Boole, n.pr.m.
booléen, adj.

On trouve aussi pour l'adjectif la forme *booléien.*

1. Histoire.

George Boole, né à Lincoln (Angleterre) en 1815, mort près de Cork (Irlande) en 1864, est un des fondateurs de la logique mathématique. Auteur de plusieurs traités sur les équations différentielles ou sur les équations aux différences finies, il est surtout connu par son ouvrage fondamental : " An Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities " publié en 1854.

2. Anneau booléen.

[ANNEAU].

3. Algèbre de Boole.

(Noter que dans la locution « algèbre de Boole » ou « booléenne » le mot *algèbre* n'a pas le sens qu'il a pris dans la langue mathématique moderne).

3.1. Soit un ensemble B muni de deux lois de composition interne, notées par exemple $+$ et $.$; le triplet $(B, +, .)$ est une *algèbre de Boole* si et seulement si

1. les lois $+$ et $.$ sont *commutatives* :

$$\forall (a, b) \in B^2, \ a + b = b + a \ \text{et} \ a.b = b.a;$$

2. chacune des lois admet un élément *neutre*, le premier noté 0, le second noté 1 :

$$\forall a \in B, \ a + 0 = 0 + a = a \ \text{et} \ a.1 = 1.a = a;$$

3. chacune des lois est *distributive* par rapport à l'autre :

$$\forall(a,\ b,\ c) \in B^3,\ a + (b.c) = (a + b).(a + c)$$
$$\text{et } a.(b + c) = (a.b) + (a.c);$$

4. tout élément de B admet un *complément* a' appartenant à B :

$$\forall a \in B,\ \exists a' \in B,\ a + a' = 1 \text{ et } a.a' = 0$$

Ex.: Soit un ensemble E et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties; munissons $\mathcal{P}(E)$ des deux lois de composition interne

$$(X,\ Y) \mapsto X \cup Y \text{ (réunion)}$$
$$(X,\ Y) \mapsto X \cap Y \text{ (intersection)}$$

Le triplet $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ est une algèbre de Boole; ici $1 = E$, $0 = \varnothing$ et $A' = \complement_E A$.

3.2. La plus simple des algèbres de Boole consiste à munir l'ensemble $b = \{0,\ 1\}$ des deux lois de composition interne définies par les tables :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Le triplet $(b, +, .)$ est une algèbre de Boole dans laquelle $0' = 1$ et $1' = 0$. Elle joue un rôle fondamental en logique bivalente du fait que, si l'on interprète 1 comme « le vrai » et 0 comme « le faux », et si p désigne la valeur de vérité d'un énoncé quelconque, d'une part les lois $+$ et $.$ ne sont autres que la *disjonction* $(\vee)$ et la *conjonction* $(\wedge)$, d'autre part la complémentarité s'interprète comme une *négation* $(\neg)$. Autrement dit, quel que soit p,

$$p \vee 0 = 0 \vee p = p \qquad p \vee \neg p = 1$$
$$p \wedge 1 = 1 \wedge p = p \qquad p \wedge \neg p = 0.$$

4. Fonctions de Boole.

4.1. *Fonction de Boole à* n *variables.* Toute application $f : b^n \to b$ $(n \in \mathbb{N})$, est une *fonction de Boole* à n variables. Désignons par F_n l'ensemble des fonctions de Boole à n variables (card $F_n = 2^{2^n}$).

Munissons F_n des deux lois de composition $+$ et $.$ et posons $h = f + g$ et $k = f.g$, avec :

$$\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in b^n,\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

et :

$$\forall(x_1, x_2, \ldots x_n), \in b^n,\ k(x_1, x_2, \ldots x_n), = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,.\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Le triplet $(F_n, +, .)$ est encore une algèbre de Boole, les éléments 0 et 1 de F_n étant définis par :

$$\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in b^n,\ 0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in b^n,\ 1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

4.2. *Poids d'une fonction de Boole.* Soit f un élément de F_n; le *poids* de la fonction de Boole f est l'entier naturel, noté $p(f)$, tel que :

$$p(f) = \text{card } f^{-1}(1).$$

Autrement dit, $p(f)$ est le nombre de n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont l'image par f est l'élément 1. *Ex.:* $p(0) = 0$; $p(1) = 2^n$. Quels que soient les éléments f et g de F_n,

$$p(f + g) + p(f.g) = p(f) + p(g);$$

d'autre part, f' étant le complément de f, $p(f) + p(f') = 2^n$.

4.3. *Fonctions de Boole élémentaires.* Les éléments de poids 1 s'appellent les fonctions de Boole élémentaires. Tout élément de F_n est la somme de fonctions de Boole élémentaires.

Note bibliographique : Vu l'abondance de la littérature sur les algèbres de Boole et sa valeur forcément inégale, nous nous bornons à signaler ici un traité (en anglais) qui fait justement autorité : *Boolean Algebras*, Roman SIKORSKI, 2e éd., Berlin, 1964.