dièdre, n. m.
[diédral]

Formé sur le grec ("à deux faces"), le mot était employé comme adj. dans l'expression *angle dièdre*. L'abréviation *dièdre*, consacrée par l'usage, l'a substantivé. On voit à présent apparaître le nouvel adj. *diédral*.

Le lecteur est renvoyé une fois pour toutes aux notices ANGLE et PHASE. On adopte les notations suivantes :

· E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

· Si P est un plan de E, A(P) est l'ensemble des angles-de-couple (de demi-droites) de P.

· $\mathcal{A}$ est l'ensemble des angles-de-couple (de demi-droites) du plan vectoriel euclidien R^2.

· Par abréviation "angle" signifie ici élément de $\mathcal{A}$.

1. Dièdre-de-paire.

1.1. *Définition.* Les classes d'équivalence "par isométrie" des paires ou singletons de demi-plans ayant même frontière sont appelées *dièdres-de-paire*, la classe de $\{q,q'\}$ pouvant être notée $\widehat{\{q,q'\}}$. Si q et q' sont inclus dans le même plan, ils définissent le *dièdre-nul* ou le *dièdre-plat* suivant qu'ils sont égaux ou distincts.

1.2. Appelons *section rectiligne* de $\{q,q'\}$ la paire ou singleton de demi-droites que l'on obtient en coupant q et q' par le plan orthogonal de la frontière commune à q et q'. Une isométrie envoie $\{q,q'\}$ sur $\{q_1,q'_1\}$ si et seulement si elle envoie la section rectiligne de la première paire sur celle de la deuxième. L'angle-de-paire de la section rectiligne de $\{q,q'\}$ ne dépend donc que du dièdre-de-paire $\widehat{\{q,q'\}}$ et réciproquement ; tout dièdre-de-paire est ainsi caractérisé par un angle-de-paire, appelé son *rectiligne* (ou *angle-rectiligne*). La

bijection qui à un dièdre-de-paire associe son rectiligne permet de définir dans l'ensemble des dièdres-de-paire :

- l'application $\widetilde{\text{Cos}}$;
- une relation d'ordre ;
- une addition (non partout définie) ;
- les dièdres-de-paire *droit*, *aigus*, *obtus*.

Les difficultés de langage signalées à propos de la "somme des angles" se retrouvent et peuvent être levées de la même façon grâce aux phases ou aux "mesures" ; on dira par exemple que "la somme des mesures en radians des dièdres d'un trièdre est entre 2π et 6π".

2. Dièdre-de-couple.

On pourrait essayer, comme dans le plan pour les angles-de-couple, de définir les classes d'équivalence "par rotation de E" des couples (q,q') de demi-plans ayant même frontière ; mais, comme (q,q') et (q',q) seraient alors des couples équivalents, on ne ferait que reconstruire les dièdres-de-paire, à moins de faire intervenir l'orientation de la frontière, ce qui amène à la notion définie en [3].

C'est seulement dans les sous-ensembles constitués par les couples de demi-plans ayant tous même frontière D, et en se limitant alors aux rotations d'axe D, que la construction de dièdres-de-couple (de demi-plans) est possible ; elle peut ensuite donner naissance à la notion de dièdre-de-couple de plans : c'est la situation qu'on rencontre par exemple quand on considère les rotations comme produits de symétries-plan. Cependant il est clair que toutes ces notions se ramènent aux notions planes correspondantes dans l'orthogonal de D [V. ci-dessous 3.2] et ne justifient pas un développement spécial.

3. Dièdre avec arête orientée (ou : dièdre).

3.1. *Définition.* On appelle *dièdre avec arête orientée* — ou, par abréviation, *dièdre* — tout couple (d, θ) où d est une demi-droite et θ un angle-de-couple du plan vectoriel, orthogonal de d ; d est appelé l'*arête*, et θ l'*angle* du dièdre (d, θ). On peut appliquer cette

notion aux couples de demi-plans (q,q') ayant leur frontière commune, celle-ci étant orientée par le choix d'une de ses deux demi-droites : si d est cette demi-droite, le dièdre du triplet (d,q,q') est (d, θ), où θ est l'angle-de-couple de la rotation dont l'axe contient d et qui envoie q sur q', si $q \neq q'$; si $q = q'$, θ est l'angle-nul de l'orthogonal de d.

3.2. *Addition de dièdres de même arête.* L'ensemble des dièdres de même arête d, noté $\Delta(d)$, est muni de l'addition définie par $(d, \theta) + (d, \theta') = (d, \theta + \theta')$. Si P est le plan, orthogonal de d, l'application $\theta \longmapsto (d, \theta)$ est par construction un isomorphisme de $(A(P),+)$ sur $(\Delta(d),+)$. Ce dernier est donc un groupe abélien.

3.3. *Transformés des dièdres par rotation.* Soit r une rotation de E, P un plan de E, θ un angle-de-couple de P. Si le couple de demi-droites (g,g') décrit θ, le couple de demi-droites $(\vec{r}(g), \vec{r}(g'))$ décrit un angle-de-couple de $\vec{r}(P)$, que nous notons $\hat{r}(\theta)$.

L'application $\hat{r}$ ainsi définie est une permutation de l'ensemble des angles-de-couple de tous les plans de E. La restriction de $\hat{r}$ à un $A(P)$ est un isomorphisme de $(A(P),+)$ sur $(A(\vec{r}(P)),+)$. Si P et Q sont des plans, l'ensemble des isomorphismes de $(A(P),+)$ sur $(A(Q),+)$ ainsi obtenus est une paire d'isomorphismes opposés $\{\gamma, -\gamma\}$; si $P = Q$, cette paire est $\{I, -I\}$, où I est l'application identique de $A(P)$.

Soit maintenant un dièdre (d, θ) et r une rotation : le transformé de ce dièdre par r est par définition $(\vec{r}(d), \hat{r}(\theta))$. On obtient ainsi une permutation r^* de l'ensemble des dièdres de E, dont la restriction à un $\Delta(d)$ est un isomorphisme de $(\Delta(d),+)$ sur $(\Delta(\vec{r}(d)),+)$. Si d et d' sont des demi-droites, on montre que l'ensemble des isomorphismes de $(\Delta(d),+)$ sur $(\Delta(d'),+)$ ainsi obtenus a un et un seul élément : notons-le $\omega(d,d')$.

3.4. *Représentation de l'ensemble des dièdres.* On appelle *représentation* de l'ensemble des dièdres toute application χ de l'ensemble des dièdres de E dans $\mathcal{A}$ telle que :

1) pour toute demi-droite d, la restriction χ_d de χ à $\Delta(d)$ est un isomorphisme de $(\Delta(d),+)$ sur $(\mathcal{A},+)$.

2) χ est invariante par les rotations de E, c'est-à-dire que pour toute rotation r de E, $\chi \circ r^* = \chi$; autrement dit, pour tout couple de demi-droites (d,d'), $\chi_{d'} \circ \omega(d,d') = \chi_d$.

Il existe exactement deux telles applications ; elles sont opposées. Si l'une est choisie, elle définit une orientation de E : on dit que le trièdre (g,g',d) de demi-droites deux à deux orthogonales est direct si et seulement si $\chi\left(d,\widehat{(g,g')}\right)$ est l'angle-droit-direct.

3.5. *Phases des dièdres.* E étant orienté par le choix d'une des deux représentations χ, on définit les phases d'un dièdre comme étant celles de son image par χ.

3.6. *Représentation des rotàtions de* E. On choisit une des deux représentations χ. Soit r une rotation, θ son angle-de-couple, d une demi-droite incluse dans son axe ; $\alpha = \chi((d,\theta))$. Le couple (d,α) caractérise r : on peut dire alors que r est la rotation d'angle α autour de d (expression dans laquelle α désigne toujours un angle de R^2).

Remarquons que c'est aussi la rotation d'angle $-\alpha$ autour de $-d$; quant à l'application identique, elle est la rotation d'angle-nul autour de toute demi-droite.

4. Angles d'Euler.

Soit $\mathrm{T}_1 = (x_1,y_1,z_1)$ et $\mathrm{T} = (x,y,z)$ deux trièdres trirectangles (de demi-droites) habituellement pris de même sens. On peut caractériser la position de T par rapport à T_1 comme suit. Soit u une demi-droite de l'intersection du plan P_1 engendré par $\{x_1,y_1\}$ et du plan P engendré par $\{x,y\}$; l'orthogonal de u est alors un plan contenant z et z_1. Introduisons dans chacun de ces trois plans les trois angles-de-couple : $\psi = \widehat{(x_1,u)}$, $\theta = \widehat{(z_1,z)}$, $\varphi = \widehat{(u,x)}$.

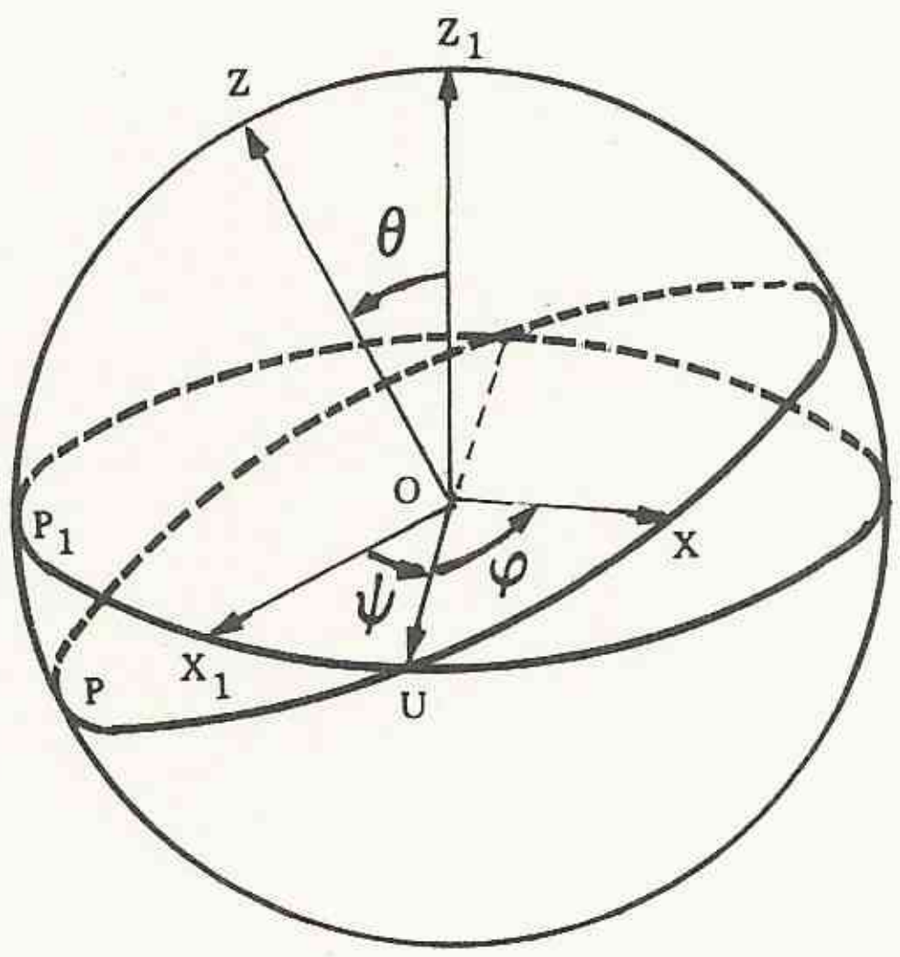
dièdre, n. m.
[diédral]

Une représentation χ de l'ensemble des dièdres ayant été choisie pour orienter E, on définit alors les *angles d'Euler* par :

$\Psi = \chi(z_1, \psi)$, angle de *précession* ;

$\Theta = \chi(u, \theta)$, angle de *nutation* ;

$\Phi = \chi(z, \varphi)$, angle de *rotation propre*.



Rem.1. Le choix entre les demi-droites u et $-u$ étant arbitraire, le triplet (Ψ, Θ, Φ) peut être remplacé par le triplet $(\Psi + \varpi, -\Theta, \Phi + \varpi)$.

Rem.2. Si $\Theta = 0$, seul $\Psi + \Phi$ est déterminé ; si $\Theta = \varpi$, seul $\Psi - \Phi$ est déterminé (mais non Ψ et Φ séparément).

Rem.3. En fait ce sont surtout les phases des angles d'Euler qui sont intéressantes pour la mécanique et l'astronomie (alors les ambiguïtés signalées dans les remarques précédentes sont levées par la nécessité pour ces phases d'être fonctions continues du temps).

Rem.4. On ne se laissera pas abuser par l'expression "rotation propre" : il ne faut pas confondre celle-ci avec la rotation instantanée.

diédral, adj.

On appelle *groupe diédral* tout groupe G d'ordre pair, tel que :

a) il possède un sous-groupe cyclique H d'ordre moitié ;

b) tout élément de G — H a pour carré l'élément neutre.

De là résulte en particulier que, si l'ordre de H est strictement supérieur à 2, G est un groupe non commutatif.

L'exemple le plus classique de groupe diédral à $2n$ éléments est le groupe des isométries qui laissent invariant l'ensemble des sommets d'un polygone régulier de n côtés ; alors H est constitué de rotations et G — H de symétries-axe.