le grand axe de l'ellipse est égal à 1,09 fois le grand diamètre conjugué, tandis que le petit axe est égal à 0,23 fois le grand diamètre conjugué. Les éléments que nous venons de décrire sont représentés sur la figure 175.

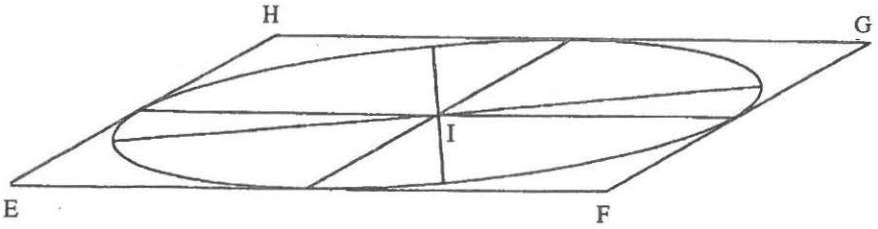


Figure 175

Pour dessiner l'ellipse représentant le cercle inscrit dans la face droite du cube, on utilise encore les résultats du chapitre 13. La face est représentée sur la figure 176 par un parallélogramme BCGF. Le plus grand des deux diamètres conjugués de l'ellipse inscrite dans BCGF est parallèle aux bords latéraux de la feuille ; l'autre, deux fois plus petit, a la direction d'une fuyante. Le grand axe de l'ellipse fait un angle de 83,05 degrés avec le bord inférieur de notre feuille de dessin. Le grand axe et le petit axe de l'ellipse sont respectivement égaux à 1,04 fois et 0,42 fois le grand diamètre conjugué. Les éléments que nous venons de décrire sont représentés sur la figure 176.

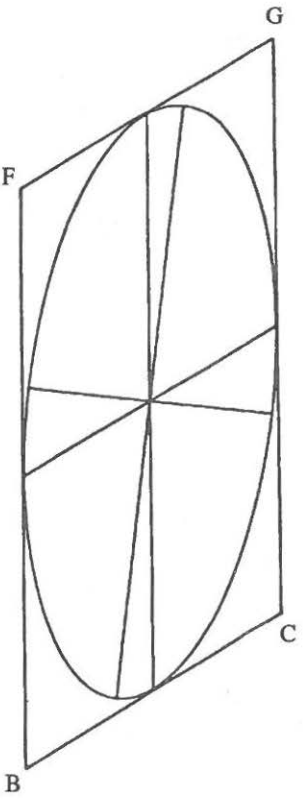


Figure 176

La figure 177 ci-dessous est une PC(1/2, 30°) représentant un cube sans ses arêtes cachées ainsi que les trois cercles inscrits dans les faces apparentes.

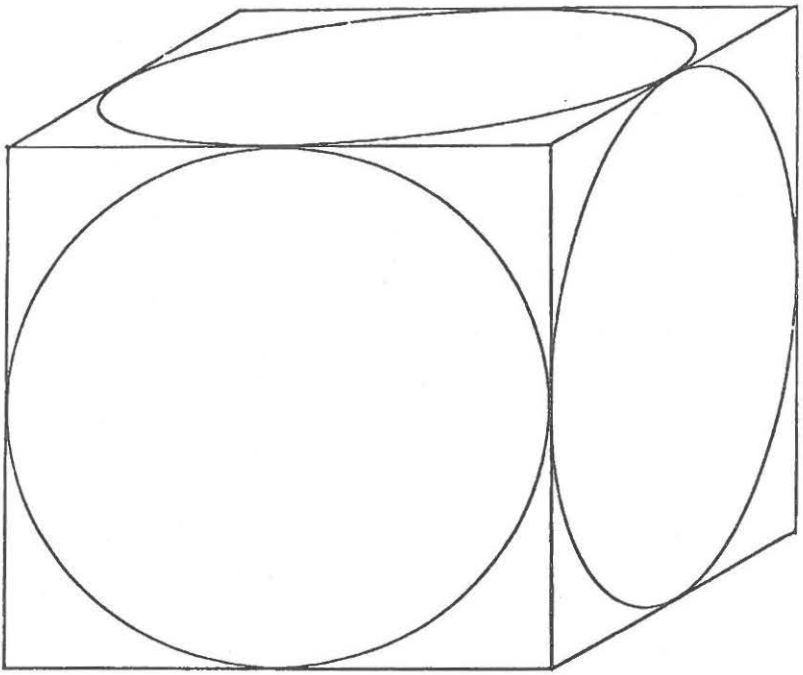


Figure 177

LES CERCLES DE L'ESPACE EN PL

Un cercle de l'espace est représenté généralement en PL soit par une hyperbole, soit par une parabole, soit par une ellipse. Si le cercle est inscrit dans un carré représenté par le quadrilatère ABCD sur la feuille de dessin alors ce cercle est représenté par une ellipse. Mais comment tracer cette ellipse ?

Nous voulons maintenant répondre à cette question. Notre réponse est illustrée par la figure 178 ci-après. Nous ne donnons que l'agorithme de construction sans présenter les arguments théoriques car nous ne pouvons pas trop nous étendre sur des questions touchant la PL qui n'est pas l'objet principal de ce livre.

Un carré de l'espace est représenté en PL par le quadrilatère ABCD. On veut représenter dans cette même PL le cercle inscrit dans le carré. On appelle E le point d'intersection des droites AB et CD, et F celui de CB et AD. G et H sont respectivement les points d'intersection des diagonales AC et BD avec la droite EF. I est le point d'intersection de deux demi-cercles dont les diamètres sont respectivement EF et GH. Dans une homologie de centre I et d'axe EF on transforme ABCD en un carré A'B'C'D' dont les côtés A'B' et C'D' sont parallèles à IE, tandis que les côtés C'B' et A'D' sont parallèles à IF. Puis on trace le cercle Γ' inscrit dans le carré A'B'C'D'. L'ellipse Γ cherchée se déduit du cercle Γ' par l'homologie inverse de la précédente. Pour la construire, on utilise le fait que les cordes homologues de Γ et Γ' et parallèles à EF se transforment en conservant les proportions ce qui permet de construire deux diamètres conjugués, mm' et nn', de cette ellipse Γ. Les formules du chapitre 13 déterminent alors les axes aa' et bb' de l'ellipse Γ cherchée. Diamètres conjugués et formules du chapitre 13 sont donc des outils permettant de traiter les cercles de l'espace en PC comme en PL.

Le cas particulier de cercles inscrits dans les faces d'un cube représenté au moyen d'une PL avec un seul point de fuite, est beaucoup plus simple et s'appuie aussi sur les diamètres conjugués et les formules du chapitre 13. La figure 179 représente un tel cube et trois cercles inscrits en PL.

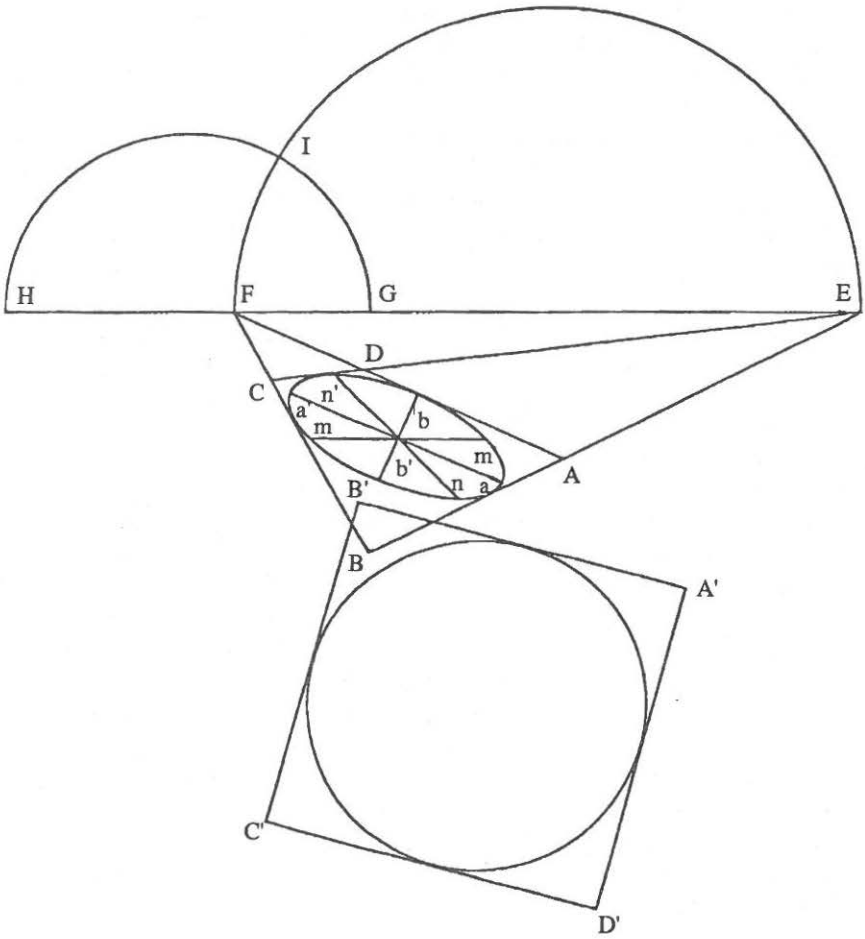


Figure 178

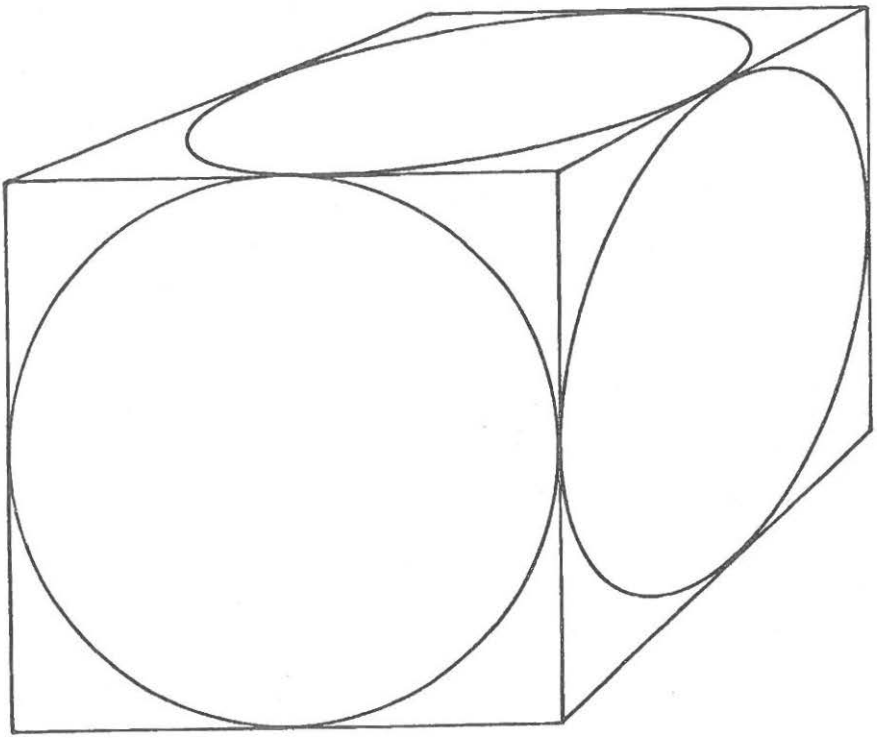


Figure 179

Il est toutefois indéniable que les cercles de l'espace sont techniquement plus faciles à tracer en PC qu'en PL. En PC, la figure 178 devient un parallélogramme ABCD et une ellipse de centre O, le centre de ABCD et de rayons conjugués OM et ON où M est le milieu de AB et N le milieu de AD.

Puisque les cercles de l'espace sont représentés en PC par des ellipses dont on arrive en général à déterminer les axes, nous dirons pour conclure par une boutade que l'ellipsographe est le compas de l'espace.

Chapitre 15

LE CYLINDRE ET LE CÔNE

Résumé

Le chapitre 15 étudie les dessins en PC du cylindre de révolution puis du cône de révolution.

LE CYLINDRE

Etant donné un cercle, le segment de droite orthogonal au plan du cercle et dont une extrémité parcourt le cercle, engendre un cylindre de révolution ; nous disons plus brièvement dans cet ouvrage : un cylindre.

Dans ce paragraphe, nous voulons répondre à la question : comment dessiner ce cylindre en PC ?

Si nous choisissons comme face arrière un des deux cercles de base, nous obtenons dans une PC(1/2, 60°) la représentation proposée par la figure 180. (avec pointillés) ou 181 (sans pointillés). Le segment variable engendrant le cylindre est représenté dans deux positions particulières a_1b_1 et a_2b_2. Les segments a_1b_1 et a_2b_2 sont des tangentes communes aux cercles. Ils constituent avec les demi-cercles γ_1 et γ_2 le contour apparent du cylindre car tout point du cylindre est représenté par un point se trouvant à l'intérieur de ce contour.

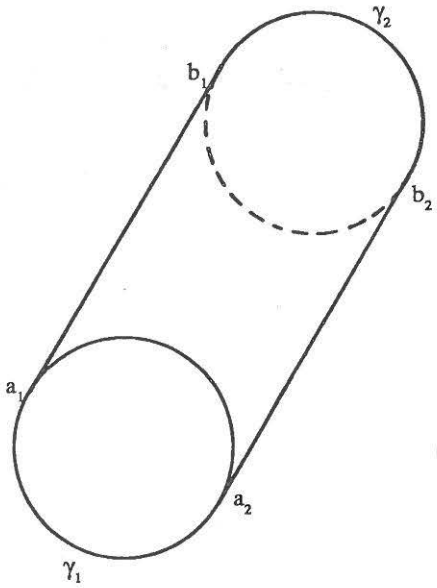


Figure 180

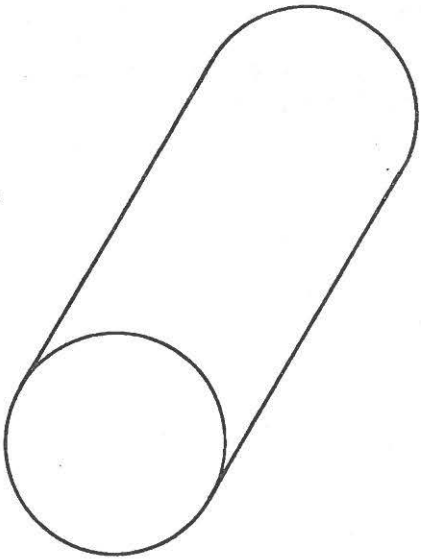


Figure 181

Les deux dessins ci-avant ne présentent pas de difficultés de réalisation. Le compas, la règle et l'équerre (ou le rapporteur) suffisent à son tracé. Mais le cylindre n'est pas dans la position la plus usuelle, celle d'une boîte de conserve posée sur une table. Pour représenter un cylindre ayant un cercle de base en position horizontale, nous utilisons une PC(1/2, 90°) ; les cercles de base sont alors des ellipses. Les axes de ces ellipses sont dans un rapport 1/2. Les figures 182 et 183 représentent des cylindres. Si on les compare aux cylindres des figures 180 et 181, leurs diamètres ont été multipliés par 1,5 et leur hauteur réduite de moitié.

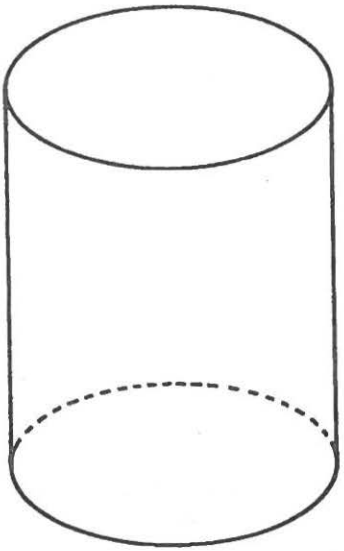


Figure 182

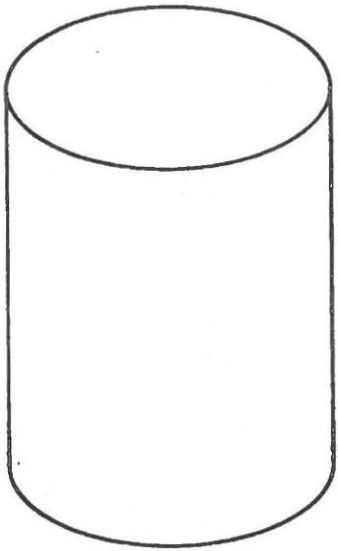


Figure 183

Ces deux derniers dessins nécessitent l'usage de l'ellipsographe, les axes de l'ellipse parallèles aux bords de la feuille étant donc obtenus sans difficultés.

Pour représenter un cylindre selon une PC(r, α) plus générale, nous devons faire appel aux techniques proposées dans le chapitre 13 permettant de représenter les cercles de base du cylindre.

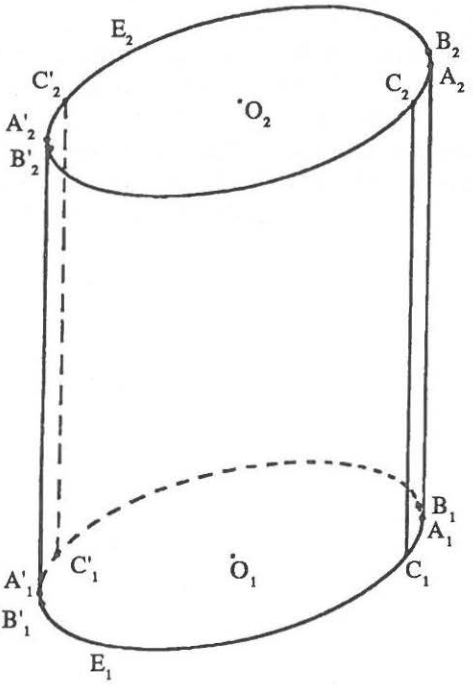


Figure 184

La figure 184 est la PC(0,70, 50°) d'un cylindre que nous allons examiner attentivement. Les cercles de base de notre cylindre sont horizontaux. Ils sont représentés par les ellipses E_1 et E_2., l'ellipse E_2 représente le cercle supérieur. Une partie de l'ellipse E_1 est en pointillés car elle représente un demi-cercle caché par la surface latérale du cylindre. Les points A_1 et A'_1 de l'ellipse E_1 sont les extrémités des deux arcs, l'un étant vu (en trait continu sur la figure 184) l'autre étant caché (en trait interrompu sur la figure 184). Le grand axe de l'ellipse E_1 est $B_1B'_1$ celui de E_2 est $B_2B'_2$. Le plan de symétrie du cylindre passant par son axe O_1O_2 et parallèle au plan de projection définissant la PC(0,70, 50°) est le plan $C_1C'_1C_2C'_2$. $C_1C'_1$ est un diamètre de l'ellipse E_1, $C_2C'_2$ est un diamètre de E_2. Les trois points A_1, B_1 et C_1 sont distincts. La génératrice $C'_1C'_2$ est cachée tandis que C_1C_2 est vue. Le contour apparent du cylindre est constitué par deux segments et deux arcs d'ellipse : les segments A_1A_2 et $A'_1A'_2$ représentant deux génératrices, un arc $A_1A'_1$ de l'ellipse E_1 et un arc A'_2A_2 de l'ellipse E_2.

La figure 185 est une figure plus aérée permettant de mieux séparer les trois points $A_1B_1C_1$ de l'ellipse E_1. A_1 appartient au contour apparent du cylindre ; C_1 appartient au plan passant par O_1 et parallèle au plan de projection ; B_1 est une extrémité du grand axe de E_1. La figure 185 est une PC(1,25 , 69°) et le centre O_1 de l'ellipse ainsi que le point D_1 déterminent une fuyante.

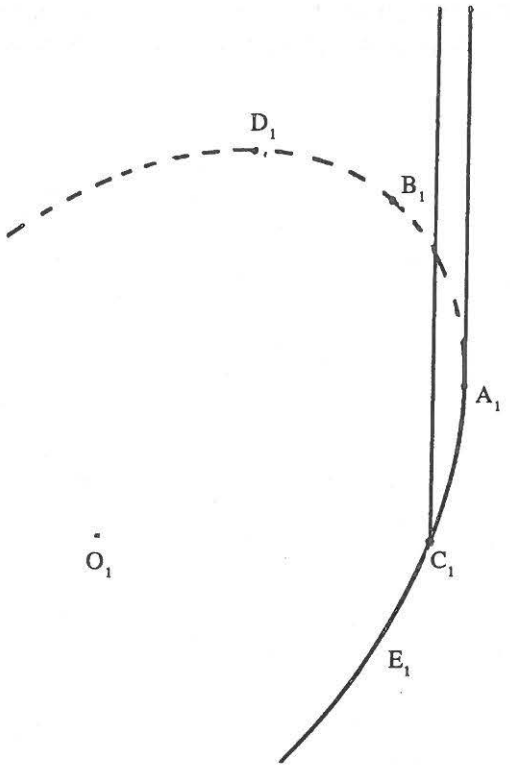


Figure 185

LE CÔNE

Etant donné un cercle et un point S appartenant à l'axe de rotation du cercle, le segment dont une extrémité est S et dont l'autre extrémité parcourt le cercle engendre un cône de révolution ; nous disons plus brièvement dans cet ouvrage : un cône.

Dans ce paragraphe, nous voulons répondre à la question : comment dessiner un cône en PC ?

Choisissons le plan du cercle comme plan de la projection définissant la PC. Plaçons S devant ce plan. La figure 186 représente le cône dans une PC(1/2, 60°). L'arc de cercle caché par le cône lui-même est dessiné en pointillés. L'axe du cône est aussi dessiné en pointillés. La ligne en trait continu constituée par deux segments tangents au cercle et un arc de cercle est le contour apparent du cône. Tout point du cône est représenté par un point se trouvant à l'intérieur du contour apparent.

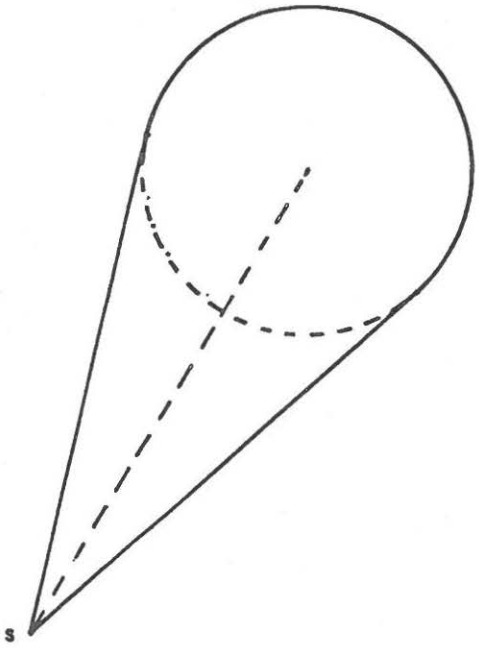


Figure 186

La figure 187 représente un cône ayant son cercle placé horizontalement dans une PC(0,65, 90°). Le cercle est représenté par une ellipse E dont les axes sont dans le rapport 0,65. Le contour apparent est constitué par les deux segments SA et SA' tangents à l'ellipse et par l'arc d'ellipse dont les extrémités sont A et A' et qui passe par B et B'. Les points B et B' sont les extrémités du grand axe de l'ellipse E.

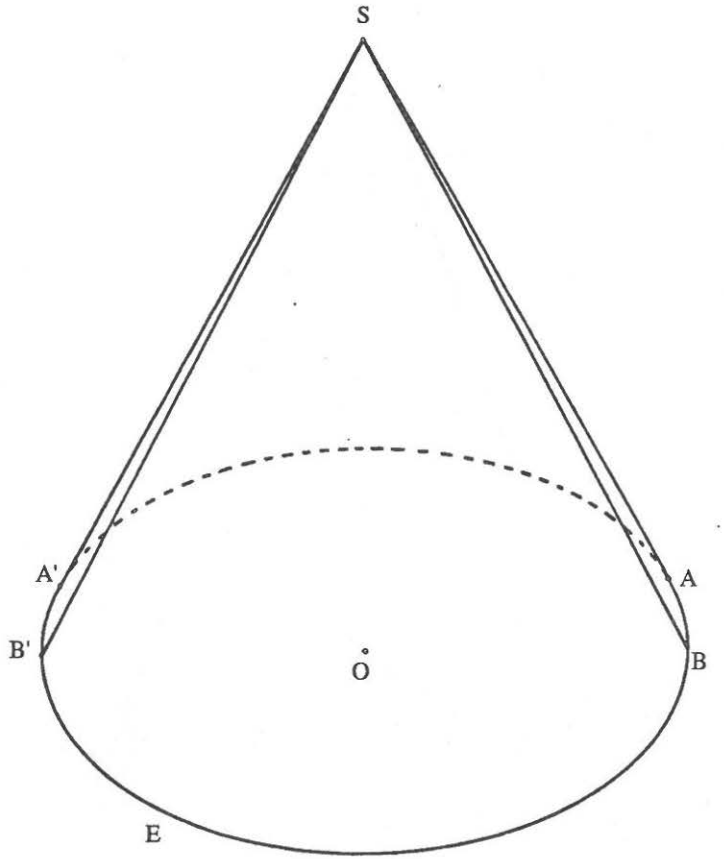


Figure 187

L'arc d'ellipse représentant la partie cachée du cercle (en pointillés sur la figure 187) est plus petit que l'arc d'ellipse représentant la partie vue (en trait continu sur la figure 187). Cela est propre à la PC, car en PL la situation est différente.

En effet, considérons la PL définie par la représentation du carré horizontal m n n' m' circonscrit au cercle de base du cône. La figure 188 correspond à cette PL. La partie vue du cercle de base peut être plus ou moins longue suivant que le point représentant le sommet est au-dessus (S_2) ou au- dessous (S_1) du point I intersection de m n et de l'axe du cône. Si B et B' représentent les extrémités du diamètre du cercle, parallèle au plan de projection, A_1 et A_2 (de même que A'_1 et A'_2) sont de part et d'autre de BB'.

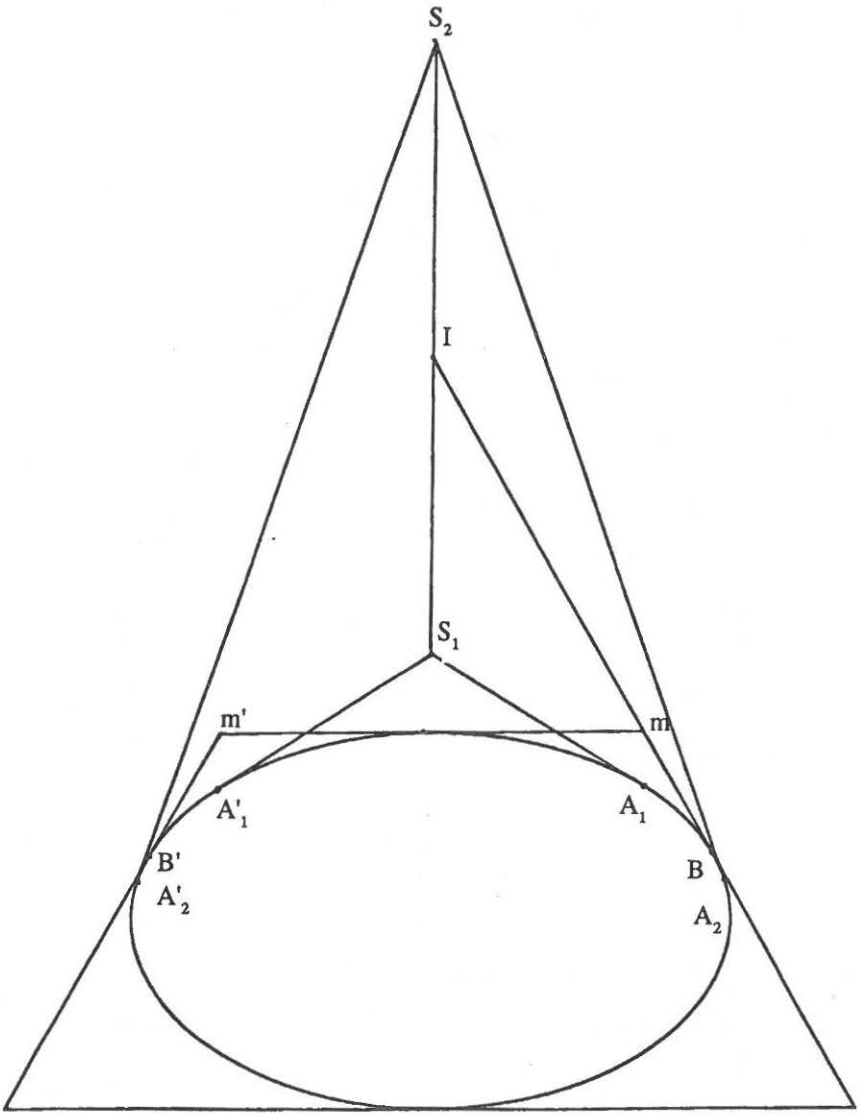


Figure 188

Donc l'arc de cercle vu peut être plus grand ou plus petit qu'un demi-cercle bien que l'arc de l'ellipse qui le représente soit toujours supérieur à une demi ellipse.

Remarquons toutefois que la figure 189 peut être considérée comme la PL d'un premier cône ou comme la PC d'un deuxième cône, ces deux cônes étant isométriques.

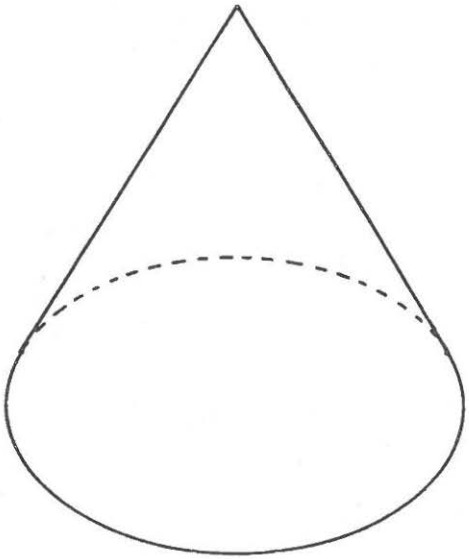


Figure 189

Pour représenter un cône selon une PC(r, α) plus générale nous devons faire appel aux techniques proposées dans le chapitre 13 permettant de représenter le cercle de base du cône.

La figure 190 est la PC(1,11, 65,7°) d'un cône que nous allons examiner attentivement. Le cercle de base de centre O est horizontal. Il est représenté par l'ellipse E. Un arc de l'ellipse limité par AA' est en trait continu, l'autre arc est en trait interrompu. Le grand axe de l'ellipse E est BB'. le plan de symétrie du cône passant par son axe OS et parallèle au plan de projection définissant la PC, passe aussi par CC'. La droite OD est une fuyante. D est un point de l'ellipse tel que $\widehat{COD} = 65{,}7°$ Le contour apparent du cône est constitué (ou représenté) par les deux segments SA, SA' et l'arc d'ellipse d'extrémités A et A' et passant par B'. Les quatre points A, B, C et D sont distincts et la droite SA est tangente à l'ellipse E en A.

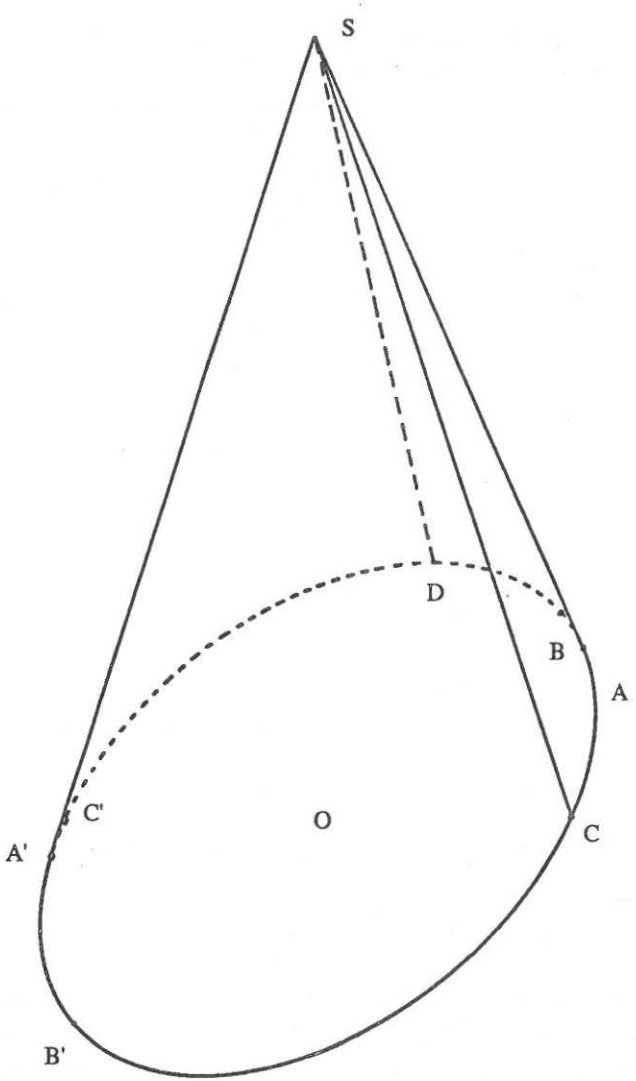


Figure 190

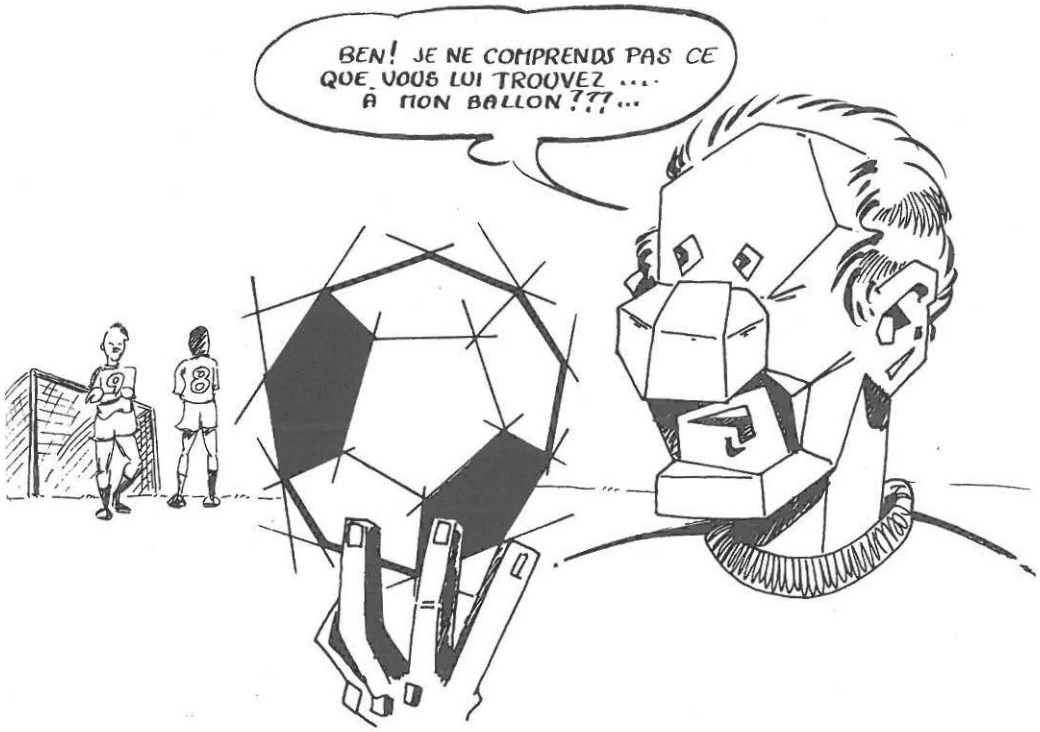
Quatre PC introduites dans ce chapitre peuvent paraître sophistiquées ; ce sont les PC(0,70, 50°), PC(1,25, 69°), PC(0,65, 90°), et PC(1,11, 65,7°). Nous voulions illustrer le plus clairement possible certaines situations. Nous avons donc choisi les dessins, puis calculé les paramètres qui leur étaient associés.

Chapitre 16

LA SPHÈRE

Résumé

Le chapitre 16 étudie différents dessins en PC de la sphère. Il s'achève par quelques remarques concernant les dessins des corps ronds dans notre enseignement.


BEN! JE NE COMPRENDS PAS CE QUE VOUS LUI TROUVEZ .... À MON BALLON???...

PROJECTION ORTHOGONALE

Si on projette orthogonalement une sphère sur un plan de projection, son grand cercle C dont le plan est parallèle au plan de projection se projette en vraie grandeur. Appelons P et P' les pôles de la sphère, c'est-à-dire les points de ce grand cercle situés sur une même verticale, qu'on représente placés sur une droite parallèle au bord latéral de la feuille de dessin.

Un grand cercle de la sphère, de diamètre PP' se projette selon une ellipse dont le grand axe est PP'. Si α est l'angle formé par le plan de ce grand cercle et le plan de projection, le petit axe de l'ellipse est égal à PP' cos α. Sur la figure 191, nous représentons en projection orthogonale les éléments suivants de la sphère : le grand cercle C, les pôles P et P', trois grands cercles méridiens correspondant aux angles de 45°, 65° et 85°, le cercle équatorial représenté par le segment AB. Le cercle C est le contour apparent de la sphère.

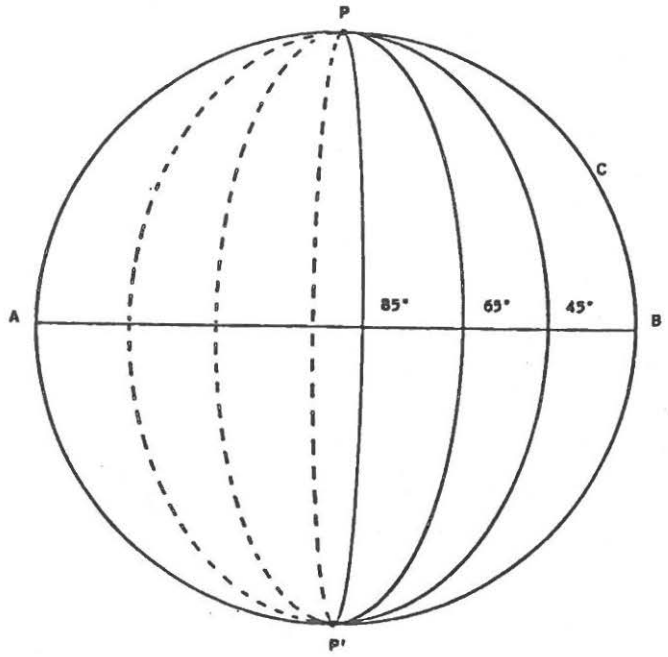


Figure 191

PC(1/2, 90°) DE LA SPHÈRE

Nous voulons dessiner une sphère Σ selon une PC(1/2, 90°). Appelons T le plan de projection associé à cettePC. Appelons σ le grand cercle passant par les pôles P et P', et situé dans un plan orthogonal à T. Représentons alor σ et T selon une projection orthogonale sur le plan σ; Nous obtenons ainsi la figure 192.

La PC(1/2, 90°) est définie par T et par une direction Δ faisant avec la perpendiculaire à T un angle θ dont la tangente est égale à $\frac{1}{2}$ qui est le rapport de réduction de la PC. Une droite de direction Δ est parallèle au plan σ.

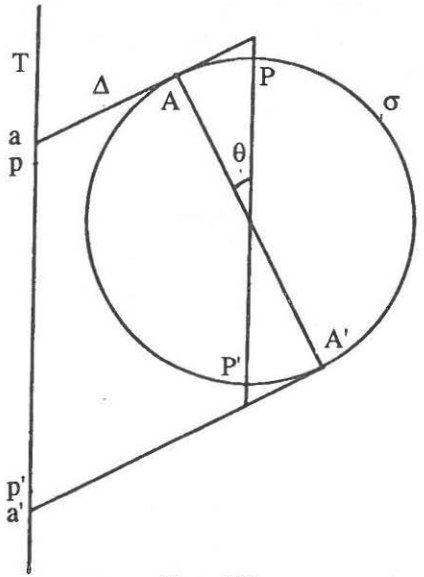


Figure 192

Les tangentes à σ ayant D comme direction rencontrent le cercle σ en A et A' et coupent le plan T en a et a'. Les pôles P et P' se projettent sur T selon la direction Δ en p et p' et le rapport $\frac{pp'}{aa'}$ a pour valeur

$$\frac{PP'}{aa'} = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

La figure 193 est la représentation dans une PC(1/2, 90°) des divers éléments de la sphère de centre O. Les pôles sont p et p' ; le segment aa' représente le grand cercle σ dont nous avons parlé précédemment. Le contour apparent est représenté par l'ellipse γ dont les axes aa' et bb' vérifient les égalités de longueurs suivantes :

$$aa' = pp'\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ et } bb' = pp'.$$

Le cercle équatorial, c'est-à-dire le grand cercle Σ situé dans un plan perpendiculaire en O à la ligne des pôles PP', est représenté par l'ellipse e, dont les axes aa' et cc' sont dans le rapport 1/2 qui est le rapport de réduction. Nous représentons encore quatre méridiens, c'est-à-dire quatre grands cercles passant par les pôles P et P'. Nous obtenons le cercle de centre O passant par p, b, p' b', et les trois ellipses définies respectivement par les couples de rayons Op et Of, Op et Og, Op et Oh. Les plans de deux méridiens consécutifs font un angle de 22,5°. Nous utilisons les formules du chapitre 13 pour tracer ces trois ellipses.

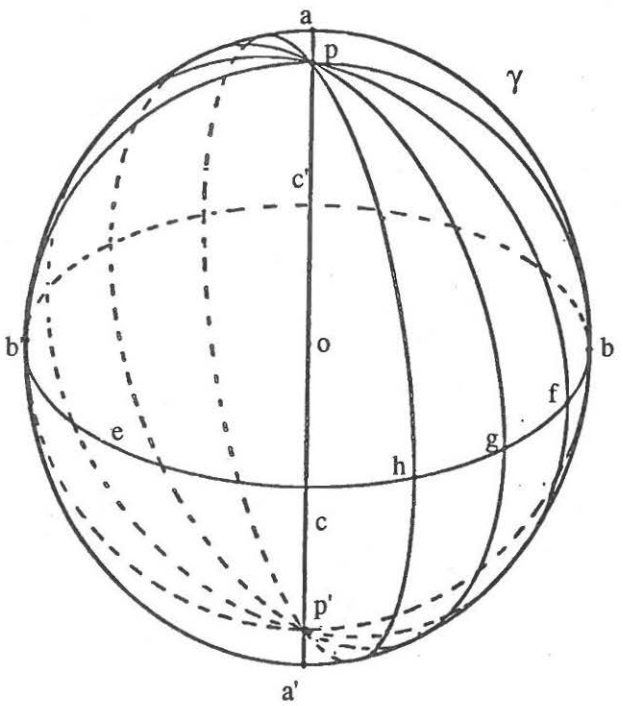


Figure 193

PC(1/2, 60°) ; pp' FUYANTE, MÉRIDIENS

Nous voulons dessiner une sphère Σ selon une PC(1/2, 60°). La figure 194 est la représentation de divers éléments de cette sphère. Nous représentons les pôles p et p' au moyen de fuyante à 60°, pp' ayant une longueur égale à la moitié du diamètre de la sphère. Nous représentons ensuite le cercle méridien horizontal noté 0° sur la figure ; puis cinq autres cercles méridiens, les plans de deux méridiens consécutifs formant un angle de 30°. Les cinq méridiens notés 0°, 30°, 90°, 120°, 150° sont représentés par des ellipses. Le méridien 60° est représenté par un segment ss' ayant la direction d'une fuyante puisque nous avons choisi une PC dont l'angle de fuite vaut 60°, de plus ss' est égal au diamètre de la sphère multiplié par le cœfficient $\frac{\sqrt{5}}{2}$ que nous avons rencontré dans le paragraphe précédent. Les arcs de méridiens cachés par la sphère sont en traits interrompus.

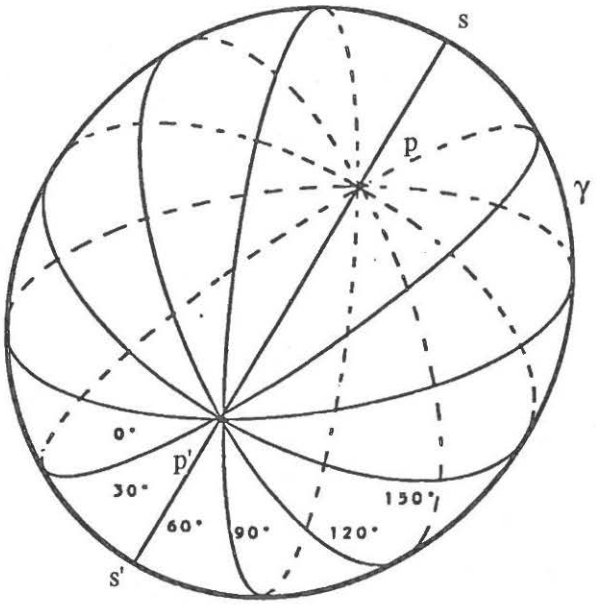


Figure 194

Le contour apparent de la sphère est représenté par une ellipse γ. Le grand axe de γ est le segment ss'. En effet, le contour apparent de Σ est un cercle Γ. Appelons Δ la direction de projection définissant notre PC(1/2, 60°), T le plan de projection vertical, o la projection du centre O de la sphère Σ sur T. Le diamètre MM' de Γ appartenant au plan passant par Oo et perpendiculaire à T, se projette sur T selon le segment ss'. Le diamètre NN' de Γ perpendiculaire à MM' est aussi parallèle à T, il se projette donc en vraie grandeur sur T.

PC(1/2, 60°) ; pp' VERTICAL, MÉRIDIENS

Nous allons représenter dans une PC(1/2, 60°) les mêmes éléments de la sphère Σ que ceux opposés dans la PC(1/2, 90°) (cf. fig. 193). Nous dessinons sur la figure 195 les pôles p et p' disposés sur une verticale ; le centre O de la sphère ; l'équateur représenté par l'ellipse e ; le méridien situé dans un plan parallèle au plan de projection représenté par le cercle μ ; les trois méridiens dont les plans forment avec le précédent respectivement des angles de 30°, 60° et 90°. Les quatre méridiens sont notés sur la figure 195 : μ, 30°, 60° et 90°. Les arcs de méridiens cachés par la sphère sont en traits interrompus. Nous représentons aussi le contour apparent γ qui est d'ailleurs identique sur les figures 194, 195 et 196.

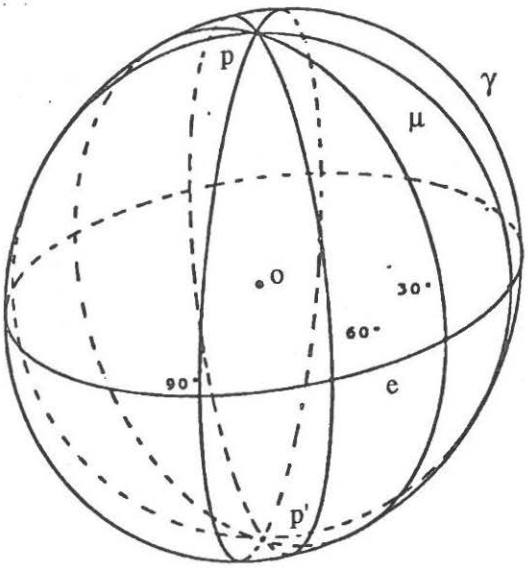


Figure 195

PC(1/2, 60°) ; pp' VERTICAL, PARALLÈLES

Nous allons représenter dans une PC(1/2, 60°) des éléments de la sphère Σ en partie différents de ceux proposés dans la PC précédente.

Nous dessinons sur la figure 196 les pôles p et p' disposés sur une verticale ; le centre O de la sphère ; l'équateur représenté pour l'ellipse e ; le contour apparent γ ; le méridien situé dans un plan parallèle au plan de projection représenté par le cercle μ. Nous représentons ensuite quatre cercles, situés dans des plans parallèles au plan de l'équateur; ces cercles sont souvent appelés des parallèles. Si R est le rayon de la sphère Σ, les parallèles ont pour cotes relativement au plan de l'équateur :

R sin 23,5°, -R sin 23,5°, R sin 66,5°, -R sin 66,5°.

Ces parallèles sont représentés par quatre ellipses homothétiques de l'ellipse représentant l'équateur. Elles correspondent approximativement dans une représentation de la Terre avec p et p' comme pôles Nord et Sud, aux tropiques du Cancer et du Capricorne et aux cercles polaires Arctique et Antarctique. Sur la figure 196, nous les notons respectivement 23,5°, - 23,5°, 66,5° et - 66,5°.

Les arcs cachés par la sphère sont en traits interrompus.

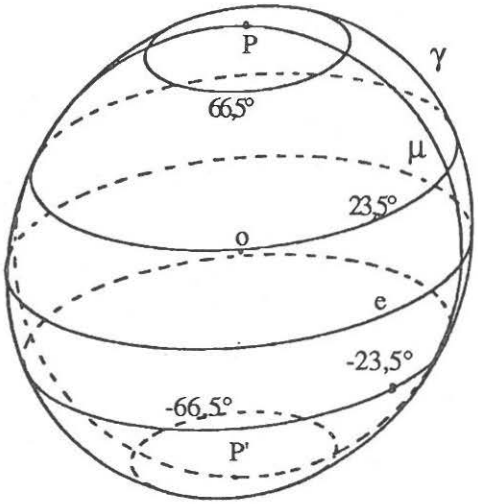


Figure 196

LES CORPS RONDS DANS L'ENSEIGNEMENT

Les corps ronds, cône, cylindre et sphère sont au programme du premier cycle de notre enseignement secondaire.

Si nous voulons représenter ces corps ronds, nous pouvons nous contenter de l'usage de la règle, du compas et de l'équerre pour les représenter dans des positions particulières ; c'est ainsi que les figures 180, 181 et 186 ne reproduisent que des cercles, des droites et des droites tangentes à des cercles. Si nous représentons une sphère au moyen d'une projection orthogonale et ne dessinant que des grands cercles parallèles ou perpendiculaires au plan de projection, le compas et la règle suffisent.

Mais dès que nous enrichissons tant soit peu la situation il nous faut des ellipses (cf. par exemple les figures 182, 189 ou 191), des tangentes aux ellipses (cf. par exemple les figures 187 ou 190), des ellipses dont la détermination des axes nécessite de laborieux calculs (cf. par exemple les figure 193, 194, 195 et ou 196). Une représentation très précise comme celle adoptée dans les chapitres 15 et 16 ne peut être exigée de nos élèves de l'enseignement obligatoire.

Pourtant, nous ne pouvons par resteindre à des figures trop particulières. Nous préconisons donc pour des élèves en fin de scolarité obligatoire des représentations faisant intervenir des ellipses dont les axes sont parallèles aux bords de la feuille de dessin, tracées au moyen de pochoirs du commerce. L'ellipse pourrait être reconnue comme transformée d'un cercle par affinité orthogonale. Pour le cylindre et le cône (et il s'agit toujours pour nous du cône et du cylindre de révolution) nous préconisons donc l'usage de dessins correspondant aux figures 182, 183, 187, 189 et pour la sphère sa projection orthogonale (cf. figure 191). Il semble qu'une approche raisonnable de la représentation en PC des corps ronds peut être introduite au niveau du baccalauréat scientifique. Toutefois, nous attendrons que les recherches en didactique menées dans les sections scientifiques soient plus avancées pour avoir une opinion plus tranchée.

Nous compléterons les éléments d'analyse qui précèdent par deux remarques.

Les difficultés propres au dessin technique (PC ou autre) des corps ronds ne peuvent pas être compensées par un emploi abusif de schémas très approximatifs propices à des contradictions difficilement résolues dans l'initiation à la maîtrise de l'espace.

Mais les difficultés peuvent être en partie évitées si on utilise des objets, cônes, cylindres, sphères de bonne qualité permettant des observations et des mesures ; ceci afin de progresser dans la maîtrise de l'espace sans attendre l'apport déterminant du dessin technique. .

Chapitre 17

CONCLUSION ou LE DESSIN et LA DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE

Résumé

Le dernier chapitre situe l'intérêt de la PC par rapport aux démarches de pensée nécessaires à la maîtrise de l'espace. Il fait référence notamment à la résolution de problèmes, aux contradictions et aux démarches expérimentales. Le dernier paragraphe du livre est le suivant : "En définitive, nous souhaitons que la présentation proposée de la PC mette cette technique de dessin à la portée de tous, nous donne une plus grande maîtrise de l'espace et une meilleure économie d'action et de pensée. Telle est l'ambition démésurée de ce livre".

Nous avons longuement présenté une technique de dessin : la perspective cavalière. Nous estimons qu'elle peut jouer un rôle essentiel dans la maîtrise de l'espace.

Mais tout apprentissage passe par une certaine capacité à résoudre des problèmes. Une question se pose alors : comment utiliser la perspective cavalière pour résoudre les problèmes spaciaux ?

Nous ne cherchons pas à classer ces problèmes, nous acceptons toutes sortes de problèmes pourvu qu'ils fassent appel à la géométrie euclidienne à trois dimensions. Nous voulons surtout examiner le rôle que peut jouer la perspective cavalière dans deux processus de résolution qui nous paraissent fondamentaux : la démarche expérimentale (notée D.E. dans ce chapitre) et les processus qui font appel aux contradictions observées (notées C.O. dans ce chapitre).

CONTRADICTION OBSERVÉE ET DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE

Lorsqu'un sujet cherche un problème, nous sommes en présence d'une C.O. s'il exprime le rejet d'une réalisation parce qu'elle ne satisfait pas certaines contraintes qu'il veut respecter.

Nous avons proposé dans le chapitre 5 la réalisation d'une maquette dont on connaît le dessin donné par la figure 54. Si un sujet, voulant résoudre ce problème réalise un patron des faces latérales obtenu en reproduisant exactement le dessin ; il obtient ainsi un patron constitué des quatre morceaux reproduits par la figure 197.

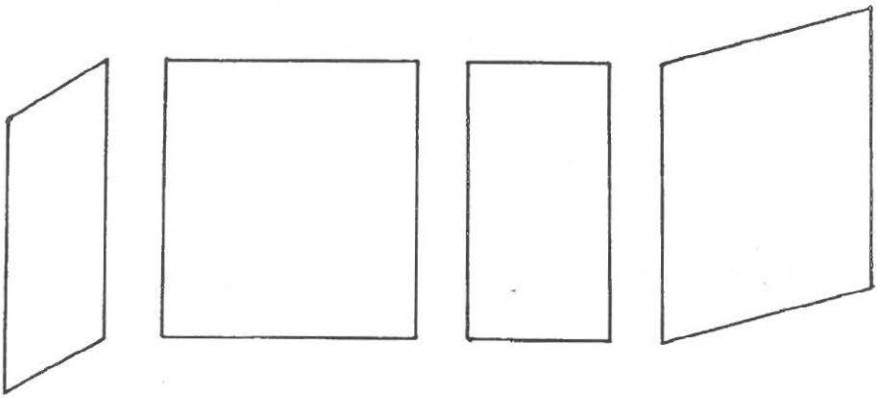


Figure 197

Lorsqu'il veut achever sa maquette qui doit être pour lui un prisme droit, il observe alors qu'elle ne va pas, qu'elle est bancale ou encore que les faces supérieures ou inférieures ne sont pas planes. Il n'accepte pas son patron. C'est le rejet caractérisant une contradiction observée.

Dans la résolution d'un problème, un sujet peut avoir une démarche expérimentale. La D.E. est caractérisée par l'énonciation d'une hypothèse suivie d'une observation accompagnée ou non d'une réalisation nouvelle et se terminant par une prise de décision portant sur la valeur de vérité de l'hypothèse.

Pour donner un exemple de démarche expérimentale, examinons le problème suivant, appelé problème fil :
une salle a pour dimensions 7 m de long, 5 m de large et 3 m de haut. Un fil est tendu verticalement du plafond au sol. Une balle de révolver traverse la salle. Elle part d'un des coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1,5 m au dessus du sol.
A quelle distance de chaque mur le fil était-il placé ?

L'hypothèse qui vient souvent à l'esprit d'un sujet confronté à ce problème est : le fil est au milieu de la salle de classe.

Un dessin en PC comme celui de la figure 198 ou en vue de dessus comme celle de la figure 199 lui montre que le fil f et la trajectoire t n'ont pas de point commun. Il rejette alors l'hypothèse.

Il a procédé ainsi selon une démarche expérimentale.

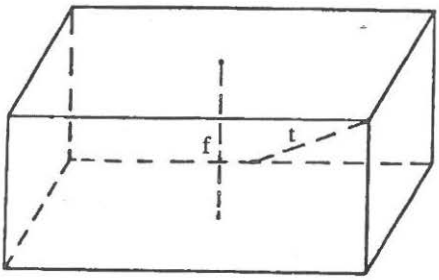


Figure 198

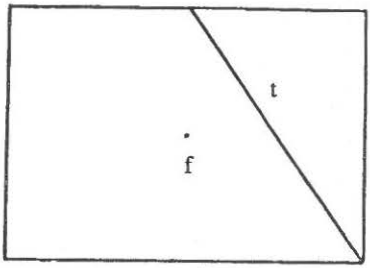


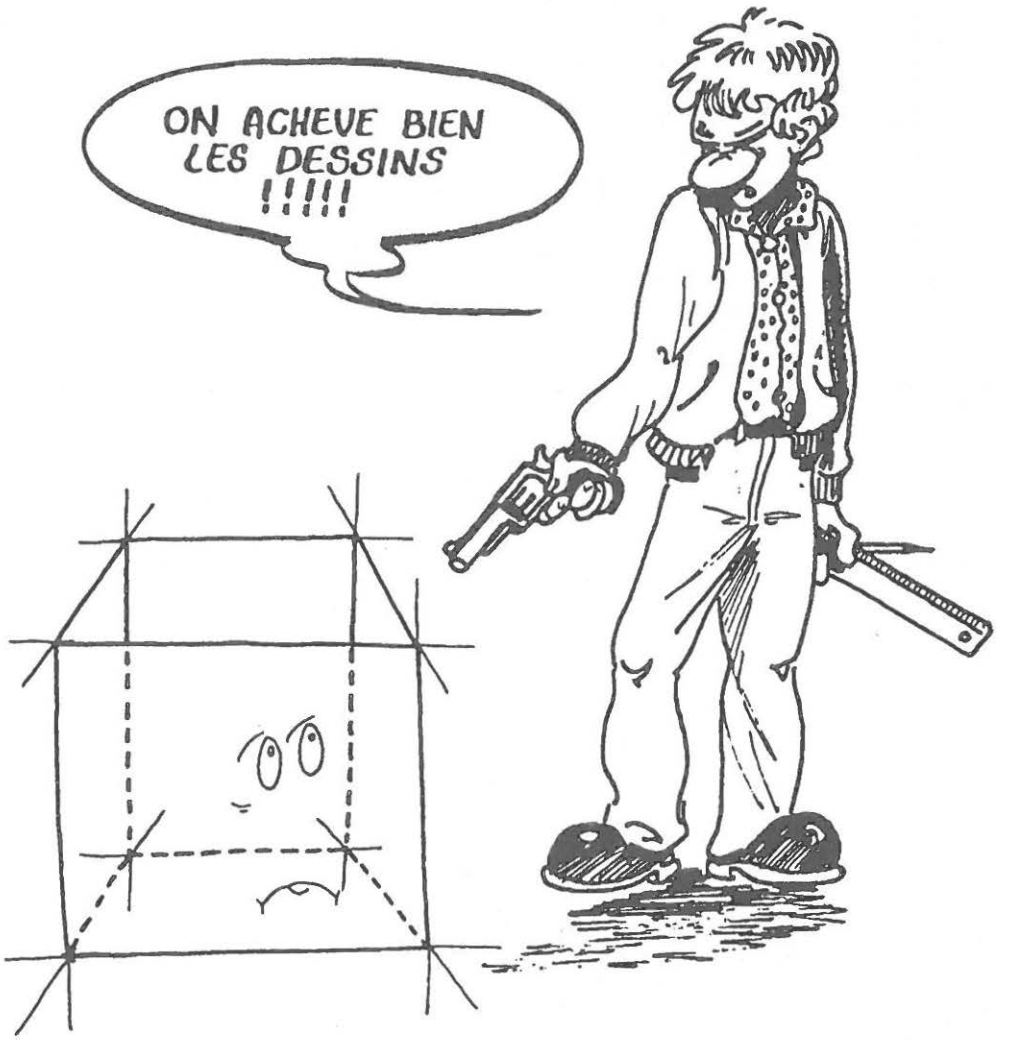
Figure 199

Lorsque l'hypothèse est infirmée, elle l'est souvent grâce à une C.O.

L'usage du dessin et plus particulièrement de la PC à des fins de vérification, de contrôle d'hypothèse, de contre exemple, de preuve est indispensable. Il est nécessaire pour cela qu'il soit traité de façon technique.

UN DESSIN TECHNIQUE

Nous avons introduit un codage précis permettant de dessiner avec une erreur inférieure au millimètre. Les dessins prennent leur part dans la résolution de problèmes. Ils contribuent à prouver certains résultats. C'est ainsi que pour démontrer qu'un cube est la réunion de trois pyramides identiques il suffit de montrer comment on peut le démonter. Notre cube est représenté par la figure 200 selon une PC(1/2, 60°). Les figures 201, 202, 203 représentent le cube éclaté. Elles représentent respectivement les pyramides $A_1D_1C_1G_1H_1$, $A_2B_2F_2G_2C_2$ et $A_3E_3H_3G_3F_3$ qui sont directement superposables entre elles. Les sommets du cube et des pyramides sont désignés par des lettres minuscules sur le dessin. Les arêtes cachées sont dessinées en pointillés.


ON ACHEVE BIEN
LES DESSINS
!!!!!

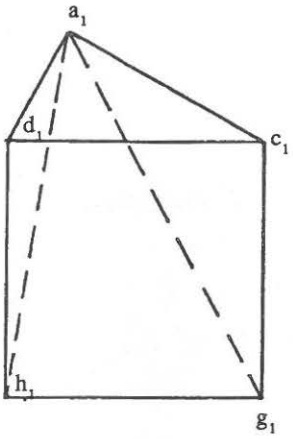


Figure 201

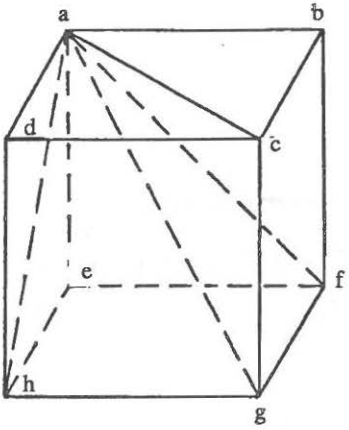


Figure 200

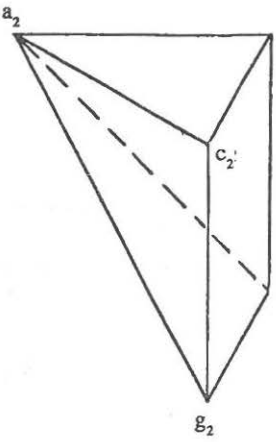


Figure 202

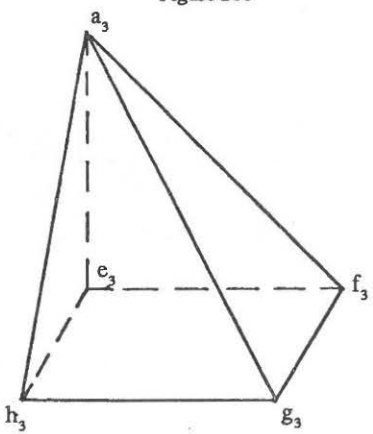


Figure 202

Ce cube éclaté permet d'aborder des questions portant sur l'origine du coefficient $\frac{1}{3}$ dans la formule donnant le volume de la pyramide ou sur l'existence d'un axe de rotation d'ordre 3 pour le cube.

LA NON-BIJECTIVITÉ

Toutefois, nous devons utiliser le dessin avec prudence car il n'est pas en correspondance bijective avec l'objet. Les angles et les distances de l'espace ne sont pas en général conservés sur le dessin. Malgré cela, il apporte souvent des réponses très satisfaisantes. Si nous cherchons à prouver qu'il existe une section plane du cube qui est un hexagone régulier, nous pouvons le mettre en évidence grâce à la figure 204 bien que $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \eta\ \varepsilon$ tout en n'étant pas régulier représente un hexagone régulier de l'espace. La figure 204 représente en PC(1/2, 60°) le cube et la section.

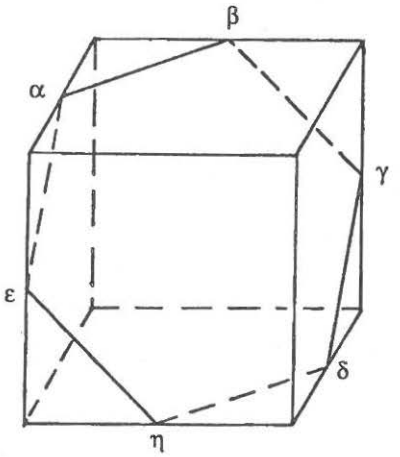


Figure 204

A ce propos, examinons encore le problème suivant.

Donnons-nous un cube représenté dans une PC(1/2, 30°) par la figure 205. Les arêtes cachées ne sont pas dessinées. Seuls sont représentés les sommets vus c'est-à-dire abcdefg. Donnons-nous de plus un segment a_1b_1 dont les extrémités sont respectivement sur les segments ad et ab. Le segment a_1b_1 représente l'arête d'un cube posé sur le précédent. Demandons-nous si ce deuxième cube est plus grand que le premier ou s'il le déborde et dessinons les deux cubes. Pour répondre aux questions, utilisons le cercle inscrit dans la face supérieure du premier cube. Ce cercle est représenté par une ellipse ε sur la figure 205.

La construction du diamètre de l'ellipse parallèle à a_1b_1 et du diamètre conjugué nous permet de déterminer les arêtes du cube cherché, représenté par $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1h_1$ sur la figure 205. Nous constatons que le deuxième cube déborde le premier tout en étant plus petit que lui. la figure 206 représente ces deux cubes dans la PC(1/2, 30°), les arêtes cachées n'étant pas dessinées. Un demi-plan auxiliaire de la face abcd réalisé en vraie grandeur permet aussi d'aboutir aux figures 205 ou 206, grâce à la conservation des proportions.

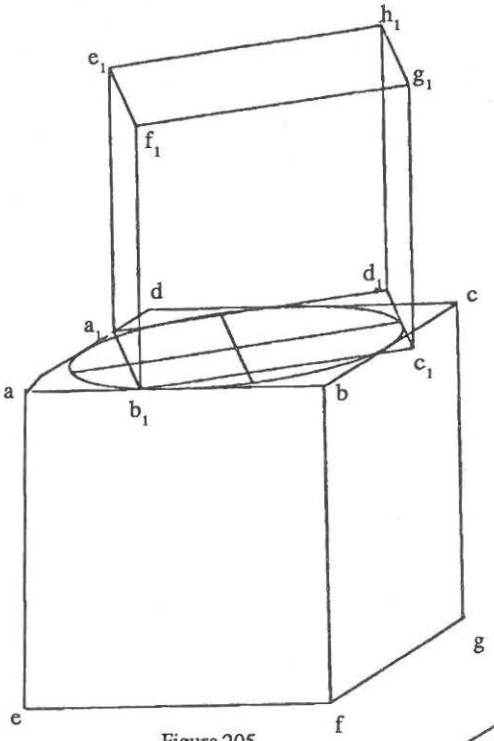


Figure 205

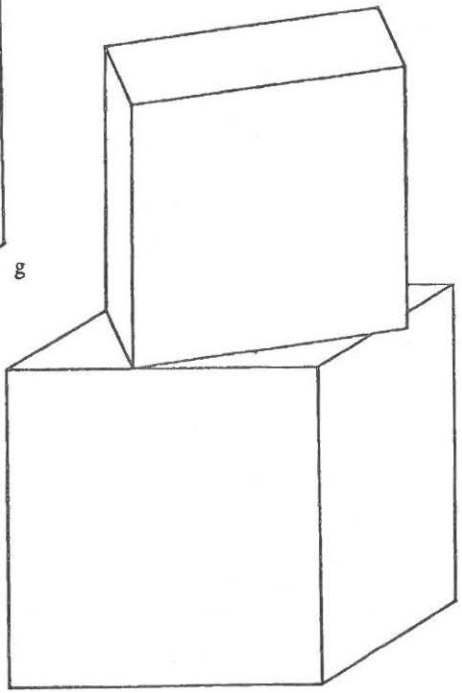


Figure 206

OBJET-DESSIN

Malgré le codage précis du dessin en PC et à cause de la non-bijectivité entre le dessin et l'objet qu'il représente, l'usage de l'objet reste un élément indispensable au début de l'apprentissage de la maîtrise de l'espace. Les problèmes doivent être confrontés alors à l'objet et au dessin. La démarche expérimentale et les contradictions observées doivent s'appuyer sur le dessin, sur l'objet et sur la dialectique entre le dessin et l'objet.

Le long des six premiers chapitres de cet ouvrage, nous suivons une progression. Les quatre premiers sont consacrés au dessin d'objets présents ; le cinquième à la réalisation d'un objet dont le dessin est donné ; dans le sixième, l'objet est absent, nous passons du dessin au desssin.

Mais dans tous les cas, que l'objet soit présent ou absent, une analyse de l'objet est indispensable.

Afin de permettre au lecteur de bien sentir la dialectique entre l'objet et le dessin dont nous avons parlé, nous lui soumettons le problème suivant :

Un cube dont les arêtes mesurent 10 cm, est dessiné en PC (1/2, 60°) dans sa position usuelle.

Un parallélépipède a une face carrée de 10 cm de côté. La distance de cette face à la face opposée est de 2 cm. Un dessin en PC (1/2, 60°) de ce parallélépipède est identique à celui du cube.

Dessiner le patron de ce parallélépipède et construire sa maquette.

LES CONCEPTS, LE RAISONNEMENT

Si les techniques de dessin, en particulier celles de la PC, sont nécessaires pour s'initier à la maîtrise de l'espace, elles ne peuvent pas remplacer l'assimilation de certains concepts associés à l'espace.

Le dessin lui-même par besoin d'économie de pensée fait appel à des concepts et notamment au concept de projection que nous avons longuement étudié dans la deuxième partie de cet ouvrage. C'est ainsi que les concepts et le raisonnement sont nécessaires pour se convaincre que la PC d'un cercle quelconque de l'espace est une ellipse (ou un segment). Si nous voulons faire un inventaire des groupes finis d'isométries, un long cheminement théorique est nécessaire. Toutefois, l'aspect descriptif s'appuyant sur le dessin qui accompagne ce cheminement joue un rôle non négligeable.

L'ordre des parties traitées, le dessin d'abord dans la première partie puis des concepts dans la deuxième partie pourrait laisser croire qu'on dessine d'abord et qu'on raisonne ensuite. Ce n'est pas du tout ce que nous avons voulu dire. Pour nous, le raisonnement doit être utilisé en même temps que le dessin, il doit même suppléer aux insuffisances de la représentation de l'espace. C'est le raisonnement qui permet d'affirmer que deux diagonales d'un cube ne sont jamais perpendiculaires car ce sont aussi les diagonales d'un rectangle qui n'est pas carré. Avec le raisonnement, nous pouvons résoudre facilement les problèmes élémentaires suivants :

- Trois sommets d'un cube forment-ils un triangle rectangle, isocèle, rectangle non isocèle, équilatéral, autre ?

- En quels points de la diagonale d'un cube se projettent orthogonalement les sommets d'un cube ?

Il y a souvent un ordre entre les objets ; il a été nécessaire dans le chapitre 2. Il y a un ordre entre les concepts ; les groupes d'isométries ne peuvent être classés que lorsque les isométries sont bien maîtrisées séparément les unes des autres. Mais entre objets et concepts, la dialectique est plus subtile ; le cube n'est rien sans le concept d'orthogonalité ; les groupes finis d'isométries ne sont rien sans le prisme droit, le tétraèdre régulier et le cube.

VŒUX

En définitive, nous souhaitons que la présentation proposée de la PC mette cette technique de dessin à la portée de tous et nous donne une plus grande maîtrise de l'espace, une meilleure économie d'action et de pensée. Telle est l'ambition démesurée de ce livre.

LEXIQUE

Les nombres accompagnant les mots désignent des pages

Affinité ..... 150 ; 154 ; 168.
Affinité orthogonale ..... 150.
Angle de fuite ..... 3 ; 11 ; 31 ; 69.
Axonométrie ..... 78 ; 118.
Bijectivité ..... 137 ; 203
Cercles ..... 170 ; 173.
Coin de cube ..... 93.
Cône ..... 177 ; 181.
Conservation des proportions ..... 36.
Conservation du parallèlisme ..... 36.
Conservation du rapport des aires ..... 80.
Construction ..... 103.
Contradictions observées ..... 198.
Corps ronds ..... 147 ; 195.
Cotée ..... 129.
Cube ..... 38 ; 77 ; 101 ; 105 ;
..... 170.
Cube de référence ..... 27 ; 29 ; 70 ; 78.
Cube entaillé ..... 13 ; 27.
Cube-piano ..... 11 ; 23 ; 25.
Cylindre ..... 178.
Démarche expérimentale ..... 198 ; 199.
Dépassement ..... 21.
Déplacement d'objet ..... 82 ; 88.
Descriptive ..... 125.
Dessin ..... 61 ; 200 ; 205.
Dodécaèdre régulier ..... 39.
Ellipse ..... 149 ; 154.
Ellipsographe ..... 155.
Equation du second degré ..... 152.
Existence ..... 103.
Fuyante ..... 4.
Historique ..... III.
Hyperbole ..... 153 ; 173.
Icosaèdre régulier ..... 43.
Maquette ..... 47.
Méridiens ..... 192 ; 193.
Octaèdre régulier ..... 38.

Ordinateurs ..... VII.
Parabole ..... 153 ; 173.
Parallèles ..... 194.
Paramètres ..... 81 ; 83.
Pavé ..... 3 ; 22.
PC (r, α) ..... 69 ; 70.
PC (1/2, 60°) ..... 18 ; 31 ; 68.
Perspective curviligne ..... 134.
Perspective cylindrique développée ..... 133.
Perspective linéaire (ou conique, ou centrale, ou vraie) .. 108 ; 109 ; 130 ;
..... 136 ; 173.
Perspective militaire ..... 134.
Pochoir ..... 158.
Point de vue ..... 82 ; 88.
Pointillés ..... 7 ; 60.
Pohlke (démonstration) ..... 91.
Pohlke (énoncé) ..... 90.
Pohlke (une construction) ..... 94.
Polyèdre régulier ..... 35.
Prisme ..... 49.
Projection cylindrique ..... 65 ; 66 ; 168.
Projection cylindrique oblique ..... 67 ; 88.
Projection cylindrique orthogonale ..... 67 ; 78 ; 118 ; 189.
Rapport de réduction ..... 3 ; 11 ; 31 ; 69.
Rayons conjugués ..... 150.
Règles ..... 21 ; 30 ; 80.
Représentations ..... 133.
Sphère ..... 187.
Symétries ..... 85.
Tétraèdre régulier ..... 17 ; 28 ; 38.
Tiers de cube ..... 15 ; 26.
Vision ..... 57.
Vues ..... 100 ; 113.
Dessins humoristiques ..... 5 ; 19 ; 20 ; 37 ; 53 ;
.....54 ; 62 ; 102 ; 117 ;
.....138 ; 148 ; 188 ;
.....201.

Si vous voulez savoir ce qu'est

l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

voyez en page 3 de couverture.

Si vous voulez adhérer à l'A.P.M.E.P.,
Si vous voulez commander des brochures,
écrivez à :

Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
26 rue Duméril
75013 PARIS

Bon de commande dans le Bulletin National.
Les brochures peuvent être envoyées
contre remboursement (frais à votre charge).