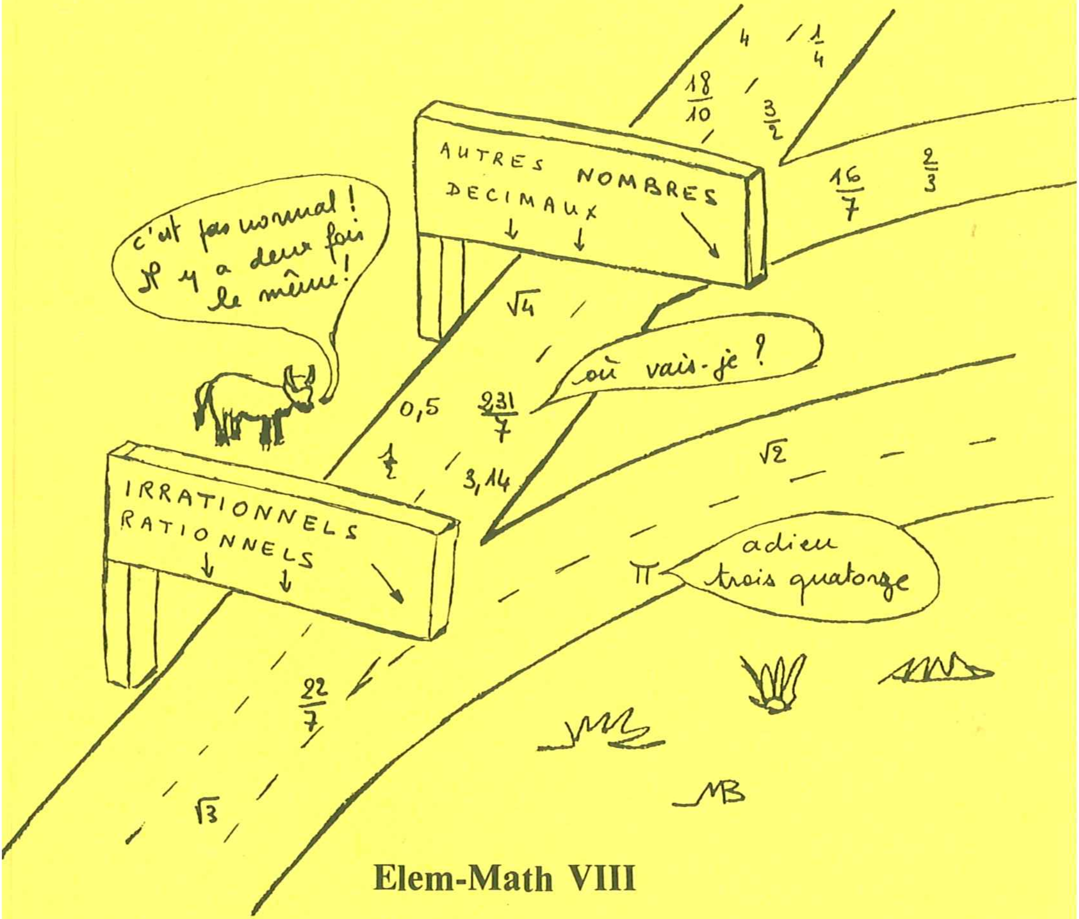
AIDES PEDAGOGIQUES POUR LE CYCLE MOYEN

2. NOMBRES DECIMAUX



Elem-Math VIII

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) 1986

ISSN 0291-5709

N° 61

Si vous voulez savoir ce qu'est

l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

voyez page 2

Si vous voulez adhérer à l'A.P.M.E.P., lui commander des brochures, écrivez à :

Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
13, rue du Jura, 75013 PARIS

AIDES PEDAGOGIQUES POUR LE CYCLE MOYEN

ELEM-MATH VIII

2. NOMBRES DECIMAUX

QU'EST-CE QUE L'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe près de 13 000 enseignants concernés par les mathématiques (''de la Maternelle à l'Université'').

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, ''de la Maternelle à l'Université'', mettent en commun leurs expériences pédagagiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen*, en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte*, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec les Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies, (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3^{e}, Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

---

* et dans le Texte d'Orientation 1978.

Avant-propos

Cette brochure d'Aides Pédagogiques pour le Cours Moyen est une œuvre collective d'enseignants de l'Ecole Elémentaire, d'Ecole Normale et du Supérieur. Elle s'appuie sur des travaux qui ont été faits dans divers IREM (1).

Le premier tome, portant sur la géométrie, est paru en 1983. Le présent tome traite de l'enseignement des nombres décimaux. Un troisième tome sur les problèmes et "situations-problèmes" doit paraître prochainement.

La présente brochure comporte :

— quelques réflexions sur l'enseignement des nombres décimaux au C.M.
— des descriptions détaillées d'activités en classe visant à l'introduction des nombres décimaux
— une bibliographie

Toutes remarques, suggestions et questions seront les bienvenues et peuvent être adressées à

COPIRELEM
IREM - Université Paris VII
2, place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05

Ont participé à la rédaction définitive de cette brochure : André Audebert (IREM d'Orléans), Michel Blanc (IREM de Nice), Simone Coutis (IREM de Lyon), Jean Filippi (IREM de Nice), Marc Foulon (IREM de Lille), Yves Le Pezron (IREM de Rennes), Roger Leyrolle (IREM de Clermont-Ferrand), Marie-Jeanne Perrin (IREM de Paris VII), Nicole Porcel (IREM de Besançon), Gérard Saguerre (IREM de Rennes), Jeannine Weber (IREM de Strasbourg).

(1) Outre les IREM des participants citons ceux de BORDEAUX, ROUEN, GRENOBLE, NANCY, POITIERS, REIMS, BREST.

Sommaire

1

ÉCLAIRAGES SUR L'ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX

1. Nature et utilisation des décimaux

1.1. QU'EST-CE QU'UN NOMBRE DÉCIMAL ?

Les programmes de 1923 et 1945 donnent du nombre décimal la même "définition".

"Un nombre décimal est un nombre entier écrit avec une virgule dans la numération décimale, ce nombre exprimant une mesure dans un système décimal d'unités."

- Un nombre décimal serait un nombre entier ? La confusion créée par une telle définition n'est-elle pas responsable d'erreurs chez les élèves ? (voir § 4).
- Peut-on confondre un nombre avec l'une de ses écritures ? Ainsi $\frac{1}{2}$ ne serait pas un nombre décimal alors que 0,5 le serait ? Comment admettre alors l'égalité $0{,}5 = \frac{1}{2}$?

Depuis le cours préparatoire, les élèves ont appris qu'un nombre a plusieurs écritures (par exemple $3 = 2+1 = 3+0 = 1+1+1 = \ldots$). Il en est de même pour les nombres rationnels (et parmi eux les décimaux) qui ont plusieurs écritures fractionnaires : par exemple :

$$\frac{11}{7} = \frac{22}{14} = \frac{55}{35} = 1 + \frac{4}{7} = \ldots$$

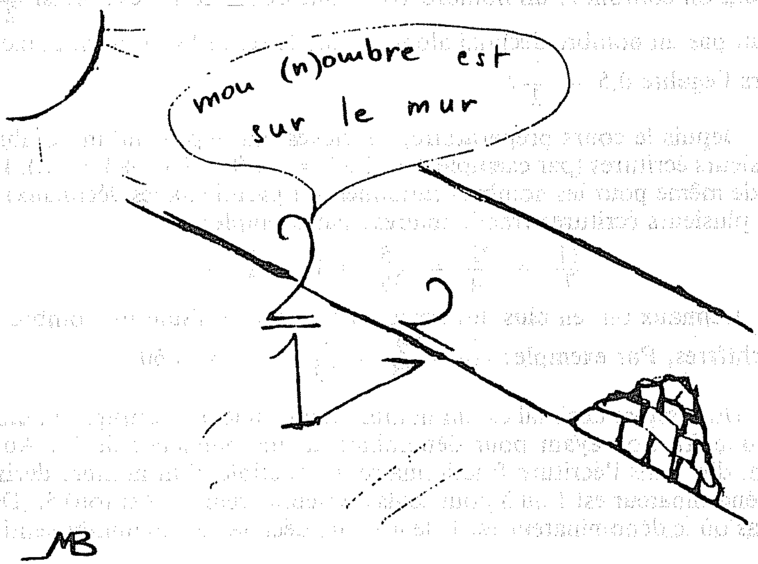
Les décimaux ont en plus des écritures à virgule utilisant un nombre fini de chiffres. Par exemple : $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = 0{,}6 = 0{,}60 \ldots$

Un nombre décimal est un nombre dont l'une des écritures au moins est une fraction ayant pour dénominateur une puissance de 10. Autrement dit, dans l'écriture fractionnaire irréductible d'un nombre décimal le dénominateur est 1 ou a pour seuls diviseurs premiers 2 et (ou) 5. (Dans le cas où le dénominateur est 1, le nombre décimal est un nombre entier.)

Un nombre décimal a donc une écriture à virgule finie. Par exemple :
$\frac{3}{4}$ désigne un nombre décimal puisque $4 = 2^2$ et $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$.
$\frac{983}{625}$ désigne un nombre décimal puisque $625 = 5^4$ et
$\frac{983}{625} = \frac{15\,728}{10\,000} = 1{,}5728$
$\frac{1347}{40} = \frac{33\,675}{1\,000} = 33{,}675$

De même $\frac{6}{3}$ désigne un nombre décimal puisque : $\frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2$. Par contre $\frac{5}{3}$ ne désigne pas un nombre décimal parce que $\frac{5}{3}$ est une fraction irréductible et que 10 ni aucune des puissances de 10 ne sont multiples de 3. De même $\frac{7}{45}$ ne désigne pas un nombre décimal puisque toutes les autres écritures fractionnaires de ce nombre ont pour dénominateur un multiple de 3. Ce ne sera donc jamais 10 ni aucune puissance de 10.
Mais $\frac{18}{45}$ désigne un nombre décimal parce que $\frac{18}{45} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

En conclusion, tous les nombres décimaux ne sont pas des entiers mais les nombres entiers sont tous des décimaux. De même, si tous les nombres décimaux sont rationnels, il y a des rationnels qui ne sont pas décimaux :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et les inclusions sont strictes !



1.2. A QUOI SERVENT LES NOMBRES DÉCIMAUX ?

La première réponse qui vient à l'esprit est : "les décimaux servent à exprimer des mesures" et les exemples sont innombrables autour de nous : prix, mesures de longueurs, de masse, jusques et y compris population (population de la France 53,780 en millions d'habitants) ou nombre moyen d'enfants par ménage (1,8 enfants par ménage en France).

Sont-ils irremplaçables pour cet usage ?

En d'autres termes y a-t-il des cas où une mesure ne peut s'exprimer par un naturel ? Reprenons les exemples ci-dessus. 32,75 F c'est aussi 3 275 centimes ; 3,207 m c'est aussi 3 207 mm ; 0,001 mm c'est aussi 1 micron ; 0,0001 micron c'est aussi 1 angström ; 0,5 gramme c'est aussi 500 mg ; 53,780 millions c'est aussi 53 780 000 ; 1,8 enfants en moyenne par ménage c'est aussi 18 enfants en moyenne pour 10 ménages etc...

Compte tenu de la précision des instruments de mesure à une époque donnée dans un secteur d'activités donné, toute mesure peut s'exprimer par un naturel. Cela n'implique cependant pas que l'on doive abandonner l'étude des décimaux dans l'élémentaire. Le recours aux décimaux permet, entre autres, de ramener les nombres utilisés dans un intervalle d'étude familier en évitant les grands nombres et les erreurs de calcul qui peuvent s'y rapporter. Il y a un autre aspect important que va faire apparaître la suite de la discussion.

Alors, les décimaux, en quoi sont-ils irremplaçables ?

Prenons d'abord quelques exemples :

1. Supposons que l'on ait un cylindre dont le diamètre et la hauteur mesurent rigoureusement 10 cm et 8 cm respectivement. Si l'on veut découper une bande de papier pour recouvrir le plus exactement possible la surface latérale de ce cylindre sans recouvrement des bords de la bande, les dimensions du rectangle à découper sont donc en centimètres $10\,\pi$ et 8.

Le renseignement "8 centimètres" est directement exploitable pour toute personne munie d'une règle graduée.

Par contre pour découper effectivement la feuille de papier il faudra prendre une approximation de $10\,\pi$ centimètres et, suivant la précision souhaitée on prendra 32 cm ou 31,5 cm ou 31,41593 cm, valeur approchée par excès plus adaptée à la situation que la valeur approchée par défaut.

On a en effet $31 < 10\pi < 32$

$$31{,}4 < 10\pi < 31{,}5$$
$$31{,}415 < 10\pi < 31{,}416$$
$$31{,}41592 < 10\pi < 31{,}41593 \text{ etc....}$$

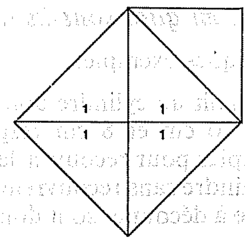
Et l'on sait bien que quelle que soit l'unité choisie la mesure ne s'exprimera pas par un naturel.

ils vont finir par me coincer

1,99999 2,00001
1,9999 2,0001
1,999 2,001
1,99 2,01
1,9 2,1

MB

2. De même si l'on veut trouver la longueur du côté d'un carré d'aire 2 cm^2, on peut facilement en faire une construction géométrique :

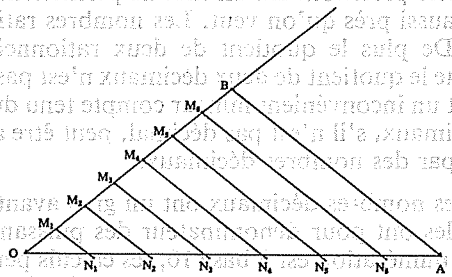


Mais quelle est la mesure en cm de cette longueur ?
Ce serait un nombre x tel que $x.x = 2$.
Un tel nombre n'existe ni dans les entiers, ni dans les décimaux, ni même dans les rationnels. Pour trouver une solution exacte, il faut recourir à l'ensemble des nombres réels qui a $\sqrt{2}$ parmi ses éléments.

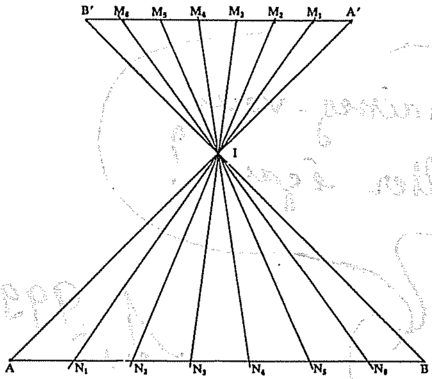
Les décimaux permettent cependant d'en donner des valeurs approchées avec la précision souhaitée aussi grande soit-elle :

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$
$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$
$$1,4142135 < \sqrt{2} < 1,4142136$$

3. Géométriquement, il est facile de partager un segment de 11 cm en 7 parties de longueurs égales, (à condition de savoir tracer des parallèles). Par exemple : on reporte des distances égales $OM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_6B$ et on trace des parallèles à BA passant par les M_i.



ou encore : sur une parallèle à AB, on reporte des longueurs égales $A'M_1 = M_1M_2 = \ldots = M_6B'$. On joint AA′ et BB′ ce qui définit I. La droite M_kI recoupe AB en N_k.



La longueur d'une partie est $\frac{11}{7}$ cm.

$\frac{11}{7}$ est un nombre rationnel qui n'est pas décimal mais on peut trouver des nombres décimaux qui approchent $\frac{11}{7}$ aussi près qu'on veut.

$$1{,}5 < \frac{11}{7} < 1{,}6$$

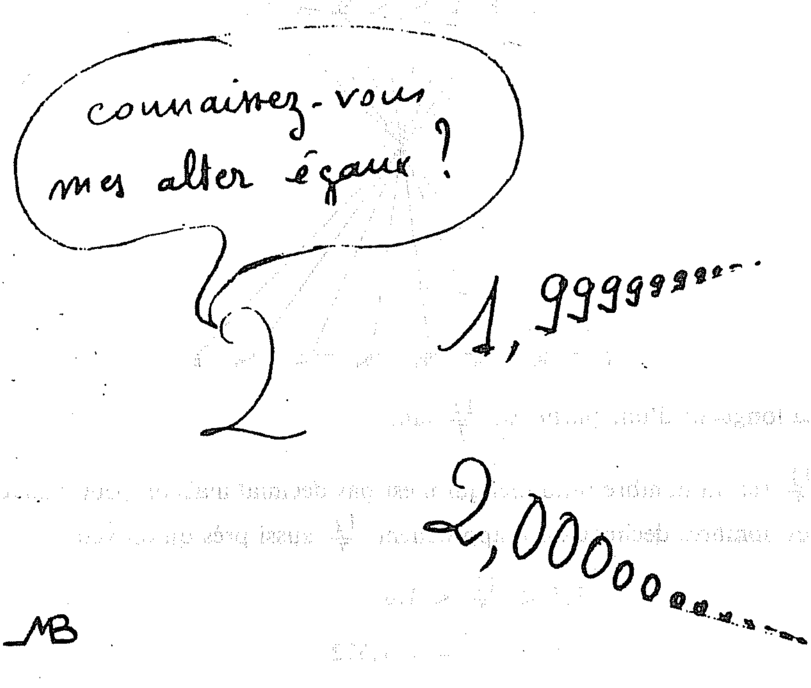
$$1{,}571 < \frac{11}{7} < 1{,}572$$

$$1{,}5714285 < \frac{11}{7} < 1{,}5714286$$

etc...

En conclusion, les nombres décimaux permettent de résoudre un grand nombre de problèmes, en particulier sur les mesures, qui n'avaient pas de solution dans les nombres entiers. Dans le cas où on n'a pas de solution exacte, on a des solutions approchées avec la précision souhaitée, quelle que soit cette précision. En un mot ils permettent d'approcher les nombres réels d'aussi près qu'on veut. Les nombres rationnels ont aussi cette propriété. De plus le quotient de deux rationnels est encore un rationnel alors que le quotient de deux décimaux n'est pas forcément décimal. Mais ceci est un inconvénient mineur compte tenu du fait que le quotient de deux décimaux, s'il n'est pas décimal, peut être approché d'aussi près qu'on veut par des nombres décimaux.

Par contre les nombres décimaux ont un gros avantage : puisque les fractions décimales ont pour dénominateur des puissances de 10 et que notre système de numération est à base 10, les calculs peuvent se ramener à des calculs sur les entiers en tenant compte de l'ordre de grandeur. La facilité des calculs sur les nombres décimaux a été à l'origine de la création d'un système d'unités de mesures approprié à la base 10 de numération : le système métrique.



SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster : Trouver leur somme :

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⓪ 8 ① 7 ② 5 ③, le troisiesme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte :

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & ⓪ & ① & ② & ③ \\ & 2 & 7 & 8 & 4 & 7 \\ & 3 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 8 & 7 & 5 & 7 & 8 & 2 \\ \hline 9 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}$$

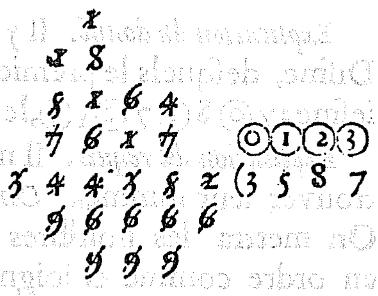
Donne somme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ie di, que les mesmes sont la somme requise. *Demonstration.* Les 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3e definition) $27\ \frac{8}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{1000}$, ensemble $27\ \frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent $37\ \frac{675}{1000}$, & les 875 ⓪ 7 ① 8 ② 4 ③ feront $875\ \frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27\ \frac{847}{1000}$, $37\ \frac{675}{1000}$, $875\ \frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10e probleme de l'Arith.) $941\ \frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③,

c'est

PROPOSITION IV, DE LA DIVISION.

Estant donné nombre de Disme à diviser & diviseur: Trouver leur Quotient.

Explication du donné. Soit le nombre à diviser 3⓪4①4②3③5④2⑤, & le diviseur 9①6②. *Explication du requis.* Il nous faut trouver leur quotient. *Construction.* On divisera les nombres donnez (omettant leurs signes) selon la vulgaire maniere de diviser par nombres entiers ainsi:



Donne Quotient (par le 4e probleme de l'Arithmetique) 3587. Or pour sçavoir que ce sont, le dernier signe du diviseur qui est ②, se soubstraira du dernier signe du nombre à diviser, qui est ⑤, reste ③, pour le signe du dernier charactere du Quotient, qui estant ainsi cogneu, tous les autres seront aussi manifestes, à cause de leur continu ordre, de sorte que 3⓪5①8②7③, sont le Quotient requis. *Demonstration.* Le nombre donné à diviser 3⓪4①4②3③5④2⑤, faict (comme appert par la troisiesme definition de ceste Disme) $3\frac{4}{10}\ \frac{4}{100}\ \frac{3}{1000}\ \frac{5}{10000}\ \frac{2}{100000}$, ensemble $3\frac{44352}{100000}$, par lequel divisé lesdicts $3\frac{44352}{100000}$, donne quotient (par le 13e probleme de l'Arithmetique) $3\frac{587}{1000}$, mais autant vaut ledict Quotient 3⓪5①8②7③, c'est donc le vray quotient. ce qu'il falloit demonstrer. *Conclusion.* Estant doncques donné nombre de Disme à diviser, & diviseur, nous avons trouvé leur Quotient, ce qu'il falloit faire.

S 3 NOTA.

2. Apparition historique des nombres décimaux

Si la notion de partie de l'unité est presque "aussi vieille que le monde", son codage et son écriture étaient souvent très limités dans les systèmes de numérations antiques (Egypte, Grèce,...).

Par exemple, les Egyptiens ne notaient que des fractions de numérateur 1

 $= \frac{1}{3}$  $= \frac{1}{10}$

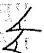
excepté quelques fractions usuelles, qui avaient une notation particulière.

$\frac{1}{2}$ noté  ou  $\frac{2}{3}$ noté  ou  et $\frac{1}{4}$ noté 

Néanmoins, les savants babyloniens qui utilisaient un système de numération sexagésimal (c'est-à-dire à base 60) depuis environ 2 000 avant J.-C., avaient déjà eu l'idée d'étendre le codage et l'écriture des parties de l'unité avec les mêmes principes que pour les entiers. C'est ainsi que :

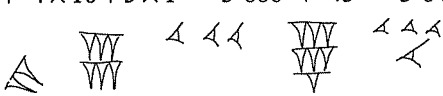
le symbole  signifiait 1 ou 60 ou 3600 mais aussi $\frac{1}{60}$ ou $\frac{1}{3600}$ etc...

le symbole  signifiait 10 ou 600 ou 36 000 mais aussi $\frac{10}{60}$ ou $\frac{10}{3600}$ etc...

et, beaucoup plus tardivement (IVe s. avant J.-C.), le symbole  ou  représentait le zéro positionnel (c'est-à-dire l'absence d'une puissance de 60). C'est la première apparition historique du zéro. La taille de la base et le contexte aidaient à lever l'ambiguïté, ce qui explique l'apparition assez tardive du zéro dans l'histoire de cette numération.

Exemples :

$1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 4 \times 10 + 5 \times 1 = 3\,600 + 45 = 3\,645$



$0 + 6 \times \frac{1}{60} + 3 \times \frac{10}{3\,600} + 7 \times \frac{1}{3\,600} + 4 \times \frac{10}{216\,000} = 0 + \frac{6}{60} + \frac{37}{3\,600} + \frac{40}{21\,600}$

ou $0°\ 6'\ 37''\ 40'''$

On reconnaît bien là notre utilisation des nombres sexagésimaux pour la lecture de l'heure et la mesure des angles.

Cette écriture s'est d'ailleurs partagé l'influence, dans le monde scientifique, avec une notation décimale des nombres très proche de la nôtre. Cette dernière s'est développée dans le monde arabe, pendant le premier millénaire de notre ère.

Notre système de numération actuel a été introduit en Europe occidentale vers le X^e siècle mais ce n'est que bien plus tard que le codage décimal des nombres avec une partie de l'unité s'est vulgarisé, grâce, entre autres, au traité du Flamand Simon STEVIN : la "Disme" paru en 1585.

Jusqu'à cette époque, le codage d'un tel nombre s'effectuait en juxtaposant à sa partie entière (codée en système décimal) sa partie fractionnaire appelée "rompu" (c'est-à-dire fraction inférieure à l'unité).

$$\text{Ex.:} \quad 16,\frac{2}{3} + 59,\frac{13}{22}$$

(la virgule prenant ici valeur de signe d'addition).

Vous imaginez sans peine la complexité des règles de calculs... Les succès de cet opuscule furent énormes dans les dix années qui suivirent sa parution.

Néanmoins si STEVIN y préconisait l'usage de systèmes de mesures cohérents avec notre système décimal de numération (c'est-à-dire où multiples et sous-multiples se correspondraient par des puissances de 10), ce n'est que plus de deux siècles plus tard qu'apparaîtront le système métrique puis le système International d'unités.

Mais en pratique, il faudra attendre la fin du XIX^e siècle pour que l'Ecole Primaire obligatoire impose enfin à la population le système métrique et les nombres décimaux (d'où l'insistance dans les Programmes Officiels du début du siècle sur le lien étroit entre les nombres "concrets" et les unités officielles de mesures...).

De nos jours, on peut encore observer une sous utilisation des nombres décimaux dans les pays Anglo-saxons où le système métrique n'est pas encore complètement implanté.

BIBLIOGRAPHIE :

— *Histoire Universelle des Chiffres de Georges Ifrah SEGHERS.*
— *Fragments d'histoire des Mathématiques - Brochure APMEP n° 41.*
— *La "DISME" de Simon STEVIN.*
— *Histoire des Mathématiques pour les collèges - CEDIC.*
— *La Science des Chaldéens - QUE SAIS-JE ?*

Extrait d'un manuel de 1906 destiné à la formation des instituteurs et des élèves du cours moyen et supérieur.

48. — III. Pour écrire ou lire un nombre quelconque, il suffit de savoir lire ou écrire un nombre de trois chiffres.

3° FRACTIONS DÉCIMALES

49. Définition. — On appelle *fraction* une ou plusieurs parties de l'unité divisée en un nombre quelconque de parties égales.

EXEMPLE. — Si l'on partage une règle en huit parties égales, une, deux, trois, quatre, etc., de ces parties sont une fraction de la règle.

50. Fraction décimale. — On appelle *fraction décimale* une ou plusieurs parties de l'unité divisée en 10, ou 100, ou 1000, etc., parties égales.

51. Dixièmes. — La division de l'unité en 10 parties égales donne des *dixièmes*, c'est-à-dire des unités *dix* fois plus petites que l'unité principale.

52. Centièmes. — La division de l'unité en 100 parties égales donne des *centièmes*, c'est-à-dire des unités *cent* fois plus petites que l'unité principale et *dix* fois plus petites que les dixièmes.

53. Millièmes. — La division de l'unité en 1000 parties égales donne des *millièmes*, c'est-à-dire des unités *mille* fois plus petites que l'unité principale, *cent* fois plus petites que les dixièmes et *dix* fois plus petites que les centièmes, etc.

54. Remarque. — Les fractions décimales forment des ordres comme les nombres entiers.

Une unité décimale d'un ordre quelconque vaut dix unités de l'ordre immédiatement inférieur.

Ainsi, *un dixième* vaut *dix centièmes ; un centième* vaut *dix millièmes*, etc.

55. Nombre décimal. — On appelle *nombre décimal* tout nombre composé d'unités entières et d'une fraction décimale.

EXEMPLE. — 125 unités 48 centièmes.

56. De la virgule. — Elle sépare la partie entière de la partie décimale dans les nombres décimaux.

Ecriture des nombres décimaux

57 — **L'écriture des nombres décimaux est basée sur la convention que l'on a faite pour représenter les nombres entiers.**

58. Convention. — *Tout chiffre placé à la droite d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement inférieur, c'est-à-dire des unités dix fois plus petites.*

59. Règle. — *Pour écrire un nombre décimal, on écrit d'abord la partie entière, puis la virgule et ensuite la partie décimale dans cet ordre :*

Les *dixièmes*, les *centièmes*, les *millièmes*, les *dix-millièmes*, etc.

On remplace par des zéros les ordres qui manquent.

S'il n'y a pas de partie entière, on la remplace par un zéro suivi d'une virgule.

EXEMPLES. 1°	48 unités 4 dixièmes.	On écrit :	48,4
2°	9 unités 56 centièmes.	—	9,56
3°	27 unités 3 millièmes.	—	27,003
4°	12 millièmes.	—	0,012

Lecture des nombres décimaux

60. Règle. — *Pour lire un nombre décimal, on énonce d'abord la partie entière, puis la partie décimale comme s'il s'agissait d'un nombre entier, et l'on donne au dernier chiffre le nom de l'ordre décimal qu'il représente.*

EXEMPLES. — 1°	34,6.	On lit :	34 unités 6 dixièmes.
2°	536,47.	—	536 unités 47 centièmes.
3°	204,005.	—	204 unités 5 millièmes.
4°	0,25.	—	25 centièmes, et non : *zéro* unité 25 centièmes.

61. Remarque. — Lorsqu'un nombre est composé d'une grande quantité de chiffres décimaux, il est très utile de le partager en tranches de trois chiffres à partir de la virgule et d'énoncer chaque tranche séparément en lui donnant le nom qui lui convient.

La *première* tranche est celle des *millièmes*; la *deuxième*, celle des *millioniėmes* ; la *troisième*, celle des *billioniėmes*, etc.

EXEMPLE. — 3,141 592 653 589. On lit : 3 unités, 141 millièmes, 592 millioniėmes, 653 billioniėmes, 589 trillioniėmes.

Principes relatifs à la Numération

62. — I. On ne change pas la valeur d'un nombre décimal en écrivant ou en supprimant un ou plusieurs zéros sur sa droite.

EXEMPLE. — Les nombres 7,54 et 7,5400 ont la même valeur puisqu'ils se composent tous les deux de 7 *unités*, 5 *dixièmes* 4 *centièmes*.

63. — II. On rend un nombre entier 10, 100, 1000.... fois plus grand en écrivant un, deux, trois..., zéros sur sa droite.

EXEMPLE. — Si, à la suite de 24, on écrit deux zéros, on obtient le nombre 2400, évidemment 100 fois plus grand que 24.

En effet, le 4 qui exprimait des *unités*, exprime maintenant des *centaines ;* or, les centaines sont 100 fois plus grandes que les unités. Le 2 qui exprimait des *dizaines*, exprime maintenant des *unités de mille;* or, les unités de mille sont 100 fois plus grandes que les dizaines d'unités. Toutes les parties du premier nombre ont été rendues 100 fois plus grandes, le nombre lui-même est donc rendu 100 fois plus grand.

64. — III. On rend un nombre entier 10, 100, 1000 fois plus petit, soit en supprimant sur sa droite, un, deux, trois.... zéros, soit en séparant par une virgule un, deux, trois.... chiffres.

PREMIER EXEMPLE. — Si l'on supprime un zéro sur la droite du nombre 7800, on obtient 780, nombre dix fois plus faible que 7800.

En effet, le 8 qui représentait des *centaines* ne représente plus que des *dizaines;* le 7 qui représentait des *unités de mille* ne représente plus que des *centaines*, unités dix fois plus faibles que celles que ces chiffres représentaient dans le premier nombre.

DEUXIÈME EXEMPLE. — Rendre 100 fois plus petit le nombre 34 579.

Si par une virgule on sépare deux chiffres sur la droite de ce nombre, on obtient 345,79, nombre qui est bien 100 fois plus petit que 34 579, car toutes les parties du nombre donné sont devenues 100 fois plus petites.

65. — IV. On rend un nombre décimal 10, 100, 1000... fois plus grand en déplaçant la virgule d'*un*, *deux*, *trois*... rangs vers la droite.

Si le nombre de chiffres décimaux est insuffisant, on écrit à la suite du dernier autant de zéros qu'il est nécessaire pour que le déplacement de la virgule puisse avoir lieu.

PREMIER EXEMPLE. — Rendre mille fois plus grand le nombre 8,6795.

En déplaçant la virgule de *trois* rangs vers la droite, on obtient 8679,5, nombre 1000 fois plus grand que 8,6795, car la valeur relative de chaque chiffre est devenue 1000 fois plus grande.

DEUXIÈME EXEMPLE. — Rendre 1000 fois plus grand le nombre 78,9.

Il faut déplacer la virgule de *trois* rangs, mais comme il n'y a qu'un chiffre à la droite de la virgule, on écrit deux zéros à la suite du 9, et l'on obtient 78900, nombre 1000 fois plus grand que 78,9, car la valeur relative de chaque chiffre est devenue 1000 fois plus grande.

66. — V. On rend un nombre décimal 10, 100, 1000... fois plus petit en déplaçant la virgule d'*un*, *deux*, *trois*... rangs vers la gauche.

Si le nombre de chiffres est insuffisant, on écrit à la suite du dernier autant de zéros qu'il est nécessaire pour que le déplacement de la virgule puisse avoir lieu.

Premier exemple. — Soit à rendre 100 fois plus petit le nombre 456,35.

En déplaçant la virgule de *deux* rangs vers la gauche, on obtient 4,5635.

Deuxième exemple. — Soit à rendre 1000 fois plus petit le nombre 3,1416.

Il faut déplacer la virgule de *trois* rangs, mais comme il n'y a qu'un chiffre à la gauche de la virgule, on écrit *deux* zéros à la gauche du 3, puis la virgule et enfin un zéro pour tenir la place des unités; on obtient ainsi le nombre 0,0031416 qui est évidemment 1000 fois plus petit que 3,1416, car la valeur relative de chaque chiffre est devenue 1000 fois plus petite.

3. L'enseignement des fractions à l'école élémentaire

L'enseignement des fractions débute au cours moyen de l'école primaire et s'adresse à des enfants de 9 à 11 ans. Les méthodes de présentation ont évolué depuis un siècle. On peut distinguer trois grandes périodes qu'il est difficile de dater très exactement car, quelles que soient les instructions officielles édictées et les directions de travail imposées ou suggérées aux maîtres, des pratiques antérieures persistent dans le même temps que s'installent progressivement des pratiques nouvelles. Grossièrement, ces trois périodes sont les suivantes. Après 1887, après 1945, après 1970.

APRÈS 1887

Manuel de référence: M.J. LEFRANC. Arithmétique Cours moyen (1893) - Hachette.

Autres manuels consultés:
— J. CHOLLET (1906) - E. Cornely.
— DELFAUD et MILLET (1928) - Hachette.

La notion de fraction sert en premier lieu de support à la présentation des nombres décimaux. Cette présentation est faite à partir de définitions dont les auteurs de manuels de cette époque sont très friands.
"Une fraction est une ou plusieurs parties égales d'un objet.
Une fraction décimale est une fraction d'un objet divisé en dix, cent, mille parties égales.
Un nombre décimal est un nombre entier accompagné de fractions décimales."

Le croquis d'une orange coupée en morceaux "égaux" illustre le nombre décimal 2 oranges, 5 c'est-à-dire 2 oranges, 5 dixièmes d'orange. Les techniques opératoires sur les décimaux sont traitées à partir d'exemples numériques accompagnés de récitatifs et des règles sont énoncées: exemple "on fait la multiplication des nombres décimaux comme si ces nombres étaient entiers; sur la droite du produit, on sépare autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les 2 facteurs".

Cette présentation de la notion de fraction est reprise dans un chapitre spécifique. Une distinction est faite entre les fractions décimales et les autres qui sont dites ordinaires: "un dixième de la barre est une fraction décimale, un sixième, un douzième, trois vingtièmes (!) sont des fraction ordinaires".

L'on dispose déjà d'une écriture pour les fractions décimales; dénominateur et numérateur sont indiqués par le même chiffre: en effet, dans 0,2 (deux dixièmes) 2 par sa place annonce des dixièmes et par lui-même apprend qu'il y en a 2. De même dans 18,23: 1 par sa place annonce des dizaines et qu'il y en a une, 8 par sa place annonce des unités et qu'il y en a 8 ; 2 par sa place indique des dixièmes et qu'il y en a 2, et 3 indique des centièmes et qu'il y en a 3.

Mais il est indispensable d'introduire une nouvelle écriture pour les fractions ordinaires. "Une fraction ordinaire est désignée comme une division à faire. Deux sixièmes de galette s'écriront $\frac{2}{6}$ ou deux galettes à diviser par 6."

Dans ce chapitre, on enseigne, à travers des exemples numériques des règles pour comparer des fractions, les réduire au même dénominateur, les simplifier, pour les additionner, les soustraire, pour les multiplier et les diviser.

Dans certains ouvrages, surtout après que les instructions officielles de 1923 aient recommandé : "c'est sur les faits qu'il faut appuyer les calculs, les idées" un énoncé qui se veut concret précède généralement le traitement de l'exemple numérique et la règle qu'il conviendra d'appliquer dans de nombreux exercices similaires.

APRÈS 1945

Programme du cours moyen du 17.10.45.

Instructions officielles du 7.12.45.

Manuel de référence : L. et M. VASSORT : Le calcul vivant. Cours moyen (1955) - Hachette.

Après 1945, décimaux et fractions deviennent deux sortes de nombres distincts.

Les décimaux sont des nombres concrets c'est-à-dire que l'expression numérique est toujours suivie d'un nom d'objet ou d'unité. Ils sont exclusivement présentés à partir du système métrique. "Il importe de faire comprendre l'équivalence des deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités, soit avec une virgule : 2 mètres et 15 centimètres = 2,15 mètres". Les techniques opératoires sont faciles à expliquer puisqu'il est toujours possible de se ramener à une technique connue sur les entiers par un simple ou double changement d'unité.

Les fractions prennent le statut de nombres abstraits, indépendants des unités. Ces nombres abstraits opèrent sur des grandeurs ou sur la mesure des grandeurs. Dans le manuel cité, un gâteau est partagé en 5 parties égales. Paul a eu 2 parts c'est-à-dire 2 cinquièmes de gâteau. On s'intéresse aussi à la mesure de la grandeur et par exemple au prix des $\frac{2}{3}$ de la tarte, le prix de la tarte entière étant connu. On s'intéresse aussi au problème inverse qui consiste à chercher une grandeur connaissant l'une de ses fractions. Comparaisons, réductions au même dénominateur, addition et soustraction des fractions sont étudiées à travers des problèmes pratiques. Multiplication et division ne sont plus au programme. Dans presque tous les manuels de l'époque est cependant insérée une leçon au cours de laquelle on s'efforce de montrer qu'un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale et inversement, ou, si l'on préfère, qu'un nombre dit concret : 0,5 m peut prendre l'aspect d'un nombre abstrait $\frac{5}{10}$ opérant sur une grandeur : le mètre. Cette séance se réduit à une leçon de choses sur des écritures. Nulle part, on ne cherche à montrer que ces écritures pourraient remplir la même fonction opératoire.

APRÈS 1970

Programme et commentaires du 2 janvier 1970.

La réforme de 1970 a fait l'effet d'une bombe éclatant dans le ciel jusqu'alors serein de l'enseignement du calcul à l'école élémentaire. Les manuels, le plus souvent édités en toute hâte, inondent le marché et plongent les maîtres dans l'expectative. En effet, si certains ouvrages se veulent résolument novateurs, d'autres, plutôt rétro, se teintent seulement d'un zeste de modernisme.

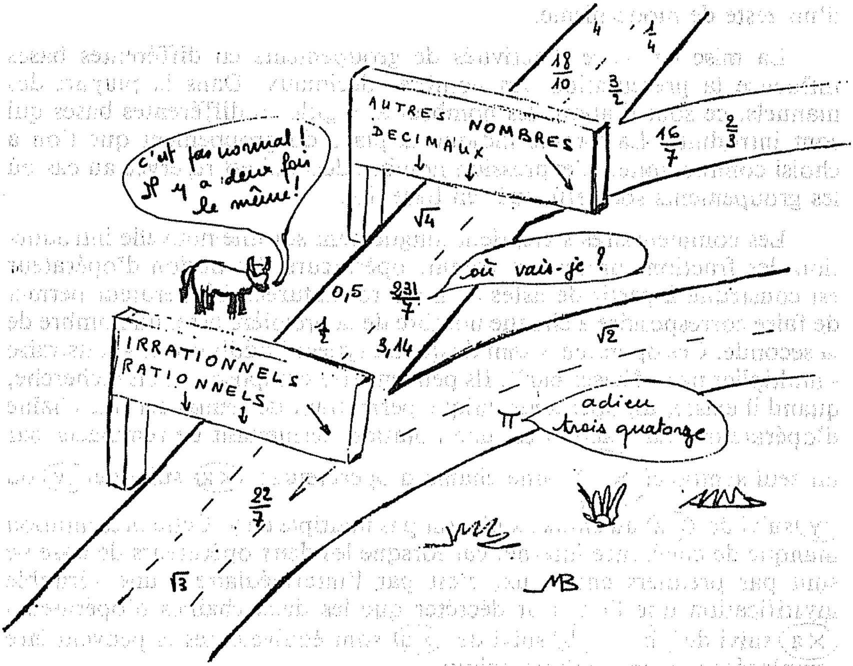
La mise en place d'activités de groupements en différentes bases influence la présentation des nombres décimaux. Dans la plupart des manuels, ce sont d'abord les nombres à virgule en différentes bases qui sont introduits. La virgule indique la place du groupement que l'on a choisi comme unité. L'expression nombre décimal est réservée au cas où les groupements sont effectués en base dix.

Les commentaires s'étendent longuement sur une nouvelle introduction des fractions présentées comme opérateurs. La notion d'opérateur est construite à partir de listes de nombres naturels. L'opérateur permet de faire correspondre à chaque nombre de la première liste, un nombre de la seconde. Ces opérateurs sont de quatre types : "additionner - soustraire - multiplier par - diviser par". Ils peuvent être composés, et on recherche, quand il existe, un opérateur unique permettant de remplacer une chaîne d'opérateurs. La fraction est une notation permettant de remplacer par un seul symbole $\times \frac{x}{y}$ une chaîne d'opérateurs : $\times x$ suivi de $:y$ ou $:y$ suivi de $\times x$ au choix ; x n'étant pas multiple de y. Cette présentation manque de cohérence interne, car lorsque les deux opérateurs de base ne sont pas premiers entre eux, c'est par l'intermédiaire d'une véritable mystification que l'on peut décréter que les deux chaînes d'opérateurs $\times a$ suivi de $:b$ et $:b$ suivi de $\times a$ sont équivalentes et peuvent être remplacées par un symbole unique.

Avec une telle présentation, il est exclu qu'on puisse définir la somme de 2 fractions. (Il n'est, bien entendu, pas possible d'additionner des opérateurs multiplicatifs). Par contre, on peut à nouveau multiplier deux fractions. Il suffit de se ramener à la chaîne initiale dont elles sont issues et de composer les opérateurs "multiplier par" et "diviser par". Par l'intermédiaire de l'opérateur neutre : "la machine à ne rien faire", il est commode de mettre en évidence le fait que tout opérateur fractionnaire a un inverse.

La plupart du temps, ces fractions sont présentées uniquement comme opérant sur des nombres naturels sans aucune référence à une quelconque situation. Les problèmes traités plus tard le seront par l'intermédiaire de ce modèle unique préalablement construit.

La rupture est consommée entre le nombre décimal-mesure et la fraction-opérateur. Ces deux écritures recouvrent désormais des champs notionnels très différents, du moins jusqu'à la parution des programmes de 1980.



Extrait d'un manuel de 1906 destiné à la formation des instituteurs et des élèves du cours moyen et supérieur.

3° DIVISION DES NOMBRES DÉCIMAUX

176. 1er Cas. — *Diviser un nombre décimal par un nombre entier.*

EXEMPLES. — 1° Diviser 1695,15 par 45.

Si l'on divisait 169 515 unités en 45 parties égales, le quotient exprimerait des unités.
Si l'on divise 169 515 centiemes en 45 parties égales, le quotient exprime des centièmes ; donc deux chiffres à séparer au quotient.

OPÉRATION :

1695,15	45
345	37,67
301	
315	
0	

Le quotient est 3767 centièmes ou 37 unités 67 centièmes.

2° Diviser 1,316 par 28.

Le dividende représente des millièmes, le quotient exprimera des millièmes ; donc trois chiffres à séparer au quotient.

OPÉRATION :

1,316	28
196	0,047
0	

Le quotient est 47 millièmes ou 0,047.

3° Diviser 0,023 32 par 53.

Le dividende représente des cent-millièmes, le quotient exprimera des cent-millièmes ; donc cinq chiffres à séparer au quotient.

OPÉRATION :

0,02332	53
212	0,00044
0	

177. Règle. — *Pour diviser un nombre décimal par un nombre entier, on opère comme sur les nombres entiers, et l'on met une virgule au quotient aussitôt que l'on emploie le chiffre des dixièmes pour former un dividende partiel.*

178. 2e Cas. — *Diviser un nombre quelconque par un nombre décimal.*

EXEMPLES. — 1o Diviser 162 par 4,5.

OPÉRATION :

```
1620 | 45
 270 |----
   0 | 36
```

On supprime la virgule du diviseur et l'on écrit un zéro à la droite du dividende ; le quotient n'est pas changé, (**170**) et l'opération revient à diviser un nombre entier par un nombre entier.

2o Diviser 84,6748 par 4,53.

OPERATION :

```
8467,48 | 453
3937    |------
 3134   | 18,69
  4168  |
    91  |
```

On supprime la virgule du diviseur et l on déplace celle du dividende de deux rangs vers la droite ; le quotient n'est pas changé, (**170**) et l'opération revient à diviser un nombre décimal par un nombre entier (1er cas).

Le quotient est 18,69 et le reste 91 *dix-millièmes.*

3o Diviser 39,3 par 4,9125.

OPÉRATION :

```
393000 | 49125
 00000 |------
       | 8
```

On supprime la virgule du diviseur et l'on déplace celle du dividende de quatre rangs vers la droite ; mais comme le dividende n'a qu'un chiffre décimal, on écrit trois zéros à sa droite pour que le déplacement de la virgule puisse avoir lieu. Le quotient n'est pas changé, (**170**) et l'opération revient à diviser un nombre entier par un nombre entier.

179. Règle. — *Pour diviser un nombre quelconque par un nombre décimal, on supprime la virgule du diviseur pour le rendre entier, et l'on déplace la virgule du dividende d'autant de rangs vers la droite qu'il y a de chiffres décimaux dans le diviseur.*

Si le dividende est un nombre entier, ou s'il a moins de décimales que le diviseur, on écrit à sa droite autant de zéros qu'il est nécessaire pour que le déplacement de la virgule puisse avoir lieu.

4o QUOTIENT APPROCHÉ

1o Diviser 32 par 512.

Diviser 32 par 512, c'est partager 32 en 512 parties égales. Or, il

OPÉRATION :

```
3200  | 512
 1280 |--------
  2560| 0,0625
   000|
```

est évident, que chaque partie n'aura pas d'unités, car une fois le diviseur donne un nombre supérieur au dividende. On écrit 0 et une virgule au quotient et l'on convertit les 32 unités en *dixièmes* en écrivant un zéro à la droite du dividende. On a alors à diviser 320 dixièmes en 512 parties égales. Le quotient n'aura point de dixièmes, car *un dixième* multiplié par 512 donne un nombre supérieur au dividende. On écrit 0 au quotient à la suite de la virgule et l'on convertit les 320 *dixièmes* en *centièmes* en écrivant un 0 à la droite de 320. et l'on a, à diviser 3200 centièmes en 512 parties égales. Le quotient est 6 et il reste 128 *centièmes*. On convertit 128 *centièmes* en *millièmes* en écrivant un zéro à droite de 128 et l'on a à diviser 1280 millièmes en 512 parties égales. Le quotient est 2 et il reste 256 millièmes. On convertit 256 *millièmes* en *dix-millièmes* en écrivant un 0 à droite de 256 et l'on a à diviser 2560 dix-millièmes en 512 parties égales. Le quotient est 5 et il reste 0.

Le quotient de 32 par 512 est 0,0625.

En effet, le diviseur 512 multiplié par le quotient 0,0625 reproduit bien le dividende 32.

Dans la pratique on dit :

En 32 combien de fois 512 ? 0. On écrit un 0 et une virgule au quotient et un 0 à la droite de 32.

En 320 combien de fois 512 ? 0. Et l'on écrit un 0 au quotient à la suite de la virgule et un autre 0 à la droite de 320.

En 3200 combien de fois 512 ? 6 fois. 6 fois 2, 12, de 20 reste 8 ; 6 fois 1, 6 et 2, 8, de 10, reste 2 ; 6 fois 5, 30 et 1, 31, de 32, reste 1.

On écrit 0 à la droite du reste, puis :

En 12 combien de fois 5 ? 2 fois, 2 fois 2, 4 de 10, reste 6, etc., etc.

180. — 2° Diviser 25 478 par 1889 avec six chiffres décimaux au quotient.

OPÉRATION :

```
25478 | 1889
 6588 |------------
  9210| 13,487559...
  16540
   14280
    10570
     11250
      18050
       1049
```

Après avoir obtenu les entiers, on met une virgule au quotient et l'on continue la division en réduisant le reste des unités en dixièmes, le reste des dixièmes en centièmes, le reste des centièmes en millièmes, etc., etc.

Dans la plupart des divisions, on continuerait ainsi indéfiniment sans obtenir un quotient exact. On conçoit cependant que le quotient approchera d'autant plus du quotient exact que l'on calculera un plus grand nombre de décimales.

Le quotient est approché à une *unité* près, si l'on s'arrête au chiffre des unités ; il est approché à un *dixième* près, si l'on s'arrête au chiffre des dixièmes, à un *centième* près, si l'on s'arrête au chiffre des centièmes, etc.

Le quotient est approché par *défaut* lorsqu'on néglige le reste ; il est approché par excès lorsqu'on augmente le dernier chiffre conservé d'une unité de son ordre. Ainsi le quotient 13,487559 est approché à un *millionième* près par *défaut*, car on néglige le reste 1049. Il serait approché à un *centième* près par *défaut*, si l'on écrivait 13,48. Il serait encore approché à un *centième* près par *excès*, si l'on écrivait 13,49.

Ce dernier nombre se rapproche plus du quotient exact que 13,48, car à celui-ci on néglige plus de 7 *millièmes*, tandis que l'on augmente le premier de moins de *3 millièmes*. Dans les deux cas le quotient approché diffère de moins d'un *centième* du quotient exact.

En général, lorsque la décimale qui suit celle que l'on conserve est égale ou inférieure à 5, on l'efface ainsi que toutes celles qui suivent ; lorsqu'elle est supérieure à 5, on augmente la dernière décimale conservée d'une unité de son ordre.

Le nombre de décimales à conserver dépend de la question posée.

Remarque. — Un chiffre décimal est égal ou supérieur à 5, lorsque le reste est égal ou supérieur à la moitié du diviseur.

181. Problème. — Trouver, à moins de 0,01 près, le quotient de 354,894 735 par 43,56.

35489,4735	4356
6414	8,14
20587	
3163	

On efface la virgule du diviseur, on déplace celle du dividende de deux rangs vers la droite et l'on calcule deux chiffres décimaux au quotient. On trouve ainsi 8,14. Ce quotient est approché à moins de 0,01 près. En effet, si l'on continuait la division, le nombre formé par tous les chiffres que l'on trouverait serait au plus égal à 0,00999..., c'est-à-dire moindre que 0,01.

182. Problème. — Trouver le quotient de 583 par 27, à moins de 0,001 près.

583	27
43	21,592
160	
250	
70	
16	

On effectue la division de ces deux nombres et l'on arrête l'opération lorsqu'on a calculé 3 chiffres décimaux au quotient. On trouve ainsi 21,592. Le quotient 21,592 est approché à moins de 0,001 près par défaut ; le quotient 21,593 est approché à moins de 0,001 près par excès.

En effet, si l'on continuait la division on trouverait après le chiffre 2 des millièmes, un ou plusieurs autres chiffres, mais le nombre formé par tous ces chiffres ne vaudrait pas 0,001, car il peut *au plus* être égal à 0,000 999 999,..., c'est-à-dire moindre que 0,001.

183. Règle. — *Pour obtenir un quotient avec une approximation décimale donnée, on opère comme à l'ordinaire, en arrêtant l'opération lorsqu'on a obtenu le nombre de décimales voulues, c'est-à-dire une décimale pour avoir un quotient à moins d'un 0,1 près, deux décimales pour un quotient à moins d'un 0,01 près, trois décimales pour un quotient à moins d'un 0,001 près, etc.*

PREUVE DE LA DIVISION

184. On multiplie le diviseur par le quotient, et, s'il y a lieu, on ajoute le reste au produit. Si l'opération est exacte, le résultat est égal au dividende (149).

EXERCICES SUR LA DIVISION

1° QUESTIONS ORALES ET THÉORIQUES

362. — Donner les trois définitions de la division.

363. — Que signifient les mots *dividende, diviseur, quotient ?*

364. — Qu'est-ce que le reste d'une division ?

365. — De quelle définition de la division dérive le mot *reste ?*

366. — Les trois définitions de la division sont-elles bien différentes ?

367. — Quelle est la véritable définition de la division lorsqu'il y a un reste ?

368. — Combien distingue-t-on de cas dans la division des nombres entiers et quels sont-ils ?

369. — Comment détermine-t-on le nombre de chiffres du quotient ?

370. — Faites la théorie du premier cas de la division au moyen des exemples suivants :

1° 24 : 8 ; 2° 59 : 7 ; 3° 48 : 6 ; 4° 84 : 9.

371. — Faites la théorie de la division dans le deuxième cas au moyen des deux exemples suivants :

1° 3457 : 456 ; 2° 64 994 : 7456.

372. — Faites la théorie de la division dans le troisième cas au moyen des deux exemples suivants :

1° 267 658 : 469 ; 2° 4 789 467 : 459.

373. — Dites la règle générale pour la division des nombres entiers.

374. — Comment fait-on la division lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros ?

375. — Démontrez que, pour obtenir le quotient de 8457000 par 6700, il suffit de diviser 84570 par 67.

376. — De quelle nature sont les unités du quotient ?

377. — Comment divise-t-on : 1° une somme ; 2° une différence par un nombre ?

378. — Quel est le quotient :

1° de (45 + 63 + 81) : 9 ; — 2° de (84 — 35) : 7 ?

379. — Que devient le quotient ?

1° Lorsqu'on rend le dividende un certain nombre de fois plus grand ?

2° Lorsqu'on rend le diviseur un certain nombre de fois plus grand ?

380. — Le quotient de 63 par 9 est 7. Démontrez que si l'on multiplie le dividende par 5, le nouveau quotient est 7 × 5.

381. — Le quotient de 1296 par 24 est 54. Démontrez que si l'on multiplie le diviseur par 6, le nouveau quotient sera 54 : 6.

382. — Que devient le quotient lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre ?

383. — La division de 17658 par 654 donne un quotient exact égal à 27. Quel sera le nouveau quotient si l'on multiplie ou si l'on divise le dividende et le diviseur par 9 ?

384. — La division de 17703 par 654 donne 27 au quotient et un reste égal à 45. Quels seront le quotient et le reste si l'on divise le dividende et le diviseur par 3 ? — Démontrez-le.

385. — La partie entière du quotient varie-t-elle toutes les fois que l'on augmente ou que l'on diminue le dividende ?

386. — Que devient le quotient :

1° Lorsqu'on augmente le dividende d'un nombre égal au diviseur ?

2° Lorsqu'on augmente ou lorsqu'on diminue le diviseur d'une ou de plusieurs unités ?

387. — Démontrez que pour diviser le produit 4 × 54 × 19 × 7 par 9, il suffit de diviser par 9 l'un des facteurs de ce produit.

388. — 5 × 9 × 7 = 315. Démontrez qu'au lieu de diviser 14805 par 315, on peut diviser ce nombre d'abord par 5, puis le quotient obtenu par 9 et enfin le dernier quotient par 7.

389. — Combien la division des nombres décimaux comprend-elle de cas ?

390. — Expliquez les divisions suivantes :

1° 150,92 : 49.
2° 13,08 : 436.
3° 1,372 : 49.
4° 1054 : 4,25.
5° 45,974 : 6,35.

391. — Qu'est-ce qu'un quotient approché à moins d'un *centième* près ?

4. Causes d'erreurs

Voici quelques exemples d'erreurs relevées dans l'usage des décimaux :

E_1 : on rencontre fréquemment chez les élèves des égalités du type :

$$2,3 \times 2,3 = 4,9$$
$$17,3 + 21,8 = 38,11$$

Ces erreurs sont interprétées généralement comme une difficulté à placer la virgule.

E_2 : Pour 37 % des élèves de CM_2 (Enquête INRP, 1979) le nombre 3,2 est inférieur à 3,135.

E_3 : L'exercice : *écris un nombre dans la case vide, les nombres sont supposés rangés du plus petit au plus grand.* *1,23* ☐ *1,24* *est peu traité en général. Pour les élèves 1,23 et 1,24 sont deux décimaux consécutifs : ils ne conçoivent pas qu'on puisse intercaler d'autres décimaux.*

E_4 : les élèves ressentent souvent deux écritures du type : 1,23 et 1,230 comme représentant des nombres différents.

E_5 : A la question : lorsqu'on multiplie un nombre par un autre, le résultat sera-t-il automatiquement plus grand ? La plupart des enfants répondent par l'affirmative.

Que signifient ces erreurs ?

Les erreurs signalées plus haut, s'expliquent par le fait que les méthodes d'apprentissage des décimaux utilisées ne remettent pas en cause le modèle des entiers naturels, mais au contraire, l'utilisent.

- Considérons l'erreur désignée par E_1 : pour le produit et la somme indiquée, un décimal est considéré comme un couple de deux entiers naturels séparés par une virgule.

Le produit et la somme portent alors sur chaque composante des couples

$$2,3 \times 2,3 = 4,9 \text{ car } 2 \times 2 = 4 \text{ et } 3 \times 3 = 9$$
$$17,3 + 21,8 = 38,11 \text{ car } 17 + 21 = 38 \text{ et } 3 + 8 = 11$$

- Pour comparer 3,2 et 3,135 (erreur E_2), les élèves comparent 2 et 135.

- Les élèves pensent que multiplier un nombre par un autre nombre n c'est obtenir un "nombre plus grand", car exceptés les cas où le nombre n est nul ou égal à 1 (cas que l'on rencontre peu souvent) c'est ce qui est vrai pour l'ensemble des entiers naturels.

Les erreurs que l'on peut observer trouvent leur origine dans les deux présentations des décimaux suivantes.

INTRODUCTION DU PROGRAMME DE 70 (ce qui ne devrait plus se faire)

Les nombres décimaux étaient introduits par changement d'unité (nombre d'habitants d'une ville exprimé en milliers ou en millions).

L'accent est mis sur le fait que "à tout naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer un nombre naturel".

Le nombre décimal apparaît ainsi comme un naturel déguisé, juxtaposition de deux entiers : cela est une des causes d'erreurs signalées au début.

Le nombre décimal peut même apparaître comme le nombre d'objets d'une collection : en effet, si on utilise, par exemple, le matériel des cubes emboîtables (cubes isolés, barres, plaques...). Le nombre 1,23 est le résultat du dénombrement d'une collection de 123 petits cubes, l'unité choisie étant la plaque. Cette présentation apparaît dans de nombreux ouvrages du CM après 1970.

On peut changer d'unité et prendre pour unité le cube isolé, la barre..., on ne peut prendre en compte des subdivisions du cube.

Autres inconvénients : l'unité étant la plaque, l'enfant peut être amené à dire :

— qu'entre 1,23 et 1,24 par exemple, il n'y a pas de décimal puisque 123 et 124 sont deux entiers consécutifs.
— que 1,23 et 1,230 sont deux naturels différents puisque dans un cas il s'agit de 123 cubes, la plaque étant prise pour unité, dans l'autre de 1230 cubes, le gros cube étant pris pour unité.

INTRODUCTION PAR LE MESURAGE

Au CE les enfants ont appris à mesurer en se servant d'unités différentes et expriment le résultat de leurs mesures sous la forme :

4 m et 32 cm ; 1 kg et 250 g ; 3 F et 60 c.

Au CM_1, à l'aide d'un tableau de conversion on transforme ces écritures qui deviennent :

4,32 m ; 1,250 kg ; 3,60 F

puis après suppression de la mention de l'unité.

4,32 ; 1,250 ; 3,60

Un nombre décimal n'apparaît pas comme un nombre nouveau mais comme la juxtaposition de deux naturels. On réintroduit plus ou moins ici la méthode de 1970 avec ses inconvénients.

5. Deux articles parus dans les bulletins de l'APMEP n° 327 (février 81) et n° 340 (décembre 83)

Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs

par François LÉONARD, Catherine GRISVARD,
***Laboratoire de Psychologie Expérimentale et Comparée de l'Université de Nice*(1)**

La numération décimale constitue une base essentielle pour le calcul et la mesure puisque c'est notre système d'écriture des nombres. Or on sait qu'elle n'est pas acquise sans difficultés puisque, introduite dès le CM1, elle pose encore des problèmes en quatrième et au-delà.

Nous présentons ici les résultats d'un sondage préliminaire sur le nombre décimal qui voudrait ouvrir des directions de recherches plus précises à différents niveaux de la scolarité et aborder dans la même optique les problèmes posés par les opérations sur les décimaux. L'analyse de ces résultats s'inscrit dans le cadre des études des aspects fonctionnels des acquisitions auxquels l'Ecole de Genève s'intéresse actuellement.

Au vu des résultats, nous avons pu faire l'hypothèse que les réponses fausses, et sans doute beaucoup de réponses exactes, provenaient de l'application d'une règle qui peut être décomposée en deux sous-règles :
— un algorithme de comparaison des entiers ;
— la distinction entre les chiffres avant et après la virgule.

(1) Ce travail doit beaucoup aux contacts qui ont pu être établis avec des enseignants du secondaire et de l'école élémentaire, à travers la collaboration de notre laboratoire et de l'IREM de Nice. Plusieurs idées de cette étude sont dues à M. Mérigot, directeur de l'IREM de Nice.

La composition de ces deux sous-règles se traduit par l'application successive du même algorithme aux chiffres qui se trouvent avant et après la virgule. C'est ce que nous avons appelé la *règle 1* (2).

Nous avons aussi signalé une *seconde règle*, hélas contradictoire avec la première le plus souvent, qui amorce le décompte du nombre de décimales et qui pourrait permettre de passer à un algorithme correct.

La *règle 1* montre une absence de compréhension de la nature de l'écriture décimale, bien qu'elle tienne compte de la virgule, mais — et ceci nous paraît fondamental du point de vue pédagogique — *cette règle produit souvent de bonnes réponses*. De ce fait, l'élève qui l'utilise sera parfois complimenté pour son résultat. Comme cette règle marche à tous les coups pour la partie entière, et qu'il y a heureusement beaucoup de nombres qui diffèrent dès ce niveau, l'élève qui applique cette règle, fausse, tombe juste le plus souvent. Pourquoi en changerait-il ?

La seconde règle que nous avons cru pouvoir distinguer semble être appliquée au hasard. Mais pour le nombre de décimales, que concerne cette règle, on n'a pas le renforcement systématique de la partie entière comme pour la première. Il est fort possible que l'élève ait en moyenne une chance sur deux de tomber juste avec cette règle fausse, et que la fréquence avec laquelle il l'applique manifeste une adaptation correcte à cette fréquence de réussite.

Les erreurs ne sont donc pas dues au hasard ; elles correspondent à une organisation cognitive, à une certaine « compréhension » des décimaux. Cette « compréhension » des décimaux est assez précoce puisqu'elle est déjà visible au CM 1. Nous verrons qu'elle est aussi assez stable, puisque des étudiants l'utilisent encore trois ans après le baccalauréat.

Le problème

Nous avons simplement demandé à des élèves de quatrième d'ordonner dix nombres décimaux. Ces nombres étaient les suivants (écrits dans cet ordre au tableau) :

11,98	12,4	12	11,898	11,09
12,04	12,1	12,113	11,8	12,001

Ils avaient été choisis en fonction d'une idée « intuitive » des difficultés qu'ils pouvaient présenter ; pour aller plus loin, il faudrait faire un nouveau choix en tenant compte des résultats obtenus ici.

Pour commencer à étudier les effets éventuels d'une pratique extrascolaire, nous avons aussi utilisé ces dix nombres en précisant qu'il s'agissait de poids (kg) soit sous la forme __,__ kg (par exemple : 11,98 kg) soit sous forme __ kg __ (par exemple 11 kg 98), ou qu'il s'agissait de longueurs (mètres) sous les deux mêmes formes (11,98 m ou 11 m 98).

(2) D'autres recherches, en particulier celles de l'équipe de G. Brousseau à Bordeaux, semblent confirmer cette hypothèse.

L'introduction des unités n'était pas prévue au début de l'expérience et s'est faite dans un deuxième temps.

Population

134 élèves de classes de quatrième, d'âge moyen 13 ans 9 mois. Écart-type : 7 mois. Deux classes (44 élèves en tout) ont reçu le problème sur les nombres, deux classes l'ont reçu sous la forme poids (22 sous la première forme, 22 sous la seconde) et deux classes ont reçu le problème sous la forme longueur (23 sous chaque forme).

RÉSULTATS

Les réussites :

Pour l'ensemble des sujets (134), les résultats sont les suivants :

Aucune erreur : 82 (61 %)
Une erreur ou plus : 52 (39 %)

Les 52 copies erronées comportent en tout 130 erreurs.

On voit que le nombre décimal est loin d'être acquis parfaitement en classe de quatrième ! (3)

Un modèle d'analyse des erreurs :

Aucun élève n'a fait d'erreur sur la partie entière des nombres ; seule la partie décimale fait l'objet de cette étude.

Les chiffres après la virgule offrent deux types d'indice : le *nombre de ces chiffres* et l'« *entier* » *qu'ils composent* : ainsi 11,898 a trois chiffres après la virgule et ces chiffres composent l'« entier » 898.

(3) A titre de comparaison, avec les réserves méthodologiques qui s'imposent, voici les résultats d'un sondage effectué au CM 1 : les 19 élèves devaient ordonner les deux termes de quatre couples de nombres décimaux. Il y a 30 réponses justes (39 %) et 46 réponses fausses (61 %).
Travail IREM-CRDP, avril 1979, Bastia.
Voir aussi Enquête INRP, 1977, CM 2 : Enquête sur l'enseignement mathématique à l'école élémentaire. Unité de recherche mathématique élémentaire INRP. Tome 1 : Comportement des élèves.
Sur une série de huit nombres décimaux, le quart des élèves (26 %) ordonne correctement les huits nombres. 74 % ordonnent correctement les nombres d'après leurs parties entières. Plus du tiers des enfants (37 %) donne une série où les nombres ayant même partie entière sont ordonnés d'après le nombre de chiffres de leur partie décimale.

Si on considère un couple de nombres décimaux selon ces indices, ils peuvent avoir le même nombre de chiffres après la virgule ou non, et ces chiffres peuvent composer des entiers égaux ou non. Ces différents cas seront notés de la façon suivante :

Décimales : + (le second nombre a plus de décimales)
= (le second nombre a autant de décimales)
– (le second nombre a moins de décimales)

Entier : + (l'entier que composent les décimales du second nombre est plus grand)
= (les entiers composés par les décimales sont égaux)
– (l'entier que composent les décimales du second nombre est plus petit).

On aurait évidemment pu donner ces notations par rapport au premier nombre. Les différentes combinaisons des modalités des indices « décimales » et « entier » sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 1

Décimales

		+	=	–
Entier	+	1	2	3
	=	4	5	6
	–	7	8	9

Le numéro situé à l'intersection de la ligne + et de la colonne – exprime que le second nombre a un « entier » plus grand et un nombre de décimales plus petit ; c'est le cas n° 3 auquel appartient le couple (12,001 ; 12,4). De même le cas n° 8 correspond à un couple tel que (11,98 ; 11,09) où le second nombre a un entier plus petit et autant de décimales.

La combinaison 5 correspond à l'égalité des deux nombres. Les huit autres cas peuvent être réduits à quatre si on convient de remplacer « plus grand » par « moins grand » lorsqu'on inverse les termes du couple de nombres. Les cas se correspondent : 1 avec 9 ; 2 avec 8 ; 3 avec 7 et 4 avec 6.

A partir de ces indices, on peut se donner deux « règles » pour décider quel est le nombre le plus grand dans le couple :

***Règle 1 :** le nombre qui a le plus grand « entier » est le plus grand.*
exemple : 12,113 > 12,4 car 113 > 4

***Règle 2 :** le nombre qui a le plus grand nombre de décimales est le plus petit.*
exemple : 12,04 < 12,4

Les deux règles ci-dessus constituent des algorithmes partiels de comparaison de deux nombres décimaux. Comme on le verra plus loin en détail, ces deux règles suffisent pour donner une réponse exacte dans presque tous les cas. Néanmoins, pour avoir un algorithme correct, il est nécessaire d'ajouter une troisième règle :

Règle 3 : égaliser le nombre de décimales

La règle 3 enlève alors toute raison d'être à la règle 2 et, combinée seule à la règle 1, fournit un algorithme complet.

Avant de regarder dans quelle mesure ces règles permettent d'organiser les réponses, il convient de souligner plusieurs points remarquables.

Parmi les huit cas décrits au tableau 1 où il y a inégalité, la règle 1 est applicable dans six cas : les cas 1, 2, 3, 7, 8, 9 ; dans les cas 2-8 et 3-7 cette règle 1 appliquée isolément donne un résultat exact ; *exemples* :

cas 2 : 12,001 et 12,113 ; l'application de la règle donne 12,113 > 12,001

cas 3 : 12,001 et 12,04 ; l'application de la règle donne 12,04 > 12,001 ; en intervertissant les éléments du couple le cas 2 devient le cas 8 et le cas 3 devient le cas 7.

De même la règle 2 est applicable dans les six cas 1, 3, 4, 6, 7, 9 et on peut voir comme plus haut que dans les cas 3-7 et 4-6 cette règle appliquée seule donne un résultat exact.

Les exemples ci-dessus ne sont que des exemples mais on peut trouver en annexe la démonstration mathématique correcte.

Tableau 2

Accord et désaccord des résultats fournis par les deux règles

Règle 1

Entier \ Décimales	+	=	−
+	<	<	<
=	*	=	*
−	>	>	>

Règle 2

Entier \ Décimales	+	=	−
+	>	*	<
=	>	=	<
−	>	*	<

Le signe < signifie que le premier élément du couple est inférieur au deuxième, le signe > signifie que le premier élément du couple est supérieur au deuxième, le signe * signifie que dans ce cas la règle considérée ne s'applique pas.

On voit que les deux règles sont en accord dans les cas 3-7, qu'elles sont indépendantes dans les cas 2-8 et 4-6 et qu'elles sont en désaccord dans les cas 1-9. Or, et ceci est remarquable, lorsqu'elles sont en accord, *elles donnent une réponse correcte* ; lorsqu'elles sont indépendantes, la règle qui joue *donne une réponse correcte*. Lorsqu'elles sont en désaccord, *chacunes des réponses est correcte dans certains cas* et fausse dans d'autres.

Les deux règles donnant des résultats contraires dans les cas 1-9, l'application de l'une constitue la négation de l'autre.

L'organisation des réponses

Comme nous cherchons ici à comprendre les réponses des élèves, nous ne considérerons d'abord que les réponses erronées. En effet, on peut toujours penser que les réponses justes ont été données en fonction d'une analyse *correcte* du problème qui ne nous apporte aucune information nouvelle.

Sur les 130 réponses erronées, 80 (62 %) sont conformes à la *règle 1*, 21 (16 %) sont conformes à la *règle 2* et 29 (22 %) ne sont pas conformes à ces règles. 78 % des réponses fausses sont donc conformes à une de ces deux règles fausses et l'application de la *règle 1* domine nettement celle de la *règle 2*.

Une réponse peut correspondre à l'affirmation ou à la négation de l'une, de l'autre ou des deux règles, ce qui donne huit possibilités : 1 et 2, 1 et $\overline{2}$, $\overline{1}$ et $\overline{2}$, $\overline{1}$ et 2, 1, $\overline{1}$, 2, $\overline{2}$, en notant 1 l'affirmation de la règle 1, $\overline{1}$ sa négation, 2 l'affirmation de la règle 2 et $\overline{2}$ sa négation.

Sur ces huit possibilités, cinq seulement donnent des réponses fausses. Les dix nombres utilisés ne donnaient pas une équi-répartition de ces différentes possibilités. Dans le tableau 3 nous indiquons pour chacune de ces possibilités le nombre de couples du sondage qui y correspondent, ce qui permet de comparer le nombre de réponses fausses obtenues aux effectifs théoriques correspondant à une répartition équiprobable des réponses fausses entre tous les couples.

Tableau 3

Possibilité	Nombre de couples	Effectifs théoriques	Nombre de réponses	Moyennes
1 et $\overline{2}$	6	37	80	13,33
$\overline{1}$ et 2	8	50	21	2,63
$\overline{1}$ et $\overline{2}$	2	12	15	7,50
$\overline{1}$ seule	3	19	3	1,00
$\overline{2}$ seule	2	12	11	5,50

Malgré l'interdépendance des différentes règles, les résultats peuvent s'interpréter comme une application systématique de la règle 1 et un refus de sa non-application. Par contre, la règle 2 semble être aussi souvent niée qu'affirmée. Remarquons d'autre part que *toutes* les réponses *justes* peuvent être interprétées comme des applications de l'une ou l'autre de ces règles ou des deux. Il est fort possible qu'une partie de ces réponses soit due à ces règles et non à une compréhension correcte du système décimal.

Si nous appliquons la même analyse aux résultats des 19 élèves de CM 1 que nous avons cités, nous obtenons des résultats analogues.

Les quatre couples de nombres étaient les suivants :

Tableau 4

		Réponses justes	Réponses fausses
1	35,07 et 35,7	9 (47 %)	10 (53 %)
2	12,49 et 124,9	16 (84 %)	3 (16 %)
3	15,743 et 15,685	15 (79 %)	4 (21 %)
4	24,9 et 24,174	6 (32 %)	13 (68 %)

Le couple 2 compare deux décimaux de parties entières différentes ; il obtient le meilleur score ; trois élèves de CM 1 se trompent là où aucun élève de 4^e ne le fait.

La réponse juste pour le couple 3 est conforme à la règle 1, le résultat est équivalent à la comparaison d'entiers.

La réponse fausse pour le couple 4 est conforme à la règle 1 et on obtient le résultat inverse du précédent avec une force analogue.

Le couple 1 correspond à la règle 2 seule, la réponse juste est conforme à la règle 2, la réponse fausse ne lui est pas conforme ; on obtient l'égalité des scores que nous avons trouvée avec nos élèves de 4^e.

Nous retrouvons donc très précisément les résultats précédents ; cette concordance suggère que les élèves de CM 1 utilisent ces règles mais une étude plus fine reste à faire. Inversement, nous avons constaté qu'il reste des traces de ces règles chez les étudiants.

Les nombres que nous avions utilisés en quatrième ont été proposés à des étudiants de 3^e année de psychologie. On leur a aussi demandé de les ordonner. A la différence des élèves de 4^e, on a demandé aux étudiants d'effectuer cette tâche *le plus rapidement possible*. Ils ont ordonné les dix nombres en moins d'une minute (minimum 30 s, maximum 60 s). Cependant le temps était libre. Les résultats sont les suivants :

Tableau 5

Répartition des réponses des étudiants

Nombre de réponses	67	
Nombre de *copies* sans erreur	40	60 %
Idem, mais oubli d'un nombre	7	10 %
Une erreur ou plus	20	30 %
Nombre d'erreurs	27	

Répartition des errreurs selon les différents cas

Cas	Nombre d'erreurs	Effectifs théoriques (4)
1-9	24	18
2-8 3-7 4-6	3	9

Sur ces 27 réponses, 24 correspondent à l'application d'une règle (cas 1-9). Dans les autres cas, l'application d'une des deux règles donnerait une réponse juste.

Les oublis ne se répartissent vraisemblablement pas au hasard : sur 7 oublis on a :

11,898 : 3 fois
12,113 : 3 fois
12,04 : 1 fois

Ces oublis sont le fait de six personnes, une d'elles ayant oublié à la fois 11,898 et 12,113. Ce sont justement ces nombres qui conduisent le plus souvent à une réponse fausse conforme à la règle 1.

Bien que ces résultats, tant à l'école élémentaire qu'en faculté, demandent à être confirmés (5), ils montrent l'importance de la règle 1. Celle-ci peut parfaitement s'expliquer par le fait que c'est la même règle qui sert à la comparaison des entiers. Les élèves appliquent successivement la même règle avant et après la virgule. En résumé, cela revient à dire que les élèves utilisent une procédure de comparaison des décimaux qui se contente de répliquer celle qu'ils utilisent pour les entiers.

Explications par les élèves des réponses données :

Les explications de réponses que nous avons demandées à quelques élèves vont dans le sens de cette interprétation. Pour les deux classes qui ont reçu le questionnaire sous la forme de nombres, sans unité, nous

(4) Le nombre de cas de chaque sorte n'étant pas égal, on peut comparer ces chiffres à une répartition aléatoire équiprobable pour les différents cas. $\chi^2_1 = 6$, alpha inférieur à .02.

(5) Un travail de R. Guillermart (IREM de Nice) vient de confirmer l'existence des deux règles.

Elle demandait d'ordonner les 3 nombres : 3,6 3,583 et 3,57. Il y avait 31 réponses fausses sur 74 en sixième, 10 sur 42 en cinquième, 9 sur 74 en quatrième, 3 sur 13 en C.P.P.N. (203 élèves en tout). Une seule de ces réponses ne correspond pas aux deux règles ; les autres se répartissent comme suit :

règle 1 : 77 %, 80 %, 67 %, 100 % ;
règle 2 : 23 %, 20 %, 33 % et 0 %,

respectivement pour les classes de sixième, cinquième, quatrième et C.P.P.N.

avions demandé des justifications écrites des réponses. Ces justifications peuvent être classées en quatre groupes :

A : celles qui soulignent, sans plus, la distinction entre les chiffres avant et après la virgule ;

A + B : celles qui ajoutent à cette distinction qu'il faut prendre les chiffres dans l'ordre ou qui égalisent d'abord le nombre de chiffres après la virgule, ou qui précisent la comparaison par puissances de 10 ;

NR : les non-réponses ;

Autres : les réponses qui n'entrent pas dans ces catégories.

La répartition des réponses dans ces quatre catégories diffère nettement selon qu'il s'agit d'élèves qui n'ont pas fait d'erreur ou d'élèves qui ont fait au moins une erreur.

Tableau 6

	Pas d'erreur	Une erreur ou plus	Total
	28 élèves	16 élèves	44 élèves
A	13 (46 %)	12 (76 %)	25 (57 %)
A + B	11 (39 %)	0	11 (25 %)
NR	1 (4 %)	2 (12 %)	3 (7 %)
Autres	3 (11 %)	2 (12 %)	5 (11 %)

Les élèves qui se trompent ne précisent pas dans quel sens ils entendent la distinction entre chiffres avant et après la virgule. On peut penser qu'ils se contentent de réutiliser après la virgule l'algorithme (règle 1) qu'ils ont utilisé avant la virgule. Les élèves qui ne se trompent pas précisent le sens correct de cette distinction (pour 39 %). Restent 17 élèves qui ne se trompent pas et ne disent pas pourquoi. Il n'y a finalement que 25 % des élèves qui ont donné des réponses correctes et des justifications correctes.

Les effets de la nature des mesures

Le fait de préciser l'unité (kilogramme ou mètre) ne change apparemment pas la nature de l'épreuve, le nombre d'erreurs est du même ordre.

	Nombres	Kilogrammmes			Mètres		
		-,- kg	-kg-	total	-,-m	-m-	total
Nombre de copies sans erreur	28	15	11	26	15	13	28
%	.64	.69	.50	.59	.66	.57	.61
Effectif total	44	22	22	44	23	23	46
Nombre de copies à une erreur ou plus	16	7	11	18	8	10	18
Nombre total d'erreurs	32	16	35	51	23	24	47

On peut craindre que les effets des différences entre les classes ne soient supérieurs aux éventuels effets des contenus de problème posé.

Néanmoins, lorsqu'on examine les erreurs selon qu'elles sont commises dans tel ou tel groupe de situations, on voit un phénomène apparaître. Les erreurs peuvent être communes aux trois situations principales ou à deux d'entre elles ou propres à l'une d'elles. Nous présentons ici ce regroupement.

Tableau 8

Communes aux trois situations	80
Communes aux nombres et aux mètres	6
Communes aux nombres et aux kilos	2
Communes aux kilos et aux mètres	29
Propres aux nombres	6
Propres aux kilos	6
Propres aux mètres	1

On voit que, si la majorité des 130 erreurs est commune aux trois situations (62 %), un nombre non négligeable est commun aux kilogrammes et aux mètres (22 %). Le seul trait commun que nous ayons trouvé à ces erreurs est la présence presque constante d'un ou de plusieurs zéros dans les nombres comparés. En regroupant toutes les erreurs selon qu'elles concernent des nombres avec zéro ou non, on fait apparaître ce phénomène.

Tableau 9

Nombre moyen d'erreurs selon qu'il y a ou non des zéros

	Nombres	Kilogrammes	Mètres
Avec zéro	0,13	0,59	0,59
Sans zéro	0,59	0,57	0,44
Total	0,72	1,16	1,03

La très légère infériorité des réponses pour les nombres dont la nature de l'unité était précisée semble entièrement due à la présence des zéros ; par contre, lorsqu'ils sont absents, on ne voit plus de différences entre les situations.

Ce résultat reste analogue lorsqu'on distingue les deux modes d'écriture envisagés.

Tableau 10

Nombre moyen d'erreurs selon le mode d'écriture

	Nombres	-,- kg	-kg-	-,- m	-m-
Avec zéro	0,13	0,36	0,82	0,61	0,57
Sans zéro	0,59	0,36	0,77	0,39	0,48
Total	0,72	0,72	1,59	1,00	1,04

Mais ces analyses concernent de trop petits effectifs et mêlent les effets des variables expérimentales à ceux des différences entre les classes ; aussi il ne convient pas de les interpréter plus avant. Une nouvelle expérience mêlant les situations au hasard dans un plus grand nombre de classes permettra seule de dire si ces effets existent ou non.

En guise de conclusion

Les résultats de ce sondage montrent à l'évidence que des enfants de 13 ans et demi, en quatrième, ne maîtrisent pas les décimaux (non entiers). Comme il s'agissait simplement de les ordonner, on peut penser que des opérations plus complexes (soustractions, multiplications) présentent encore plus de difficultés, mais cela n'est pas certain ; les élèves peuvent très bien maîtriser un algorithme isolé pour une certaine opération et échouer sur d'autres points. Ainsi 84 % des élèves de CM 1 que nous avons cités réussissent à multiplier un nombre décimal non entier par 10, mais 38 % seulement parviennent à le multiplier par 100 ou 1000.

Ces difficultés, pour une notion aussi essentielle, justifient à elles seules une poursuite de ce travail, mais les décimaux offrent peut-être un intérêt supplémentaire. La notion de nombre paraît se constituer presque nécessairement, cette construction s'exprimant dans le nombre entier (cardinal ou ordinal) que nous utilisons constamment, ainsi que certains nombres fractionnaires. Par contre, on peut penser que les nombres décimaux ne sont pas utilisés comme tels dans la vie courante. Les différents systèmes d'unités nous permettent en effet d'éviter de manipuler la virgule : on passe des francs aux centimes, des kilogrammes aux grammes, des mètres aux centimètres ou aux millimètres. Les nombres décimaux pourraient constituer un acquis plus spécifiquement scolaire, moins dépendant des pratiques extra-scolaires, ou de l'ontogenèse, que d'autres notions mathématiques simples.

Ce « codage » des naturels que sont pour beaucoup les décimaux dans leur présentation actuelle à l'école serait géré scolairement par des règles du type de celles que nous avons dégagées et inutilisé dans la vie courante.

On voit alors se dégager deux axes de recherche :

— la présentation des décimaux pour en faire une nécessité, axe déjà abordé par plusieurs équipes (cf. bibliographie) ;

— le problème de la mise en place, à l'école élémentaire, de règles « fausses », pour essayer d'en comprendre les raisons et d'enrayer leur installation.

Annexe

Nous donnons ici pour les quatre cas considérés dans l'article la démonstration générale des résultats de la comparaison de deux décimaux positifs.

Nous supposons que les parties entières des décimaux X et Y sont égales et nous pouvons donc les prendre nulles, ce qui revient à poser :

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i.10^{-i} \qquad \text{et} \qquad Y = \sum_{j=1}^{p} y_j.10^{-j}$$

les entiers x_i et y_j vérifiant $0 \leqslant x_i \leqslant 9$ et $0 \leqslant y_j \leqslant 9$

On supposera que x_n et y_p ne sont pas nuls afin que le nombre de décimales de X soit exactement n et celui de Y soit p.

L'« entier » au sens où nous l'avons utilisé est, pour le décimal X,

$$x = 10^n.X \quad \text{,et, pour Y,} \quad y = 10^p.Y$$

d'où

$$X = 10^{-n}.x \quad \text{et} \quad Y = 10^{-p}.y$$

Exemple :
$X = 0{,}23 = 2.10^{-1} + 3.10^{-2}$ et $x = 23 = 2.10^{1} + 3.10^{0} = 10^{2}.X$

Cas 2-8
(Plaçons-nous dans le cas 2) (cf Tableaux 1 et 2)
$$n = p\ ;\ y > x$$

La règle 2 ne s'applique pas et la règle 1 entraîne $Y > X$; démonstration :
On a $y > x$ donc $10^{-n}.y > 10^{-n}.x$ soit $Y > X$

Cas 3-7
(Plaçons-nous dans le cas 3)
$$p < n\ ;\ y > x$$

Les règles 1 et 2 sont en accord et donnent $Y > X$; démonstration :
On a $p < n$ donc $-p > -n$ et $10^{-p} > 10^{-n}$
d'où, avec $y > x$, $10^{-p}.y > 10^{-n}.x$; soit $Y > X$.

Cas 4-6
(Plaçons-nous dans le cas 4)
$$y = x\ ;\ p > n$$

La règle 1 ne s'applique pas, la règle 2 entraîne $Y < X$; démonstration :
On a $p > n$ donc $-p < -n$ et $10^{-p} < 10^{-n}$
d'où $y.10^{-p} < x.10^{-n}$ soit $Y < X$.

Cas 1-9
(Plaçons-nous dans le cas 1)

Il y a ici contradiction entre les deux règles, qui se retrouve sur le plan mathématique, et il est impossible de conclure. En effet
$$y > x\ ;\ p > n \quad \text{donc} \quad -p < -n \quad \text{et} \quad 10^{-p} < 10^{-n}$$
d'où
$$Y = 10^{-p}.y > 10^{-p}.x$$
mais
$$10^{-p}.x < 10^{-n}.x = X$$

On remarque que les deux conclusions sont effectivement possibles :
$$y > x,\ p > n \quad \text{et} \quad Y > X : \quad 0{,}37 > 0{,}3$$
$$y > x,\ p > n \quad \text{et} \quad Y < X : \quad 0{,}08 < 0{,}3$$

Bibliographie provisoire

A la suite de notre travail expérimental, nous avons commencé une recherche bibliographique sur les travaux consacrés aux décimaux. On trouvera ici un premier recensement, classé selon l'année de publication et le lieu où on peut se procurer ces travaux. Nous remercions par avance les lecteurs qui voudraient bien nous communiquer les références d'autres travaux sur ce sujet.

Grenoble 1973. *Bulletin de Mathématiques, n° 1*, C.R.D.P., Les nombres à virgule, Neyret, p. 45-58.

Grenoble 1974. *Bulletin de Mathématiques, n° 2*, C.R.D.P., idem, p. 7-15.

Bordeaux 1976. IREM, *Enseignement Élémentaire des Mathématiques, n° 17,* Quelques étapes dans la construction des décimaux au CM.

Rouen 1977. IREM, Les nombres décimaux au CM, groupe de réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'École primaire.

Rouen 1977. IREM, *Le grenier mathématique*, Les nombres décimaux.

Bordeaux 1977. IREM, Compte rendu et analyse des travaux sur la numération, Quelques notes pour une épistémologie des décimaux, Brousseau.

Bordeaux 1978. IREM, *Enseignement élémentaire des mathématiques, n° 18,* pp. 163-166, Problèmes dans la construction du concept de décimal, Brousseau.

Nantes 1978. IREM, *Nanta-Iremica n° 21*, Les nombres décimaux, p. 15-40.

Grenoble 1979. CNDP-IREM, *Grand N n° 17*, Sur quelques thèmes fondamentaux à l'école élémentaire, Décimaux, R. Neyret, p. 5-20

Grenoble 1979. CNDP-IREM, *Grand N n° 18*, A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen, C. Comiti & R. Neyret, p. 5-20

Rouen 1979 IREM, Introduction du calcul décimal et du système métrique dans la région de Rouen pendant la Révolution.

Nice 1980. IREM, Aides pédagogiques pour les maîtres du cycle moyen, Fractions et décimaux, p. 99-119.

1980. *Recherche en didactique des mathématiques, 1980, 1.1*, Brousseau, Problèmes de l'enseignement des décimaux, p. 11-59.

Paris VII. Approche des réels en situation scolaire : axiomatisation, Régine Douady, IREM.

Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux

par Catherine GRISVARD et François LÉONARD, Laboratoire de Psychologie expérimentale de l'Université de Nice

Introduction

Le travail que nous présentons ici complète celui que nous avons exposé dans un article paru au Bulletin (*Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs*, n° 327, Fév. 1981).

Nous avions montré qu'en Quatrième, 40 % des élèves ne savent pas ordonner des nombres décimaux (positifs) et qu'il ne s'agit ni d'erreurs accidentelles, ni de réponses données au hasard mais d'erreurs systématiques.

Nous avons pu identifier deux "règles" qui permettent d'interpréter 80 % des réponses fausses.

Nous montrons maintenant que beaucoup d'élèves, qui ne se trompent pas dans des comparaisons simples, utilisent les règles que nous avons identifiées lorsque les comparaisons deviennent plus complexes. D'autre part, nous avons mis en évidence une troisième "règle" qui permet d'affiner l'interprétation des résultats.

On comprendra l'importance de la connaissance de ces "règles" en constatant qu'elles fournissent souvent la bonne réponse. Ainsi, l'élève qui les utilise a rarement l'occasion de découvrir qu'il se trompe, de même que le professeur a peu l'occasion de constater que l'élève n'utilise pas la bonne procédure.

I. Les règles

Les trois règles que nous avons mises en évidence s'appliquent lorsque les nombres décimaux considérés ont la même partie entière (les comparaisons demandées portent toujours sur des décimaux positifs non entiers). Divers travaux ont montré que, si les décimaux à comparer n'ont pas la même partie entière, les erreurs sur l'ordre sont très rares dès le CM1 et quasiment absentes en Cinquième et en Quatrième, classes dans lesquelles nous avons mené nos recherches. Citons, en particulier, un test effectué par l'IREM de Lyon (ZOOM AVANT n° 11, Oct. 78) : on trouve, à la fin du CM2, 96 % de réponses exactes au problème de trouver le plus petit de trois décimaux de parties entières différentes.

Règle 1: Elle applique la règle de comparaison des entiers aux parties décimales considérées seules.

12,8	< 12,17	"car"	8 < 17
12,1	< 12,02	"car"	1 < 2
12,18	< 12,289	"car"	18 < 289

Règle 2 : Elle range les décimaux en ordre inverse de la longueur de leur partie décimale.

12,17 < 12,8
12,02 < 12,1
12,289 < 12,18

Lorsqu'il n'y a que deux décimaux à comparer, il n'y a que deux réponses possibles dont une est la bonne réponse. Lorsque les règles 1 et 2 sont toutes les deux susceptibles d'être appliquées, elles sont contradictoires et l'une d'elles donne la bonne réponse. Par contre, lorsque l'une d'elles ne peut être appliquée (par exemple R1 pour 19,02 et 19,2 ou R2 pour 12,17 et 12,81), celle qui s'applique donne toujours la bonne réponse.

Ces deux règles ont été étudiées dans notre travail précédent ; nous proposons ici d'y adjoindre une troisième règle qui nous paraît être un progrès vers une compréhension des décimaux.

Règle 3 : Elle apparaît de façon nette dans les réponses des élèves lorsque la comparaison porte sur plus de deux décimaux et concerne les séries dont un des nombres a pour première décimale un zéro ; avant de la décrire, illustrons-la par un exemple :

Les différentes règles donnent pour un ordre croissant :

Bonne réponse	4,06	<	4,249	<	4,3
Règle 1	4,3	<	4,06	<	4,249
Règle 2	4,249	<	4,06	<	4,3
Règle 3	4,06	<	4,3	<	4,249

D'après la règle 3, le plus petit des nombres est celui dont la première décimale est un zéro, les autres nombres étant rangés par ailleurs selon la règle 1.

Il s'agit bien d'un progrès puisque cette règle contient la règle 1 et qu'elle prend en compte une information supplémentaire pertinente.

Lorsqu'il n'y a que deux décimaux à comparer, la règle 3 donne la bonne réponse lorsqu'elle est applicable ; son existence risque donc de passer totalement inaperçue si on ne propose que des couples à comparer, alors que nous montrons qu'elle apparaît aussi fréquemment que R1 (du moins en Quatrième) lorsqu'il y a plus de deux nombres à comparer (1).

(1) Une expérience dont nous ne détaillons pas les résultats ici proposait de classer des couples de décimaux dont un élément au moins avait toujours un zéro en première décimale. On obtient en Quatrième un pourcentage d'erreurs presque nul (0,9 % sur 444 réponses). A posteriori on peut penser que parmi ce nombre massif de bonnes réponses beaucoup sont obtenues par l'application de la règle 3 qui, dans le cas d'un couple, donne la bonne réponse.

II. Augmentation de la charge de travail

Ainsi que nous l'avons indiqué dans l'introduction, les élèves sont souvent capables de donner de bonnes réponses pour la comparaison de deux nombres et se trompent si la comparaison porte sur un plus grand nombre d'éléments.

A ceci nous pouvons donner deux explications de nature différente :

— du point de vue du sujet :

Le travail à accomplir, l'information à traiter quand il y a plus de deux nombres, sont plus importants. Bien que la nature de la tâche ne change pas et que l'algorithme de comparaison soit le même pour ordonner deux nombres et pour en ordonner plus de deux, l'augmentation de l'ampleur de la tâche à accomplir a pour effet de perturber le bon fonctionnement des sujets et de faire apparaître des modes de fonctionnement plus primitifs et moins bien adaptés au problème.

— du point de vue des possibilités d'erreurs :

Aux perturbations du fonctionnement des sujets, observé fréquemment et à tous les niveaux dans ces conditions, s'ajoute le fait que dans le cas du couple il n'y a que deux réponses possibles, ce qui favorise l'obtention de bonnes réponses par application de règles fausses. Dans le cas de la comparaison de trois décimaux (ou plus de trois) il est plus facile de choisir des nombres qui permettent de discriminer les différentes règles et la bonne procédure (voir l'exemple de présentation de la règle 3 plus haut). De plus, il est possible de reconnaître l'application d'une règle avec un risque d'erreur très faible lorsqu'il y a plus de deux décimaux à ordonner. Pour un triplet, six réponses sont possibles, à chacune des règles identifiées correspond une réponse au plus et une réponse au hasard n'a qu'une chance sur six de coïncider avec la réponse résultant de l'application de l'une ou l'autre des règles.

Ainsi la tâche de sériation de listes plus longues est susceptible de faire apparaître de nouvelles régularités dans les réponses des sujets et donc de permettre l'identification de règles implicites qui, dans le cas de la comparaison de couples, ne pourraient être distinguées de celles déjà connues.

L'expérience a porté sur 162 élèves de classes de Cinquième, âge moyen 12 ans 11 mois, écart type 13 mois, et sur 132 élèves de classes de Quatrième, âge moyen 14 ans 1 mois, écart type 7 mois. Tous les sujets étaient élèves d'un même établissement.

L'épreuve proposée aux sujets était la suivante : il s'agissait d'ordonner par ordre croissant cinq listes de nombres :
— un couple (deux décimaux de même partie entière)
— un triplet (trois décimaux de même partie entière)
— un quintuplet (cinq décimaux de même partie entière)

— une liste de cinq nombres composée d'un couple mêlé à un triplet (deux parties entières différentes)

— une liste de dix nombres composée de un couple, un triplet, un quintuplet (trois parties entières différentes). Voir en annexe un exemple d'épreuve.

Dans ces deux derniers cas, puisque les élèves ne mélangent pas les parties entières, le travail de comparaison est exactement le même que pour un couple (respectivement triplet ou quintuplet) présenté seul, une fois que le tri sur les parties entières a été fait. Cependant, nous pensions que la présence des autres nombres était de nature à "compliquer" la tâche et à faire apparaître des erreurs.

Il y avait quatre épreuves différentes de façon qu'un même sujet n'ait pas à ordonner un même couple (resp. triplet, quintuplet) seul ou dans une liste plus longue. L'ordre des listes était différent dans les différentes épreuves ainsi que l'ordre des nombres dans ces listes. Ces ordres ont été obtenus par tirage au sort.

Le dépouillement global (sur l'ensemble des élèves) a permis de comparer le nombre de mauvaises réponses à la sériation des trois séries — couples, triplets, quintuplets — nous pensions observer une augmentation du nombre des mauvaises réponses avec la longueur de la série. Voir § III.a).

De même, nous avons regardé si le plongement d'une série dans une liste plus longue, mais dont les éléments n'interfèrent pas puisqu'ils n'ont pas la même partie entière, augmente le nombre des erreurs. Ces résultats sont présentés au § III.b).

L'étude individuelle (réponse de chaque sujet dans les différentes situations) nous a paru plus adaptée pour connaître la nature des erreurs faites. Les résultats de cette étude sont présentés au § III.c).

Pour les raisons exposées plus haut, il était compté, lors du dépouillement, une seule mauvaise réponse pour chaque ordre différent de la bonne réponse.

Les mauvaises réponses ont été classées, chaque fois que c'était possible, selon la règle fausse dont l'application permet de les obtenir. Les mauvaises réponses qui ne découlent d'aucune des règles 1, 2 et 3, ont été rassemblées sous une même rubrique "autres MR".

III. Les résultats en Cinquième et en Quatrième

a) Nous analysons d'abord les résultats concernant le nombre et la nature des erreurs selon que la liste comporte 2, 3 ou 5 éléments à ordonner. L'augmentation du nombre théorique de possibilités de réponses des couples (deux réponses possibles), aux triplets (six réponses possibles) et aux quintuplets (cent vingt réponses possibles), ne permet pas de faire des comparaisons de pourcentages d'utilisation des différentes règles entre les trois situations.

Nous présentons dans les **tableaux 1 et 2**, pour la bonne procédure (BR) et pour chacune des règles identifiées, le nombre théorique de réponses qu'elles permettent d'obtenir et le nombre de réponses qui ont été effectivement obtenues dans notre expérience. Les nombres théoriques ont été calculés en supposant que toutes les réponses étaient équiprobables, ils sont placés entre parenthèses.

Le tableau 1 correspond aux résultats de l'expérience en Cinquième et le tableau 2 à ceux de Quatrième.

Rappelons que BR : *Bonne réponse* ; R1 : *Réponse de la Règle 1* ; R2 : *id. Règle 2* ; R3 : *id. Règle 3* ; Autres MR : *les mauvaises réponses qui n'entrent pas dans ces précédentes catégories*.

Tableau 1

Nombres (observé et théorique) de réponses correspondant aux différentes procédures en Cinquième

		BR	R1	R2	R3	autres MR	total
couples tels que BR = R1:	obs.	76		7			83
	théo.	(41,5)		(41,5)			83
couples tels que BR ≠ R1:	obs.	64	9				73
	théo.	(36,5)	(36,5)				73
triplets tels que BR = R1:	obs.	62		9		2	73
	théo.	(12)		(12)		(49)	73
triplets tels que BR ≠ R1: sans zéro	obs.	35	3			1	39
	théo.	(6,5)	(6,5)			(26)	39
triplets tels que BR ≠ R1: avec zéro	obs.	32	5		2	2	41
	théo.	(7)	(7)		(7)	(21)	41
quintuplets sans zéro:	obs.	56	10	4		6	76
	théo.	(0,6)	(0,6)	(0,6)		(74,2)	76
quintuplets avec zéro :	obs.	47	10	3	7	9	76
	théo.	(0,6)	(0,6)	(0,6)	(0,6)	(73,6)	76

Tableau 2

Nombres (observé et théorique) de réponses correspondant aux différentes procédures en Quatrième

		BR	R1	R2	R3	autres MR	total
couples tels que BR = R1:	obs.	55		5			60
	théo.	(30)		(30)			60
couples tels que BR ≠ R1:	obs.	56	2				58
	théo.	(29)	(29)				58
triplets tels que BR = R1:	obs.	53	5			1	59
	théo.	(10)	(10)			(39)	59
triplets tels que BR ≠ R1:	obs.	23	7			1	31
sans zéro	théo.	(5)	(5)			(21)	31
triplets tels que BR ≠ R1:	obs.	25	5		1	1	32
avec zéro	théo.	(5)	(5)		(5)	(17)	32
quintuplets sans zéro:	obs.	49	9	3		13	64
	théo.	(0,5)	(0,5)	(0,5)		(62,5)	64
quintuplets avec zéro :	obs.	38	7	0	7	6	58
	théo.	(0,5)	(0,5)	(0,5)	(0,5)	(56)	58

Les résultats des tableaux 1 et 2 montrent que les élèves ne répondent pas au hasard, mais que leurs réponses sont fortement organisées. On obtient bien sûr un grand nombre de bonnes réponses. Ce qui est plus intéressant, c'est la place relative des réponses correspondant à la règle 1 et de celles correspondant aux "autres mauvaises réponses". On voit que dans tous les cas, les réponses résultant de l'application de la règle 1 sont nettement majoritaires parmi les mauvaises réponses. De plus, celles résultant de l'application de la règle 3 sont aussi nombreuses, tant en Cinquième qu'en Quatrième, que toutes les autres mauvaises réponses, alors que pour les triplets elles seraient trois fois moins nombreuses en cas de réponses aléatoires et pour les quintuplets dix fois moins. Il est donc permis de penser que, à défaut d'une bonne organisation, les élèves ont mis en place des procédures inexactes mais très solides et stables. En ce qui concerne la règle 2 les résultats sont moins nets, sauf pour les couples et c'est alors la seule mauvaise réponse possible. Dans cette expérience la règle 2 n'apparaît pas comme une organisation très fréquente; elle se trouve en fait partiellement recouverte par la règle 3 que le mode de décompte des erreurs que nous avions utilisé dans notre première expérience n'avait pas permis de mettre en évidence.

b) Nous étudions maintenant l'influence de la charge de travail sur les réponses des élèves. Pour cela nous nous intéressons aux erreurs faites sur les séries selon qu'elles sont présentées seules ou dans une liste plus longue. Le plongement d'un couple ou d'un triplet dans une liste de cinq nombres n'augmente pas suffisamment la charge de travail pour induire une variation du nombre des erreurs. Nous avons pu remarquer d'autre part que le nombre des erreurs sur les quintuplets ne change guère selon que ceux-ci sont présentés seuls ou mélangés à cinq autres nombres ; le résultat est valable en Quatrième comme en Cinquième.

Nous pensons donc que pour les élèves qui n'ont pas une bonne maîtrise de l'algorithme de comparaison des décimaux, la sériation de cinq nombres est, en soi, une tâche suffisamment difficile et que, par contre, ceux qui ne se trompent pas à la sériation de cinq nombres ne sont pas mis en difficulté avec le plongement dans une liste plus longue. Il semble qu'on obtienne avec cinq nombres un exercice relativement discriminatif des deux types d'élèves.

En ce qui concerne le plongement des couples et des triplets dans une liste de dix nombres nous avons obtenu, en Cinquième, les résultats que nous avions anticipés, ainsi que pour les couples en Quatrième. Le **tableau 3** donne, pour la Cinquième et pour la Quatrième, les pourcentages de mauvaises réponses pour les couples et les triplets tels que R1 ≠ BR selon qu'ils sont présentés seuls ou dans une liste de dix nombres. On constate qu'il est possible d'obtenir de cette manière une dégradation de la performance qui est particulièrement frappante en Quatrième pour les couples puisqu'on passe de 3 % à 27 % d'erreurs. (Pour les triplets en Quatrième, le résultat est paradoxal et nous ne savons pas l'expliquer).

Tableau 3

Nombre de mauvaises réponses (MR), nombre total de réponses (T) et pourcentage de mauvaises réponses (%), pour les couples et les triplets, selon la situation, en Cinquième et en Quatrième :

	SEULS				DANS DIX		
	MR	T	%		MR	T	%
En 5ème							
Couples ...	9	73	12	....	16	72	22
Triplets	13	80	16	....	18	75	24
En 4ème							
Couples ...	2	58	3	....	16	59	27
Triplets	15	63	24	....	11	52	18

c) Etude individuelle : nous étudions ici l'hypothèse selon laquelle l'apprentissage d'une notion comme celle de la comparaison des décimaux ne se fait pas instantanément lorsque le maître présente la notion et l'illustre par des exemples, mais procède par étapes de mieux en mieux adaptées au problème posé et que nous proposons de ranger hiérarchiquement. Ainsi nous pensons que la règle 3 est une meilleure adaptation que la règle 1 qu'elle contient partiellement et que la règle 1 elle-même traduit une organisation de l'information selon une certaine cohérence que nous n'avons pas trouvée dans les autres mauvaises réponses.

Nous pouvons proposer une hiérarchie des réponses sous la forme :

MR quelconques → R1 → R3 → BR

L'augmentation de la difficulté de la tâche (avec l'augmentation de la longueur de la série à ordonner : couple, triplet, quintuplet) doit entraîner une régression dans la nature des réponses fournies. Ainsi nous allons étudier, sujet par sujet, les réponses données pour les trois séries présentées seules.

Le nombre des réponses que nous avons obtenues concernant la règle 3, que nous avons identifiée à l'occasion de cette expérience, est insuffisant pour nous permettre une étude valable sur le passage éventuel de R3 à R1, les séries n'ayant pas été choisies dans ce but ; il semble qu'il y ait une tendance à l'abandon des réponses correspondant à la règle 3 quand la longueur de la série augmente, et c'est une des interprétations que nous proposons pour expliquer le nombre très faible d'erreurs sur les couples en Quatrième (voir aussi la note 1).

Compte tenu de cette remarque nous classons les réponses en trois catégories : BR, R1 et R3, autre MR.

En Cinquième, sur 55 sujets,
— 42 % sont stables soit en réponse R1 soit en BR,
— 24 % donnent BR au couple et R1 à une série plus longue,
— 23 % donnent BR au couple et une autre MR à une série plus longue,
— 11 % varient leurs réponses en sens inverse.

En Quatrième, sur 48 sujets,
— 42 % sont stables,
— 27 % donnent BR au couple et R1 à une série plus longue,
— 19 % donnent BR au couple et une autre Mauvaise Réponse à une série plus longue,
— 12 % varient leurs réponses en sens inverse.

Ces résultats apparaissent comme la confirmation du fait que la règle 1 est un moyen très puissant et très stable d'organisation de la tâche ; même lorsque le sujet a acquis une connaissance permettant l'application de la bonne procédure dans les cas simples, la règle 1 réapparaît si l'ampleur du travail ne permet pas une organisation optimale de l'information. Il semble donc que cette règle puisse coexister chez un même sujet avec la bonne règle, tant que cette dernière n'est pas assez solidement établie.

Conclusion

Ce type de travail nous paraît important pour plusieurs raisons, il montre que :

1. la compréhension d'une notion n'est pas immédiate, qu'il s'agit d'une construction procédant le plus souvent par étapes,

2. l'enseignement aussi procède par étapes, mais l'élève s'adapte à la situation d'enseignement et utilise des règles pour produire des "bonnes réponses", c'est-à-dire des réponses qui ne permettent pas à l'enseignant de voir l'écart entre le cheminement de la pensée de l'élève et la progression pédagogique.

Il nous paraît essentiel de se donner les moyens de comprendre ce que fait l'enfant, d'une part pour construire des situations didactiques aussi adaptées que possible à la progression de l'enfant, d'autre part pour identifier les bonnes réponses correspondant à des règles fausses afin de ne pas féliciter pour sa réponse juste un enfant qui effectue un raisonnement faux.

Ceci suppose un travail important qui peut difficilement être mené par l'enseignant tout seul en situation pédagogique et qui ne peut pas, non plus, être mené par un observateur extérieur sans collaboration avec l'enseignant.

Nous pensons donc qu'il est utile de développer des recherches sur l'enseignement dans une collaboration entre enseignants et psychologues et que notre travail a contribué sous deux formes à de telles recherches :

— d'une part en identifiant trois règles fausses utilisées par les élèves ;
— d'autre part en proposant deux moyens de les mettre en évidence.

Nous ne prétendons pas avoir fait le tour de la question, d'autres règles fausses sont peut-être à l'origine de certaines "Bonnes Réponses" et les "autres MR" ne sont peut-être pas toutes des erreurs accidentelles. Des recherches futures sur le sujet et sur d'autres usages des décimaux à l'école et hors de l'école permettront certainement de mieux comprendre la nature des difficultés rencontrées à l'occasion de l'étude de cette notion en classe.

Annexe

NE TOURNEZ PAS LA PAGE AVANT QU'ON VOUS LE DISE.

Date de naissance : Classe :

Votre travail va consister à ordonner des nombres par ordre croissant, c'est-à-dire DU PLUS PETIT AU PLUS GRAND.

Répondez aux questions dans l'ordre ; ne revenez pas en arrière.
Ne vous servez pas de brouillon ; écrivez sur la feuille.
Ne gommez pas ; si vous vous êtes trompé, rayez et écrivez de nouveau.

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 5 nombres :

7,609 8,98 7,55 8,898 7,5

Réponse :

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 10 nombres :

19,1 12,7 19,02 12,6 12,8 16,12 16,734 12,49 16,72 12,344

Réponse :

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 5 nombres :

15,5 15,078 15,349 15,41 15,069

Réponse :

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 2 nombres :

17,2 17,23

Réponse :

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 3 nombres :

18,65 18,8 18,067

Réponse :

2

AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DE DIFFÉRENTES PRÉSENTATIONS

1. Objectifs à atteindre

OBJECTIFS CONCEPTUELS	OBJECTIFS DE COMMUNICATION ET SAVOIR-FAIRE
— se rendre compte de l'insuffisance des entiers naturels pour résoudre certains problèmes.	— créer des codages pour transmettre des informations
— créer de nouveaux nombres pour résoudre des problèmes qui n'avaient pas de solution dans les entiers.	— élaborer un (ou plusieurs) système cohérent de codages (fractions-décimaux). — faire le lien entre les codages créés et les nouveaux nombres — passer d'une écriture à une autre pour les nouveaux nombres.
— prolonger aux nouveaux nombres l'ordre qu'on avait sur les entiers — concevoir qu'entre deux nouveaux nombres on peut toujours en intercaler un autre	— élaborer un algorithme de comparaison pour les décimaux.
— prolonger aux nouveaux nombres l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.	— mettre en place une technique opératoire pour les décimaux.
— utiliser les nouveaux nombres dans les situations d'approximation. Par exemple trouver des solutions approchées à des problèmes se traduisant par des équations du type a.x = b avec a et b entiers ou x.x = c avec c entier ou x.y = c avec c entier.	— utiliser les nouveaux nombres dans des situations différentes de celles qui ont permis leur approche, en particulier celles que l'on rencontre dans la vie courante.

pourquoi traîner ces bouts à rien !

9,0000000000...

MB

2. Comparaison des différentes présentations

Nous examinons ici diverses présentations et les confrontons aux objectifs à atteindre définis au paragraphe précédent.

2.1. MESURE - MESURAGE - CHANGEMENT D'UNITÉ

2.1.1. Sous le terme de mesure on a souvent tendance à confondre des signifiés différents:

a) ***La mesure proprement dite*** qui établit une correspondance entre les valeurs d'une grandeur (par exemple la masse) et les nombres, une fois qu'une unité a été choisie; cette correspondance doit, entre autres, vérifier les propriétés (1), (2), (3).

D'un point de vue théorique:

— pour que cette correspondance soit définie pour toutes les valeurs de la grandeur considérée (par exemple pour toutes les masses), les nombres entiers sont insuffisants et on a besoin de l'ensemble $\mathbf{R}^+$ des nombres réels positifs. Par exemple, une unité de masse u étant choisie, à chaque masse a, on peut associer un nombre réel et un seul que nous noterons, dans ce paragraphe, $m_u(a)$: c'est la mesure de a avec l'unité u. Réciproquement, à chaque nombre réel α, on peut associer une masse b et une seule telle que $m_u(b) = \alpha$.

— si une masse a est obtenue en ajoutant deux masses a_1 et a_2, on a:

$$(1) \qquad m_u(a) = m_u(a_1) + m_u(a_2).$$

en particulier si une masse a est obtenue en ajoutant k fois la même masse b on a:

$$(2) \qquad m_u(a) = m_u(kb) = k\, m_u(b)$$

— si a_1 est une masse plus faible que a_2,

$$(3) \qquad \text{alors } m_u(a_1) < m_u(a_2).$$

On considère ici qu'on peut définir l'égalité entre masses d'objets matériels par l'équilibre de la balance, l'ordre entre masses d'objets est aussi défini par la balance, l'addition des masses par juxtaposition des objets. L'ordre et les opérations sur les masses des objets matériels sont compatibles avec la relation "avoir même masse". (Cf. les définitions sur les longueurs de R. Douady dans la Revue "Recherches en Didactique des Mathématiques" vol. 1.1, p. 86).

Aux opérations et relations entre masses, correspondent, par la mesure, des opérations et relations entre nombres. Ceci est vrai pour toutes les grandeurs sur lesquelles on peut définir une mesure. Les nombres décimaux permettent de donner une valeur exacte ou approchée de la mesure de chaque grandeur avec une unité fixée.

b) ***Le mesurage:*** activité physique qui permet d'attribuer un nombre à une grandeur représentée par un objet physique, avec une certaine incertitude, après avoir fait le choix d'un étalon (par exemple on juxtapose ou reporte des objets représentant des grandeurs-unités.

c) ***Le repérage*** à l'aide d'instruments (par exemple avec une règle graduée, un pèse-personnes, un thermomètre, un peson à ressort, un chronomètre...).

Le repérage a pour objet de ranger des grandeurs (par exemple une température de 30° est supérieure à une température de 20°; le 7 Mars 1985 vient après le 2 Janvier 1985), mais il ne permet pas d'opérer sur ces grandeurs (en ajoutant 1 litre d'eau à 30° et 1 litre d'eau à 20°, on n'obtient pas 2 litres d'eau à 50°; l'expression 2 Janvier 1985 + 7 Mars 1985 n'a pas de signification).

Une graduation de repérage permet un mesurage dans le seul cas où cette graduation est construite en utilisant les propriétés d'additivité: pour une graduation avec des entiers, 0 est l'origine du repérage et correspond à la grandeur nulle, le repère n indique qu'on a reporté n fois l'unité de mesure à partir de l'origine de la graduation; plus généralement du repère a au repère a + n, on a n.u. Si on enrichit la graduation en respectant les propriétés d'additivité, le repérage sur la graduation continue à donner des renseignements sur les mesures.

EXEMPLES: mesure des longueurs avec une règle graduée, des poids avec un peson, mesure des durées et repérage des instants avec un chronomètre, repérage des températures et mesure des écarts de température avec un thermomètre, mesure des capacités avec un verre gradué.

2.1.2. Il y a plusieurs introductions possibles des décimaux à partir de la mesure et elles ne sont pas équivalentes.

a) ***Utilisation du système métrique***

Le terme "introduction par la mesure" est souvent interprété comme: faire des changements d'unités dans le système métrique. Par exemple, on écrit 3,25 m pour 3 m 25 cm ou pour 325 cm en utilisant un tableau de conversion. La virgule est un moyen de repérer l'unité choisie.

INCONVENIENTS: Il y a dans cette méthode le risque de réintroduction de la méthode de 1970 avec tous ses inconvénients: on ne construit pas de nouveaux nombres; on introduit un codage à virgule mais les écritures obtenues ne sont que des écritures à virgule d'un nombre entier (3,25 m au lieu de 325 cm) ou d'un couple d'entiers (3,25 m au lieu de 3 m 25 cm). De ce fait, on constate par la suite, notamment en 4ème, que dans les problèmes de comparaison et les calculs, les élèves traitent les décimaux comme deux entiers naturels juxtaposés. (Voir paragraphe 4. Causes d'erreurs.)

Certes, la longueur est une grandeur continue alors que le nombre d'habitants est une grandeur discrète. Pour les longueurs on pourrait envisager de continuer à subdiviser indéfiniment l'unité ce qui n'est pas le cas pour un nombre d'habitants. Il faudrait pour cela quitter le point de vue du mesurage pour passer à celui de la mesure. Or on ne le fait pas : en effet, on a l'habitude de s'arrêter à la plus petite unité couramment utilisée (pour les longueurs par exemple on ne descend guère en-dessous du mm), si bien qu'on n'utilise pas plus de 2 ou 3 décimales. Les enfants auront donc du mal à concevoir des décimaux ayant un nombre arbitraire de chiffres après la virgule ; en particulier, ils seront incapables d'imaginer qu'entre deux décimaux donnés on puisse toujours en intercaler un autre (et donc une infinité) et ils seront tentés de dire que le suivant de 3,253 est 3,254 s'ils se réfèrent à 3 m et 253 mm.

b) ***Mesure - partage***

Une autre manière de concevoir une introduction par la mesure est d'essayer de construire une correspondance entre une grandeur et les nombres satisfaisant aux propriétés d'additivité (cf. ci-dessus). Prenons l'exemple de la longueur. Une unité u étant choisie, les nombres entiers permettent d'associer un nombre à certaines longueurs mais pas à toutes. Si on choisit une unité plus petite (par exemple un sous-multiple de l'unité donnée) on peut associer un nombre entier à de nouvelles longueurs tandis que les anciennes changent de mesure, mais on retrouve le même problème, il faut à nouveau tout modifier pour mesurer de nouvelles longueurs. On n'a fait aucun progrès conceptuel.

Un autre point de vue consiste à garder la même unité et à inventer de nouveaux nombres pour enrichir l'ensemble des longueurs mesurables. Pour prendre en compte toutes les longueurs on aura besoin de l'ensemble des nombres réels positifs qui sera introduit beaucoup plus tard (à partir de la 4ème). De ce fait, on va d'abord, à l'école élémentaire, enrichir l'ensemble des entiers de certaines fractions et en particulier des fractions décimales (en effet, les nombres décimaux permettent d'approcher les réels d'aussi près qu'on veut).

Si pour une longueur l, il existe un entier k tel que

$$ku \leqslant l < (k+1)u, \text{ alors } l = ku + r \text{ avec } r < u.$$

Le problème est de mesurer r .

Si on subdivise l'unité u en n parties égales, chacune des parties obtenues a comme longueur $\frac{1}{n}$ u ; la mesure de chaque partie avec l'unité u est donc $\frac{1}{n}$. Ainsi $\frac{1}{n}$ apparaît comme le nombre tel que $n \times \frac{1}{n} = 1$.

Si on trouve un entier p tel que $r = p \times \frac{1}{n}u$, on a $r = \frac{p}{n}u$ où $\frac{p}{n}$ a le sens $p \times \frac{1}{n}$.

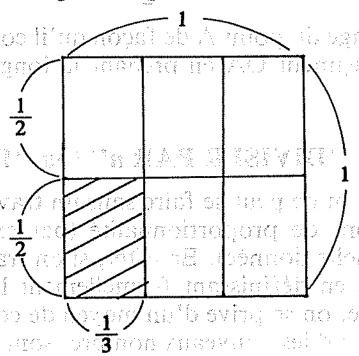
On introduit ainsi quelques fractions pour rendre compte de nouvelles mesures : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, etc... et leurs multiples $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{16}$, etc... et par la suite on s'intéresse plus particulièrement aux fractions décimales parce qu'elles permettent de calculer plus facilement.

REMARQUE: Au lieu de subdiviser l'unité, on peut introduire directement la fraction $\frac{p}{n}$ par *commensuration:* on reporte r un certain nombre n de fois jusqu'à obtenir une longueur qui soit multiple de u ; si c'est possible on obtient deux entiers n et p tels que nr = pu ; on écrit alors $r = \frac{p}{n} u$ et $\frac{p}{n}$ a le sens $n \times \frac{p}{n} = p$ (on a $\frac{1}{n}$ comme cas particulier pour p = 1).

Les symboles ainsi introduits prennent très vite un statut de nombre car ils se combinent dès leur apparition aux nombres entiers au sens qu'on peut les comparer aux entiers et les additionner avec eux. L'addition et la comparaison de 2 nombres, nouveaux ou entiers ont un sens: elles se déduisent de l'addition et de la comparaison des longueurs. Il se pose évidemment des problèmes techniques quand il s'agit de comparer ou d'ajouter des fractions de dénominateurs différents. Dans tous les cas le sens du produit d'un nouveau nombre par un entier résulte de l'addition itérée mais le produit de 2 nouveaux nombres ne prendra son sens que dans une situation nouvelle:

— On peut recourir à la mesure des aires. En prenant une unité d'aire adaptée à l'unité de longueur, la mesure de l'aire d'un rectangle est le produit des mesures des dimensions du rectangle. On définit le produit de 2 fractions pour que cette propriété soit toujours vérifiée.

Par exemple $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ est la mesure de l'aire du rectangle de dimensions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Ce rectangle se reporte 6 fois dans le carré unité.



La mesure de son aire est donc $\frac{1}{6}$.

Pour cette présentation il est nécessaire de travailler au préalable sur la mesure des aires de rectangles et sur les fractions d'aire.

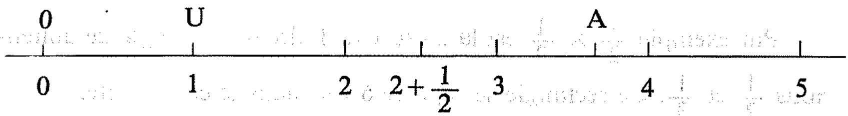
— On peut aussi considérer les nouveaux nombres comme opérant sur des mesures, elles-mêmes exprimées par des nouveaux nombres. Par exemple $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ prend le sens de "la moitié du tiers". Avec ce point de vue, la commutativité n'est pas évidente.

De toute façon les deux points de vue sont nécessaires et il faudra faire la liaison entre les deux.

2.2. INTERCALATION - REPERAGE

L'intercalation est un moyen de coder des objets que l'on insère entre deux objets déjà repérés par des codes. Par exemple, la construction d'une nouvelle maison entre 2 maisons déjà numérotées introduit un codage tel que 13 bis ou 13 A. Il s'agit là d'un repère (voir repérage dans le § 2.1.1) qui ne représente pas un nombre et donc on ne peut pas opérer avec ces codes dans ces situations. De ce fait, cette présentation ne permet d'atteindre aucun des objectifs visés mis à part le fait que les écritures à virgule se rangent en utilisant les mêmes règles.

Cependant les codes obtenus par repérage pourront représenter des nombres dans le cas où le repérage est lié à une mesure. Ce n'est que dans ce cas que l'on pourra opérer sur ces codes (voir § Mesure). L'utilisation de la graduation d'une droite associée à d'autres présentations des décimaux (mesure, fonctions "diviser par n") présente de grands avantages : l'ordre a du sens et on peut concevoir qu'entre deux décimaux on peut en intercaler une infinité.



Recherche d'un codage du point A de façon qu'il corresponde à la mesure de la longueur du segment OA en prenant la longueur du segment OU comme unité.

2.3. FONCTIONS "DIVISER PAR n" (ou "DIVISER PAR 10")

Cette présentation ne peut se faire sans un travail préalable et parallèle sur des situations de proportionnalité (par exemple réalisation de maquettes à une échelle donnée). En effet, si on travaille uniquement au niveau des nombres en définissant formellement les nouvelles écritures hors de tout contexte, on se prive d'un moyen de contrôle sur les calculs, moyen que l'on a quand les nouveaux nombres sont créés pour répondre à un problème physique.

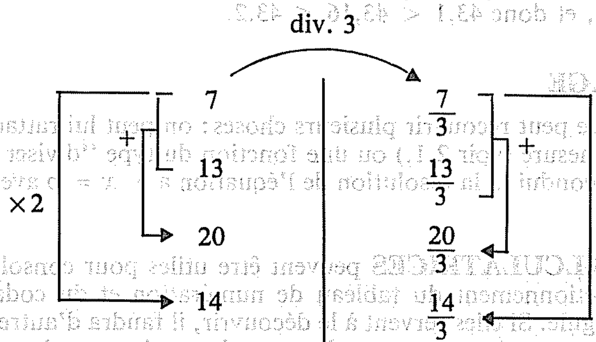
Les fonctions numériques qui traduisent les situations de proportionnalité sont des fonctions linéaires. Leurs propriétés permettent de définir la somme de deux nombres nouveaux et le produit d'un nombre nouveau par un entier.

EXEMPLE :

Si à 7 correspond $\frac{7}{3}$
Si à 13 correspond $\frac{13}{3}$ alors à $(7+13)$ correspond $\frac{7}{3}+\frac{13}{3}$

D'autre part, $7 + 13 = 20$; il lui correspond $\frac{20}{3}$; d'où $\frac{7}{3} + \frac{13}{3} = \frac{20}{3}$.

De même à $2 \times 7 = 14$ correspond $2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$

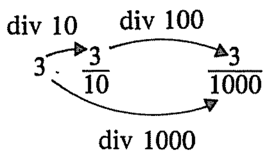


Avec cette présentation également, il est difficile de donner du sens au produit de deux nouveaux nombres.

Il faut réinsérer les nouveaux nombres dans l'ensemble de départ et chercher leur image, ou composer deux fonctions du type "diviser par n" (ou "multiplier par $\frac{a}{b}$") à condition d'avoir établi que multiplier par $\frac{1}{n}$ revient à diviser par n.
Diviser par n puis diviser par p revient à diviser par n × p.

Par exemple $\frac{3}{10} \times \frac{2}{100} = \left(\frac{3}{10} \times \frac{1}{100}\right) \times 2 = \frac{3}{1000} \times 2$

car



(Voir 3ème partie IV : introduction des nombres décimaux par des fonctions "diviser par n".)

Les fonctions "diviser par n" conservent l'ordre; l'ordre sur les nouveaux nombres se déduit de l'ordre sur les entiers.

Par cette méthode, il est possible de concevoir qu'entre deux nouveaux nombres on peut en intercaler un autre, mais ce n'est pas immédiat:

Par exemple si 43,1 et 43,2 ont été obtenus comme des images de 431 et 432 par la fonction "diviser par 10", il est difficile de concevoir l'intercalation de nouveaux nombres entre 43,1 et 43,2 puisqu'il n'y a pas d'entier entre 431 et 432. Par contre 43,1 et 43,2 peuvent être interprétés comme les images de 4310 et 4320 par la fonction "diviser par 100". Il existe alors des entiers entre 4310 et 4320, par exemple 4316; l'image de 4316 par "diviser par 100" est comprise entre les images 4310 et 4320 par cette fonction, et donc $43{,}1 < 43{,}16 < 43{,}2$.

2.4. PARTAGE

Le partage peut recouvrir plusieurs choses: on peut lui rattacher un problème de mesure (voir 2.1.) ou une fonction du type "diviser par n" (voir 2.3.). Il conduit à la résolution de l'équation $a \times x = b$ avec a et b entiers.

2.5. LES CALCULATRICES peuvent être utiles pour consolider les règles de fonctionnement du tableau de numération et du codage des nombres à virgule. Si elles servent à le découvrir, il faudra d'autres situations pour que ces codages prennent le statut de nombre et puissent servir à résoudre des problèmes.

CONCLUSION:

Quelle que soit la présentation choisie, il faut que les nouveaux nombres créés étendent les anciens et soient utilisables dans d'autres situations, pour résoudre des problèmes variés; tous les nombres doivent en particulier être disponibles pour rendre compte de mesures, calculer sur des mesures comme pour coder des applications linéaires (coefficients de proportionnalité).

3

EXEMPLES DE PRÉSENTATIONS

1^er^ EXEMPLE DE PRÉSENTATION

Une approche des fractions par la mesure des longueurs et des aires. Les fractions décimales sont privilégiées pour simplifier les calculs.

On simplifie finalement l'écriture en introduisant la convention de la virgule.

La description du processus complet fait l'objet d'une brochure qui doit paraître à l'IREM de Paris VII vers Décembre 1985 "Liaison école-collège - Nombres décimaux".

Nous décrivons ici les grandes lignes du processus d'apprentissage et nous détaillons quelques séquences.

1. Les grandes lignes du processus

1. RÔLE DES NOMBRES DÉCIMAUX

Les nombres servent principalement à dénombrer des collections, à désigner des mesures, des rapports entre mesures et à calculer sur ces mesures. Ils servent aussi à coder des fonctions et à calculer sur ces fonctions.

Les nombres entiers ont été définis pour rendre compte des propriétés communes à certaines collections d'objets. L'ordre et les opérations dans l'ensemble **N** des entiers sont introduits pour rendre compte de manipulations sur les collections d'objets. Ainsi les nombres entiers sont adaptés à la mesure de quantités discrètes. Intéressons-nous maintenant à la mesure des quantités continues que sont les grandeurs physiques, par exemple les longueurs, les aires, les volumes, les durées, les masses, les pressions... Elles ont toutes les mêmes propriétés et vont amener au même modèle mathématique: l'ensemble **R** des nombres réels. Plus précisément, si on choisit une unité de mesure u, les nombres entiers permettent de mesurer certaines quantités mais pas toutes. Si l'on veut augmenter le stock des quantités mesurables, on a deux possibilités:

— prendre une unité v plus petite que u; mais on reste limité, on est amené à changer à nouveau d'unité; cependant quelle que soit l'unité choisie, on ne peut mesurer avec **N** les quantités plus petites que v.

— inventer des nombres qui rendent compte de toutes les mesures en u. L'ensemble **R** des nombres réels répond à la question. Les nombres décimaux permettent d'approcher d'aussi près qu'on veut n'importe quel nombre réel. Les nombres rationnels ont aussi cette propriété. De plus, la somme, la différence, le produit et le quotient de deux rationnels sont encore rationnels: la somme, la différence, le produit de deux décimaux sont encore des nombres décimaux; le quotient de deux décimaux n'est pas toujours décimal mais il peut être approché d'aussi près qu'on veut par des nombres décimaux. En revanche, compte-tenu de notre écriture en base 10, l'ensemble des nombres décimaux présente un avantage majeur par rapport à l'ensemble des rationnels: les calculs, les comparaisons y sont beaucoup plus faciles.

2. QUELQUES REMARQUES SUR LA CONSTRUCTION DES SÉQUENCES D'APPRENTISSAGE

a) Hypothèses sur la construction des concepts

— Les concepts se construisent à l'occasion d'*actions*. Ils prennent leur sens grâce aux problèmes qu'ils permettent de résoudre. Chaque nouveau problème contribue à enrichir le concept.

— Un nouveau concept se construit aussi en se *situant par rapport aux connaissances déjà acquises*, soit pour les élargir et les généraliser, soit pour les remettre en cause et en construire de nouvelles mieux adaptées au problème posé.

— Un problème fait en général intervenir plusieurs concepts. Chacun prend aussi son sens dans *les relations qu'il entretient avec les autres concepts* impliqués dans le problème.

— Cette diversité apparaît notamment si le problème peut se formuler dans *plusieurs cadres* entre lesquels on peut établir des correspondances (par exemple cadre physique, cadre géométrique, cadre numérique, cadre graphique).

Prenons, par exemple, le problème suivant: "Recherche de rectangles de périmètre donné, parmi ces rectangles, y en a-t-il un d'aire maximum?"

Il est formulé dans le cadre géométrique, on peut le reformuler dans les cadres numérique et graphique. Chacun des cadres sert de référence à l'autre et contribue à donner de la signification au problème.

— Les notions mathématiques fournissent des moyens de décrire une situation et de faire des prévisions sur le résultat d'actions non encore effectuées. Pour faire ces descriptions et prévisions et les communiquer, on est amené *à construire un langage oral et écrit* rendant compte des objets de la situation et des relations entre eux.

— Les prévisions peuvent être contrôlées par l'action et éventuellement remises en cause. Cependant ce moyen de contrôle n'est pas toujours possible ni adapté au problème ni même sûr. Les élèves sont alors amenés à *chercher d'autres moyens de validation*; cette phase est nécessaire à l'explicitation par les élèves des concepts et des relations dont le maître vise l'apprentissage.

— Il est dès lors possible au maître de pointer les connaissances que les élèves doivent retenir. C'est l'objet de la phase d'*institutionnalisation*. Cette phase contribue à donner un *statut d'objet mathématique* autonome aux nouvelles connaissances. Leur réinvestissement dans d'autres problèmes est alors possible.

— Une seule situation ne suffit pas pour construire un concept. Plusieurs situations sont nécessaires pour faire fonctionner le concept sous ses divers aspects et notamment mettre en jeu la diversité des relations qu'il entretient avec d'autres concepts.

— Pour que les nouvelles connaissances soient *intégrées aux anciennes* et soient facilement *mobilisables* pour poser et résoudre de nouveaux problèmes, il est nécessaire qu'elles deviennent suffisamment familières. Elles prennent alors le statut de connaissances anciennes sur lesquelles on va pouvoir s'appuyer pour en construire de nouvelles. Des situations de *renforcement* permettent d'acquérir la familiarité souhaitée.

— Compte tenu des principes précédents, il faut s'attendre à ce qu'un concept se forme sur une longue période de temps. C'est ce que nous affirme la psychologie cognitive et ce qu'on constate dans la pratique, par exemple pour la construction des décimaux ou de la proportionnalité.

b) Organisation des séquences

Une séquence se décompose en plusieurs phases :

I. Exposé du problème

Le maître expose la consigne, distribue éventuellement le matériel, s'assure, au cours d'une discussion avec les élèves que la consigne a du sens pour chacun d'eux.

II. Phase de recherche

Les élèves travaillent individuellement ou en équipe, ou en situation de communication. Au cours de cette phase, il se peut que des difficultés fassent l'objet d'une discussion.

III. Bilan. Présentation des résultats

Selon le cas, le maître recense les résultats et les fait commenter par la classe, ou bien les équipes viennent présenter leur travail et le soumettent à la critique des autres.

Au cours de cette phase, les élèves sont obligés soit de convaincre leurs camarades de la validité de leur réponse, soit de se laisser convaincre de leurs erreurs. Dans tous les cas une argumentation sur le problème doit se développer. Celle-ci peut déboucher sur de nouvelles questions, une nouvelle extension du problème et des procédures utilisées.

IV. Phase de synthèse et d'institutionnalisation

Au début de la séance suivante, on résume la séance (ou les séances) précédente(s) sur le même problème. Les élèves rappellent le problème, les solutions qu'ils ont trouvées et les méthodes utilisées.

Les élèves comparent les méthodes, leurs avantages et leurs inconvénients.

Au cours de cette phase de synthèse, les caractères importants du problème (autrement dit l'objectif d'apprentissage visé par le maître) sont soulignés.

Ils sont alors détachés de leur contexte d'introduction et institutionnalisés. Il s'agit, ici, de dégager, à partir de ce qu'ont produit les élèves, ce qu'ils doivent retenir et de le leur dire. Ce pointage est indispensable si on ne veut par perdre les bénéfices des phases d'action et d'explicitation.

V. Mise à niveau de la classe et évaluation

C'est une phase de travail personnel servant au maître à avoir une photographie de la classe et à l'élève à savoir où il en est. Ce travail se fait essentiellement sous forme d'exercices de 2 types qui interviennent à des moments différents et qui remplissent des fonctions différentes :

1/ Repérer les élèves en difficulté et leur apporter individuellement un complément d'informations et d'explications. Cette mise à niveau de l'ensemble de la classe est essentielle à la progression de l'apprentissage.

Elle n'est cependant réalisable que si peu d'élèves en ont besoin. Pour remplir cette fonction de repérage et mise à niveau, le maître propose aux élèves un petit nombre d'exercices courts mais typiques de l'apprentissage visé, en général à la fin des phases de bilan.

2/ • Familiariser l'élève avec les nouvelles connaissances qu'il doit retenir et maîtriser.

• Evaluer l'élève, tester ses acquis présumés après la mise à niveau.

Pour répondre à cela, le maître propose plusieurs séries d'exercices comportant chacune de nombreuses petites questions. Chaque série met en jeu *un* élément nouveau (dans un contexte plus ou moins complexe) qui a déjà fonctionné en situation d'action et avec lequel il reste à se familiariser pour en acquérir une bonne disponibilité. Ces tests se passent après la phase d'institutionnalisation.

Ces exercices révèlent les failles. Ils permettent une nouvelle mise à niveau sélective si elle porte sur peu d'élèves, et la mise en place d'une nouvelle situation d'action centrée sur les difficultés des élèves si nombre d'entre eux sont concernés.

VI. Réinvestissement - Evolution des conceptions.

On peut penser qu'au cours du travail les conceptions des élèves ont évolué. Il est important de proposer aux élèves des problèmes plus complexes dans lesquels les nouvelles conceptions devraient fonctionner et au cours desquels elles pourront continuer à évoluer.

On se rend compte de l'importance de chacun des temps: activités -institutionnalisation - exercices - réinvestissement pour un apprentissage durable et sur lequel on pourra s'appuyer ultérieurement.

3. CHOIX DE LA SITUATION

a) Donner du sens aux nombres non entiers

Les hypothèses didactiques explicitées ci-dessus nous conduisent à chercher des problèmes dans lesquels les nombres décimaux sont un outil efficace. L'intérêt des nombres décimaux est d'approcher d'aussi près qu'on veut n'importe quel nombre réel. Nous introduirons donc les nombres décimaux dans des situations où les entiers sont insuffisants à fournir une solution et où les décimaux permettront de donner des solutions approchées. Les fractions et les nombres décimaux vont venir enrichir l'ensemble des nombres entiers que les élèves maîtrisent déjà assez bien.

Parmi toutes les grandeurs physiques qu'on est susceptible de mesurer, les longueurs et les aires vont jouer un rôle privilégié dans l'apprentissage car certaines d'entre elles au moins modélisent des objets matériels que les enfants peuvent manipuler ou construire facilement, ce qui n'est pas le cas du temps par exemple. La mesure des longueurs joue un rôle important à cause de la représentation des nombres qu'elle permet: un trait gradué qu'on peut concevoir très long permet de représenter aussi bien des longueurs que des nombres, les mesures des longueurs pour une unité choisie : entiers d'abord puis 1/2, 1/4, etc.; la graduation s'enrichira au fur et à mesure du stock des longueurs mesurables jusqu'à ce que tout point de l'axe représente un nombre (ce qui s'achèvera bien au-delà de l'école primaire). Par l'intermédiaire de la mesure, on peut d'ailleurs représenter sur un axe gradué n'importe quelle grandeur physique.

Nous avons choisi d'introduire les premières fractions dans une situation de mesure des longueurs présentée ci-dessous (2.1). Nous nous intéressons ensuite à la mesure des aires de surfaces planes: la comparaison de longueurs se ramène à l'inclusion des segments, à un déplacement près; ce n'est pas le cas pour la comparaison des aires (deux surfaces peuvent avoir la même aire sans être superposables). Dans cette situation on distingue clairement le cadre numérique et le cadre géométrique. La mesure des aires nous sert aussi à donner un sens au produit de 2 fractions.

b) Définition des opérations

La correspondance grandeurs/nombres par la mesure comporte aussi une correspondance entre relations : à la juxtaposition de longueurs ou d'aires correspond l'addition des nombres qui les mesurent.

Le produit de deux entiers a et b prend deux sens :

1) a est une mesure, b un nombre sans dimension

$$b \times a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ termes}}$$

$b \times a$ est une mesure de même grandeur que a ; exemple : périmètre d'un carré.

2) a et b sont des mesures $a \times b$ ou $b \times a$ désigne une mesure produit ; exemples : aire d'un rectangle comme produit de longueurs ; distance comme produit d'une vitesse par une durée.

L'extension des nombres va se faire en interaction avec l'extension des opérations.

Le premier sens est utilisé tout de suite pour fabriquer de nouveaux nombres ; exemples : pour deux longueurs u et v telles que :

$$u + u = 2\,u = v \text{ on a : } u = \frac{1}{2}\,v$$

d'où sur les nombres :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Si $u+u+u=v$, alors $u=\frac{1}{3}\,v$ et $u+u=\frac{1}{3}v+\frac{1}{3}v=2\times\frac{1}{3}v=\frac{2}{3}v$

d'une façon générale, si $\mathrm{n}.u = v$

$$\mathrm{p}.u = \mathrm{p}.\ \frac{1}{\mathrm{n}}v = \frac{1}{\mathrm{n}}v + \frac{1}{\mathrm{n}}v + \ldots \frac{1}{\mathrm{n}}v = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{n}}v.$$

Ainsi la correspondance grandeurs/nombres permet d'étendre le produit de deux entiers au produit d'une fraction par un entier :

$$\mathrm{n} \times \frac{1}{\mathrm{q}} = \frac{1}{\mathrm{q}} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{q}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{q}} \text{ et}$$

$$\mathrm{n} \times \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} = \underbrace{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} + \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} + \ldots + \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}}_{\mathrm{n} \text{ termes}} = \frac{\mathrm{n}\times\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$$

$\mathrm{n}\times\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ est défini, $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\times\mathrm{n}$ ne l'est pas encore.

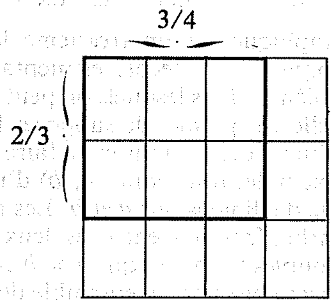
Il n'est pas évident que la multiplication ainsi définie soit commutative, pas plus qu'il ne l'était, dans les entiers, pour la multiplication définie comme addition répétée.

De la même manière que dans les entiers on a choisi de récupérer la commutativité grâce au produit de mesures dans les calculs d'aires de rectangles. Ceci nécessite au préalable de faire des mesures directes d'aires avec des unités d'aires diverses (plusieurs formes de carrelage pour paver une pièce) et d'établir dans le cas des rectangles la relation entre la mesure de l'aire et celle des côtés pour des unités bien choisies. On donne ainsi un sens non seulement aux produits $n \times \frac{p}{q}$ et $\frac{p}{q} \times n$ pour n entier mais aussi au produit $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'}$, ce qui constitue un prolongement de la multiplication en se référant au 2e sens de la multiplication sur les entiers.

C'est en utilisant la mesure directe des aires qu'on va pouvoir nommer le résultat avec des écritures déjà connues ou en en créant de nouvelles selon un algorithme déjà établi. Par exemple $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ est l'aire, mesurée avec le carré de côté $1u$, d'un rectangle de côtés $\frac{2}{3}u$ et $\frac{3}{4}u$ le petit rectangle $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ est reporté 12 fois dans le carré unité, son aire est $\frac{1}{12}$.
Il en faut 6 pour paver le rectangle $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$.

Son aire est $6 \times \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Au passage, on identifie $n \times \frac{p}{q}$ défini comme aire de rectangle ou comme addition répétée.



c) Utilisation des nouveaux nombres dans des problèmes

A mesure que de nouvelles écritures sont créées, elles sont utilisées dans des problèmes, en particulier des problèmes de proportionnalité. De nouvelles écritures sont produites à l'occasion de ces problèmes. Les nouvelles écritures se développent en même temps que les opérations et prennent ainsi progressivement statut de nombre.

d) Où les décimaux interviennent

Les premiers nombres qui apparaissent pour compléter les entiers dans les situations de mesure proviennent des partages en deux, successifs de l'unité de mesure : 1/2, 1/4, 1/8... D'autres nombres apparaissent aussi : 1/3, 1/5... mais ensuite les "chaînes" continuent par partages en deux :

1/3, 1/6, 1/12, etc.
1/5, 1/10, 1/20, etc.

Ce privilège du partage en deux n'a rien d'étonnant : c'est le plus facile à réaliser matériellement d'une part, c'est le procédé d'encadrement le plus efficace d'autre part. L'usage des fractions décimales est particulièrement économique dans les situations où il y a de nombreux calculs et comparaisons entre fractions à faire, où ni les nombres entiers ni les fractions ne permettent de donner une réponse exacte soit parce qu'elle n'existe pas (c'est le cas de la recherche d'un carré d'aire 38 où le problème revient à chercher un nombre x tel que $x \times x = 38$), soit parce qu'on n'a aucune chance de la trouver (jeu de l'explorateur*). (Cf. Cahiers de l'IREM de Bordeaux). Dans les deux cas, la recherche ne pourra se faire que de façon approchée et avec des exigences de précision arbitraires.

e) Rôle des graphiques

Les problèmes de mesures de longueurs et d'aires peuvent se formuler dans plusieurs cadres : le cadre géométrique et le cadre algébrique en premier lieu : les nombres, entiers d'abord, fractionnaires ensuite, qui traduisent des mesures de longueur ou d'aire sont aussi des solutions d'équations : par exemple $n.x = 1$, $n.x = a$, $x.x = a$.

La représentation graphique est un troisième langage qu'il nous paraît intéressant de manipuler dès l'école élémentaire. Il permet une autre formulation des problèmes dans lesquels on peut isoler des variables ayant des relations entre elles. Il permet de supposer l'existence de solutions à des équations, de situer ces solutions et de faire des choix dans une recherche par tests. Par exemple, tout point (a, b) d'un quadrillage gradué représente un rectangle de dimensions a et b. Les rectangles d'aire 38 se répartissent sur une courbe, frontière entre les deux régions correspondant respectivement aux couples (a, b) tels que $a \times b > 38$ et $a \times b < 38$. Les carrés sont sur la première bissectrice, ensemble des couples (a, a). Le carré d'aire 38, s'il existe, se trouvera à l'intersection des deux courbes.

Mais il faut aussi connaître les limites de cette représentation : le tracé toujours imparfait (épaiseur des traits...) et l'échelle qu'on ne peut

---

* Il s'agit de donner des fourchettes d'encadrement de plus en plus précises d'une fraction inconnue.

pas agrandir indéfiniment font qu'il manque de précision et qu'il ne peut que donner des indications.

Avec ces limites, le graphique est cependant un outil qui, en donnant une autre représentation du problème, sert de relais entre le cadre numérique et lui-même au cours des différentes phases de la recherche numérique par l'utilisation des propriétés géométriques des courbes construites, ou entre le cadre des grandeurs physiques et celui des nombres en ramenant la dialectique grandeurs/nombre à la dialectique graphiques/nombres.

2. Présentation de quelques séquences

1. MESURE DES LONGUEURS : RECOURS AUX FRACTIONS

OBJECTIFS :

- utilisation de fractions pour désigner des mesures de longueur qu'on ne sait pas désigner par des nombres entiers avec l'unité donnée et pour calculer sur ces mesures.
- explicitation de relations entre des unités de mesure u et v et des relations entre les mesures correspondantes d'une même longueur.

1.1. Organisation de la séquence

1. *Matériel*

Feuilles de papier blanc (sans lignes), petites bandes de carton fin servant d'unité de longueur (environ 6 cm) en au moins autant d'exemplaires que d'élèves.

2. *Organisation de la classe*

Les élèves sont binômés par deux : émetteur, récepteur, placés assez loin l'un de l'autre dans la classe pour pouvoir travailler séparément. Chaque élève est émetteur d'un message vers un camarade et récepteur d'un autre message (provenant de ce camarade ou d'un autre).

3. *Consigne*

Vous dessinez un trait. Votre récepteur doit reproduire un *trait de même longueur*. Pour cela, vous allez lui donner, sans vous servir de votre règle graduée, l'information nécessaire. Vous lui envoyez cette information dans un message écrit *sans dessin*. Si le récepteur a besoin d'informations supplémentaires, il les demande par écrit sur le message. Ensuite émetteur et récepteur comparent leurs traits pour voir s'ils ont bien la même longueur.

4. *Analyse de la tâche*

Pour satisfaire à la consigne, émetteur et récepteur ont besoin de disposer d'une même unité de longueur. L'information pertinente que doit transmettre l'émetteur est alors la mesure de son trait avec l'unité donnée.

Nous avons expliqué dans le premier paragraphe le choix fait de l'unité. Il reste à déterminer le moment où on va distribuer cette unité. Cela peut être avant que les élèves aient dessiné leur trait ou après qu'ils l'aient tous dessiné.

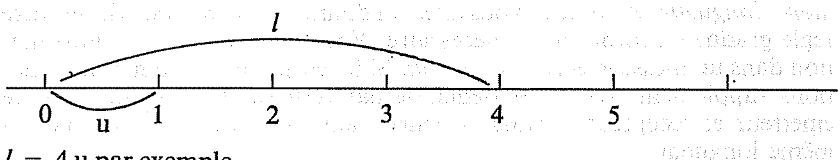
a) *si on donne l'unité avant,* l'émetteur peut choisir la longueur de son trait en se servant de l'unité fournie, par exemple en la reportant un nombre entier de fois. Son message sera alors facile à rédiger et facile à lire.

b) *si on donne l'unité après,* la longueur du trait a de fortes chances de ne pas avoir une mesure entière. Pour écrire un message efficace, l'émetteur sera amené à choisir une unité plus petite par exemple en subdivisant celle qui a été donnée. Dans ce cas la rédaction du message sera plus difficile. L'émetteur pourra décrire sa procédure de subdivision et l'utilisation qu'il en a faite. Il pourra coder ses opérations. Dans tous les cas, la lecture d'un tel message sera plus difficile aussi. Mais c'est dans ce contexte que le recours aux fractions sera efficace et indispensable pour raccourcir les messages.

REMARQUE : Le changement d'unité n'est pas indispensable. On peut construire une nouvelle longueur L telle que $L = p.l = q.u$ où l est la longueur du trait et u l'unité de mesure. Cette procédure n'a aucune chance d'apparaître ici. Il faudrait pour cela que l'élève, de sa propre initiative, complexifie la situation proposée en construisant un nouveau trait plus grand ; il lui faudra ensuite repérer les relations entre ce nouveau trait et son objet d'étude pour en déduire la relation cherchée entre l et u.

5. *Choix des conditions*

Au moment où le travail ci-dessus est proposé, les enfants ont une pratique des additions et comparaisons de longueurs dans diverses situations : mise bout à bout de baguettes en carton, de traits dessinés sur une feuille. Ils savent faire des comparaisons directes par superposition ou indirectes par un intermédiaire. Ils savent construire des longueurs en reportant une longueur donnée. En particulier, ils savent graduer un trait en nombres entiers pour une unité donnée.



$l = 4$ u par exemple.

Dans un premier temps, nous donnons la consigne sous la forme a (unité donnée avant) pour permettre aux élèves d'utiliser des reports de longueurs et des codages en nombres entiers, autrement dit de se référer à leurs connaissances antérieures. Ils peuvent toutefois procéder autrement. Dans un deuxième temps, nous donnons la consigne sous la forme b (unité donnée après). Cette fois ils sont contraints de procéder autrement. Les procédures décrites ci-après correspondent à la forme b proposée à deux reprises :

- une première fois sans parler de la longueur du message,
- une deuxième fois en précisant que le message doit être le plus court possible.

1.2. Description des procédures

1. *Procédures de l'émetteur*

P.1. Dessiner un trait qu'on peut décrire par rapport à la feuille (exemple une diagonale ou un trait obtenu en allant d'un côté de la feuille au côté opposé parallèlement au bord de la feuille).

A ce moment là les élèves se réfèrent directement à la feuille et n'ont pas besoin de mesurer leur trait avec l'unité donnée. Ils savent que les feuilles distribuées par le maître sont les mêmes pour tous. Pour bloquer cette procédure, on peut imposer que le trait dessiné ne touche aucun bord de la feuille.

P.2. On reporte u autant de fois qu'il est possible sur la longueur choisie l. On se ramène à évaluer le reste $r = l - nu$.

a) *r est tout petit devant u* (par défaut ou par excès) et *on le néglige* : le message comporte alors le nombre n de reports et une information qualitative sur le reste ("un tout petit peu plus" ou "c'est presque n u").

Si *r est notable,* on cherche à évaluer r.

b) *On plie u* pour obtenir une unité plus petite v qu'on sait relier à u. Comportement majoritaire : pliage en deux itéré. On plie u en deux, on reporte $\frac{1}{2}$ u dans r si possible ; si on ne peut pas ou s'il reste encore quelque chose, on plie à nouveau en deux, on obtient une nouvelle unité $\frac{1}{4}\text{ u} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\text{ u})$ etc... et on itère le pliage en deux tant que ce pliage est possible et tant que le reste n'est pas négligeable (le pliage en deux est matériellement possible trois ou quatre fois).

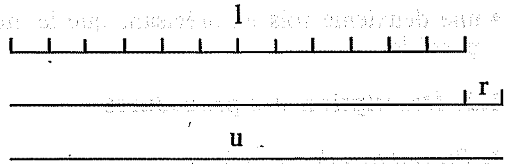
Autre pliage : si le pliage en deux fournit une unité trop grande et le pliage en quatre une unité trop petite, on estime que le pliage en trois devrait convenir et on le teste. S'il donne un reste négligeable on utilise les 1/3, sinon on revient au pliage en deux.

c) *On reporte r dans l'unité u.* Si le report tombe juste (ou presque) r est de la forme (1/n)u. Si le report ne tombe pas juste, cette procédure est abandonnée.

EXEMPLE RENCONTRÉ

Un élève a tracé une longueur l légèrement plus petite que u, il a marqué r sur u et a reporté r dans l. Il a pu reporter la longueur r 12 fois dans l et donc 13 fois dans u et a écrit

$l = \frac{12}{13} u$



d) *on choisit la largeur de la baguette* unité comme nouvelle unité plus petite pour mesurer le reste. Pour bloquer cette procédure le maître choisit pour matérialiser u des baguettes de longueur u mais de largeur variable. Emetteur et récepteur savent que leurs baguettes sont de même longueur mais pas forcément de même largeur.

2. *Ecriture des messages*

On repère trois catégories de messages :

— l'émetteur décrit en français la suite de ses actions. Le message peut être suffisant pour reconstruire le trait ou comporter des ambiguïtés. Exemple : "tu prends la baguette dans le sens de la longueur, tu la places sur ton trait, tu mets un trait, ... il reste un petit bout, tu plies en deux, etc..."

— l'émetteur envoie des indications sur la mesure de son trait, indications qu'il note en français. Exemple : "mon trait fait 3 unités et le demi du demi de u".

— l'émetteur envoie la mesure de son trait avec un codage chiffré, soit complétement, soit partiellement.

Exemples : $2u + \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} u$ $\qquad$ $\frac{1}{2}u$ + un demi du quart de u.

La première fois que cette consigne b est posée, les messages émis sont majoritairement du premier type. Ceci n'est pas étonnant, pour écrire un tel message, l'émetteur n'a pas besoin d'analyser son travail, il lui suffit de décrire ce qu'il a fait. La description pose cependant des problèmes d'expression en français. Les phrases sont longues, pas toujours claires, et on risque d'oublier certaines étapes. Le récepteur peut ne pas comprendre le message ou obtenir un trait de longueur différente.

Après une phase de compte-rendu avec discussion des premiers messages et bilan des premières écritures codées, on repose la même consigne b en demandant que les messages soient le plus court possible. Le troisième type de messages devient alors majoritaire.

3. *Travail du récepteur et confrontation des deux traits*

Au cours du premier échange de messages (consigne b) le récepteur rencontre des difficultés pour lire le message et le décoder, soit parce qu'il est long et mal construit, soit parce qu'il manque des informations, soit parce qu'il ne comprend pas le codage de l'émetteur.

Au cours du deuxième échange, les messages sont en général bien écrits et bien décodés. Les traits de l'émetteur et du récepteur ne se superposent pas toujours. L'erreur provient soit de la manipulation, soit d'un reste négligé par l'émetteur, soit des deux. Emetteur et récepteur ont alors à se mettre d'accord sur les causes du décalage observé et sur la précision de la mesure qu'il est raisonnable d'exiger.

4. *Premières écritures dégagées de la comparaison des messages*

Dès le premier bilan qui suit les échanges de messages, des écritures fractionnaires sont utilisées :

$$\frac{1}{2}\,u + \frac{1}{2}\,u = 1\,u \qquad 2 \times (\frac{1}{2}u) = 1\,u$$

$$\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\,u) = \frac{1}{4}\,u$$

$$\frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}\,u = \frac{1}{2}\,u \qquad 2 \times (\frac{1}{4}\,u) = \frac{1}{2}\,u.$$

$$\frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}\,u = 1\,u = 4 \times (\frac{1}{4}\,u)$$

$$\frac{1}{2}\,(\frac{1}{4}\,u) = \frac{1}{8}\,u \qquad \frac{1}{2}\,(\frac{1}{8}\,u) = \frac{1}{16}\,u$$

$$\frac{1}{3}\,u + \frac{1}{3}\,u + \frac{1}{3}\,u = 1\,u.$$

$$\frac{1}{2}\,(\frac{1}{3}\,u) = \frac{1}{6}\,u \qquad 2 \times (\frac{1}{6}\,u) = \frac{1}{3}\,u.$$

$$\frac{1}{2}\,(\frac{1}{6}\,u) = \frac{1}{12}\,u.$$

$$\frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4}\,u = 2 \times (\frac{1}{4}\,u) + \frac{1}{4}\,u = 3 \times (\frac{1}{4}\,u) = \frac{3}{4}\,u.$$

Elles sont reprises en compte par l'ensemble de la classe pour écrire de nouveaux messages lors de la 2ème consigne b.

1.3. Développement des écritures et enrichissement de la graduation

1. *Codage d'autres subdivisions de l'unité*

Lors de la consigne b sous sa deuxième forme (messages le plus court possible), les écritures fractionnaires sont largement utilisées dans les messages. Au cours du bilan qui suit, pour améliorer la précision, les élèves sont amenés à itérer le pliage en deux de l'unité u. Au-delà du 1/8 ou à la rigueur du 1/16, le pliage effectif n'est plus possible. Certains élèves proposent des désignations orales ou écrites telles que $\frac{1}{1024}$ u ou $\frac{1}{2048}$ u avec le sens $\frac{1}{1024} = \frac{1}{2}(\frac{1}{512})$ et $\frac{1}{2048} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1024})$ il s'agit là d'une extension formelle de la subdivision en 2 qui se produit chez des élèves qui ont une bonne pratique du calcul oral. Si ce n'est pas le cas, ce travail sera de toute façon repris à propos des fractions décimales.

Si les élèves ne les ont pas encore envisagées, le maître propose d'autres subdivisions plus difficiles à réaliser matériellement :

$\frac{1}{5}$u , $\frac{1}{10}$ u = ... avec le sens $5 \times \frac{1}{5}$ u = 1.u,

$10 \times \frac{1}{10}$ u = 1.u. Les élèves utilisent diverses écritures telles que $\frac{p}{5}$ u = p × $\frac{1}{5}$ u. Plus généralement pour des valeurs entières de p et n ils utilisent des écritures du type :

$\frac{p}{n}$u = p × $\frac{1}{n}$ u avec n × $\frac{1}{n}$ u = 1.u

2. *Correspondance longueurs-nombres*

L'unité de longueur u étant choisie, à toute longueur l obtenue en reportant u un nombre entier de fois, on associe le nombre n de reports, qu'on appelle la mesure de l en u. Mais il y a des longueurs qui ne sont pas de la forme n.u, le problème est de leur associer une mesure en u. Les codages fractionnaires vont permettre de le faire pour certaines d'entre elles. Par exemple 1/2 est la mesure de la longueur 1/2 u, $2 + \frac{3}{4}$ est la mesure de la longueur 2u + 3 × $\frac{1}{4}$u. Les opérations et comparaisons entre longueurs vont se traduire en opérations et comparaisons entre les mesures : par exemple $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$; $2 + \frac{2}{4} < 3$; $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Des questions sur le statut de ces écritures se posent : on les additionne, on les compare comme des nombres ; pourtant l'extension des règles de calcul ne va pas de soi. Citons la remarque d'un élève : "c'est drôle, la moitié de 12 c'est 6, et la moitié de $\frac{1}{12}$ c'est $\frac{1}{24}$, la moitié de $\frac{1}{6}$ c'est $\frac{1}{12}$".

Au cours des phases d'institutionnalisation, ces nouvelles écritures acquièrent le statut de nombre au fur et à mesure de l'extension des opérations (+, −, ×, :) et des comparaisons.

3. *Représentation des longueurs et de leur mesure :*

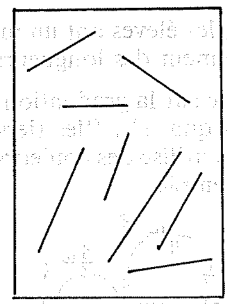
Les élèves ont mesuré des longueurs au CE. Ils savent en principe se servir d'une graduation en nombres entiers. On propose aux élèves diverses activités qui ont pour but de vérifier d'abord que c'est bien le cas et ensuite d'enrichir la graduation en y introduisant les mesures non entières trouvées. Ceci est un pas dans l'acquisition du statut de nombre par ces mesures.

Voici une de ces activités :

UTILISATION D'UNE GRADUATION POUR MESURER DES LONGUEURS.

L'objectif de cette séquence est d'enrichir la correspondance entre les points de la graduation et les mesures de longueur.

a/ MATÉRIEL + une feuille polycopiée sur laquelle sont dessinés des segments, distribués n'importe où dans la feuille et dans des directions différentes. Les longueurs des segments sont assez voisines (par exemple : 8 cm, 12 cm, 10 cm, 9 cm, 10 cm 1/2, 13 cm 1/2, 12 cm 3/4, 9 cm 3/4, 11 cm).



+ une unité de mesure de longueur (par exemple 6 cm) matérialisée par une petite bande de carton.

+ une bande de papier de 20 cm environ.

b/ CONSIGNE : classer tous les segments selon leur longueur.

La disposition des segments dans la feuille et leur longueur ont été choisies de façon que le classement ne puisse se faire à l'œil pour tous les segments. Les élèves peuvent

— soit mesurer les segments avec l'unité u et comparer les mesures obtenues

— soit reporter les longueurs des segments sur la bande de papier à partir d'une même origine, et déduire le classement des segments de celui de leurs extrémités.

La deuxième procédure est commode mais ne permet pas de connaître les mesures de longueurs des segments avec l'unité u. Un moyen de réunir les avantages des deux procédures est de graduer la bande de papier à l'aide de l'unité u (en marquant les entiers, les $\frac{1}{2}$, les $\frac{1}{3}$, les $\frac{1}{4}$, etc...)

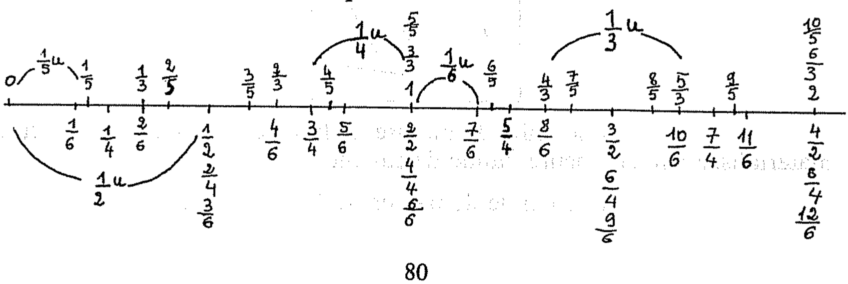
Dans un deuxième temps, on distribue une deuxième feuille polycopiée donnant une série de longueurs de segments mesurés en u (différents de ceux de la première feuille mais non dessinés). La consigne est d'ordonner tous les segments selon leur longueur, ceux de la première feuille et ceux de la deuxième feuille.

TROIS PROCÉDURES SONT POSSIBLES :

- procédure numérique : mesurer en u les segments dessinés et comparer les mesures (donc ordonner des nombres).
- procédure géométrique : représenter par des segments les longueurs données et reporter tous les segments sur un axe à partir d'une même origine. On obtient ainsi des segments emboîtés.
- procédure mixte : repérer sur un axe gradué avec l'unité u les mesures fournies, reporter à partir de 0 sur l'axe gradué les segments de la première feuille. Comparer les longueurs revient à repérer l'ordre des points marqués.

Avec cette procédure, les élèves ont un moyen de contrôle de l'ordre des nombres par l'emboîtement des longueurs correspondantes.

Cette activité débouche sur la graduation systématique d'un axe en y plaçant "les demis", "les quarts", "les tiers", "les cinquièmes", "les dixièmes" par exemple. On utilise des couleurs différentes pour les subdivisions différentes. Par exemple.



REMARQUE : Au cours des activités proposées, les élèves pourront être amenés à ajouter ou à comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur. Il ne s'agit en aucun cas de faire l'apprentissage de la technique de réduction au même dénominateur dans un cadre général. Les élèves pourront résoudre ce problème dans des cas particuliers. Certains cas pourront même rester sans solution pour l'instant.

Pour comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur, d'autres procédés que la réduction au même dénominateur apportent souvent la solution : comparaison à l'unité, comparaison au demi.

EXEMPLES :

* $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ parce que $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$ et $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

* $\frac{17}{18} < \frac{22}{21}$ parce que $\frac{17}{18} < 1$ et $\frac{22}{21} > 1$ $(1 = \frac{18}{18} = \frac{21}{21})$

* $\frac{3}{8} < \frac{4}{7}$ parce que "déjà $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ et il y a un septième de plus que de huitièmes" ou encore $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7}$.

* $\frac{3}{7} < \frac{5}{8}$ parce que $\frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

* Pour comparer $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{8}$ c'est plus difficile mais la comparaison au demi ou à l'unité donnent quand même des résultats :

. $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$ $\qquad \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ donc $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$

. ou encore "il manque $\frac{3}{7}$ à $\frac{4}{7}$ pour faire 1.

il manque $\frac{3}{8}$ à $\frac{5}{8}$ pour faire 1 et $\frac{3}{8} < \frac{3}{7}$ donc $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$".

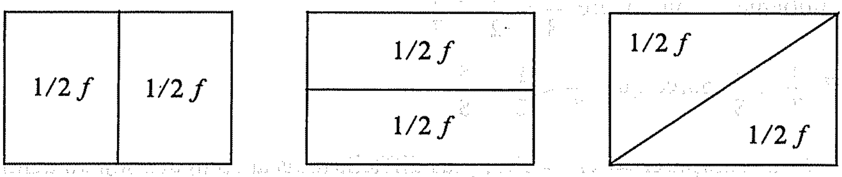
Pour ajouter deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, il est nécessaire de trouver "une unité commune" à $\frac{1}{q}$ et $\frac{1}{q'}$. Ceci est facile si les deux fractions appartiennent à une même "chaîne" par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$ ou encore $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{64}$. Ceci est encore assez facile pour des dénominateurs petits : par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ ou encore $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$.

D'autres dénominateurs communs pourront être recherchés. Mais ce sera toujours pour résoudre un problème précis. On ne fera d'apprentissage systématique de la réduction au même dénominateur que dans le cas où les dénominateurs sont de la forme 10, 100, 1000... c'est-à-dire des puissances de 10. Ce travail dont l'outil essentiel est la numération en base dix, est nécessaire à la construction des nombres décimaux. Un autre outil essentiel pour cette construction est la proportionnalité : en effet il faut savoir que si $\frac{1}{10} \longmapsto \frac{10}{100}$, alors $4 \times \frac{1}{10} \longmapsto 4 \times \frac{10}{100}$.

2. QUELQUES FRACTIONS COMME MESURES D'AIRES

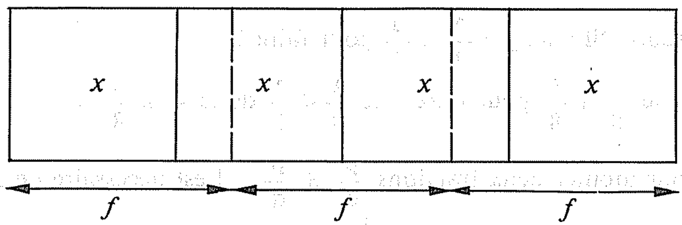
Les fractions ont aussi été utilisées pour évaluer la quantité de feuilles de papier nécessaire pour réaliser un puzzle. Cette fois, des portions de feuilles pouvaient être désignées par la même fraction, sans être superposables, ce qui ne se produisait pas pour les longueurs.

Exemple I :



Ici, chacune des formes permet de paver la feuille entière, ce qui n'est pas toujours le cas.

Exemple 2 :



$$4 \times x = 3f \qquad x = 3/4f$$

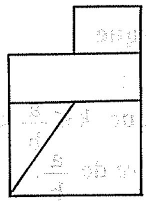
Pour les pièces du puzzle, nous avons choisi des formes permettant chacune de paver la feuille. De la sorte, on dispose d'un moyen d'évaluer chaque pièce par rapport à la feuille : compter le nombre de pièces superposables pour paver toute la feuille. On dira que deux pièces p et p' ont **même aire** s'il faut autant de pièces p que de pièces p' pour paver la feuille.

Situations proposées

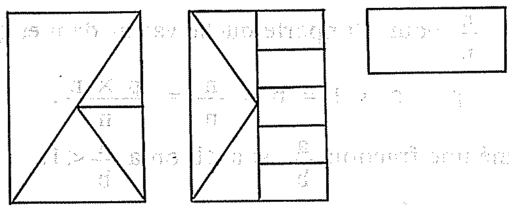
a) Les élèves sont groupés par deux. Le maître distribue à chaque groupe une enveloppe contenant les pièces d'un puzzle, taillées dans des feuilles dont chaque groupe a un exemplaire.

Consigne : passer commande de la quantité exacte de papier nécessaire pour reproduire le même puzzle. Le reproduire.

Exemples de découpages proposées aux élèves par la consigne a :



D_3 : 4 pièces



D_4 : 13 pièces

b) Les élèves travaillent par deux : émetteur-récepteur. L'émetteur construit un puzzle P_0 utilisant entre 1 et 2 feuilles de papier et envoie un message pour que le récepteur construise un puzzle comportant autant de pièces que le puzzle P_0 et tel que, pour chaque pièce de P_0, le récepteur puisse construire une pièce de même aire.

L'écriture du message va obliger les enfants à noter pour chaque pièce "sa mesure en feuille" : pour une pièce qu'on peut placer 6 fois dans la feuille, l'indication transmise de façon majoritaire est 1/6 ou 1/6*f*. En juxtaposant les nouvelles pièces on doit trouver un puzzle de même aire que P_0. C'est ce que le récepteur vérifie en comparant la quantité de papier obtenue en ajoutant les mesures des différentes pièces à la quantité consommée par l'émetteur pour fabriquer P_0.

3. RECHERCHE DE PARTIES ENTIERES. SITUER UNE FRACTION SUR UN AXE GRADUÉ. LIEN AVEC LA DIVISION

OBJECTIFS

- *Encadrement d'une fraction $\frac{a}{b}$ par deux entiers. Recherche de la partie entière de $\frac{a}{b}$.*
- *Approche de la division d'un entier a par un entier b.*

3.1. Analyse mathématique

Le problème est le suivant :

Trouver un entier k tel que $k \leqslant \frac{a}{b} < k + 1$.

On dit que k est la *partie entière* de $\frac{a}{b}$.

Cet énoncé a du sens si on sait qu'on peut comparer non seulement deux entiers entre eux mais aussi un entier et une fraction. Pour cela on s'appuie sur le fait qu'un entier p peut s'écrire de différentes manières sous forme d'une fraction puisque :

$1 = n \times \frac{1}{n} = \frac{n}{n}$ pour n'importe quelle valeur de n et que

$$p = p \times 1 = p \times \frac{n}{n} = \frac{p \times n}{n}.$$

Etant donné une fraction $\frac{a}{b}$, si $a<b$ on a $\frac{a}{b}<1$.

Si $a>b$ ou $a>2b$ et $\frac{a}{b}>2$

ou $b<a<2b$ et $1<\frac{a}{b}<2$

ou $a = 2b$ et $\frac{a}{b} = 2$.

on peut comparer a aux multiples n.b de b.

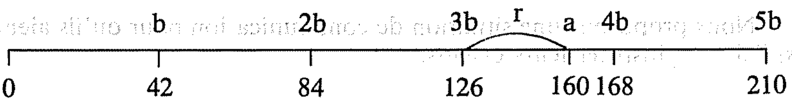
Soit k l'entier tel que $k.b \leqslant a < (k+1).b$.

On a $\frac{k.b}{b} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{(k+1).b}{b}$ et $k \leqslant \frac{a}{b} < k+1$

L'entier k est la *partie entière* de $\frac{a}{b}$; c'est aussi le quotient dans la division de a par b. En effet si $k.b \leqslant a < (k+1).b$, on a $a = k.b + r$ et $0 \leqslant r < b$.

La représentation des nombres par un axe gradué est bien adaptée à la comparaison des nombres. On peut ici repérer les points d'abscisses b, 2b, 3b,... nb... Le problème est de déterminer des intervalles contenant a. Le meilleur encadrement est donné par l'intervalle [k b, (k + 1)b[qui contient a. Le nombre entier r est la distance de a à la borne kb de l'intervalle [k b, (k + 1) b[

EXEMPLE : $\frac{a}{b} = \frac{160}{42}$



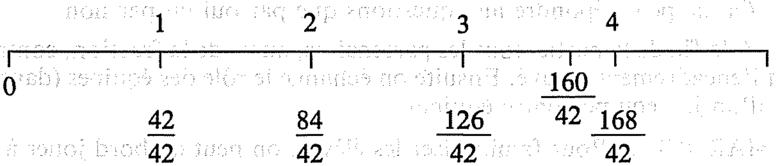
$$\frac{42}{42} = 1 \quad \frac{84}{42} = 2 \quad \frac{126}{42} = 3 \quad \frac{168}{42} = 4$$

$$3 < \frac{a}{b} < 4$$

$$160 = 168 - 8 \quad 160 = 126 + 34$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \frac{34}{42} = 4 - \frac{8}{42} \quad r = 34$$

Autre utilisation de l'axe gradué.



La première représentation fait référence à la division euclidienne de a par b.

La deuxième représentation met l'accent sur la partie entière de $\frac{a}{b}$.

3.2. Choix de la situation

Cette analyse mathématique étant faite, nous proposons aux élèves une situation dans laquelle la fraction intervient comme un nombre et non pas comme un couple de nombres entiers. Les élèves auront à comparer une fraction à des nombres entiers, ils chercheront à encadrer "au mieux" la fraction par des entiers k et k'. L'écart minimum est 1 si la fraction n'est pas déjà un entier.

La division euclidienne est l'outil adapté pour chercher la partie entière de la fraction $\frac{a}{b}$. Ce travail de division demande une certaine technique de calcul. Compte-tenu de l'écriture des nombres en base 10, ces calculs sont particulièrement simples si b = 10, 100, 1000.... plus généralement une puissance de 10. Nous proposons aux élèves une situation dans laquelle ils auront le choix de la fraction et donc en particulier de b. Les calculs qu'ils auront à faire seront plus ou moins faciles suivant leur choix de b. Ils pourront alors se rendre compte de l'économie qu'ils font en choisissant pour b une puissance de 10.

Nous proposons une situation de communication pour qu'ils aient à expliciter et justifier leurs calculs.

3.3. Organisation de la classe et consigne

Les élèves jouent par équipes de 2 : équipe contre équipe ou une équipe de 2 élèves contre toute la classe.

Consigne : Une équipe (composée de 2 élèves E_1, E_2) choisit une fraction $\frac{a}{b}$ comprise entre 0 et 100 et qui n'est pas égale à un nombre entier. Les autres joueurs (une autre équipe ou le reste de la classe), qui ne connaissent pas cette fraction doivent en au plus 10 questions, déterminer un intervalle dans lequel se trouve la fraction avec une erreur d'au plus une unité, c'est-à-dire situer le mieux possible la fraction entre deux entiers.

On ne peut répondre aux questions que par oui ou par non.

A la fin de la partie, tous les partenaires, au vu de la fraction, contrôlent l'encadrement trouvé. Ensuite on échange le rôle des équipes (dans le cas d'un jeu équipe contre équipe).

REMARQUE 1. Pour familiariser les élèves, on peut d'abord jouer à ce jeu sur les entiers et dans ce cas il s'agit de deviner le nombre entier choisi.

REMARQUE 2. Pour les fractions, il s'agit de *situer* la fraction et *non de la deviner*. Si on demande de deviner la fraction, les élèves risquent d'essayer de deviner séparément 2 nombres entiers en posant des questions du genre "Est-ce que le numérateur est pair" ? etc... C'est ce que l'on cherche à éviter.

On veut par exemple que $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$; on veut que la fraction soit un nombre qu'il s'agit de comparer aux entiers.

(*) Voir "Jeu de l'explorateur", situation décrite par G. BROUSSEAU dans un ouvrage à paraître à l'IREM de Bordeaux.

REMARQUE 3. Quand les élèves posent une question du type :
"Est-ce que la fraction est plus grande que 2" ou
"Est-ce que la fraction est entre 2 et 3" ? Ils se réfèrent en général à l'ordre strict. Cela peut entraîner une ambiguïté sur les bornes de l'intervalle dans le cas où la fraction choisie est égale à un entier. Pour éviter cette ambiguïté, nous avons demandé de choisir une fraction qui ne soit pas un entier.

3.4. Analyse de la tâche

3.4.1. Travail de E_1, E_2 :

a) Choix de $\frac{a}{b}$

On veut que $0 < \frac{a}{b} < 100$. Sans faire de calculs précis, si $a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1$ et $\frac{a}{b}$ convient. Si $a > b$, mais pas beaucoup plus grand, on a toutes les chances pour que $a < 100$ b et $\frac{a}{b}$ convient. Une manière commode de procéder est de choisir un intervalle $[k, k + 1]$ où k est un entier et de prendre la fraction $\frac{a}{b}$ dans cet intervalle. Pour cela on prend $\frac{a}{b}$ de la forme $k + \frac{c}{b}$ où $\frac{c}{b}$ est une fraction plus petite que 1.

On a $\frac{a}{b} = \frac{k.d}{d} + \frac{c}{d} = \frac{k.d+c}{d}$

Par exemple, on choisit $\frac{a}{b}$ entre 25 et 26. Prenons $\frac{a}{b} = 25 + \frac{1}{3}$. On peut l'écrire $\frac{a}{b} = \frac{3 \times 25}{3} + \frac{1}{3} = \frac{76}{3}$.

b) Réponse aux questions

— Dans le cas où les élèves ont choisi la fraction dans un intervalle qu'ils se sont donné à l'avance, ils n'ont pas besoin de division euclidienne pour répondre aux questions concernant la comparaison de $\frac{a}{b}$ aux entiers. Il suffit de savoir comparer des entiers. Si on veut que la division euclidienne soit utilisée, il faudra bloquer cette procédure. (Voir 3.6.).

— Dans le cas où la fraction est désignée directement sous la forme $\frac{a}{b}$, E_1 et E_2 sont obligés de recourir à la division euclidienne pour répondre aux questions, soit explicitement en cherchant à situer a parmi les multiples de b (cf plus haut 3.1.), soit implicitement en comparant $\frac{a}{b}$ aux multiples de $\frac{b}{b}$ et en cherchant un entier k tel que

$$\frac{k.b}{b} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{(k+1)b}{b}$$

Par exemple, pour $\frac{1035}{42}$, on a

$$2 = 2 \times \frac{42}{42} = \frac{84}{42} \quad \text{et} \quad \frac{84}{42} < \frac{1035}{42}$$

$$20 = 20 \times \frac{42}{42} = \frac{840}{42} \quad \text{et} \quad \frac{840}{42} < \frac{1035}{42}$$

$$24 = 24 \times \frac{42}{42} = \frac{1008}{42} \quad \text{et} \quad \frac{1008}{42} < \frac{1035}{42}$$

$$25 = 25 \times \frac{42}{42} = \frac{1050}{42} \quad \text{et} \quad \frac{1035}{42} < \frac{1050}{42}$$

donc $24 < \frac{1035}{42} < 25$ et $k = 24$

Pour $\frac{1035}{10}$, on a tout de suite $\frac{1035}{10} = 103 + \frac{5}{10}$ et $k = 103$.

Pour $\frac{1035}{100}$, on a $k = 10$.

Pour répondre facilement aux questions qu'on va leur poser, E_1 et E_2 ont intérêt à choisir pour b une puissance de 10.

3.4.2. Travail des questionneurs

Ils ont à situer une fraction inconnue dans un intervalle]k, k + 1[où k est un entier. Ils peuvent poser des questions du type "la fraction est-elle entre n et m ?" ou du type "la fraction est-elle plus grande que n ?" "la fraction est-elle plus petite que n ?". De toute façon ils ont intérêt à partager systématiquement l'intervalle d'incertitude en 2. Ici par exemple]0,50[,]0,25[etc...

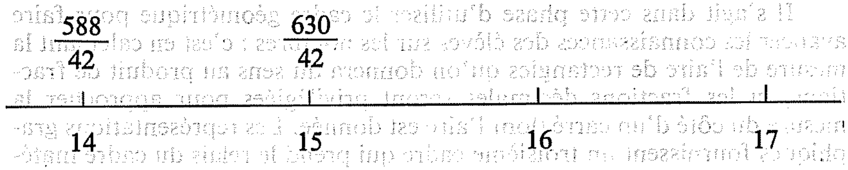
Pour noter les informations fournies par E_1 et E_2, une bonne représentation consiste à les reporter sur un axe gradué en nombres entiers et à hachurer au fur et à mesure les intervalles qui ne conviennent pas. Cela permet de visualiser l'intervalle d'incertitude et de suivre sa réduction.

La tâche de E_1 et E_2 demande une bonne maîtrise de la numération, la tâche des autres une bonne organisation et une bonne maîtrise de l'ordre. La représentation des nombres par un axe gradué étant bien adaptée au problème, elle facilite le choix des bonnes questions. En échangeant les rôles des équipes, les élèves mettent à l'épreuve et éventuellement développent les deux types de compétence.

Le contrôle du dernier intervalle proposé se fait au vu de la fraction par tous les partenaires. Il se peut qu'il reste des erreurs qui n'ont pas entraîné d'incohérence au cours du jeu. Pour les détecter, on est amené à comparer la fraction aux entiers qui désignent les bornes de l'intervalle retenu. Par exemple, si à la suite d'une erreur de calcul, E_1 et E_2 prétendent que $14 < \frac{1035}{42} < 15$, on va exprimer 14 sous la forme $\frac{n}{42}$ et 15 en $\frac{n+42}{42}$ et comparer 1035 à n.

$$14 = 14 \times \frac{42}{42} = \frac{588}{42}, \ 15 = \frac{630}{42} \text{ et}$$

$1035 > 630$; on ne peut pas avoir $\frac{1035}{42} < 15$



3.5. Bilan

— Si $a < b$ alors $a \times \frac{1}{b} < b \times \frac{1}{b}$ et $\frac{a}{b} < 1$

— Une conséquence immédiate est que tout nombre de la forme $k + \frac{a}{b}$, où k est un entier et $a < b$, est compris entre k et $k + 1$.

- Pour comparer un entier n et une fraction $\frac{a}{b}$, on peut soit exprimer n sous la forme $\frac{n \times b}{b}$ et comparer a et $n \times b$, soit chercher "Combien il y a d'entiers dans $\frac{a}{b}$" autrement dit chercher la partie entière de $\frac{a}{b}$ et la comparer à n.

- Pour chercher la partie entière de $\frac{a}{b}$ on divise a par b à une unité près c'est-à-dire on encadre a par 2 multiples consécutifs kb et $(k+1)b$ de b. Le nombre k est la *partie entière* cherchée.

3.6. Variante de la consigne

Le maître choisit les fractions et les fournit à E_1 et E_2. Par exemple, le maître écrit chaque fraction choisie sur un papier plié de façon à cacher la fraction ; E_1 et E_2 tirent un papier. De cette façon E_1 et E_2 ne disposent pas de l'intervalle $]k, k+1[$.

3.7. Affinement de la graduation :

Préparation de la division

Dans la première phase, nous avons demandé aux élèves de situer la fraction dans un intervalle, à une unité près ; nous reprendrons le jeu par la suite en exigeant plus de précision : on situe la fraction à un dixième près, à un centième près etc... ce qui amènera à "pousser" la division d'une part et à faire des "grossissements à la loupe" de la graduation, d'autre part.

4. RELATIONS ENTRE DIMENSIONS, AIRE ET PERIMETRE DE RECTANGLES

Il s'agit dans cette phase d'utiliser le cadre géométrique pour faire avancer les connaissances des élèves sur les nombres : c'est en calculant la mesure de l'aire de rectangles qu'on donnera du sens au produit de fractions, et les fractions décimales seront privilégiées pour approcher la mesure du côté d'un carré dont l'aire est donnée. Les représentations graphiques fournissent un troisième cadre qui prend le relais du cadre matériel des figures et donne une autre représentation des problèmes que les élèves ont à traiter.

Pour un rectangle donné, une fois les unités fixées (ici cm et cm^2), on a 4 nombres : les mesures des dimensions a et b, du périmètre P et de l'aire A. Il existe des relations entre ces quatre nombres :

$P = 2 \times (a + b) = (2 \times a) + (2 \times b)$

$A = a \times b$

Chaque fois qu'on fixe un des quatre nombres, on définit une famille de rectangles et on s'intéresse aux relations entre les 3 autres nombres.

4.1. Recherche de rectangles ayant une dimension fixée. Calcul de l'aire ; calcul du périmètre

OBJECTIFS :

— Quand une dimension est fixée l'aire d'un rectangle est proportionnelle à l'autre dimension

— produit de 2 fractions.

ORGANISATION DE LA CLASSE ET CONSIGNE :

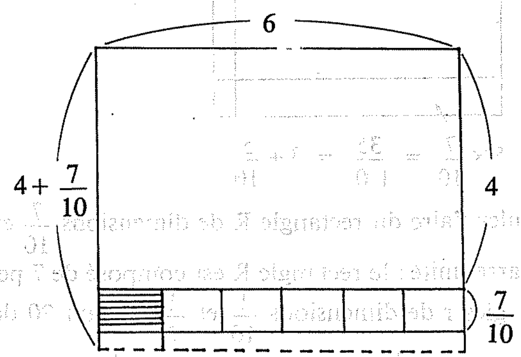
Les élèves sont par équipes de 4. On donne à chaque équipe une valeur de a (en cm) :

Exemples : $a=5$, $a=7$, $a=3+\frac{1}{2}$, $a=8+\frac{1}{2}$, $a=2+\frac{3}{4}$, $a=4+\frac{6}{10}$.

CONSIGNE : Dans chaque équipe, vous allez vous partager le travail. Chacun dessine 4 ou 5 rectangles différents ayant une dimension égale à la valeur qui vous a été donnée. Tous les rectangles de l'équipe doivent être différents. Pour chacun de ces rectangles, vous calculez le périmètre en cm et l'aire en cm². Vous organisez les résultats dans un tableau.

Au cours de cette séquence les élèves sont amenés à chercher le produit d'une fraction par un entier et (ou) le produit de 2 fractions.

Exemple 1 : un entier, une fraction



$6 \times (4+\frac{7}{10})$

$4<4+\frac{7}{10}<5$ donc déjà $6\times4<6\times(4+\frac{7}{10})<6\times5$. On a $6\times4 = 24$.

Pour le reste, on a 6 petits rectangles de dimensions 1 cm sur $\frac{7}{10}$ cm. Chacun de ces petits rectangles est composé de 7 petites bandes ; chacune de ces petites bandes se reporte 10 fois dans une unité d'aire et a donc une aire de $\frac{1}{10}$cm², un petit rectangle a une aire de $\frac{7}{10}$cm², et pour 6 de ces rectangles, on a $6\times\frac{7}{10}$cm².

$$6\times\frac{7}{10} = \frac{42}{10} = 4+\frac{2}{10}.$$

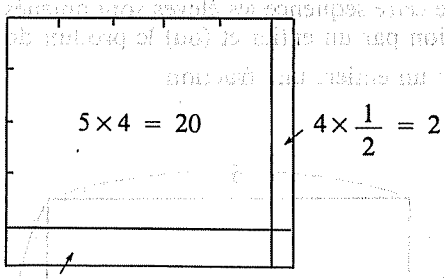
Finalement $6\times(4+\frac{7}{10}) = (6\times4) + (6\times\frac{7}{10}) = 24 + \frac{42}{10}$

$$= 24 + 4 + \frac{2}{10} = 28 + \frac{2}{10}$$

Exemple 2 : deux fractions

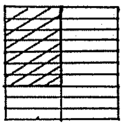
$$(4+\frac{7}{10}) \times (5+\frac{1}{2})$$

le rectangle est découpé en 4 parties dont on sait exprimer l'aire pour 3 d'entre elles.



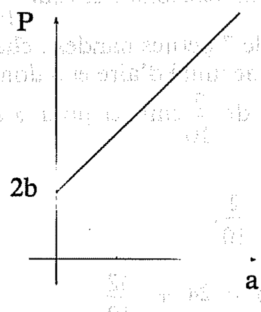
$$5 \times \frac{7}{10} = \frac{35}{10} = 3 + \frac{5}{10}$$

Reste à calculer l'aire du rectangle R de dimensions $\frac{7}{10}$ et $\frac{1}{2}$. On le reporte dans le carré unité : le rectangle R est composé de 7 petits rectangles r de dimensions $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{2}$. Il faut 20 de ces petits rectangles pour paver le carré unité.

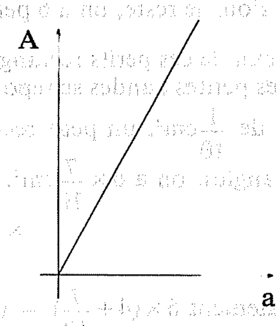


L'aire de r mesure donc $\frac{1}{20}$cm², l'aire du rectangle R est donc $7 \times \frac{1}{20}$ cm² $= \frac{7}{20}$cm².

Graphiques :



Le périmètre n'est pas proportionnel à la dimension variable.



On a une fonction linéaire : l'aire est proportionnelle à la dimension variable.

4.2. Recherche de rectangles ayant un périmètre donné. Calcul de l'aire

Dans la situation précédente, les élèves avaient le choix de la dimension variable et pouvaient la choisir entière. Cette fois le périmètre étant fixé, il y a peu de solutions entières : si l'on choisit une valeur assez petite du périmètre les élèves seront obligés de choisir des rectangles ayant deux dimensions fractionnaires. Il est nécessaire que chaque élève soit confronté à ce problème. Cela est fait au cours d'exercices de renforcement.

Une disposition commode que les élèves connaissent déjà dans le cas des entiers : la multiplication en tableau

Par exemple

4	$\frac{7}{10}$	
20	$\frac{35}{10}$	5
$\frac{4}{2}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$

$$(4+\frac{7}{10}) \times (5+\frac{1}{2})$$

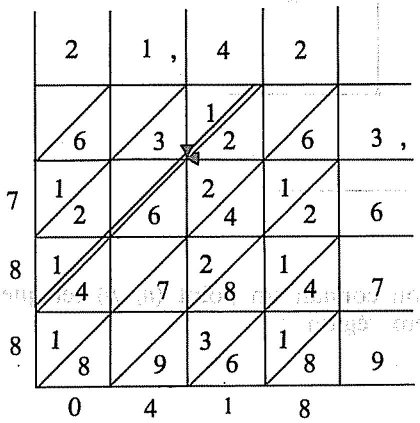
Résultat

$$20+\frac{35}{10}+\frac{4}{2}+\frac{7}{20}=$$

$$20+3+\frac{5}{10}+2+\frac{7}{20}=$$

$$25+\frac{5}{10}+\frac{7}{20}=25+\frac{17}{20}$$

La disposition de cette multiplication se perfectionnera quand on aura à multiplier deux nombres décimaux.



$$21{,}42 \times 3{,}679 = 78{,}80418$$

REMARQUE : Comme l'objectif n'est pas l'apprentissage du calcul sur les fractions mais seulement d'une certaine pratique en vue du calcul sur les fractions décimales, les élèves n'acquièrent pas de technique de calcul et reviennent au schéma rectangle chaque fois qu'ils en ont besoin.

4.3. Aire fixée. Coloriage d'un quadrillage

Les élèves disposent d'un quadrillage (*). Ils y tracent deux axes rectangulaires et les graduent : un grand carreau pour une unité.

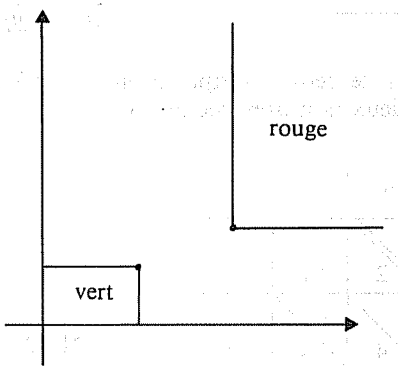
Le maître choisit un nombre k. Chaque point du quadrillage de coordonnées (a, b) représente un rectangle de dimensions (a, b). Le point (a, b) sera marqué d'une couleur différente selon que l'aire $A = a \times b$ est $> k$, $< k$ ou $= k$. Nous avions pris $k = 24$. Les couleurs choisies étaient rouge, vert, noir.

Démarche des élèves

1ère étape : coloriage de quelques points au hasard.

2e étape : recherche de moyens pour aller plus vite.

Ils remarquent que si (a, b) est vert cela veut dire que $a \times b$ est trop petit, par suite pour tout $x < a$, $x \times b$ est trop petit, pour tout $y < b$, $a \times y$ est trop petit, tous les couples (x, b) et (a, y) sont verts, de même que tous les (x, y) pour $x < a$ et $y < b$. De même pour les points rouges. Ainsi à partir de la connaissance de la couleur d'un point, les enfants déterminent toute une région de la même couleur et la hachurent.



— Avantage des points noirs : si on connaît un point (a, b) tel que $a \times b = 24$ alors on peut colorier deux régions :

pour $x < a$, $x \times b < 24$, (x, b) vert

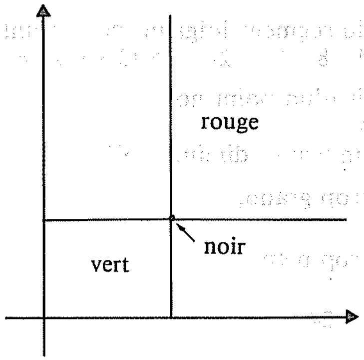
pour $x > a$, $x \times b > 24$, (x, b) rouge

de même $y < b$, $a \times y < 24$, (a, y) vert

(*) Quadrillage anglais en pouces subdivisé en 1/10 de pouces.

de même $y > b$, $a \times y > 24$, (b,y) rouge

C'est un moyen efficace pour colorier.



Remarque : quand les élèves parlent de "tous" les points en haut à droite... ce "tous" peut prendre des significations différentes selon les élèves et, pour un même élève, évolue au cours de la situation. Il peut faire référence :

— soit à tous les nombres connus de l'élève ;
— soit aux nœuds du quadrillage ;
— soit seulement aux entiers.

Dans ce dernier cas, la consigne de colorier tous les points du quadrillage oblige à considérer d'autres nombres que les entiers.

A cette étape, les quadrillages se couvrent rapidement de hachures, la zone où vont se trouver les points noirs se rétrécit.

3e étape : recherche systématique des points noirs.

Les procédures des élèves sont de quatre types :

— fixer une des coordonnées et faire varier l'autre en recherchant le point noir par encadrement ;

Exemple : $a = 18$
$18 \times 1 = 18$ vert
$18 \times 2 = 36$ rouge
$18 \times (1 + 1/2) = 27$ rouge
$18 \times (1 + 1/4) = 22 + 1/2$ vert
"je vais chercher $18 \times (1 + 1/4 + 1/8)$...".

Remarque : parmi les élèves ayant utilisé cette procédure, aucun n'a posé la division 24 : 18. Dans une autre classe, certains ont proposé comme réponse 24/18, ont tout de suite ajouté "c'est 1 et quelque chose" et ont déclenché une procédure comme ci-dessus. Dans une 6e, au contraire, les élèves ont utilisé en majorité la division. Cela n'a rien d'étonnant, les élèves du C.M. ne connaissaient pas encore les nombres décimaux et donc ne savaient pas "pousser la division" alors que les élèves de 6e avaient l'habitude de cette pratique ;

— choisir le milieu du segment joignant deux points noirs.
exemple : $6 \times 3 = 24$; $8 \times 3 = 24$; $7 \times (3+1/2) = ?$

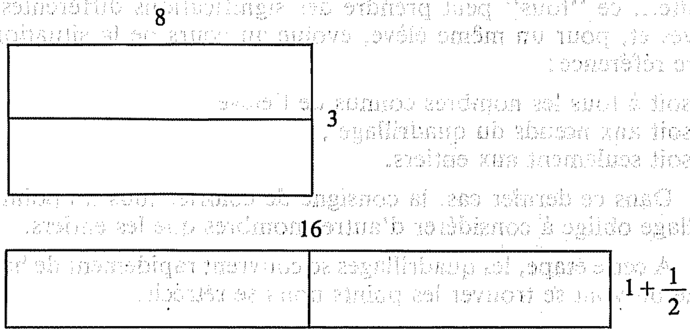
— compenser à partir d'un point noir ;
exemple : $4 \times 6 = 24$
"je vais augmenter un peu 4, diminuer 6" :

$(4+\frac{1}{2}) \times (5+\frac{1}{2})$ trop grand,

$(4+\frac{1}{2}) \times (5+\frac{1}{4})$ trop petit,

$(4+\frac{1}{2}) \times (5+\frac{1}{3}) = 24$;

— fabriquer de nouveaux rectangles d'aire 24 à partir d'un rectangle d'aire 24 :



"je coupe en deux, je mets les deux rectangles bout à bout et je recommence".

Aucun élève ne doute que l'aire croît quand l'une des dimensions augmente et que l'autre reste fixe ou a fortiori quand les deux dimensions augmentent. Tous s'appuient sur ce fait d'expérience pour se convaincre que sur chaque ligne horizontale ou verticale il y a au plus un point noir. Une manière d'en assurer l'existence est de fournir une valeur numérique, pour l'autre dimension. Ce calcul a été fait dans de nombreux cas.

Dans les autres cas, la conviction venait de ce qu'on ne pouvait pas passer de $a \times b < 24$ à $a \times b > 24$ sans passer exactement par 24. Finalement, les élèves acquièrent les convictions suivantes explicitées :
— sur chaque ligne, horizontale ou verticale, il y a un et un seul point noir. Avant : des points verts, après : des points rouges ;
— les points noirs font frontière entre les verts et les rouges.

4.4. Recherche de rectangles d'aire donnée

a) Chercher des rectangles ayant une aire donnée. Les élèves sont répartis en six équipes, chacune s'occupe d'une valeur d'aire différente : 450, 154, 324, 441, 616, 1232.
Parmi ces rectangles y a-t-il un carré ?
Les élèves trouvent certains carrés : $18 \times 18 = 324$ $21 \times 21 = 441$
Pour les autres ils n'en trouvent pas d'entier.

b) Recherche de rectangles d'aire 38.
Les couples (a,b) sont reportés sur un graphique les essais qui ne donnent pas 38 sont reportés aussi avec la même consigne de coloriage que précédemment (cf 4.3.).

4.5. Recherche d'un carré d'aire 38

CONSIGNE : Dans la famille des rectangles d'aire 38 cm², y a-t-il un carré ?

Procédures des élèves

Ils procèdent par encadrements : ils nomment le côté du carré, x par exemple, et cherchent à encadrer x.

$6 \times 6 = 36$ $7 \times 7 = 49$

$6 < x < 7$

Le problème est de s'approcher le plus possible d'un x tel que :

$$x \times x = 38.$$

1re ETAPE : partager en deux l'intervalle d'incertitude. On essaie des $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$... Certains pensent à tester $\frac{1}{3}$ quand $\frac{1}{2}$ est trop grand et $\frac{1}{4}$ trop petit, mais c'est rare.

Arrivés aux 1/16, les calculs deviennent compliqués. Le report graphique permet de situer la recherche : le carré cherché doit être sur "la droite des carrés", parmi l'ensemble des couples *(a,a)*, mais aussi parmi les rectangles d'aire 38, donc correspond toujours à un point noir situé entre les points rouges et les points verts. A mesure que la recherche se précise, on agrandit l'échelle de manière à grossir la zone critique et à mieux voir.

2e ETAPE : passage aux $\frac{1}{10}$.

Certains pensent qu'il est plus facile de calculer avec des $\frac{1}{10}$ et cherchent x entre $6 + \frac{1}{10}$ et $6 + \frac{2}{10}$. D'où $6 + \frac{1}{10} < x < 6 + \frac{2}{10}$.

Le premier élève qui propose cet intervalle continue en testant : $6+\frac{3}{20}$. C'est dire la pression du partage en deux. Son groupe continue à travailler avec $\frac{1}{40}$ et $\frac{1}{80}$.

Nous assistons là à un conflit entre deux points de vue à prendre en compte si on veut progresser efficacement :
— simplifier les calculs d'où le choix des $\frac{1}{10}$;
— faire converger rapidement le processus de recherche du carré et donc couper en deux.

D'où le retour aux $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{80}$ après l'essai d'$\frac{1}{10}$. On peut encore se servir du graphique.

3e ETAPE : passage aux $\frac{1}{100}$ et abandon du graphique.

Après l'essai $6+\frac{13}{80}$, les élèves passent aux $\frac{1}{100}$. A ce moment là, on a déjà agrandi deux fois la zone intéressante du graphique. La dernière échelle est un côté de grand carreau pour représenter $\frac{1}{100}$. On peut encore placer quelques points, mais on ne peut plus lire les intervalles et un nouvel agrandissement n'apporterait plus d'intérêt. On avait abandonné depuis un moment les dessins de rectangles, le graphique restait un support et un guide pour le calcul, l'apport du graphique a maintenant aussi atteint sa limite. A partir des $\frac{1}{100}$, les élèves ont définitivement opté pour le calcul avec des fractions décimales, tant les calculs devenaient complexes. Ils ne font cependant pas leurs essais au hasard. Après avoir situé x entre $6+\frac{1}{10}+\frac{6}{100}$ et $6+\frac{1}{10}+\frac{7}{100}$
un élève remarque que l'écart de $(6+\frac{1}{10}+\frac{6}{100})\times(6+\frac{1}{10}+\frac{6}{100})$ à 38 est plus faible que celui de $(6+\frac{1}{10}+\frac{7}{100})\times(6+\frac{1}{10}+\frac{7}{100})$ à 38.
En conséquence, il annonce $6+\frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{5}{1000}$
et décide d'essayer $6+\frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{4}{1000}$.

Avec les fractions décimales les calculs sont plus faciles, on s'approche de plus en plus de 38.

Il reste que l'écriture est très lourde.

4e ETAPE : choix d'une écriture.

Les élèves proposent des écritures tendant d'abord à conserver le maximum d'informations. Trois retiennent l'attention :

$$\underset{\times 10}{\overleftarrow{37}} \;\Big|\; \underset{:10}{\overrightarrow{994896}}$$

37.9.9.4.8.9.6 "le point veut dire diviser par 10"
37.994896 est l'écriture des calculettes.

Le maître donne alors la convention française de la virgule. L'écriture standard est adoptée.

5e ETAPE : le rôle des zéros après la virgule.

Munis d'une écriture plus commode, et d'un ensemble de nombres plus facile à manipuler, on continue à approcher x.

Sabine essaie $6+\dfrac{1646}{10000}$.

Elle trouve $38+\dfrac{229316}{100000000}$.

Elle n'a pas utilisé la nouvelle écriture pour calculer mais elle veut écrire le dernier nombre en écriture à virgule. Elle écrit 38, 229316 et énonce au fur et à mesure $\dfrac{2}{10}$, $\dfrac{2}{100}$... et arrive à $\dfrac{6}{1000000}$

Elle s'aperçoit qu'elle devrait arriver à $\dfrac{6}{100000000}$ et dit "je vais commencer de l'autre côté. Elle part de $\dfrac{6}{100000000}$ et remonte jusqu'à $\dfrac{2}{1000}$ continue $\dfrac{0}{100}$, $\dfrac{0}{10}$ et écrit 38,00229316.

Bernard PARZYSZ

MUSIQUE & MATHÉMATIQUE

Extrait du sommaire

1. Les échelles musicales
2. Notre échelle tempérée
3. Quelques procédés imitatifs du contrepoint
4. Aperçus sur le XX^e^ siècle

suivi de :

GAMMES NATURELLES
par yves Hellegouarch

Brochure n° 53

Prix et conditions de vente et d'expédition dans les pages vertes du Bulletin.

DEUXIÈME EXEMPLE :

Une approche des décimaux à partir de la mesure des longueurs incluant la graduation d'une droite.

La suite d'activités décrite dans cette annexe a pour objectifs de mettre les enfants en situation :

1. D'élaborer des "écritures", des "codages" pour des "nombres-mesure". L'emploi successif de 2 sortes "d'instruments" permet de faire apparaître aisément :

1.1. Des codages de type fractionnaire (séquences F1 et FD1).
1.2. Des codages de type "à virgule" (séquences V1 et ND1).

2. D'acquérir une bonne maîtrise dans l'emploi de ces codages et "d'inventer" des "opérations" sur les nombres ainsi codés.

C'est ainsi que :

2.1. Dès l'élaboration d'écritures fractionnaires les élèves sont conduits :

- A proposer plusieurs codages "fractionnaires" d'un même rationnel (séquences F2 et FD2).
- A "inventer l'addition" de ces rationnels et leur "multiplication" par un naturel, à découvrir des procédés pour coder le "résultat" (séquences F3 et FD3).
- A "inventer", au CM2 de préférence, le produit de 2 rationnels (séquences F4 et FD4). On s'assurera préalablement que les acquis précédents sont bien mémorisés *sans nécessairement tout recommencer.*

2.2. Dès l'élaboration d'écritures à virgule les élèves sont conduits :

- A comparer des rationnels par la "comparaison" de leurs codages (séquences V2 et ND2).
- A découvrir qu'entre deux rationnels on peut toujours en intercaler un autre (séquences V3, V4, ND3 et ND4).
- A identifier les naturels à certains rationnels (séquences F2, V5, ND5).

3. De réaliser des "traductions" d'un système de codage dans un autre. Ces traductions ne sont pas un simple jeu dénué d'intérêt pratique. Elles constituent une véritable "dialectique des langages" permettant à l'élève de choisir, parmi tous les codages d'un rationnel, celui qui est le plus "commode" dans la situation. Prenons deux exemples :

3.1. Apprentissage de la multiplication de deux décimaux.
Exemple : calculer $2{,}75 \times 3{,}6$

Si les élèves savent que $2{,}75 = \dfrac{275}{100}$ et $3{,}6 = \dfrac{36}{10}$ alors

$$2{,}75 \times 3{,}6 = \frac{275}{100} \times \frac{36}{10} = \frac{275 \times 36}{1000}$$

Cet exemple montre qu'il est aisé de déduire une règle de multiplication des nombres "décimaux" de la règle de multiplication des fractions.

Or l'expérience montre qu'avec l'activité décrite en F4, la règle de multiplication de deux rationnels codés en écriture fractionnaire est découverte aisément par les élèves.

Dans le cas de la multiplication de deux rationnels décimaux, le codage fractionnaire est donc plus commode que le codage à virgule et on rendra service à certains élèves en les habituant à une traduction avant d'effectuer l'opération.

3.2. Comparaison de deux fractions.

Exemple : comparer $\dfrac{7}{11}$ et $\dfrac{17}{24}$.

$$\frac{7}{11} = 0{,}63\ldots ; \quad \frac{17}{24} = 0{,}70\ldots \text{ donc } \frac{7}{11} < \frac{17}{24}$$

Il existe certes d'autres procédés connus pour comparer deux fractions mais ils ne sont pas toujours plus simples que celui utilisé ici.

De tels exemples ne sont pas des vues de l'esprit, il ne font pas partie de ces "domaines réservés aux mathématiciens". Ils sont extraits des activités que nous allons décrire et dans *toutes* les classes où ces activités ont été conduites nous avons pu juger de leur intérêt.

Ces classes étaient de différents types :

4 CM1 d'une vingtaine d'élèves (classes urbaines)
3 CM1-CM2 de 16 à 20élèves (une classe urbaine, 2 classes rurales)
1 CM1-CM2 de 2 élèves (classe rurale : classe unique)
1 CM2 de 21 élèves (classe urbaine)
1 classe d'école nationale de perfectionnement.

Il est à noter que :

Dans l'une des classes rurales (classe à 2 niveaux : 8 CE2 et 16 CM1/CM2) ont été menées conjointement, aux mêmes heures, une approche de la division au CE et une approche des décimaux au CM.

Dans une autre des classes rurales (classe unique : 1 grande section, 3 CP, 2 CE2, 1 CM1 et 1 CM2) ont été menés conjointement, aux mêmes heures,

des activités prénumériques avec l'élève de grande section
un "apprentissage" de la numération au CP
une élaboration de techniques opératoires de la multiplication au CE
une approche des rationnels au CM.

Il ne s'agit *absolument* pas d'exploits. Quiconque est convaincu qu'enseigner, c'est d'abord rendre autonome et non pas tributaire d'un maître détenant seul la vérité, peut enseigner de la même façon.

Il est parfaitement possible de mettre plusieurs groupes en situation de recherche ou de communication écrite, simultanément.

La progression adoptée

Elle comporte 7 groupes de séquences désignés par leurs objectifs :
F : travaux sur les écritures fractionnaires
V : travaux sur les écritures à virgule etc.
Certaines de ces séquences sont du niveau CM2.

Séquences	Titre de l'activité	Objectifs et durée approximative
F : *écritures fractionnaires*		
F1	Activités de mesurage à l'aide de bandes de papier.	Produire des écritures fractionnaires (langage F) 2 h
F2	Les "trains" de bandes et fractions de bandes	Désigner un rationnel par des écritures additives ou multiplicatives. Comparer des rationnels codés dans F. 1 h à 2 h
F3	Calculs de périmètres	Additionner des rationnels codés dans le langage F 1 h
F4	Calculs d'aires CM2	Multiplier des rationnels codés dans le langage F 2 h
V : *écritures à virgule*		
V1	Activités de mesurage à l'aide de "règles graduées"	Produire des écritures du type "à virgule" (langage V) 2 h
V2	Comparaison de longueurs	Comparer des rationnels codés dans le langage V 1 h
V3	Activités de mesurage de précision	Encadrer une mesure par des rationnels codés dans le langage V 2 h
V4	Intercaler des nombres à virgule entre des nombres à virgule	Intercaler un rationnel entre deux autres dans le langage V 1 h
V5	Ecritures de naturels sous forme de nombres à virgule	

D : *dialectique des langages*		
D1	Activités de mesurage à l'aide de bandes et de règles.	Traduction d'un langage dans un autre. Elaboration d'un dictionnaire 2 h
D2	Résolution de problèmes par dialectique des langages	Comparaison de rationnels codés dans le langage F 1 h Addition de rationnels codés dans le langage V
F.D. : *fractions décimales*		
FD1	Activités de mesurage à l'aide de bandes de 1 m de long	Produire des fractions décimales (langage FD) 2 h
FD2	Les "trains" de bandes	Désigner un rationnel par des écritures additives, multiplicatives. Comparer des rationnels codés dans le langage FD 1 h
FD3	Calculs de périmètres	Addition de rationnels codés dans le langage FD 1 h
FD4	Calculs d'aires CM2	Multiplier des rationnels codés dans le langage FD 2 h
N.D. : *nombres décimaux*		
ND1	Activités de mesurage à l'aide de nouvelles règles graduées	Introduction des écritures décimales (langage D) 1 h
ND2	Comparaison de longueurs	Comparaison de nombres décimaux 1 h
ND3	Activités de mesurage de précision	Encadrement d'une mesure par des décimaux 1 h
ND4	Insertion de décimaux entre des décimaux	Intercaler un décimal entre deux autres. Trouver des approximations décimales successives d'un "nombre"
ND5	Ecriture de naturels sous forme de décimaux	
D : *dialectique des langages*		
D1	Activités de mesurage à l'aide de bandes et de règles	Passer du codage fractionnaire au codage décimal 1 h
D2	Résolution de problèmes par dialectique des langages	Comparaison de rationnels codés dans le langage FD Addition des décimaux 1 h Multiplication des décimaux (CM2) 1 h

C : *conversion*	Activités de mesurage avec des "unités" différentes	Changer d'unité de mesure	1 h
Q : *extension* du concept de rationnel		Présenter une autre approche des rationnels	

Soit, compte non tenu des exercices d'application, environ 25 heures d'apprentissage au CM1 sur un total d'environ 216 heures de mathématiques pour l'année.

Pour le CM2 environ 6 heures pour les nouveaux apprentissages et bien entendu la révision des savoirs précédemment acquis.

F - Elaboration et utilisation d'écritures fractionnaires

F1 *Activités de mesurage à l'aide de bandes de papier*

LES OBJECTIFS :

A l'occasion d'activités de mesurage supposant une bonne précision, mettre les élèves en situation de proposer des codages pour exprimer des nombres-mesure. Ces codages sont spontanément de type fractionnaire.

LES INSTRUMENTS :

Le mesurage des longueurs sera effectué à l'aide de bandes de papier à l'exclusion de tout autre instrument.

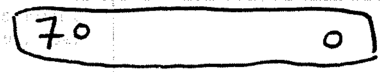
Ces bandes sont découpées dans du ruban pour imprimante de calculatrice. Elles ont toutes la même longueur. Il nous a paru commode de les faire de 32 cm de long, car cela nous a facilité la réalisation du matériel ci-après. *Cette information ne servant qu'au maître pour qu'il puisse fabriquer le matériel, elle n'est pas communiquée aux enfants et n'est pas utilisée dans les activités.* Dans la suite l'unité de longueur est la longueur d'une bande.

LE MATÉRIEL :

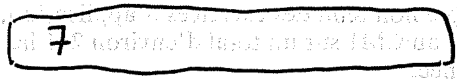
Il est composé :

— de petites vis ou d'allumettes

— de pièces découpées dans du carton de récupération *suffisamment* rigide. Ces pièces sont de forme quelconque, par exemple rectangulaire. Elles vont par paires. L'une des pièces de chaque paire (pièce A) est percée de deux trous, l'autre pièce (pièce B) n'en comporte pas (fig. 1). Chaque paire est identifiée par un numéro figurant sur les deux pièces.



pièce A



pièce B

Fig. 1

La distance entre les deux trous d'une pièce A doit pouvoir se mesurer exactement à l'aide des bandes de longueur 1 ou 1/2 ou 1/4 ou 1/8 ou 1/16 (au-delà, la manipulation des "fractions" de bandes n'est plus guère possible).

Une progression lente est souhaitable. On utilise dans une première séquence les pièces A telles que la distance entre les deux trous soit un multiple de 8 cm (bande de longueur 1/4). Dans la séquence suivante la distance entre les deux trous de la pièce A sera un multiple de 2 cm (bande de longueur 1/16).

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Présentation de l'activité :

Le maître montre deux pièces de bois assemblées à l'aide de 2 boulons et de leurs écrous à ailettes (fig. 2). Il fait remarquer que l'assemblage n'est possible que si les trous sont rigoureusement face à face. Puis il annonce que les élèves vont avoir à réaliser les mêmes assemblages avec des pièces de carton qu'il montre.

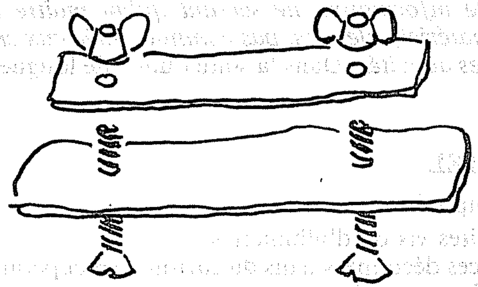


Fig. 2

Phase 1 : (environ 1 heure avec la présentation ci-dessus)

Les élèves sont par équipes de 2. Chaque équipe reçoit une des pièces A (distance entre les trous multiple de 8 cm) dont le numéro sera aussi celui de l'équipe.

Les pièces B sont regroupées sur le bureau du maître. Chaque équipe doit commander la pièce B, portant le même numéro que la pièce A qu'elle possède, à une équipe correspondante.

Par exemple l'équipe possédant la pièce A n° 3 (donc l'équipe 3) doit commander la pièce B n° 3 à une autre équipe (par exemple l'équipe n° 4) et réciproquement l'équipe n° 4 commande la pièce B n° 4 à l'équipe 3. Mais, avant d'expédier la pièce qu'on lui commande, chaque équipe doit "l'usiner", c'est-à-dire y percer les deux trous à la distance convenable l'un de l'autre (attention, travail très soigné exigé).

La commande devra donc indiquer la distance précise entre les deux trous de la pièce A. D'autre part, pour mesurer cette distance, *interdiction formelle d'utiliser doubles-décimètres et règles graduées.* Le maître distribue alors les bandes-instruments (deux par équipe).

"Vous mesurerez la distance à l'aide de ces bandes. *Attention, en aucun cas la bande ne sera jointe à la commande".*

Si les élèves le demandent, on pourra faire vérifier que toutes les bandes sont de même longueur. Il est indispensable de laisser aux élèves le maximum d'initiatives, mais, s'ils le demandent on pourra répondre que le pliage des bandes est autorisé.

Dès réception de la commande les équipes percent la pièce qui leur est demandée puis elles se regroupent par deux pour procéder au contrôle du travail effectué (assemblage des deux pièces à l'aide de vis ou d'allumettes).

Cette phase se termine par une *mise en commun* des commandes qui sont réécrites au tableau et des résultats (commande comprise ou non).

On cherche alors collectivement à "raccourcir" les messages. En particulier on demandera aux élèves comment on peut écrire moitié ou demi. En général les élèves connaissent la monnaie ou les verres doseurs, etc., et proposent $\frac{1}{2}$. Par analogie on fera trouver $\frac{1}{4}$.

Les élèves sont alors invités à réécrire toutes leurs commandes en utilisant ces écritures. Apparaissent alors des écritures telles que :

$$1 \text{ et } \frac{1}{4}\ ;\ 1,\ \frac{1}{2}\ ;\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{etc.}$$

Au début on peut accepter toutes ces formes, la suite des activités amènera l'emploi de plus en plus fréquent du signe +.

Le maître fait remarquer qu'on a pris comme unité de mesure la longueur d'une bande, que la mesure de la longueur d'une bande partagée en deux est notée $\frac{1}{2}$ etc.

Sur chaque bande-instrument le maître fait marquer 1, sur chaque demi et quart de bande on marquera de même $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.

Il peut annoncer que $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont des fractions.

Phase 2 : (durée 1 heure environ).

Même organisation que pour la phase précédente mais les pièces A distribuées sont telles que la distance entre les deux trous est un multiple de 2 cm et donc nécessiteront un pliage de la bande en huit et en seize.

Ne soyez pas très étonnés si la plupart des élèves n'utilisent pas spontanément les notations $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$ mais plutôt :

un demi $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ plié en quatre, $\frac{1}{6}$ (fréquent) pour $\frac{1}{8}$ etc.

Cela pourrait être dû au fait que les élèves ne voient pas facilement le nombre de morceaux obtenus à chaque nouveau pliage.

La mise en commun et le "raccourcissement" des messages ne sont donc pas inutiles, loin de là, et ne doivent donc pas être escamotés.

N.B. Certaines bandes-instruments posent problème quant à leur utilisation :
Est-ce leur "largeur" ou leur "longueur" qui mesure 1/16 ?
Pour éviter toute confusion et permettre un emploi correct de l'instrument, le sens de l'écriture 1/16 indique comment il faut l'utiliser (fig. 3).

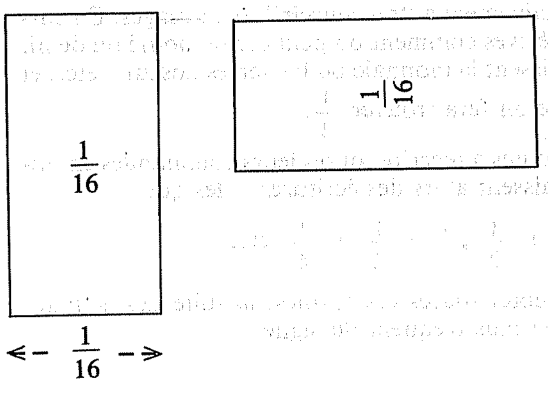


Fig. 3

F2 *Les "trains" de bandes*

(durée une ou deux séances d'une heure)

LES OBJECTIFS :

Trouver plusieurs expressions fractionnaires d'un même rationnel.

LE MATERIEL :

Il est constitué uniquement par les bandes instruments utilisées dans les séquences précédentes.

Un tableau magnétique est particulièrement utile pour disposer ces bandes, sinon on pourra utiliser de petits dés de gomme adhésive.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Le maître marque deux points au tableau distants d'au moins 1 m.

Les élèves doivent mesurer la distance entre ces deux points, chacun d'eux apportant à son tour, au choix, une bande, une demi bande, un quart de bande, etc., et la fixant au tableau à la suite des précédentes. (fig. 1)

On déplacera éventuellement le deuxième point pour que "ça tombe juste".

1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} +$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} +$ $\quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \ldots$

Fig. 1

Un élève indiquera au tableau la distance entre ces deux points.

Question :

"Aurait-on pu mesurer la même distance en utilisant d'autres bandes et fractions de bandes que celles utilisées ? Aurait-on pu réaliser un "train" de même longueur en utilisant d'autres "wagons" ?

Chaque proposition d'élève est relevée au tableau, puis on organise une discussion, chaque élève devant justifier sa proposition et pouvant contester toute proposition, preuves à l'appui (situation de controverse).

C'est ainsi qu'on voit des élèves se justifier en utilisant les bandes instruments tandis que d'autres font un calcul :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ça fait } 1 \text{ ; } \frac{1}{2} \text{ ça fait } \frac{4}{8} \text{ etc.}$$

Certains utilisent spontanément des "arbres à calcul" (fig. 2).

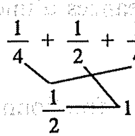


fig. 2

Le maître propose également des variantes de cette activité :

* pour mesurer, utiliser uniquement deux sortes de bandes, par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$.

* pour mesurer, utiliser une seule sorte de bande.

Toute proposition reconnue exacte est notée au tableau sous forme d'égalité $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, etc...

EXERCICES D'APPLICATION

On peut en imaginer de plusieurs sortes :

Ecrire de plusieurs autres façons : $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Compléter :

$$1 = \frac{1}{2} + \ldots \; ; \; 1 = \frac{1}{8} + \ldots \; ; \; \frac{3}{8} = \ldots.$$

$$1 + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \ldots.$$

Certains de ces exercices sont assez difficiles pour de nombreux élèves. Recommander l'emploi des bandes instruments, du moins au début.

F3 *Calculs de périmètres*

(durée une séance d'une heure)

LES OBJECTIFS :

1 - Placer les élèves en situation de concevoir une addition de ces nombres-mesure et leur multiplication par un naturel.

QUELQUES REFLEXIONS A PROPOS DE CES OBJECTIFS :

Le signe + de $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ n'a pas le même champ de référence que le signe + de 3 + 5.

Au C.P. on propose une première signification de *l'assemblage* $a + b$, c'est-à-dire une première "définition" de l'addition de deux naturels.

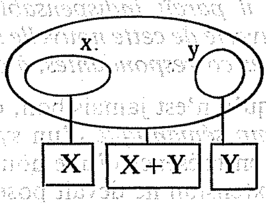
A la suite d'activités convenablement choisies l'élève constate que :

"Quelles que soient les collections disjointes x et y respectivement extraites des "boîtes" représentant concrètement les naturels X et Y, la "réunion", au sens physique du terme, de ces collections ira dans une "boîte" unique.

On conviendra de coder X + Y cette "boîte".

Plus tard on parlera de réunion d'ensembles disjoints et de cardinal de cette réunion.

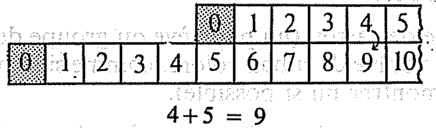
Cette "définition" est "représentée" par le schéma désormais classique (fig. 1).



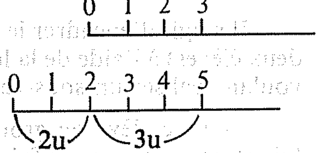
(fig. 1)

Mais ce schéma est loin d'avoir la valeur universelle que paraissent lui attribuer les manuels. En effet il est de nombreuses situations "additives" que l'on aurait beaucoup de peine à représenter par ce schéma, par exemple celles où on est conduit à ajouter des "sommes" en francs ou des durées, etc, sans parler évidemment de l'addition des vecteurs.

Une autre "définition" de l'addition des naturels correspond aux schémas (fig. 2 et 3). Des jeux tels que le jeu de l'oie ou de chevaux, des déplacements sur des "routes" permettent d'en faire une approche sans difficulté au C.P. Elle peut inspirer la confection de règles à calcul utiles à certains enfants. Le fait qu'elle s'inscrive dans une construction axiomatique des naturels (Péano) ne l'empêche pas de s'appliquer à nombre de situations concrètes et d'être utilisée spontanément par l'enfant qui "compte sur ses doigts".

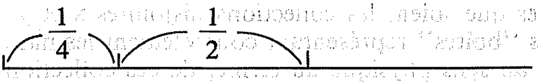


(fig. 2)



(fig. 3)

Il est évident que le premier schéma ne peut représenter l'addition des rationnels même codés en écriture à virgule. L'emploi du second ou du troisième schéma pour cette représentation supposerait une graduation préalable de la droite par des rationnels



Cette addition de rationnels est celle de nombres-mesure. Elle exprime l'additivité de la mesure (en l'occurence mesures de longueurs).

Notons qu'on peut considérer l'addition des naturels comme une addition de nombres-mesure, le naturel X étant la mesure de la collection x. On parle dans ce cas de "mesure-comptante".

2 — *En conséquence il paraît indispensable de consacrer tout le temps nécessaire à la découverte de cette nouvelle signification du signe + et des techniques opératoires correspondantes, à partir de manipulations.*

L'expérience montre qu'il n'est jamais bon, d'un point de vue pédagogique, d'étendre le *champ sémantique* d'un symbole déjà utilisé sans dire aux élèves qu'ils sont en présence d'une nouvelle signification de ce symbole, comme si cette extension ne devait poser aucune difficulté aux élèves. Les élèves procèdent rarement par analogie surtout quand celle-ci est plus que douteuse.

Seule la manipulation peut faire "voir" à une majorité d'élèves que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ "ça ne fait" ni $\frac{1}{4}$ ni $\frac{2}{4}$. Elle seule permet d'élaborer les premiers "répertoires" sur lesquels pourra se construire une technique opératoire.

LE MATERIEL :

Des rectangles découpés dans un carton assez rigide. Les dimensions de ces rectangles s'expriment exactement en longueurs de bandes et fractions de longueurs de bandes utilisées précédemment.

Des rubans de papier de couleur.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Il s'agit d'encadrer le rectangle de carton (un par élève ou groupe de deux élèves) à l'aide de la longueur voulue de ruban coloré, comme si l'on voulait réaliser un sous-verre (en montrer un si possible).

Chaque élève ou groupe doit commander la longueur de ruban qui lui est nécessaire pour faire exactement le "tour" de "son" rectangle, *la commande étant faite par écrit.*

En général la plupart des élèves mesurent littéralement le tour du rectangle en s'aidant des bandes instruments, mais ils font parfois des erreurs, car ils mesurent deux fois certaines parties du tour.

La commande sera adressée à une équipe correspondante (ou à un correspondant) qui devra la *contrôler*. Pour cela elle (il) devra recevoir certains renseignements supplémentaires. Lesquels ?

Phase de recherche. On finit par proposer : "il faudrait connaître la longueur et la largeur du rectangle".

Chaque équipe mesure donc ces deux dimensions et écrit les renseignements sur la commande.

Suit un échange des commandes, une vérification par l'équipe qui reçoit et qui va "livrer" la longueur de ruban qu'on lui a commandée si elle est d'accord.

Sinon, retour à l'expéditeur pour de nouvelles propositions. Les équipes qui ont fini rapidement, après avoir vérifié si la portion de ruban qu'on leur livrait permettait effectivement d'encadrer leur rectangle, peuvent aider les équipes en difficulté.

Diverses stratégies apparaissent, par exemple :

$$1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4}$$

$$(1 + \frac{1}{2}) \times 2 + (1 + \frac{1}{8}) \times 2$$

ou encore

$$1 + \frac{1}{8}$$

$$1 + \frac{1}{4} \qquad 1 + \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{8}$$

On peut reprendre cette activité en demandant aux élèves de fournir les renseignements sous forme de deux fractions, par exemple :

$$\text{longueur} : \frac{5}{2} \quad \text{largeur} : \frac{9}{8}$$

Pour exprimer les résultats ou leurs calculs les élèves utilisent spontanément les signe + et × définissant ainsi une addition des rationnels et une multiplication par un naturel.

On insiste sur le fait qu'il s'agit d'un nouvel emploi du signe +.

F4 *Calculs d'aires*

(durée deux séances d'une heure)

LES OBJECTIFS :

Placer les élèves en situation de concevoir une multiplication des rationnels et d'élaborer un "modèle" pour exprimer le produit de deux rationnels codés en écriture fractionnaire.

Quelques réflexions à propos de ces objectifs ;

1 - Comme pour l'addition des rationnels, le signe $\times$ de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ n'a n'a pas le même champ de référence que le signe $\times$ de 3×5.

Au C.E. on présente parfois "l'assemblage" $a \times b$ comme la *somme* de *b* nombres égaux à *a* (b fois a) soit $a \times b = a + a + a + \ldots$ ce qui présente l'inconvénient de ne s'appliquer ni au cas où $b = 1$ ni au cas où $b = 0$

Plus fréquente est maintenant la référence au produit cartésien de deux ensembles dont le diagramme permet en outre une élaboration aisée de techniques opératoires.

Mais aucune de ces "définitions" ne s'applique au cas où *a et b sont des rationnels.*

Dans ce cas, *l'idée directrice* est la suivante :

Etant donné un segment U de longueur unité, si l'on choisit comme unité d'aire celle d'un carré dont le côté mesure 1 avec U, l'aire de tout rectangle, dont les côtés mesurent respectivement a et b avec U, s'obtient en multipliant a par b (si a et b désignent des naturels) comme cela se constate aisément en manipulant. Le diagramme cartésien est, là encore, particulièrement utile.

Si a et b sont des rationnels non entiers, par exemple $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$, la manipulation permettra de conjecturer que l'aire du rectangle est le rationnel $\frac{p \times r}{q \times s}$ et rien n'empêche d'appeler produit des rationnels $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ le rationnel $\frac{p \times r}{q \times s}$.

2 - L'activité proposée est donc structurée de la façon suivante :

- Construction par les élèves de carrés de côté 1.
- Recouvrement de rectangles à l'aide de ces carrés et fractions de ces carrés.

• Recherche empirique d'un "modèle" permettant de prévoir le nombre de ces carrés et fractions de ces carrés avant la manipulation effective.

• Recherche d'un codage pour cette "opération".

LES INSTRUMENTS A LA DISPOSITION DES ELEVES :

Pour le mesurage des longueurs les bandes utilisées, découpées dans du papier de couleur, mesuraient 8 cm.

Pour le mesurage des aires, les carrés unité sont fabriqués par les élèves en début de séquence (voir matériel).

LE MATERIEL :

Il est constitué :

De rectangles et carrés découpés dans du papier de couleur, par exemple du papier d'emballage uni ou non. Les dimensions de tous ces objets sont des multiples de 8 cm et leur mesure s'exprimer donc par un naturel avec les bandes utilisées. Nous désignerons dans la suite du texte ces "objets" par A.

De rectangles et carrés découpés dans du carton rigide ou dessinés sur feuilles non quadrillées. Pour chacune de ces pièces l'une au moins des longueurs des côtés n'est pas un multiple de 8 cm mais s'exprime en demi ou quart de longueur de bandes (de 8 cm).

Nous désignerons dans la suite du texte ces "objets" par B.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Phase 1

Travail individuel, chaque élève reçoit un "objet" A.

1ère consigne :

"Découpez ces feuilles de façon que chacun des morceaux obtenus soit un carré. Pour mesurer les côtés de la feuille vous vous servirez uniquement de ces bandes (distribuer une bande par élève). Attention, il faut du travail soigné".

Quelques instants après les élèves montrent les carrés obtenus. On constate éventuellement que tous n'ont pas la même taille. Il peut par exemple y avoir des carrés 2×2. Dans ce cas le maître donne une *deuxième consigne :*

"Je veux que tous les carrés obtenus par tous les élèves aient la même taille".

Lorsque ce travail est terminé on dresse un tableau :

dimensions du rectangle	nombre de carrés obtenus
2 ; 3	6
3 ; 5	

A tour de rôle chaque élève indique les dimensions du rectangle qu'il a découpé ; les autres doivent deviner combien il a obtenu de carrés.

Plus ou moins rapidement s'élabore un "modèle" à partir de ces exemples, modèle qui pourra être explicité sous la forme :

aire du rectangle = longueur × largeur ou, plus "correctement" :

mesure de l'aire du rectangle = mes.longueur × mes.largeur.

En fin d'activité on dispose donc d'un lot, le plus important possible, de carrés que le maître recueille en éliminant ceux qui seraient trop mal découpés (il aura été bien inspiré d'en préparer quelques uns de remplacement).

Phase 2

Travail individuel. Chaque élève reçoit un rectangle ou un carré (objet B). Pour l'un au moins des côtés la mesure s'exprime en demi-bande.

La consigne se donne en 2 temps :

a) "Vous devez recouvrir votre rectangle en utilisant les carrés qui ont été découpés (montrer les carrés au besoin). Vous allez commander le nombre de carrés qui vous seront nécessaires pour cela. *Mais n'en commandez pas trop :* Je ne veux pas qu'il reste de carrés inutilisés quand tout votre rectangle sera recouvert".

b) Le recouvrement étant réalisé et vérification faite, le maître donne une deuxième consigne :

"Pour certains, les carrés débordent du rectangle. *Je veux maintenant qu'on recouvre exactement le rectangle et pas plus".*

A la question : "Peut-on découper les carrés ? On répondra oui.

Ce travail terminé on dresse un nouveau tableau :

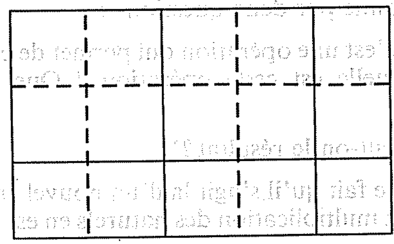
dimensions du rectangle	quantité de papier utilisée pour recouvrir exactement le rectangle

On demande aux élèves d'exprimer les dimensions et la quantité à l'aide d'une seule fraction. Leur laisser tout le temps nécessaire pour cela.

Exemple :

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$



$$2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{14}{4} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$= \frac{8}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Deux ou trois élèves donnent tous les renseignements demandés, par exemple :

5/2 ; 3/2 : 15/4

Les autres donnent simplement les deux dimensions et gardent secret le troisième renseignement. On va essayer de découvrir ce secret. Un élève a indiqué :

2 ; 7/2 trouver la quantité du papier qu'il a réellement utilisée etc.

Les diverses propositions sont inscrites au tableau (justes ou fausses). Tout élève ayant fait une proposition devra la justifier par le dessin, la manipulation ou le calcul. On confrontera en dernier lieu les propositions avec la réalité.

Dans une classe à faible effectif au niveau CM2, on aura intérêt à faire recouvrir plusieurs rectangles différents à chacun des élèves afin d'avoir un nombre suffisant de résultats.

Phase 3

Même démarche, mais l'une au moins des dimensions du rectangle s'exprime en quart de longueur de bande.

Cette activité portant vraisemblablement sur deux séances d'une heure, il serait souhaitable de pouvoir conserver le tableau ci-dessus indiqué pendant ces deux séances afin de pouvoir l'exploiter.

On verra ainsi s'élaborer et aussi disparaître des "modèles" pour faire les prévisions.

L'activité se termine par deux questions :

"Si l'on dit que c'est une opération qui permet de calculer la quantité de papier utilisée, quelle est cette opération ? Quel nom peut-on lui donner ?"

"Comment obtient-on le résultat ?"

On insistera sur le fait qu'il s'agit là d'un nouvel emploi du signe $\times$. On remarquera que la multiplication des naturels en est un cas particulier.

On peut commencer par l'élaboration d'un "répertoire"

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}\ ;\ \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16}\ \text{etc...}$$

Il faut être bien conscient qu'on est dans le domaine des conjectures, qu'il ne s'agit pas de faire ou de faire faire des "démonstrations" et *que le modèle n'est valable que pour les fractions de dénominateur 2 et 4.*

Bientôt (séquence F.D.4) viendra une très importante extension aux fractions de dénominateur 10, 100, 1000... et plus tard, ***si on le souhaite***, une extension à toutes les fractions.

V - Elaboration et utilisation d'écritures à virgule

V1 *Activités de mesurage à l'aide de "règles" graduées*

LES OBJECTIFS :

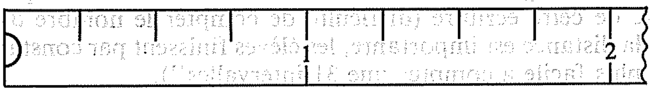
A l'occasion d'activités de mesurage supposant une bonne précision, mettre les élèves en situation de proposer de nouveaux codages pour exprimer des nombres-mesure.

LES INSTRUMENTS :

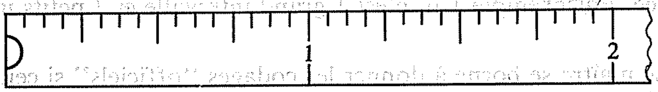
Le mesurage des longueurs sera effectué à l'aide de règles graduées par le maître à l'exclusion de tout autre instrument. Ces règles peuvent être découpées dans du ruban pour imprimante de calculatrice ou dans du papier relativement résistant. Elles mesurent environ 70 cm de longueur.

Elles sont de deux sortes :

Les règles G_1 utilisées dans la phase 1
Les règles G_2 utilisées dans la phase 2 (voir ci-dessous)



Règle G1



Règle G2

Elles sont réalisées en fonction des bandes utilisées dans les séquences F1 à F4 et des pliages opérés par les élèves. Les segments [0,1] et [1,2] de ces règles "mesurent" 32 cm. Le pliage précédent a induit le partage de ces segments en 4 pour G_1 et en 16 pour G_2. Le partage en 2 puis encore en 2 aurait conduit à des écritures comportant uniquement des 0 et des 1 ce qui n'a pas été jugé très intéressant. La taille des traits et aussi leur couleur distinguent chaque graduation. Les seuls chiffres figurant sur la règle sont ceux indiqués sur le dessin.

En outre on fixera au tableau une règle de même espèce (G_1 puis G_2) mais prolongée jusqu'à 7 ou 8 et mesurant donc environ 2,5 m.

LE MATÉRIEL :

C'est celui utilisé dans la séquence F1. On aura pris soin de renouveler les pièces B qui sont maintenant percées de deux trous ou d'obturer ceux-ci avec du ruban adhésif non transparent.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Le déroulement est le même que pour la séquence F1 avec commande écrite de pièces B, réalisation de ces pièces avant livraison, contrôle, mise en commun.

Phase 1 : La distance entre les deux trous des pièces A est un multiple de 8 cm.

Pour les commandes une contrainte est imposée :

"On ne doit plus se servir des fractions ni des mots demi, quart etc. Essayez de trouver d'autres façons d'écrire la distance entre les deux trous".

Selon les classes on pourra voir apparaître des codages tels que : ''de 0 jusqu'à 1 et 3 intervalles'' ; 1 ııı ; 1|3 ; 1 ₃ ; 7 (ce qui veut dire 7 intervalles). Dans ce dernier cas on pourra montrer la confusion possible avec 7 sur la longue règle fixée au tableau ou bien attendre la disparition progressive de cette écriture (difficulté de compter le nombre d'intervalles quand la distance est importante, les élèves finissent par constater que 7|3 ''c'est plus facile à compter que 31 intervalles'').

Lors de la mise en commun, toute proposition de codage doit être justifiée. Par exemple 1 ııı c'est 1 grand intervalle et 3 petits intervalles, etc.

Le maître se borne à donner les codages ''officiels'' si ceux-ci n'ont pas été utilisés spontanément par les élèves.

Par exemple, à la place de 1 ııı ou 1|3 ou de 1_3 on pourra écrire 1,3 ou encore 1.3 (notation anglo-saxonne cf. calculettes).

Il paraît essentiel que chaque élève puisse disposer, à côté du codage officiel, de son propre ''langage'' auquel il pourra se référer en cas de besoin.

En particulier ce ''langage auxiliaire'' lui permettra d'accéder à la signification du codage ''officiel'' sans laquelle, pour la plupart des élèves, il ne peut y avoir de connaissance fiable et durable sur les ''nombres à virgule'' et en particulier les décimaux.

A cet effet le maître organise, dès la fin de la mise en commun, une activité de ''dialectique des langages''.

Chaque type de codage proposé étant identifié par un numéro ou par le nom de son auteur, on demande aux élèves de réécrire toutes les commandes dans le ''langage de X'' puis dans le ''langage de Y'' puis dans le ''langage à virgule'' puis dans le ''langage à point''.

Phase 2 : La distance entre les deux trous de la pièce A est un multiple de 2 cm. L'activité est organisée comme dans la phase 1 précédente.

Les élèves utilisent un certain nombre de codages, par exemple :

1,3,2 ; 1|3|2 ; 1_{32} , etc et parfois des codages couleur ou des codages ''composites'' 1,$_{3.2}$.

Au cours de la mise en commun les élèves explicitent la signification de leur codage. *Le maître se garde bien d'intervenir, le seul critère de ''jugement'' étant : ''a été compris'' ; ''n'a pas été compris''.*

Suivent comme dans la phase précédente des activités de ''dialectique des langages''.

Comme certains codages sont manifestement trop compliqués ou plus exactement ''redondants'' le maître proposera ultérieurement de les raccourcir (séquence V3).

V2 *Comparaison de "longueurs"*
(durée 1 h environ)

LES OBJECTIFS :

Définir un ordre dans les rationnels.

Découvrir des règles simples pour la comparaison de rationnels codés en "écriture à virgule".

LES INSTRUMENTS :

Ce sont les règles G_2 utilisées au cours de l'activité précédente.

LE MATÉRIEL :

Des rubans de papier de couleur dont la longueur peut être "mesurée" exactement à l'aide des règles G_2.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITE :

Les élèves sont par équipes de deux. Chaque équipe reçoit un ruban et une règle G_2. Elle mesure la longueur de son ruban. Tous les "résultats" sont inscrits au tableau avec le numéro de l'équipe. A partir de ces données on va essayer de répondre à des questions du type :

"Quelle est l'équipe qui a le ruban le plus long ?"

Bien entendu les rubans sont cachés à la vue des autres équipes.

Une discussion est organisée, chacun pouvant faire une proposition justifiée ou contester une proposition faite par un camarade. Suit un contrôle par comparaison de tous les rubans.

De cet "ordre" sur les objets s'exprimant en propositions du type : "le ruban n° n est plus long que le ruban n° m" se déduit un ordre sur les rationnels s'exprimant par des propositions du type : "le rationnel codé x est plus grand que le rationnel codé y".

La formulation ci-dessus n'apparaît pas comme indispensable au CM. On lui préfèrera la formulation : "le nombre x est plus grand que le nombre y", qui sera proposée par le maître ou découverte par les élèves.

Suivront des exercices d'application de comparaison de nombres, toute affirmation devant être justifiée par référence au matériel puis par référence à la signification des "écritures", du genre :

"1,2 est supérieur à 1,13 car 1,2 c'est un grand intervalle et deux intervalles moyens alors que 1;13 c'est un grand intervalle, un intervalle moyen et trois petits intervalles".

D'autres justifications seront possibles ultérieurement (cf V5).

V3 *Activités de mesurage de précision*
(durée deux séances d'une heure)

LES OBJECTIFS :

Au cours de cette activité les élèves sont conduits :

— à produire des écritures de plus en plus "longues" vers la droite

— à découvrir qu'entre deux quelconques de ces nouveaux nombres on peut toujours en intercaler autant qu'on veut

— à découvrir qu'il n'existe pas de nouveau nombre qui soit plus près d'un nombre donné que tous les autres,

— à découvrir qu'une différence de longueur d'écriture n'entraine pas nécessairement une différence d'ordre de grandeur contrairement à ce qui se passe pour les naturels.

Inutile, bien entendu, de faire formuler ainsi ces propriétés par les élèves.

LES INSTRUMENTS :

Les règles G_2 utilisées lors des deux séquences précédentes.

LE MATÉRIEL :

Des rubans de papier de couleur, assez longs.

Des objets dont les dimensions sont aisément mesurables tels que : livres et cahiers (largeur, longueur, épaisseur), tables, etc.

Du papier transparent découpé en bandes assez larges, d'environ 3 cm de long.

Si possible quelques loupes.

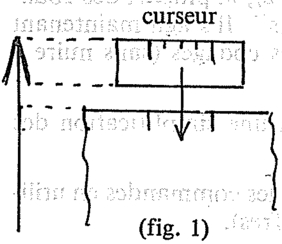
DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Les élèves sont par équipes de deux. Chaque équipe reçoit une règle G_2 et choisit un objet dont elle mesurera une dimension. Puis elle commandera à une équipe correspondante un ruban qui ait exactement la même longueur que la dimension mesurée.

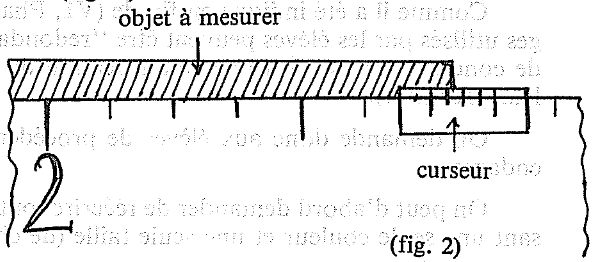
Bien vite les élèves remarquent que leurs règles ne sont pas assez précises pour fournir un renseignement exploitable. Tout ce qu'on peut donner, c'est un encadrement de la mesure ; par exemple la longueur est comprise entre 1,21 et 1,22 ou bien elle est "au milieu entre 0,23 et 0,3"

Que faire ? Les enfants proposent diverses solutions dont "continuer la graduation de la règle"

Pour aller plus vite le maître propose, non pas de graduer toute la règle, mais de fabriquer un "curseur" à l'aide d'une bande de papier transparent pliée en cavalier (fig. 1).



(fig. 1)



(fig. 2)

Pour graduer ce "curseur" on le place sur l'un des petits intervalles de G_2 et on marque les deux traits limitant l'intervalle. Puis on partage sur le curseur cet intervalle en 4 intervalles (segments) de même longueur, par pliage ou en utilisant un double décimètre.

Il est commode de se servir de la longue règle fixée au tableau pour montrer collectivement la réalisation du curseur.

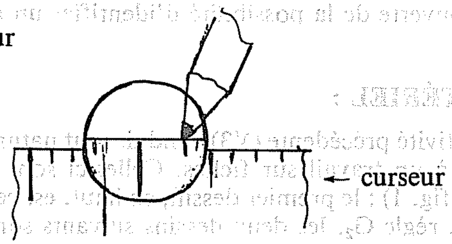
Supposons que l'on ait à préciser la longueur d'un objet comprise entre 2,12 et 2,13. On place le curseur sur l'intervalle convenable de la règle de façon que les traits limitant l'intervalle coïncident sur la règle et sur le curseur. On peut alors donner un encadrement "plus fin" de la mesure ou éventuellement sa valeur exacte. Dans le cas de figure cette mesure est comprise entre 2,121 et 2,122. (fig. 2)

Le maître se borne à expliquer le fonctionnement du curseur, laissant aux élèves le soin de coder les mesures.

Une mise en commun montrera les codages utilisés.

Certaines mesures sont encore approchées ; on sera donc conduit à affiner encore l'instrument par un nouveau partage en quatre de chaque intervalle sur le curseur. Pour cela une loupe pourra être jugée nécessaire (fig. 3). En fait on ne cherche pas une très grande précision dans la construction de l'instrument, mais l'emploi de la loupe permettra d'introduire l'activité suivante (V4).

Graduation du curseur
à l'aide d'une loupe



(fig. 3)

Suivent de nouveaux mesurages, de nouvelles commandes, de nouveaux contrôles, une nouvelle mise en commun comme ci-dessus.

Comme il a été indiqué en fin de (V1, Phase 2), la plupart des codages utilisés par les élèves peuvent être "redondants". Il s'agit maintenant de conduire les élèves à une simplification de ces codages (sans nuire à leur précision).

On demande donc aux élèves de procéder à une simplification des codages.

On peut d'abord demander de réécrire toutes les commandes en utilisant une seule couleur et une seule taille (de chiffres).

Puis on jouera sur le nombre des "caractères" utilisés :

Par exemple pour écrire 2,3,1,2,1 on utilise 9 "caractères" d'imprimerie, il faut frapper 9 touches d'une machine à écrire soit 2-,-3-,-1-,-2-,-1.

Demander aux élèves d'écrire ce nombre en utilisant moins de 9 "caractères".

V4 *Intercaler des nombres à virgule entre des nombres à virgule*

V5 *Ecriture des naturels sous forme de nombres à virgule*

(durée une séance d'une heure ; ultérieurement séances d'exercices)

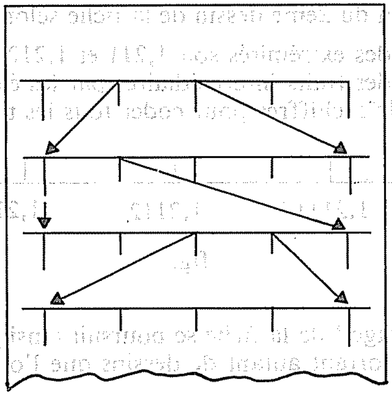
LES OBJECTIFS :

Découverte d'une propriété des rationnels : "entre deux rationnels on peut toujours intercaler un rationnel" (la formulation proposée aux élèves, s'il y en a une, ne sera pas nécessairement celle-là).

Découverte de la possibilité d'identifier un naturel à un rationnel.

LE MATÉRIEL :

L'activité précédente (V3) conduit tout naturellement à une représentation et à un travail sur fiches. Celles-ci sont préparées par le maître (exemple fig. 1) ; le premier dessin, en haut, est censé représenter une portion de la règle G_2, les deux dessins suivants sont censés représenter des agrandissements successifs du curseur, les flèches indiquent les "intervalles" successivement agrandis.



(fig. 1)

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Chaque élève reçoit une fiche.

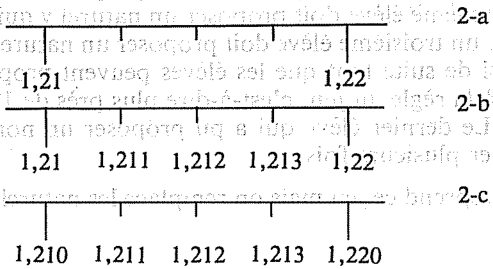
Il paraît préférable de donner collectivement le mode d'emploi de ces fiches, à partir d'un exemple :

- La mesure d'un ruban (cf V3) est comprise entre 1,21 et 1,22 ; on place donc le curseur sur l'intervalle convenable de la règle G_2 et on va graduer la représentation correspondante (dessin du haut de la fiche). Cela se fait en plusieurs temps :

. graduation des extrémités de l'intervalle (fig. 2-a)

. graduation des traits intermédiaires par les élèves (fig. 2-b)

. on remarque que les graduations intermédiaires nécessitent 4 chiffres alors que les graduations extrêmes n'en utilisent que 3. Essayons de coder *tous* les traits de graduation en utilisant 4 chiffres. Propositions des élèves, discussion (fig. 2-c).



(fig. 2)

• Nous supposons que la mesure du ruban est comprise entre 1,211 et 1,212. Il faut donc agrandir l'intervalle correspondant du curseur pour donner une mesure plus précise (2ème dessin de la fiche). Recommence alors la graduation du 2ème dessin de la fiche selon la même démarche :

. graduation des extrémités soit 1,211 et 1,212
. graduation des traits intermédiaires par les élèves (fig. 3)
. utilisation de 5 chiffres pour coder tous les traits etc...

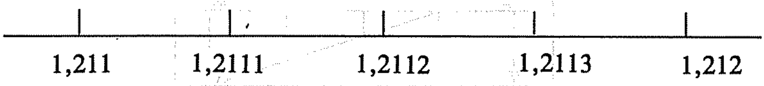


fig. 3

Le "remplissage" de la fiche se poursuit ainsi jusqu'au dernier dessin, la fiche comportant autant de dessins que l'on veut, sans toutefois abuser.

Après un ou deux exercices collectifs de ce type on peut s'éloigner de la situation vécue au départ de cette représentation et on choisit un codage quelconque pour les traits extrêmes.

Par exemple on n'oubliera pas le cas où ces traits extrêmes sont codés par des naturels. On sera alors conduit au cours de cette activité à donner un ou plusieurs codages d'un naturel sous forme de nombre à virgule, sans entraîner de réticences de la part des élèves. C'est ainsi que le naturel 2 par exemple pourra être codé successivement 2,0 ; 2,00 ; 2,000, etc.

On peut ensuite s'éloigner même de la représentation en demandant aux élèves d'essayer, sans utiliser cette préparation, d'intercaler des nombres à virgule entre deux nombres tels que 1,332 et 1,333.

Pour terminer, un "jeu du plus malin" en plusieurs épisodes :

1°) Le maître (ou un élève) choisit deux naturels, par exemple 7 et 29. Les élèves doivent proposer des naturels compris entre ces deux nombres.

2°) On choisit maintenant un seul naturel, par exemple 12. Ce nombre est écrit au tableau. Un premier élève propose un naturel x différent de 12, un deuxième élève doit proposer un naturel y qui doit être compris entre x et 12, un troisième élève doit proposer un naturel z compris entre y et 12 et ainsi de suite tant que les élèves peuvent proposer des nombres satisfaisant à la règle du jeu, c'est-à-dire plus près de 12 que les nombres précédents. Le dernier élève qui a pu proposer un nombre est gagnant. Recommencer plusieurs fois.

3°) On reprend ce jeu mais on remplace les naturels par des nombres à virgule.

C'est ainsi qu'on demandera de proposer des nombres compris entre 2,1123 et 2,113 puis de trouver le nombre qui est plus près de 0,12 que tous les autres, tout en étant différent de 0,12 (ce qui est évidemment impossible).

D - Dialectique des langages

D1 *Activités de mesurage à l'aide de bandes et de règles*

(Durée deux séances d'une heure)

L'OBJECTIF :

Entraîner les élèves à passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture à virgule d'un rationnel et inversement.

LES INSTRUMENTS :

Les bandes et fractions de bandes utilisées dans les séquences F1.

Les règles G_2 utilisées dans les séquences V1...

LE MATÉRIEL :

Les pièces de carton A et B utilisées dans ces séquences, les pièces B ayant été préalablement rénovées (voir séquence V1 le matériel).

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

En principe les élèves sont par équipes de deux ; toutefois il est commode d'avoir un nombre pair d'équipes.

Elles reçoivent toutes une pièce A.

La moitié des équipes reçoit des bandes et fractions de bandes pour effectuer les mesurages ; nous les appellerons équipes E1. L'autre moitié reçoit des règles G_2 (équipes E2).

L'activité se déroule comme dans les séquences F1 et V1, c'est-à-dire que les élèves mesurent la distance entre les deux trous et font une commande.

Mais le maître porte aux équipes E2 les commandes des équipes E1 et réciproquement à l'insu des élèves.

Ceux-ci ne tardent pas à protester :

"On ne peut pas", "on ne comprend pas", "ils ont des bandes et nous avons des règles" etc.

"Comment faire ?"

Le maître demande alors aux élèves de reprendre leur commande de façon à la refaire "pour être compris".

• On pourra montrer que les "grands intervalles" des règles ont même longueur que les bandes.

• Pour des élèves en difficulté on pourra autoriser l'emploi des instruments appropriés.

• On pourra aussi demander, pour aider les élèves ou en fin d'activité, l'élaboration d'un "dictionnaire" pour un passage facile du langage des fractions au langage à virgule et réciproquement. Travail individuel, sur feuille à partir d'un modèle donné au tableau (à compléter bien entendu).

0,1 =	0,01 =	0,001 =
0,2 =	0,02 =	0,002 =
0,3 =	0,03 =	0,003 =

• Le dictionnaire est ensuite écrit au tableau, ce qui permet une correction individuelle. Puis il sera utilisé dans toute une série de "traductions" qui constituent autant d'exercices fondamentaux du type :

Traduire dans le langage des fractions (ou écrire sous forme de fraction — ce qui n'est pas plus simple).

2,13 ; 3,013 ; 0,021 ; 0,00032 etc

Traduire dans le langage à virgule (ou sous forme de nombre à virgule)

1 + 1/4 + 1/16 etc. ; 5/8 etc.

Au cours de la discussion qui s'ensuit, les élèves découvrent des "règles" de traduction, par exemple qu'il est commode d'exprimer préalablement les écritures fractionnaires uniquement à l'aide des fractions 1/4, 1/16, 1/64 etc.

D2 *Résolution de problèmes par des traductions*

(Durée pour la séance d'initiation une heure)

L'OBJECTIF :

Apprendre aux élèves à utiliser des traductions d'un langage dans un autre pour représenter un énoncé et résoudre certains problèmes.

Exercices de comparaison d'écritures fractionnaires :

Exemple :

Traduire $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ et $1+\frac{3}{4}$ en nombres à virgule pour les comparer.

$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1{,}21 \;;\; 1 + \frac{3}{4} = 1{,}3$ donc...)

Vérification par l'emploi des instruments.

Exercices d'addition de nombres à virgule :

Exemple :

Traduire 1,2 et 1,32 en fractions pour les ajouter.

$(1{,}2 = 1 + \frac{2}{4} \;;\; 1{,}32 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{2}{16}$ donc....)

A partir de ces exercices les élèves découvrent des techniques d'addition des rationnels codés en écriture à virgule (base quatre). On voit déjà tout le profit qu'on pourra en tirer pour l'addition des décimaux.

F.D - Fractions décimales

FD1 *Activités de mesurage à l'aide de bandes de un mètre*

(Durée deux séances d'une heure)

L'OBJECTIF :

Une approche concrète des fractions décimales.

LES INSTRUMENTS :

Des bandes de 1 m de long découpées, comme les précédentes dans du ruban pour imprimante de calculatrice.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Organisation générale :

Les élèves sont par équipes de deux. On convient de mesurer divers objets ou distances dans la salle, au gré des élèves (livres, tables, taille d'un élève, dimensions de la salle, d'une vitre, d'une porte, etc.). Plusieurs équipes peuvent choisir le même objet ou la même distance, ce qui permettra un contrôle.

Pour effectuer ce mesurage elles utilisent des bandes de 1 m de long (deux par équipe) et des "fractions" de ces bandes.

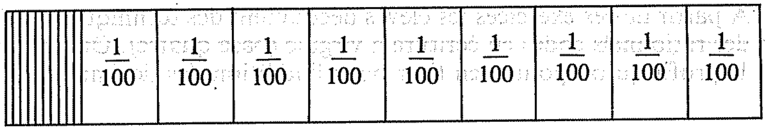
Mais les partages successifs pour obtenir ces "fractions de bandes" ne se font plus de "2 en 2" ; ils se font de "10 en 10" comme pour le mètre de la classe.

Phase 1 : Les élèves construisent leurs instruments de mesure selon cette règle. Ils peuvent utiliser doubles décimètres et autres pour faire les partages. Beaucoup de soin sera exigé. Une seule bande sera découpée, l'autre restant intacte.

Sur chaque fraction on indique sa "mesure" : 1 ; 1/10 ; 1/100 etc.

Seuls les 1/10 sont effectivement découpés. Sur l'un d'eux on trace 1/100 et 1/1000 qui seraient difficiles à manipuler isolément (fig. 1).

En cours de construction les enfants remarquent que 1/10 c'est un décimètre, 1/100 c'est un centimètre etc.



(fig. 1)

Phase 2 : Les élèves effectuent le mesurage des objets choisis et inscrivent les mesures au tableau. Spontanément ils utilisent les écritures fractionnaires correctes.

Phase 3 : Elle constitue une ouverture sur le monde et l'environnement technologique. Le maître pose une question :

"Regardez 1/1000 c'est-à-dire 1 mm. C'est une bande de 1 m partagée en 1000. C'est très petit, mais dans beaucoup de métiers cela ne permet pas des mesures assez précises, il faut utiliser des "fractions" encore plus petites. En combien de parties pensez-vous que l'on sache actuellement "partager" le mm ?"

N.B. La réponse est, actuellement, au moins 10000000 (dix millions). Dans certains "secteurs" comme l'optique, la biologie, on mesure couramment des dimensions de l'ordre du dix millionième de mm (mais on ne se sert pas d'une bande de papier, on ne "partage" pas un segment matériel). L'unité correspondante s'appelle l'Angström.

Même si l'on souhaite présenter de telles informations sous une forme différente, il semble important d'en faire part aux élèves.

On peut certes ne pas parler d'Angströms aux élèves — bien que l'expérience ait montré que tous étaient très intéressés et aussi stupéfaits par la "révélation" de telles "prouesses" techniques —, mais a-t-on le droit de laisser ignorer à des enfants, parfaitement capables de comprendre, que le garagiste du plus humble village utilise, pour le réglage de nos voitures, des "cales d'épaisseur" au 1/100 de mm, que dans beaucoup d'ateliers on travaille "au 1/1000 de mm" (micron) etc.

Pour rendre ses propos plus "concrets" le maître a demandé aux élèves s'ils pouvaient se procurer auprès de leurs parents des "cales de garagiste". Sinon le maître peut en emprunter pour la durée de la séquence, et de vieilles "bougies" de voitures et autres cyclomoteurs.

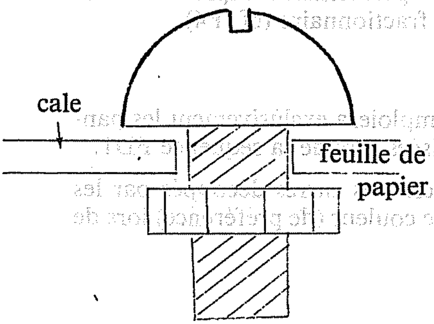


fig. 1

Lors de la deuxième séquence les élèves ont donc beaucoup manipulé, mesurant la distance (écartement) entre les électrodes de bougies. Ils ont également utilisé des "palmers" de fortune réalisés à l'aide de vis à tête ronde et de leurs écrous (fig. 1).

Pour "mesurer" l'épaisseur d'une feuille de papier ou de tout autre matériau très mince on serre cet objet entre la tête du boulon et l'écrou. On n'a plus qu'à mesurer l'écartement entre ces deux pièces.

Evidemment ce n'est peut-être pas très... précis, mais cela fait manipuler des "petits nombres", alors qu'en général on se contente d'en parler comme si cela suffisait pour "savoir".

N.B. La "théorie" du vernier n'ayant pas paru très accessible aux élèves de cet âge, il n'a pas été utilisé de pieds-à-coulisse pour ces mesurages.

FD2 *Les "trains de bandes"* (Durée une heure)

On reprend point par point toutes les phases de la séquence F2 mais en utilisant les nouveaux instruments (bandes de 1 m de long et fractions de ces bandes).

On voit alors apparaître des propositions telles que :

$$1+\frac{1}{10}+1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{10}=2+\frac{3}{10}+\frac{2}{100}$$

$$1+\frac{7}{10}+1+\frac{8}{10}=2+\frac{15}{10}=2+\frac{10}{10}+\frac{5}{10}=3+\frac{5}{10}$$

FD3 *Calculs de périmètres* (Durée une heure)

On reprend point par point toutes les phases de la séquence F3 mais en utilisant les nouveaux instruments.

FD4 *Calculs d'aire* (Durée deux séances d'une heure)

L'OBJECTIF :

Poursuivre l'élaboration du "modèle" permettant d'exprimer le produit de deux rationnels codés en écriture fractionnaire (cf. F4).

LES INSTRUMENTS :

Pour le mesurage des longueurs on emploiera exclusivement les bandes de 1 m et leurs "fractions" déjà utilisées lors de la séquence FD1.

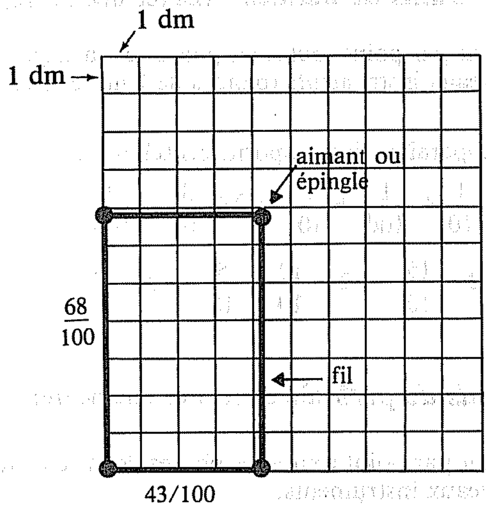
Pour le mesurage des aires on utilisera des carrés découpés par les élèves dans de grandes feuilles de papier de couleur (de préférence) lors de la phase 1 (ci-dessous).

LE MATÉRIEL :

Pour la phase 3 (mise en commun) il sera intéressant d'utiliser un grand rectangle découpé dans du "papier pour patrons". Ce papier se présente sous forme de rouleaux de 1 m de large et est quadrillé 1 cm × 1 cm.

Il est à noter que ce rectangle pourra trouver bien d'autres usages dans la classe, par exemple il peut être utilisé pour des "mesurages" d'aires lors de l'approche de cette notion ; il peut aussi être utilisé comme matériel "collectif" pour une initiation à la représentation graphique, etc. Un fil tendu par de petits aimants ou des épingles concrétisera une droite passant par des points de coordonnées données.

Tous les 10 cm les traits du quadrillage seront renforcés (fig. 1).



(fig. 1)

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ : (cf séquence F4)

Phase 1 : Les élèves découpent des carrés de 1 m de côté en nombre suffisant. Le maître exigera un tracé préalable et s'assurera de la précision du découpage. On ne pourra utiliser que des bandes-mesures pour cette construction.

Cette phase donnera aux élèves une connaissance "physique" des instruments à utiliser et de leurs relations (unité de longueur - unité d'aire).

Phase 2 : Les élèves sont par équipes de deux. Ils choisissent un "objet" (livre, table, vitre, panneau, porte, etc.) dont ils mesurent les dimensions en utilisant exclusivement les instruments autorisés (voir instruments). Ils doivent commander la quantité de papier nécessaire pour recouvrir exactement l'objet choisi. Dans cette commande doivent figurer :

— les dimensions de l'objet, exprimées à l'aide d'une seule fraction,

— la quantité de papier nécessaire.

La commande est adressée à une équipe correspondante qui doit vérifier son exactitude et ensuite fournir la quantité de papier commandée s'il y a accord ; sinon elle renvoie la commande à l'équipe qui l'a rédigée assortie de questions et observations.

Suit un contrôle pour s'assurer que la quantité de papier livrée permet bien de recouvrir exactement l'objet.

Phase 3 : Phase de mise en commun.

Au tableau on dispose :

Un tableau analogue à celui utilisé lors de la séquence F4 (cf 2ème tableau de cette séquence).

Un exemplaire de carré unité et de toutes les fractions de carré utilisées (1/10 ; 1/100 ; 1/1000 ; 1/10000, etc).

Le rectangle quadrillé 1 cm × 1 cm (voir matériel)

Chaque équipe vient justifier sa commande en utilisant ce rectangle. Pour cela elle délimite à l'aide d'un fil, d'épingles ou de petits aimants (dans le cas où l'on dispose d'un tableau magnétique) un rectangle ayant les dimensions de l'objet choisi et s'appuie sur cette représentation pour expliquer sa démarche (fig. 1).

Les divers résultats ainsi contrôlés et justifiés sont inscrits dans le tableau. Par exemple :

dimensions du rectangle	quantité de papier utilisé
$\frac{3}{10}$; $\frac{4}{10}$	$\frac{12}{100}$
$\frac{27}{100}$; $\frac{6}{10}$	$\frac{162}{1000}$

On demande alors aux élèves de déduire une règle de calcul et de la vérifier sur des exemples.

On prolongera le "répertoire" élaboré dans la séquence F4.

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \ ; \ \frac{1}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{1000} \text{ etc.}$$

Préalablement on aura fait remarquer que dans ce cas aussi :

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; etc.

N.D. - Nombres décimaux

ND1 *Activités de mesurage à l'aide de règles graduées*

(Durée une séance d'une heure)

L'OBJECTIF :

Découvrir d'autres nombres à virgule, correspondant aux fractions décimales.

LES INSTRUMENTS :

Réalisés dans du papier fort ou du carton, ils sont constitués de bandes dont la longueur sera légèrement supérieure à 1 m. Ils sont une reproduction du mètre en bois de la classe mais l'intervalle [0,1] "mesure" 1 m de long et non plus 1 cm ; il est partagé en 10 puis encore en 10.

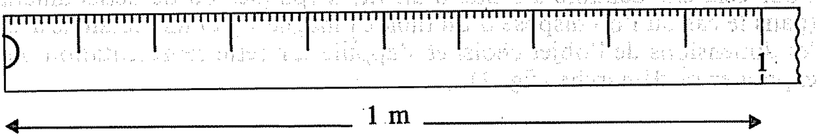


fig. 1

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Chaque équipe de deux élèves reçoit une des règles ainsi graduées avec laquelle elle va mesurer un objet ou une distance de son choix. Pour exprimer cette mesure elle n'a pas le droit d'utiliser le langage des fractions. Les mesures sont inscrites au tableau. Cette mise en commun donne lieu à un travail sur les "écritures" analogue à celui de la séquence V1, mais en général les élèves emploient spontanément les "nombres décimaux". Il ne reste plus au maître qu'à leur apprendre que ce sont... des *"nombres décimaux"*.

Pour terminer la séance on fera un inventaire plus ou moins complet d'autres mesures s'exprimant à l'aide de nombres décimaux telles que les prix, les masses, les vitesses. Des tickets de caisse, des emballages pourront être utilisés pour illustrer ces différents usages des décimaux.

ND2 *Comparaison de "longueurs"*

Les élèves mesurent des "objets" de leur choix à l'aide des règles graduées ci-dessus, ils inscrivent au tableau le nom de l'objet et sa mesure.

Quel est le plus long ? Les élèves proposent des réponses en justifiant leurs propositions. Suit une comparaison directe des objets (si possible). Comme dans la séquence V2 on en déduit la comparaison des "nombres décimaux". Des règles sont dégagées.

ND3 *Activités de mesurage de précision*

L'activité se déroule comme pour la séquence V3 avec les nouvelles règles graduées.

ND4 *Intercaler des décimaux entre des décimaux*
ND5 *Ecriture de naturels sous forme de décimaux*

Se reporter aux séquences V4 et V5 mais tenir compte de la nécessaire modification des fiches (fig. 2).

Tous les exercices et jeux décrits dans V4 et V5 peuvent être repris en les adaptant au nouveau partage en 10.

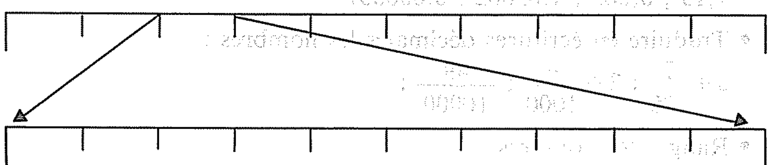


fig. 2

D′ - Dialectique des langages

D′1 *Activités de mesurage à l'aide de bandes et de règles*

(Durée une séance d'une heure)

L'OBJECTIF :

Entraîner les élèves à passer du codage fractionnaire au codage décimal d'un rationnel (cf. séquence D1).

LES INSTRUMENTS:

Les élèves utiliseront, au choix, des bandes de 1 m et des fractions de ces bandes (cf séquence FD1) ou des règles graduées (cf séquence ND1).

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ:

• Chaque équipe mesure un "objet" ou une distance en utilisant l'instrument choisi. Elle note au tableau le nom de l'objet et sa mesure dans le "langage" correspondant à l'instrument utilisé.

• On demande alors aux élèves de traduire chaque mesure dans l'autre "langage".

Par exemple une équipe a noté :

livre : $\frac{3}{10} + \frac{7}{100}$. On traduira livre : 0,37

Une autre aura noté :

longueur table : 1,18. On traduira $1 + \frac{1}{10} + \frac{8}{100}$ ou $\frac{118}{100}$

• On pourra faire contrôler en faisant mesurer les "objets" avec l'autre instrument.

• Suivra l'élaboration d'un dictionnaire :

0,1 = ; 0,01 = ; etc.

Exercices d'application :

• Traduire en écriture fractionnaire les nombres :
7,15 ; 0,008 ; 1,03002 ; 0,000007

• Traduire en écritures décimales les nombres :

$3 + \frac{7}{100}$; $2 + \frac{4}{1000}$; $\frac{49}{10000}$;

• Ranger les nombres :

$\frac{31}{10}$; 3,05 ; $3 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$....

D'2 *Résolution de problèmes par dialectique des langages*

(Durée une heure pour la séance d'initiation)

L'OBJECTIF :

Apprendre aux élèves à utiliser des traductions d'un langage dans un autre pour représenter un énoncé et résoudre certains problèmes (cf D2).

LES INSTRUMENTS :

Ceux des séquences FD et ND.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Il s'agit d'exercices individuels.

Dans la phase de recherche les instruments seront tolérés, du moins au début, mais on demandera très tôt à la plupart des élèves de ne pas les utiliser.

Par contre ils seront utilisés constamment pour le contrôle des "résultats" après la phase d'explications.

Voici quelques types d'exercices possibles.

— Comparer les nombres $\frac{37}{100}$ et $\frac{4}{10}$ par traduction en écritures à virgule

$\frac{37}{100} = 0,37$; $\frac{4}{10} = ...$

— Calculer $2,75 + 7 + 1,048$ par traduction en écritures fractionnaires.

$2,75 = 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$; ....

— Les côtés d'un rectangle mesurent 7,3 et 2,5 (en m). Calculer son aire en traduisant ces mesures en écritures fractionnaires.

$7,3 = \frac{73}{10}$; $2,5 = \frac{25}{10}$,

Aire du rectangle : $\frac{73}{10} \times \frac{25}{10} = \frac{1825}{100} = 18,25$

On conviendra d'écrire :
$7,3 \times 2,5 = 18,25$.

Après divers exercices de ce type il sera possible de dégager, pour certains élèves, une règle de la multiplication des décimaux, mais la démarche indiquée ci-dessus peut être un procédé fiable de calcul ou de mémorisation pour la plupart des élèves.

C - Conversions

Activités de mesurage à l'aide de bandes de différentes longueurs

LES INSTRUMENTS :

Ils sont constitués par deux sortes de bandes découpées dans du papier de couleurs et de longueurs différentes. Nous avons utilisé :

— des bandes de 32 cm de long d'une couleur (rouge par exemple)
— des bandes de 16 cm de long d'une autre couleur (bleue par exemple).

LE MATÉRIEL :

Nous utilisons les pièces de carton A et B (rénovées) déjà utilisées lors des séquences F1, V1, D1.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Phase 1 : Elle est organisée comme celles des séquences F1, V1, D1 avec commande de la pièce B correspondant à la pièce A que l'on possède.

Mais la moitié des équipes reçoivent des bandes-instruments rouges et l'autre moitié des bandes-instruments bleues. Aucun des élèves ne sait que ces bandes ont des longueurs différentes.

D'autre part le maître distribue les commandes de façon qu'une équipe dotée de bandes bleues reçoive une commande réalisée par une équipe utilisant des bandes rouges et inversement.

Tout se passe à peu près bien pour la plupart des équipes, sauf celles qui reçoivent des commandes manifestement anormales, par exemple distance 5. Mais au moment du contrôle cela ne va plus du tout, les pièces A et B ne peuvent absolument pas s'assembler.

Comment cela se fait-il ?

Les élèves finissent par remarquer que les bandes n'ont pas toutes la même longueur. Certaines sont le double des autres.

Comment faire pour se "comprendre" ? Pour pouvoir utiliser les commandes.

Les élèves proposent d'indiquer sur la commande la couleur de la bande utilisée pour le mesurage, mais cela ne suffit pas car chaque équipe doit conserver ses bandes-instruments sans pouvoir en changer.

Les différentes mesures obtenues sont notées dans la colonne convenable d'un tableau :

Pièce n°	mes b.r. (mesure avec la bande rouge)	mes b.b. (mesure avec la bande bleue)
1	$1+\frac{1}{4}$	....
2	....	 3
3	....	.... $4+\frac{1}{8}$
....	....	....

Les élèves doivent compléter individuellement ce tableau.

Pendant cette phase ils pourront utiliser librement les deux sortes de règles. Après contrôle les deux premiers résultats sont inscrits au tableau. Par exemple

1	$1+\frac{1}{4}$	.... $2+\frac{1}{2}$
2	$1+\frac{1}{2}$	 3

L'observation de ces résultats suscite des remarques des élèves :

mes b.b. = mes b.r. × 2

mes b.r. = mes b.b. : 2

Pas à pas les élèves complètent le tableau. Toutes ces propositions donnent lieu à contrôle, c'est-à-dire que les auteurs des divers messages convertissent la mesure dans "l'autre unité" et le réexpédient à l'équipe correspondante. Un contrôle des pièces permettra donc une vérification des différentes "conversions".

Cette phase se termine en incluant le nombre 1 dans chacune des deux colonnes du tableau :

1	2
....	1

Phase 2 : On propose des conversions dans le "système métrique", toujours à l'aide d'un tableau. Par exemple :

mes m. (mesure en mètres)	mes cm. (mesure en centimètres)
1	100
$\frac{1}{100}$	1
3	
$2+\frac{3}{10}$	
	75

Au début les élèves peuvent utiliser le matériel (bandes de 1 m et leurs fractions) ; puis peu à peu ils devront trouver les résultats par le calcul.

Une variante

LES INSTRUMENTS :

Des règles graduées analogues à celles utilisées lors de la séquence ND1 mais avec divers codages des graduations (fig. 1).

C'est ainsi que l'on dispose de règles graduées en mètres, de règles graduées en décimètres, en centimètres, en millimètres et, pourquoi pas, de règles graduées en décamètres et même en kilomètres et dont les graduations "extrêmes" sont donc codées respectivement 0 ; 0,1 et 0 ; 0,001

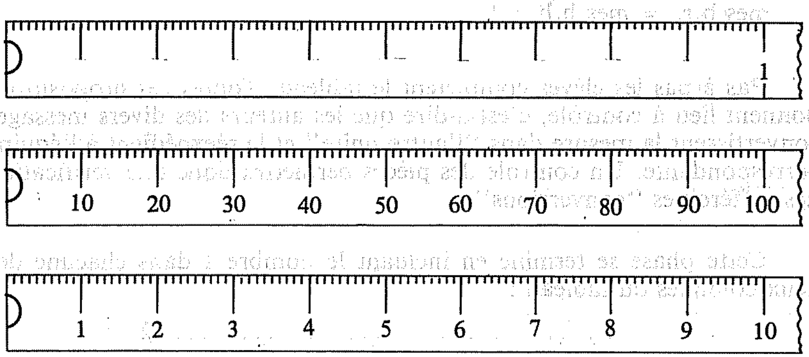


fig. 1

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ

Chaque enfant ou équipe mesure une longueur ou une distance. Il indique l'unité et la mesure, par exemple : mesure en cm : 72,5.

Question : Combien auraient-ils "trouvé" s'ils avaient utilisé une règle graduée en mètres ou en décimètres, etc.

Il sera commode d'utiliser un tableau à compléter du genre (fig. 2) en utilisant d'abord les instruments appropriés, puis en imaginant des procédés de conversion.

mes	hm	dam	m	dm	cm	mm

Q Extension du "concept" de rationnel

L'OBJECTIF :

Dans une situation de réinvestissement, présenter une autre approche des rationnels et de leurs codages, ainsi que de l'encadrement d'un rationnel, par des décimaux.

LE MATÉRIEL :

Une fiche individuelle sur laquelle sont dessinés deux rectangles, dont l'un a pour dimensions (en cm) 8 et 3 et l'autre 6 et 4, numérotés 1 et 2.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ :

Phase 1 : Chaque élève reçoit une fiche (ci-dessus). Le maître demande :

"Quel est le plus grand de ces deux rectangles ?"

Les réponses des élèves montrent que certains interprètent : "quel est le plus long ?", d'autres "quel est celui qui a le plus grand périmètre ?", d'autres enfin : "quel est celui qui a la plus grande aire ?".

Après discussion on précise :
"Quel est celui qui a la plus grande aire ?"

Intuitivement certains déclarent "c'est le 1", d'autres "le 2", ou bien ne se prononcent pas. L'un des élèves dit "ils sont peut-être pareils".

Pour savoir "qui a raison" on décide de calculer l'aire de chaque rectangle après avoir mesuré les côtés avec un double-décimètre ou une règle graduée.

Conclusion :

"Les deux rectangles ont la même aire". Dans la suite nous dirons : "ces deux rectangles sont *équivalents*", ce mot étant écrit au tableau.

Phase 2 : Le maître demande aux élèves de dessiner d'autres rectangles équivalents aux deux rectangles de la fiche.

Les élèves proposent assez rapidement 12 et 2, plus tard 24 et 1. Par "chance" un élève propose 5 et 7. Protestations de ses camarades : "$7 \times 5 = 35$".

Bonne aubaine pour le maître qui dit :

"Vous allez dessiner un rectangle équivalent aux rectangles 1 et 2 et dont un côté mesurera 5".

Les élèves écrivent l'équation $5 \times . = 24$.

Ils finissent par dire :

"L'autre côté est compris entre 4 et 5".

Les élèves "testent" alors les *nombres* compris entre 4 et 5 et trouvent assez rapidement 4,8. On vérifie puis on construit le nouveau rectangle ainsi déterminé.

Le maître demande ensuite de dessiner un autre rectangle équivalent aux précédents et dont un côté mesure 7.

Pour cette recherche, une fois l'équation posée, on peut organiser le travail par équipe, chacune de ces dernières "testant" un décimal particulier.

Comme le nombre cherché est compris entre 3 et 4, une équipe essaie 3,1, une autre 3,2 etc, et ainsi de suite pour les "décimales" supplémentaires. Des calculettes pourraient aussi être utilisées.

Pour conclure le maître déclare que le nombre-mesure du deuxième côté sera codé 24/7, codage dans lequel les élèves reconnaissent une fraction. Les calculs faits par les élèves en donnent des valeurs décimales approchées.

TROISIÈME EXEMPLE : UNE APPROCHE DES DÉCIMAUX A PARTIR DE LA MESURE DES LONGUEURS

L'introduction des nombres décimaux au CM1 se fait le plus souvent de la façon suivante : au CE les enfants ont appris à mesurer en se servant d'unités différentes et expriment les résultats de leurs mesures sous la forme : 2 m et 53 cm ou 1 kg et 520 g, 3 F et 50 centimes... Au CM1, à l'aide d'un tableau d'unités, on transforme ces écritures qui deviennent 2,53 m, 1,532 g, 3,50 F... et ce qui est commun aux mesures 2,53 m, 2,53 kg, 2,53 F... c'est-à-dire 2,53 est un nombre décimal.

Deux inconvénients majeurs découlent de cette façon de procéder :

1) 2,53 apparaît comme le codage d'un naturel (253 puisque 2,53 m est la même longueur que 253 cm).

Conséquences : les enfants sont amenés à estimer que 2,53 a un suivant (2,54) et qu'entre 2,53 et 2,54 il n'y a pas de décimaux.

2) 2,53 apparaît ainsi comme la juxtaposition de deux morceaux 2 et 53 (2 m et 53 unités).

Conséquences : $2{,}53 > 2{,}9$ parce que 53 est supérieur à 9
$17{,}8 + 21{,}3 = 38{,}11$ parce que $17 + 21 = 38$ et $8 + 3 = 11$
(voir paragraphe 4 "causes d'erreurs").

Les activités décrites ci-dessous ont le mérite de ne pas rompre totalement avec la tradition, d'essayer d'éviter ces deux inconvénients et de créer de nouveaux nombres, les fractions dont les décimaux seront un cas particulier.

I. DESCRIPTION DE LA PROGRESSION CHOISIE

1. Introduction des écritures fractionnaires

Bien que les élèves issus du CE2 connaissent déjà les unités légales usuelles de longueur, le maître propose d'effectuer des mesures (longueur de la classe — du préau — distance de deux arbres dans la cour...) à l'aide d'une autre unité. Il est commode de prendre une bande de papier ou une ficelle d'environ un mètre. Les résultats des mesures sont exceptionnellement un naturel, le plus souvent un encadrement ($l_1 = 3$; $2 < l_2 < 3, \ldots$).

Le problème se pose alors de préciser les mesures de ce 2ème type. Après essai des diverses propositions des élèves (choix d'une unité usuelle la plus petite, sans lien avec la première, par exemple), on s'arrête à la solution : partager l'unité en deux, trois ou quatre, ce qui peut se réaliser matériellement sans trop de difficulté. La notation $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$ est donnée (beaucoup d'élèves la connaissent d'ailleurs) et le résultat de la mesure s'exprime par $2+(2\times\frac{1}{3})$ ou par l'encadrement $2+\frac{1}{3}<1<2+(2\times\frac{1}{3})$. On peut alors recommencer la division en plusieurs morceaux : il n'est pas nécessaire que les tiers soient à nouveau partagés en trois morceaux. Les élèves peuvent proposer un partage en deux par exemple : on constate dans ce cas que la bande initiale est partagée en 6 ce qui se note $\frac{1}{6}$.

2. Nouvelles écritures - Ecritures équivalentes

De nombreux exercices de cette sorte, avec des règles de division variées permettent de manipuler de nouvelles écritures telles que :

$$12+(5\times\frac{1}{3})+(7\times\frac{1}{6})+(3\times\frac{1}{12})+(4\times\frac{1}{24})$$

$$5+(2\times\frac{1}{3})+(6\times\frac{1}{9})+(2\times\frac{1}{27}) \text{ etc...}$$

que l'on convient d'écrire sous forme simplifiée :

$$12+\frac{5}{3}+\frac{7}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{24}$$

$$5+\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{2}{27}$$

Ces écritures se prêtent à transformations ; il suffit de constater que $2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ à l'aide des unités successives.

Ainsi, par exemple :

$$\begin{aligned}12+\frac{5}{3}+\frac{7}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{24} &= 12+(1+\frac{2}{3})+(1+\frac{1}{6})+\frac{3}{12}+\frac{4}{24}\\ &= 14+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{12}+\frac{1}{6}\\ &= 14+\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}\\ &= 14+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{3}{12}\end{aligned}$$

$$= 14 + \frac{3}{3} + \frac{3}{12}$$

$$= 15 + \frac{3}{12}$$

(On ne réduit pas ici $\frac{3}{12}$ à $\frac{1}{4}$ car $\frac{1}{4}$ ne figure pas dans la succession des unités 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$)

$$15 + \frac{3}{12} = 15 + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = 15 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

3. Approximation - Fractions décimales

On constate souvent que la longueur à mesurer se traduit encore par un encadrement même si l'on a partagé 4 ou 5 fois la bande initiale et on arrive à concevoir que cela pourrait durer indéfiniment. On s'arrête soit pour des raisons techniques (petitesse de l'unité) ou par décision arbitraire (la précision paraît suffisante).

On peut commencer alors à réaliser, puis à imaginer un processus analogue où les divisions de la bande se feraient par dix morceaux à chaque étape (mais on est vite limité pratiquement par la petitesse des morceaux obtenus) et on obtient les nombres décimaux :

$$2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} \; ; \; 5 + \frac{13}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000}$$

4. Opérations sur les nouveaux nombres : comparaison, addition, multiplication

Toutes les activités qui précèdent ne se limitent pas à des mesurages. On peut également :

— Comparer ces nombres d'abord en comparant les longueurs dont ils sont les mesures, puis par le seul examen de leurs écritures :

$$3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \qquad 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27}$$

$$5 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} \qquad 5 + \frac{7}{10}$$

Ceci peut être facilité par l'utilisation de la demi-droite graduée où l'on représente par des points les nombres étudiés.

— Additionner ces nombres, l'addition des nombres traduisant l'addition des longueurs :

$$(3+\frac{2}{3}+\frac{1}{9})+(5+\frac{1}{3}+\frac{2}{9})+(1+\frac{2}{9}) = 9+\frac{3}{3}+\frac{5}{9}$$

$$= 10+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}$$

$$= 10+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$$

$$(5+\frac{7}{10}+\frac{4}{100})+(4+\frac{8}{10}+\frac{9}{100}) = 9+\frac{15}{10}+\frac{13}{100}$$

$$= 10+\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{3}{100} = 10+\frac{6}{10}+\frac{3}{100}$$

A cette occasion on peut remarquer que l'utilisation des puissances de dix (dixième, centième, millième) facilite les additions.

— Multiplier un nombre par un naturel

$(3+\frac{2}{3}+\frac{1}{9})\times 6 = 18+\frac{12}{3}+\frac{6}{9}$ (périmètre d'un hexagone régulier, par exemple)

$$= 18+4+2\times(\frac{3}{9})$$

$$= 22+\frac{2}{3}$$

$$(3+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{6}{1000})\times 5 = 15+\frac{25}{10}+\frac{35}{100}+\frac{30}{1000}$$

$$= 15+(2+\frac{5}{10})+(\frac{3}{10}+\frac{5}{100})+\frac{3}{100}$$

$$= 17+\frac{8}{10}+\frac{8}{100}$$

5. Introduction de l'écriture à virgule

Enfin pour faciliter ces comparaisons et calculs sur les nombres décimaux, un tableau peut être utilisé :

dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
2	3	4	0	5

et si l'on désire se passer de ce tableau, il est commode de repérer par un signe l'emplacement de la colonne des unités d'où l'écriture décimale des nombres décimaux : 23,405 dans le cas précédent.

II. CHRONIQUE DE LA PRESENTATION DES DÉCIMAUX

La chronique présentée ici a été réalisée dans deux classes de CM1 pendant l'année scolaire 1980-1981. Il s'agissait de classes avec lesquelles un travail important sur la numération avait été effectué au CE2 en 1979-1980. En particulier, les élèves étaient familiarisés avec des écritures du type :

$$\begin{aligned} 37423 &= (3\times 10000) + (7\times 1000) + (4\times 100) + (2\times 10) + 3 \\ &= (37\times 1000) + 423 \\ &= \text{etc...} \end{aligned}$$

Le travail sur les mesures de longueurs (déjà préparé au CE) puis l'introduction d'écritures fractionnaires ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... puis $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$) commence dès le début octobre et se poursuit jusqu'à fin mars à raison d'une ou deux séquences par semaine. L'étude d'autres sujets (numération dans les naturels-fonctions $n \mapsto n\times a$ et $n \mapsto n:a$, mesure des masses, des aires, ...) se poursuit parallèlement et n'est pas décrite ici.

Cette chronique ne décrit que l'approche des décimaux. Bien entendu, on a aussi appris à calculer sur les décimaux (addition, soustraction, multiplication par un naturel, début de la multiplication de deux décimaux).

Les contrôles de fin d'année ont permis de constater la quasi disparition des erreurs classiques du type :

$3,9 < 3,12$ (parce que $9 < 12$)
$3,5+4,7 = 7,12$ ($3+4 = 7$ et $5+7 = 12$)

Les élèves ne se servent d'ailleurs des écritures à virgule que comme d'un codage commode. Pour eux 3,9 reste $3 + \frac{9}{10}$ et c'est sous cette forme qu'ils pratiquent les comparaisons et les opérations en ligne.

Au CM2 se fera la prise de conscience que les écritures à virgule sont aussi opératoires et que comparaisons et opérations en ligne peuvent se faire sans ce retour aux formes décomposées.

Au CM1 il y a 27 élèves. Quand ils travaillent en groupe, ils forment 6 groupes de 4 ou de 5.

Séance du 2/10/81 : *mesure de longueurs avec une unité : encadrement entre deux entiers.*

Travail en groupe : révision de la mesure des longueurs (déjà faite en CE1 et CE2).

Règle du jeu : "Si on avait perdu les mètres, double-décimètres, comment pourrait-on mesurer ?"

Chaque groupe dispose de bandes de papier et procède à diverses mesures (bureau, fenêtre, cahier, ...). On propose de mesurer une longueur plus importante (longueur de la classe) avec ces bandes. Comment simplifier le travail ? Deux des élèves proposent d'utiliser des multiples de la bande initiale. Tous les résultats sont exprimés sous forme d'encadrements.

Séance du 16/10/81 : *introduction d'écritures fractionnaires.*

Travail en groupes. Chaque groupe dispose de trois bandes d'environ 80 cm chacune (toutes les bandes sont d'égale longueur).

Consigne : mesurer avec soin diverses longueurs : longueur du tableau, longueur de la classe, largeur de la classe (2 groupes), longueur du couloir (2 groupes). Soin et précision sont justifiés par l'hypothèse de la pose d'une moquette.

Dans aucun des groupes les nombres entiers ne suffisent pour répondre à la question. On suggère aux groupes de plier ou de découper les bandes. A l'exception d'un groupe qui plie en morceaux inégaux pour faire coïncider la partie pliée et l'excès de longueur à mesurer, les autres partagent leur bande et demi, tiers ou quarts de bande. Les notations sont alors introduites et inscrites sur les morceaux obtenus : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Les élèves sont invités à venir inscrire au tableau les résultats de leurs mesures :

longueur du tableau : $3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} +$ (le dernier "+" signifie qu'il reste un morceau inférieur à $\frac{1}{3}$)

longueur de la classe : $10 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (ce qui aurait voulu signifier $10 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4} \times \frac{1}{4})$, le quart ayant été partagé à nouveau en quatre)

largeur de la classe : $8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (le $\frac{1}{8}$ est obtenu en coupant $\frac{1}{4}$ en deux et la notation est donnée par l'instituteur dans le groupe)

longueur du couloir : les deux groupes ont trouvé $8 + \frac{1}{2}$

Une discussion collective s'en est suivie portant sur les points suivants :

— signification des notations : $\frac{1}{4}$ est la mesure d'un morceau obtenu en partageant en 4 la bande unité

— mesure du morceau restant pour la longueur du tableau. Suggestion d'un élève : on partage en trois un quart. La manipulation est nécessaire pour obtenir l'écriture $\frac{1}{12}$. On a alors la mesure du tableau : $3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ que des élèves proposent d'écrire $3 + (2 \times \frac{1}{3}) + \frac{1}{12}$.

— rectification de l'écriture de la longueur de la classe : $10 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$

— comparaison de la longueur du couloir et de la largeur de la classe (qui devraient être les mêmes) : $8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ et $8 + \frac{1}{2}$. Après examen des morceaux de la bande, un élève conclut qu'il y a $\frac{1}{8}$ de différence (le maître n'inscrit pas car ce n'est pas évident pour beaucoup d'autres).

— écriture en lettres de demi, tiers, quart, huitième, seizième.

Les morceaux sont ramassés après avoir été notés : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$.

Séance du 23/10/80 : *renforcement de la séance précédente.*

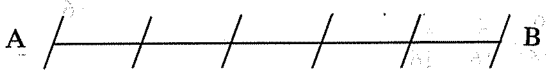
Rappel des mesures effectuées au cours de la séance précédente et des résultats obtenus. Dessin au tableau de segments dont la mesure est donnée comme par exemple, $2 + \frac{1}{2}$, $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, $1 + (2 \times \frac{1}{4})$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

Fabrication par les élèves d'un matériel individuel de plus petite taille.

Exercices d'utilisation de ce matériel.

Séance du 13/11/80 : *introduction du "diviseur de bandes".*

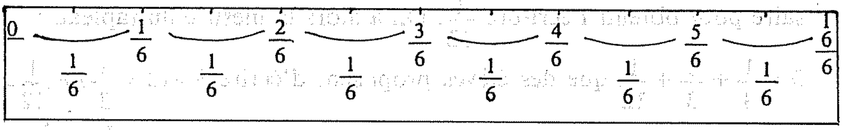
Utilisation d'un papier ligné pour partager un segment en 3,4,5,6... morceaux égaux.



Codage de la position d'un point sur un segment de longueur choisie comme unité.

Séance du 20/11/80 : *graduation d'une bande ; écritures équivalentes.*

Un enfant dispose de bandes de papier (environ 15 cm), toutes de même longueur qu'il partage en 6 à l'aide du "diviseur de bandes" réalisé la semaine précédente.



Nouvelles notations : la distance de 0 à l'une des divisions est notée $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{6}$, ... au lieu de $2\times\frac{1}{3}$, $3\times\frac{1}{6}$,...

On observe que $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,...

La bande est ensuite partagée en $\frac{1}{12}$.

Utilisation de la bande ainsi graduée comme instrument de mesure.

Séance du 27/11/80 : *utilisation d'une graduation.*

C'est la suite du travail du 20 novembre. Des bandes sont distribuées aux élèves qui les partagent en quarts et seizièmes. Ils mesurent diverses longueurs. Les résultats sont donnés sous la forme :

$$2+\frac{2}{4}+\frac{1}{16}<l<2+\frac{2}{4}+\frac{2}{16}$$

Séance du 4/12/80 : *codage-décodage de points à l'aide d'une graduation.*

Matériel :

— une feuille blanche sur laquelle est tracé un trait en diagonale d'un peu plus de 30 cm.

— les "instruments de mesure" des 20 et 27 novembre.

Travail par groupes : une extrémité du trait est marquée : 0. Graduation du trait à l'aide des bandes : 0, 1, 2 puis graduations en $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$ ou en $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$.

Exercices : placer des points de codage donné : $\frac{1}{6}$, $1+\frac{2}{6}$, $\frac{14}{6}$, ... ou $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{24}{16}$,...

On observe des égalités du type : $\frac{24}{16}=\frac{6}{4}$, $\frac{24}{16}=1+\frac{8}{16}=1+\frac{2}{4}=1+\frac{1}{2}$

Toutes ces égalités résultent de l'observation. Il a paru inutile de "théoriser" ces résultats, bien que de nombreux élèves puissent fournir des explications satisfaisantes.

Exercices inverses : coder des points de la demi-droite (avec ou sans encadrements).

Séance du 11/12/80 : *reprise collective des exercices du 4 décembre.*

Les résultats de chacun des groupes sont repris et commentés par leurs auteurs. On décide de privilégier parmi les écritures $\frac{21}{12}$, $1+\frac{9}{12}$, $1+\frac{4}{6}+\frac{1}{12}$, la dernière (justification : c'est l'écriture la plus facile à obtenir avec les instruments de mesure).

Séance du 3/01/81 : *calcul de périmètres de triangles ou de rectangles* à l'aide des bandes ($\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$)

Exemple de travail d'un groupe :

$$(1+\frac{3}{4}+\frac{2}{16})+(2+\frac{1}{4})+(1+\frac{2}{4}+\frac{3}{16}) = 4+\frac{6}{4}+\frac{5}{16}$$

On observe que $\frac{6}{4}=1+\frac{2}{4}$

$$\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

D'où le périmètre : $5+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}$

Séance du 15/01/81 : *partager une bande en 10.*

Matériel : une bande d'un peu plus de 30 cm portant les graduations 0 et 1 (distantes d'environ 30 cm).

Consigne : utiliser un papier ligné pour partager cette bande en dixièmes puis l'un des dixièmes en centièmes.

Ce fut un échec provoqué par des difficultés techniques (partage en 9 ou en 11, traits de graduations obliques). Cependant les élèves montrent qu'ils comprennent ce qu'on attend d'eux.

Séance du 28/01/81 : *utilisation d'une graduation décimale*

On distribue aux élèves des bandes graduées en dixièmes et centièmes.

Utilisation de ces bandes pour diverses mesures. Les résultats sont exprimés sous la forme : $\frac{245}{100}$ ou $2+\frac{45}{100}$ ou $2+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}$ ou $\frac{24}{10}+\frac{5}{100}$

Séance du 29/01/81 : *transformations d'écritures.*

Mise en commun des résultats des mesures et transformation d'écritures : $2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}=\frac{237}{100}$ et inversement $\frac{435}{100} = 4+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$

Le maître veille à ce que chaque transformation soit justifiée (par l'utilisation des bandes graduées) pour éviter une mécanisation prématurée. On imagine des divisions plus fines : transformation d'écritures comportant des millièmes.

Séance du 31/01/81 : *lien avec les unités légales.*

Comparaison du mètre de la classe et des bandes unités :
3 m + 2 dm + 5 cm s'écrirait $(3+\frac{2}{10}+\frac{5}{100})$ m et inversement.

Séance du 19/02/81 : *utilisation du tableau de numération - introduction de l'écriture à virgule.*

On mesure des distances dans la cour à l'aide d'une bande graduée en dixièmes et centièmes. Si l'on trouve par exemple, $23+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}$ qui peut se décomposer en 2 dizaines 3 unités 5 dixièmes 9 centièmes, on reporte les nombres dans un tableau :

dizaines	unités	dixièmes	centièmes	
2	3	5	9	

Tous les résultats des mesures sont reportés dans ce tableau et inversement on détermine des longueurs dont la mesure est un nombre inscrit au préalable dans le tableau. Si on supprime le cadre, il reste 2359 mais on ne sait plus quel chiffre représente les dizaines, les unités, les dixièmes,... Convention d'écrire 23,59.

Séance du 26/02/81 : *affinement de la graduation.*

Exercice collectif. Une demi-droite graduée (de 0 à 16) est tracée au tableau avec des graduations de $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{10}$.

Il s'agit de placer des points dont le codage est donné : 2,3 ; 12,5 ... Comment placer 8,47 ? Un élève indique le point dont le codage serait 12,7 (confusion entre $8+\frac{47}{100}$ et $8+\frac{47}{10}$). La majorité des élèves se montre capable de rectifier l'erreur et d'en expliquer la cause.

Devant les difficultés techniques, le maître propose d'"agrandir à la loupe" l'intervalle 8-10 que l'on peut alors graduer en centièmes.

Placer des points de codage donné et exercice inverse sont alors bien réussis. Pour placer 8,423 des élèves suggèrent d'agrandir l'intervalle 8,4 − 8,5 et de le graduer en millièmes.

Séance du 5/03/81 : *approcher un nombre (inconnu) caché.*

Reprise d'un jeu déjà pratiqué par les enfants depuis le CE1.

Le meneur de jeu pense un nombre. Les joueurs proposent des nombres qui sont qualifiés de "trop grand" ou "trop petit" par le meneur de jeu jusqu'à l'obtention du nombre pensé.

Sans prévenir les enfants, le maître a choisi 8,4. Après un instant de surprise provoqué par "8 est trop petit" — "9 est trop grand", un élève propose "8 et demi". Suivent alors les propositions $8+\frac{1}{3}$ et $8+\frac{1}{2}$ mais on ne sait plus continuer. Le maître suggère le recours à la demi-droite graduée et la découverte de 8,4 se fait alors très vite.

Le jeu est repris avec 15,36 et après "agrandissement" de la demi-droite graduée, la réponse est vite obtenue.

Ultérieurement ce jeu sera repris pour faire comprendre qu'entre deux décimaux quelconques, il en existe toujours un autre.

Séance du 6/03/81 : *lien avec l'approche par les fonctions numériques.* (cf. plus loin : quatrième exemple)

Depuis le début de l'année on a repris l'étude des fonctions dans IN : $n \mapsto n + a$; $n \mapsto n - a$; $n \mapsto n \times a$; et de leurs propriétés.

On étudie aujourd'hui la fonction réciproque de $n \mapsto n \times 10$, notée $n \mapsto n : 10$ et on recherche les naturels qui ont une image.

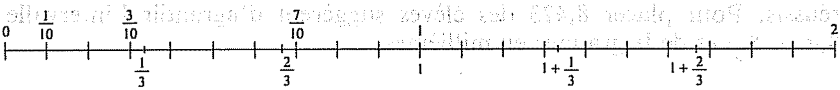
Séance du 17/03/81 : *comparaison de décimaux.*

Ranger par ordre de grandeur croissant une liste de nombres :

0 ; 1 ; 10 ; 7 ; 0,032 ; 0,1 ; 1,3 ; 1,12 ; 12,5 ; 10,5 ; 6,9

Les élèves, dans le cas où l'ordre n'est pas immédiatement trouvé, reviennent spontanément à des écritures telles que $1+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}$ et $1+\frac{8}{10}$ pour comparer les nombres proposés.

En utilisant la demi-droite graduée en dixièmes et d'éventuels ''agrandissements'', trouver des écritures décimales ou des encadrements de fractions : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $1+\frac{2}{3}$,...



Il s'agit ici de simples constatations, certaines justifiées comme $\frac{1}{2} = 0{,}5$ par exemple, d'autres considérées comme vraisemblables mais non prouvées comme $\frac{1}{4} = 0{,}25$ (il semble que c'est juste ''au milieu'' de 0,2 et de 0,3) ou $0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}35$.

Séance du 20/03/81 : ***encadrement de masses.***

Précédemment on a classé, rangé des masses avec une unité arbitraire (boule de pâte à modeler) ; on a mesuré ou encadré des masses à l'aide de naturels.

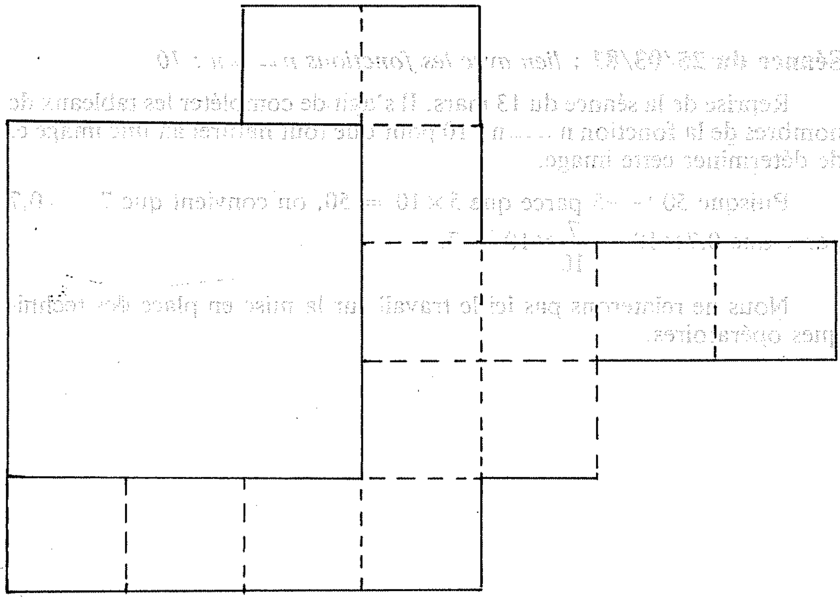
Aujourd'hui on se propose d'affiner les encadrements. Par division des boules de pâte à modeler unité en deux ou en quatre parts de même masse (en trois ce n'est pas réalisable), on obtient des égalités ou des encadrements faisant intervenir des $\frac{1}{2}$ ou des $\frac{1}{4}$.

Un élève suggère de prendre des dixièmes en coupant, avec l'aide d'un double décimètre des barres de pâte à modeler. La suggestion est bien acceptée et on obtient des écritures du type $3+\frac{4}{10}$,...

Séance du 21/03/81 : ***encadrement d'aires.***

La semaine précédente on a pavé des domaines décomposables en rectangles à l'aide de carreaux unités, puis les élèves se sont servis d'un instrument plus commode constitué d'un calque quadrillé.

On leur distribue aujourd'hui un calque où les carrés unités mesurent 3 cm sur 3 cm et sont partagés en 9 carreaux chacun. On obtient sans difficultés la mesure d'aires de polygones comme celui-ci sous des formes diverses.



$1+\frac{13}{9}$, $2+\frac{4}{9}$ (par regroupement de neuvièmes)

$1+\frac{2}{3}+\frac{7}{9}$ (en constatant qu'une bande de 3 petits carreaux représente $\frac{1}{3}$ d'unité).

Séance du 24/03/81 : *entre deux décimaux, il en existe toujours un autre.*

Reprise du jeu du 5 mars (trouver un nombre). Après quelques essais réussis, le maître "fabrique" le nombre au fur et à mesure des propositions : 5,3 "trop petit" - 5,4 "trop grand" - 5,35 "trop petit" - 5,36 "trop grand" - 5,354 "trop petit" - 5,355 "trop grand", etc... jusqu'à ce qu'un élève proteste : "tu triches, on n'y arrivera jamais, tu mets toujours un chiffre de plus...". Il faut continuer ce jeu pour que les autres lui emboitent le pas.

Un élève joue alors le rôle du meneur de jeu mais s'embrouille après trois décimales.

Nouveau jeu : trouver le suivant de 3,52 : 3,53 puis 3,521 sont vite proposés et après une hésitation, le jeu s'emballe et on conclut assez rapidement que le jeu ne peut pas se terminer : 3,52 n'a pas de suivant.

Séance du 25/03/81 : *lien avec les fonctions $n \longmapsto n : 10$*

Reprise de la séance du 13 mars. Il s'agit de compléter les tableaux de nombres de la fonction $n \longmapsto n : 10$ pour que tout naturel ait une image et de déterminer cette image.

Puisque $50 \longmapsto 5$ parce que $5 \times 10 = 50$, on convient que $7 \longmapsto 0{,}7$ parce que $0{,}7 \times 10 = \frac{7}{10} \times 10 = 7$.

Nous ne relaterons pas ici le travail sur la mise en place des techniques opératoires.

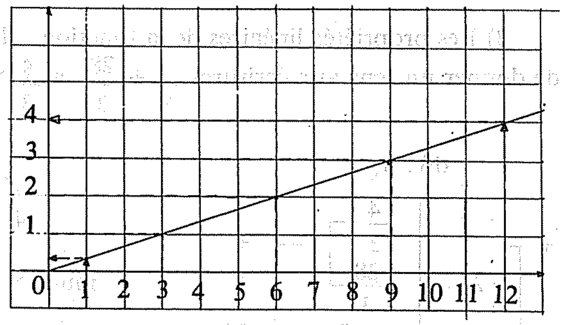
QUATRIÈME EXEMPLE :

Un exemple d'introduction de nouveaux nombres à partir d'une fonction "diviser par n"

I - La fonction "diviser par 3"

1) La fonction "diviser par 3" n'est pas définie pour tous les entiers naturels : 1, 2, 4, 5... n'ont pas d'image.

	div. 3
0	0
1	
2	
3	1
4	
5	
6	2
7	
8	
9	3
10	



Représentation graphique sur papier quadrillé au cm et non millimétré

Les points correspondants aux couples (0,0), (3,1), (6,2) sont alignés. Il est possible de déterminer *graphiquement* l'image de 9, de 12, de 15...

Problème : Le graphique nous permet-il de trouver une image pour 1 ?
pour 2 ?

La solution graphique conduit à introduire deux nouveaux nombres entre 0 et 1.

Ainsi l'image de 1 sera notée $\frac{1}{3}$

l'image de 2 sera notée $\frac{2}{3}$

de la même façon on obtiendra l'image de 5 qui sera notée $\frac{5}{3}$...

Dans le cas de la recherche de l'image d'un multiple de 3 on aboutit à des égalités du type $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{6}{3} = 2$...

Remarque : en utilisant la relation réciproque "multiplier par 3", on peut écrire

$$\frac{1}{3} \times 3 = 1 , \ \frac{2}{3} \times 3 = 2 .... \frac{a}{b} \times b = a$$

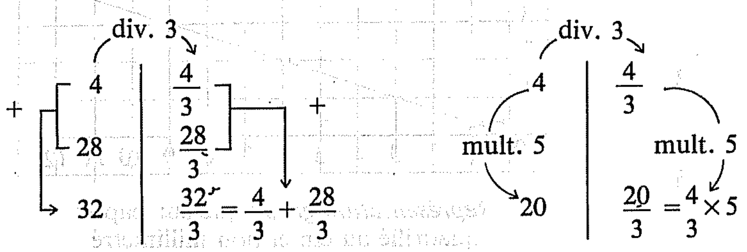
2) La croissance de la fonction "diviser par 3" permet de comparer ces nouveaux nombres

5 étant inférieur à 13, on en déduit $\frac{5}{3} < \frac{13}{3}$

6 étant inférieur à 11, on en déduit $2 < \frac{11}{3}$

Remarque : tous ces nouveaux nombres peuvent être encadrés par deux entiers consécutifs.

3) Les propriétés linéaires de la fonction "diviser par 3" permettent de donner un sens aux écritures $\frac{4}{3} + \frac{28}{3}$ et $\frac{4}{3} \times 5$



Inversement, il est intéressant de décomposer en sommes :

$$\frac{32}{3} = \frac{4}{3} + \frac{28}{3} \ ; \ \frac{32}{3} = 10 + \frac{2}{3}$$

II - Fonctions "diviser par 10^n"

1) En utilisant la fonction "diviser par 10", on peut introduire les nombres décimaux $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots \frac{27}{10}$, les comparer, les additionner et les multiplier par un naturel.

De même avec les fonctions "diviser par 100"
"diviser par 1000"...

Remarque : $\frac{a}{10} \times 10 = a$ $\qquad \frac{a}{10^n} \times 10^n = a$

2) Si on compose la fonction "diviser par 10" avec elle-même, on se trouve confronté au problème de la recherche de l'image des nombres

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \ldots$$

	div. 10	div. 10
0	0	0
1	$\frac{1}{10}$	
2	$\frac{2}{10}$	
10	1	$\frac{1}{10}$
11	$\frac{11}{10}$	
20	2	$\frac{2}{10}$
100	10	1
200	20	2

Une réponse peut être apportée en remarquant que "div. 10" suivi de "div. 10" est équivalent à "div. 100".

Ainsi l'image de 11 par "div. 100" : $\frac{11}{100}$ est aussi l'image de $\frac{11}{10}$ par "div 10".

	div. 10	div. 10
0	0	0
10	1	$\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$
11	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{100}$
20	2	$\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$
100	10	$1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100}$

div. 100

On peut ainsi constater que :

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} \; ; \; \frac{100}{100} = \frac{10}{10} = 1 \; ; \; \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

En généralisant :

$$\frac{a \times 10^p}{10^{n+p}} = \frac{a}{10^n}$$

3) A l'aide des fonctions réciproques "multiplier par 10",... il est facile d'observer que

$$\frac{11}{100} \times 10 = \frac{11}{10}$$

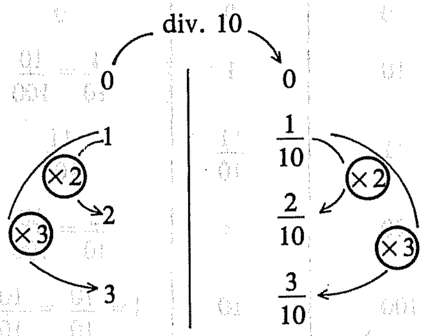
et d'une manière générale

$$\frac{a}{10^{n+p}} \times 10^n = \frac{a}{10^p}$$

4) *Multiplication de deux décimaux*

— multiplication par $\frac{1}{10}$

Les propriétés de la fonction "div. 10" nous permettent d'établir le tableau suivant :



Ainsi $\frac{1}{10} \times n = \frac{n}{10}$ ce qui permet, en acceptant la commutativité, de construire ce nouveau tableau : multiplier par $\frac{1}{10}$

m. $\frac{1}{10}$

0	0
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{2}{10}$
3	$\frac{3}{10}$

En comparant ces deux tableaux on constate que multiplier un entier par $\frac{1}{10}$ équivaut à diviser cet entier par 10. On étendra cette règle à la multiplication d'un décimal par $\frac{1}{10}$.

Par exemple pour calculer $\frac{2}{100} \times \frac{1}{10}$, on divisera $\frac{2}{100}$ par 10.

Comment donner un sens à $\frac{2}{10} \times \frac{3}{100}$?

$$\frac{2}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{2}{10} \times \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right) = \frac{2}{1000} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{1000} = \frac{2}{1000} \times 3$$

une autre démarche possible consiste à considérer la fonction "mult. $\frac{2}{10}$" et à calculer l'image du nombre $\frac{3}{100}$

$$\begin{tikzcd}
\frac{3}{100} \arrow[r, bend left, "\text{mult. } 2"] \arrow[rr, bend right, "\text{mult. } \frac{2}{10}"'] & \frac{6}{100} \arrow[r, bend left, "\text{mult. } \frac{1}{10}"] & \frac{6}{1000}
\end{tikzcd}$$

5) *Comparaison de deux décimaux*

Exemple 1 : Comment comparer $\frac{27}{10}$ et $\frac{125}{100}$?

Une réponse rapide peut être donnée en constatant que :

$$2 < \frac{27}{10} < 3 \quad \text{et} \quad 1 < \frac{125}{100} < 2$$

Exemple 2 : Comment comparer $\frac{27}{10}$ et $\frac{268}{100}$?

l'argument utilisé précédemment ne permet pas de conclure mais

$\frac{27}{10} = \frac{270}{100}$ d'où la comparaison directe.

6) *Ecritures additives*

Des écritures additives à l'écriture à virgule

$$\frac{27}{10} = 2 + \frac{7}{10} = 2{,}7$$

$$\frac{125}{100} = 1 + \frac{25}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 1{,}25$$

$$\frac{301}{100} = 3 + \frac{1}{100} = 3{,}01$$

$$\frac{3481}{1000} = 3 + \frac{481}{1000} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} = 3{,}481$$

Transformations d'écritures additives

Peut-on écrire autrement le nombre $\frac{27}{10} + \frac{125}{100}$?

D'après la règle du II.2), $\frac{27}{10} = \frac{270}{100}$ d'où

$$\frac{27}{10} + \frac{125}{100} = \frac{270}{100} + \frac{125}{100} = \frac{395}{100}$$

d'après les propriétés linéaires de la fonction "div. 100".

Bien sûr d'autres transformations sont possibles mais celle-ci justifie la disposition pratique

$$\begin{array}{r} 2{,}70 \\ +\,1{,}25 \\ \hline =3{,}95 \end{array}$$

ANNEXE

***Extraits d'un articles de Guy Brousseau* Problèmes de didactique des décimaux *paru dans la revue* Recherche en didactique des mathématiques *n° 2.1 (1981). Editions La Pensée Sauvage 38000 Grenoble* (1).**

Après une analyse mathématique, historique et épistémologique du concept de décimal, l'auteur expose les principales caractéristiques d'un processus d'enseignement qui présente d'assez grandes différences avec les méthodes classiques. Il fait ensuite l'analyse détaillée de certaines des situations didactiques utilisées. Nous reproduisons ci-dessous deux extraits de cet article : le premier rappelle les objectifs et expose le canevas du processus, le second extrait est une description de la première situation didactique du processus.

2.3.2. Objectifs de l'enseignement des décimaux

a) Examinons les objectifs classiques de l'enseignement des décimaux. Il s'agit de rendre les élèves capables de résoudre les problèmes classiques et pratiques, mettant en œuvre les opérations et l'ordre des décimaux, ce qui implique l'emploi de mesures décimales (et sexagésimales), une maîtrise convenable des situations comprenant des applications linéaires décimales (et rationnelles) : échelles, changement d'unités, pourcentages, placements de fonds, vitesse, volumes, surfaces, densités...

Dans la plupart de ces problèmes, les enfants sont invités à présenter ou à désigner leur résultat dans les termes de la situation proposée. Par exemple, «le prix de vente en francs du transistor est... ? » Puis à exprimer ce résultat dans $\mathbb{Q}^+$ par une formule (par exemple $\frac{"280 \times 4"}{3}$) puis à reproduire un décimal raisonnablement proche de ce résultat. Le calcul consiste essentiellement à passer de $\mathbb{Q}^+$ à $\mathbb{D}^+$. Aucune explication n'est écrite; la justification consiste

(1) *Avec l'aimable autorisation de l'éditeur.*

dans la décomposition du calcul final en une suite de calculs intermédiaires «simples», c'est-à-dire appartenant au répertoire reconnu des occasions d'utiliser cette opération.

b) Le curriculum s'adresse à des élèves d'au moins 9-10 ans et d'au plus 12-13 ans qui peuvent avoir appris les opérations sur les décimaux en référence avec l'usage du système métrique. Il vise fondamentalement les mêmes objectifs.

Ceci implique la possibilité de faire tous les calculs usuels avec les décimaux (et avec les fractions). Mais il devra favoriser la reprise théorique qui conduira les élèves vers 13-14 ans à réorganiser de façon définitive la notion de décimal et à l'utiliser sous sa forme mathématique actuelle (exemple : $1{,}394 \,.\, 10^{-4}$), en particulier celle qui est utilisée sur les machines à calculer.

2.3.3. Conséquences : Types de situations

Si l'on veut obtenir que les élèves aient la possibilité, non seulement d'appliquer des méthodes et de produire des solutions, mais aussi d'en comprendre et d'en discuter le bien-fondé, il faut rendre possible cette attitude réflexive, en leur donnant l'usage d'un vocabulaire, même simplifié, et d'une théorie, même non satisfaisante, des applications linéaires et de leurs propriétés.

a) Notre étude épistémologique permet de comprendre que, pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves ou d'en rejeter. Ce processus correspond à la troisième étape de notre analyse, celle où la notion est maniée comme notion mathématique. Nous appelons situations de *«validation»* et *«d'institutionnalisation»* les situations didactiques qui permettent de simuler ce processus.

b) Mais pour que ces théories aient un sens pour celui qui les utilise, il «faut» qu'elles aient préalablement fonctionné comme solution à un problème posé à chaque élève dans des conditions qui lui permettent, soit de trouver lui-même cette solution, ou plus exactement de la construire (éventuellement progressivement), soit de l'emprunter toute faite, de lui-même, entre plusieurs qu'il pouvait envisager sans qu'une intention didactique ou une pression culturelle l'y contraigne en se substituant à son jugement. Nous disons alors que la théorie fonctionne comme un modèle implicite et nous appelons *situations «d'action»* les situations didactiques qui permettent l'apparition de cette théorie dont le statut est alors dans la classe celui d'une notion protomathématique.

c) Pour que le vocabulaire soit acquis, et que les termes aient du sens, il «faut» qu'ils servent suffisamment à exprimer et à communiquer des informations dans des situations qui en justifient l'emploi et le contrôlent. De telles *situations dites de «formulation»* permettent l'acquisition des modèles explicites et de langages qui, dans le cas où ils ne sont pas encore des notions mathématiques, se voient ainsi conféré un statut de notions paramathématiques (l'ostension et l'usage y tiennent lieu de définition).

(...)

2.3.5. Options

Nous avons finalement retenu les options principales suivantes sur lesquelles nous reviendrons plus tard :

a) L'acquisition des décimaux-mesure suivra un processus distinct de celui visant les décimaux-application. Ils se succèderont dans cet ordre.

b) Dans les deux cas, les décimaux seront présentés comme des rationnels, simple réécriture des fractions décimales. Les rationnels seront donc construits les premiers dans les deux étapes. Cela n'est pas très original pour les opérateurs. Par contre, pour les mesures, cela va à l'encontre des habitudes culturelles les mieux établies.

c) Les fractions décimales-mesures seront choisies par les élèves pour approcher les rationnels à cause des facilités de calcul qu'elles présentent.

Les problèmes topologiques exigent justement de nombreuses comparaisons et des calculs d'intervalles. Ils mettront de plus, en évidence, les propriétés de l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{D}$ qui s'opposent à celles de $\mathbb{N}$.

d) Cette approche topologique ne sera pas reproduite dans l'étude des applications linéaires rationnelles. Il s'agit bien d'une option : nous avons montré dans une autre partie de la recherche* que nous ne rapportons pas ici qu'une telle approche est possible.

e) Nous tenterons de faire acquérir, ou fonctionner, s'ils sont acquis, les modèles implicites avant d'en provoquer la formulation ou l'analyse. Nous admettrons que les enfants possèdent un modèle implicite de la proportionnalité dans ℕ.

f) Les sommes et les différences d'applications rationnelles bien que rencontrées, ne seront pas théorisées ni institutionnalisées.

g) Nous expliciterons les autres options au cours de l'exposé des situations.

2.4. Le canevas du processus

2.4.1.

Ce canevas est formulé en termes mathématiques visiblement exclus du vocabulaire des élèves et organisé comme un exposé où les définitions et les théorèmes se succèdent de façon classique. Cela pourrait faire croire que tout exposé du même genre, c'est-à-dire articulé comme un discours de mathématique, pourrait constituer un canevas. Il n'en est rien. Il représente en fait une suite de questions et de problèmes qui tendent à constituer une genèse : la question de rang n naît des problèmes rencontrés avec les solutions trouvées à la question de rang n - 1, ou des conséquences et développements de ces solutions. Un tel canevas ne peut pas être obtenu automatiquement comme séquence de l'analyse mathématique et épistémologique. Il faut s'assurer constamment de la capacité de la conception générale à permettre l'invention, l'organisation et le déroulement des situations locales.

* Il s'agissait d'approcher à l'aide d'une fonction linéaire qui représentait la probabilité — en tant que moyen de prévoir une fréquence théorique — une application statistique attribuant des effectifs observés correspondant à des nombres de tirages. L'approche des statistiques par ces applications «probabilité» est traitée par des méthodes similaires en 33 séances. Les élèves suivent une démarche expérimentale et de redécouverte. Cf. «L'enseignement des probabilités à l'école élémentaire» IREM de Bordeaux - 1974.

Cet aller et retour, cette dialectique entre la conception du processus et celle des situations est inévitable à cause de la nature même de la didactique.

L'articulation à partir de la connaissance seule ne suffit pas à déterminer le sens donné aux acquisitions par les situations spécifiques choisies.

Il est classique d'analyser les curricula à rebours pour mettre en évidence les implications entre les objectifs terminaux et les objectifs subordonnés. Le lecteur ne sera pas surpris que nous l'ayons utilisé dans ce texte. Malgré nos mises en doute réitérées de la possibilité de déterminer les acquisitions indépendamment des situations qui les produisent, nous allons utiliser le même procédé dans la représentation des activités, au chapitre suivant. Ce procédé augmentera peut-être les difficultés du lecteur à comprendre quelles sont réellement les connaissances des élèves qui sont disponibles au moment de la leçon, mais nous espérons ainsi le conduire à prendre mieux conscience, à la fois de la nécessité de préciser les conditions du déroulement des situations et du rôle de l'histoire du sujet dans ses acquisitions. Si notre tentative est un échec, nous conseillons au lecteur de lire les paragraphes dans l'ordre chronologique.

2.4.2. La phase II : Du mesurage aux homothéties de $\mathbb{D}^+$

a) Suivant ces options dans la phase finale, nous prévoirons une *identification* institutionnalisée, c'est-à-dire raisonnée et convenue de $(\mathbb{Q}^+, \times)$ (mesure) et $\mathcal{L}\ (\mathbb{Q}^+, 0)$ impliquant en particulier l'utilisation systématique des applications inverses dans le calcul du rapport de deux décimaux (Phase II . 7 : 2 séances).

b) Il aura fallu pour cela être capable de manier *la composition* et *la décomposition* des applications rationnelles en effaçant le rôle des couples objet-image pour pouvoir fournir diverses décompositions d'une même application. Nous avons retenu d'exposer les situations d'introduction de cette phase (II . 6 (3 séances) : «composition de 2 applications linéaires» où les élèves utilisent un pantographe.

Cette étude ne peut se dérouler elle-même convenablement si les fractions et les décimaux n'ont pas été identifiés comme ensemble d'applications *opérant* sur les fractions et les décimaux-mesure.

c) Au cours de la phase II . 5 (2 séances) : les enfants cherchent à donner un sens au produit de 2 fractions ou de deux décimaux. Ils y parviennent en interprêtant l'un comme application linéaire opérant sur l'autre. A cette occasion, les élèves récupèrent le vocabulaire traditionnel décrivant le «produit» d'un rationnel par un rationnel opérateur (par exemple prendre une fraction d'un nombre, un pourcentage, etc.) et ils formalisent et institutionnalisent le calcul des images par les éléments de $\mathcal{L}$ ($\mathbb{Q}^+$) qu'ils pratiquaient déjà dans la phase précédente mais avec des méthodes très diverses, non fixées, voire par tâtonnements. Les rapports entre multiplier, diviser, agrandir, rapetisser font l'objet d'un débat.

L'introduction de ces applications linéaires va occuper les 3 phases précédentes qu'il vaut mieux exposer dans leur ordre naturel.

d) La phase II. 1 (2 séances) consiste à demander aux élèves «d'agrandir» un puzzle, morceau par morceau, sans préciser autrement ce que veut dire «agrandir» et de façon à ce que tel côté qui mesurait 4 cm en mesure 7. Nous exposerons cette situation de façon détaillée (Par. 3.2.). Les élèves s'acharnent à essayer divers moyens de calculer les longueurs-images mais seul, celui qui (implicitement) fait correspondre la somme des images à l'image de la somme permet un remontage satisfaisant du puzzle. Ce que les enfants construisent «empiriquement», est un ensemble de quelques couples et n'a pas de nom. «L'application linéaire $\frac{7}{4}$ » s'inscrit seulement dans les schémas d'action du sujet.

Déjà, pourtant il faut trouver l'image de longueurs décimales et fractionnaires.

e) La phase II. 2 (1 séance) reproduit une situation presque identique à la précédente. L'agrandissement d'une mosaïque régulière repose les mêmes problèmes; les côtés ont des longueurs décimales. Dans les débats, l'image 1 émerge comme moyen d'établir les autres images ainsi que la division d'un décimal par 10^n, $n \in \mathbb{N}$.

f) La phase II.3 (2 séances) commence par une situation identique. On considère un dessin de bateau et 6 photographies de ce dessin obtenues avec des agrandissements différents. Chaque élève cherche à prévoir de sa place les longueurs de tous les segments reproduits sur une des photos. Ils peuvent aller vérifier le résultat de leurs prévisions et éventuellement les reprendre (Il y a des «agrandissements» et des «rapetissements»). Puis de nouvelles photographies apparaissent et il s'agit de trouver le moyen de désigner et de ranger les photos pour gagner dans un jeu de communication (assez semblable à celui que nous exposerons au paragraphe 4.1. dans la leçon «« épaisseur d'une feuille de papier »). C'est naturellement l'image de 1 qui sert à désigner les photos et à les ordonner. Ainsi, les élèves ont été conduits à identifier, à désigner des applications linéaires à l'aide des nombres décimaux. Mais ces nombres restent attachés à une des photos, à un ensemble de valeurs. Le jeu reprend mais le modèle est changé à chaque fois. Le calcul d'images devient familier, le vocabulaire et les discussions portent sur les agrandissements et les rapetissements (ce qui implique le débat ultérieur que nous avons signalé plus haut). En conclusion, les élèves déclarent savoir désigner les applications linéaires (de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{Q}^\times$ et de $\mathbb{D}^\times$ dans $\mathbb{D}^\times$).

g) Il est temps de proposer quelques situations où des applications non linéaires viennent se glisser comme solutions « obligées » ? aux applications linéaires (phase II.4., 2 séances).

A cette occasion, les élèves prennent connaissance des pratiques et des langages dans le domaine des «échelles» et dans celui du commerce (taxes, remises en pourcentage, etc.)

2.4.3. La phase I : Des mesures rationnelles aux mesures décimales

Dans La phase II, au lieu de définir directement les opérateurs rationnels comme composés d'opérateurs naturels (qui ne sont pas alors des applications), méthode dont nous avons signalé les difficultés et les contradictions, nous avons admis l'existence de $\mathbb{Q}^+$ et de $\mathbb{D}^+$ en tant qu'ensembles d'arrivée des mesures. L'objet de la phase I est donc de construire un tel ensemble : les enfants créent et expérimentent des nombres nouveaux pour mesurer diverses grandeurs.

a) La phase I.1. permet aux élèves d'inventer d'abord les «rationnels» (act. 1 séance) par une méthode de passage au quotient sur l'ensemble des couples de rationnels (activité 1, 4 séances). Nous analyserons longuement cette première activité : «mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier» pour bien montrer l'évolution du statut de ces rationnels. (Paragraphe 4.).

b) Ils apparaissent comme solution à une situation favorable, sans statut cognitif. Cette solution pose des problèmes d'identification car elle peut prendre bien des formes équivalentes. Les élèves sont donc conduits à un débat : «ces objets nouveaux sont-ils des nombres ?» c'est le moteur de l'activité 2 (5 séances) qui amène les enfants à les identifier, à les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser par un naturel, les comparer et les ranger.

Les fractions sont alors reconnues comme des nombres nouveaux englobant les nombres déjà connus, mais dont certaines propriétés sont différentes.

c) Dans la phase I.3., pour mesurer d'autres grandeurs, capacités, poids, longueurs, les élèves utilisent ces mêmes nombres et passent de la conception d'une définition des fractions par *commensuration* à *une définition constructive* (cette phase sera commentée au paragraphe V, elle n'est pas essentielle dans le processus).

d) La phase I.4 «$\mathbb{D}$ moyen d'étude de $\mathbb{Q}$ » comprend 7 séances. Les propriétés nouvelles qui sont recherchées dans les rationnels pour fabriquer des mesures sont surtout des propriétés topologiques : on veut, entre deux nombres rationnels, pouvoir en placer toujours un nouveau et on veut pouvoir mesurer tous les intervalles obtenus. Grâce à un jeu convenable de bataille navale où ils lanceront des filets de plus en plus fins (des filtres) pour cerner des « poissons » rationnels, les enfants vont donc explorer la structure topologique de $\mathbb{Q}^+$ (cette activité sera présentée elle aussi au paragraphe 3.3.). Mais il se trouve que parmi toutes les opérations que l'on peut faire avec les rationnels sous leur forme fractionnaire, les plus longues, les moins faciles, sont justement les comparaisons et les sommes ou les différences. De telle sorte que, pour des raisons d'efficacité, les enfants vont très vite choisir d'eux-mêmes, parmi les fractions rationnelles, certaines — les décimales — qui permettent à la fois des calculs rapides et une représentation commode — une approche — des mesures rationnelles.

e) Phase I.5. Construction et étude de $\mathbb{D}$. (6 séances). Ces fractions décimales se prêtent à une écriture simplifiée qui permet d'étendre les règles du calcul (addition, soustraction, multiplication par un scalaire) de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{D}$ au prix de modifications mineures (activité 6).

f) Phase I.6 (4 séances). Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{Q}$ — Division — Approche d'un rationnel par un décimal.

Evidemment, tous les rationnels ne sont pas décimaux, mais on peut approcher n'importe lequel d'entre eux d'aussi près que l'on veut avec des décimaux.

Cette approche, organisée, standardisée et institutionnalisée va permettre de convertir en décimal le résultat d'une division d'un rationnel par un naturel et donnera implicitement la méthode de la division des décimaux par des entiers.

g) Dans cette partie I, les nombres sont maniés par les enfants comme des mesures. La construction comporte donc des limitations de sens qu'il faudra respecter (cf. paragraphe 3.3.3.).

Les seuls opérateurs utilisables sont les naturels, on saura multiplier ou diviser par 2,3... mais pas par 2/7 ni 2,5. (cet apprentissage sera l'objet de la 2ème partie). Et ces opérateurs ne sont pas introduits comme des objets mathématiques. Ils fonctionnent comme un modèle implicite de linéarité emprunté à $\mathbb{N}$. Ils serviront au plus à exprimer les *rapports scalaires naturels* que l'on utilisera au cours des calculs.

La méthode a été conçue de telle sorte que le fait pour les élèves d'avoir déjà appris à utiliser les décimaux pour les mesurages, et à faire les opérations ou non, ne modifie pas sensiblement le processus. Cela ne veut pas dire qu'il faudra faire semblant d'ignorer ce qu'on sait déjà, ni qu'on va reprendre une connaissance acquise en rejetant son sens ancien et y substituant un sens «nouveau».

(...)

4. Analyse d'une situation : l'épaisseur d'une feuille de papier

4.1. Description de la situation didactique : séance 1 (phase I.1)

4.1.1. Préparation du matériel et des lieux

L'enseignant a disposé :

— sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc.) placés dans un ordre quelconque.

Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciées au simple toucher. Le maître ne cherche pas à « savoir » ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de « bonne mesure » à découvrir.

— sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.

— 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)

— Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

4.1.2. 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn)

La maîtresse place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

a) Présentation de la situation — Consigne

— « Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ? »

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe — les enfants les touchent, les comparent. « Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? » (d'après le poids).

— Objectif

« Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.

Vous êtes groupés par équipes concurrentes. Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essairerez dans un jeu de communication.

Vous pouvez faire des essais avec le papier et ces instruments appelés « pieds à coulisse » (les doubles décimètre suffiraient mais le pied à coulisse a été déjà utilisé) ».

b) Déroulement et remarques

Les enfants essaient presque tous de mesurer l'épaisseur d'une seule feuille afin d'obtenir immédiatement la désignation cherchée.

Il font des remarques du genre : « c'est beaucoup trop fin, une feuille n'a pas d'épaisseur » ou « c'est beaucoup plus petit qu'un millimètre », ou « ce n'est pas possible de mesurer une feuille ! »

Il y a souvent à ce moment-là une phase de désarroi, de découragement même des enfants. Puis ils demandent à la maîtresse s'ils peuvent prendre plusieurs feuilles. Très vite alors, ils font des essais de mesure avec 5 feuilles, 10 feuilles, jusqu'à ce qu'ils obtiennent une épaisseur suffisante pour la mesurer au pied à coulisse ou avec le double décimètre. Alors, ils échangent des systèmes de désignation tels que :

— *10 feuilles 1 mm*
60 feuilles 7 mm

ou

— *31 = 2 mm* (le maître fera remarquer lors de la discussion que cet emploi du signe égal n'est pas correct)

Dans l'une des équipes, les enfants ont refusé le pied à coulisse et ont établi ce système de désignation : A = TG B = TF D = M

A, B, C, étant le nom des différents types de papier, TG, TF, M voulant dire : très gros, très fin, moyen. Dans cette phase, le maître intervient le moins possible. Il ne fait de remarques que s'il s'aperçoit, que, dans les groupes, les enfants ne respectent pas — ou simplement ont oublié — la consigne.

Les enfants peuvent se lever, aller chercher des feuilles, les changer, etc.

Lorsque la plupart des équipes a trouvé un système de désignation (et que les cinq enfants de chacune sont d'accord avec ce système ou ce code) ou si le temps est écoulé, le maître passe à la phase suivante : le jeu de communication, et ceci même si toutes les équipes n'ont pas encore trouvé.

4.1.3. 2ème Phase : jeu de communication (10 à 15 mn)

a) Présentation de la situation — consigne

« Pour éprouver le code que vous venez de trouver, vous allez faire un jeu de communication. Vous verrez au cours de ce jeu, si la désignation des épaisseurs de feuilles que vous avez inventée vous permet de reconnaître le type de feuille désignée.

— Les enfants d'une même équipe vont se séparer en 2 groupes (de 2 émetteurs et de 3 récepteurs, suivant qu'ils sont 4 ou 5 dans l'équipe) : un groupe d'émetteurs et un groupe de récepteurs.

— Tous les groupes émetteurs vont se placer d'un même côté du rideau. Tous les groupes récepteurs de l'autre.

— Les émetteurs vont choisir un des types de papier placés sur la première table (A ou B, ou C ou D ou E) (que les récepteurs ne voient pas grâce au rideau). Ils vont envoyer à leurs récepteurs un message qui devra permettre à ceux-ci de trouver le type de papier choisi. Les récepteurs utilisent les tas de papier disposés sur la deuxième table au fond de la classe pour trouver le type de papier choisi par les récepteurs.

Quand les récepteurs ont trouvé, ils deviennent émetteurs (après vérification avec les émetteurs). Des points seront attribués aux équipes dont les récepteurs auront bien trouvé le type de papier choisi par les émetteurs ».

b) Déroulement et remarques

Dès le début du jeu, la maîtresse met en place le rideau qui sépare émetteurs et récepteurs.

La maîtresse :

- *fait passer les messages des émetteurs aux récepteurs*
- *reçoit les réponses des récepteurs*
- *va contrôler que cette réponse est conforme au choix des des émetteurs et constate, avec toute l'équipe, l'échec ou la réussite.*

Tous les messages sont écrits sur une même feuille — que nous pourrions appeler ici « carnet de messages » (fig. 1) — qui circule entre les émetteurs et les récepteurs d'une même équipe — cette feuille porte le numéro de l'équipe. De plus, les émetteurs notent sur une autre feuille — que nous pourrions appeler « fiche de contrôle » — et qu'ils gardent, le type de papier qu'ils ont choisi à chaque jeu afin que la maîtresse puisse constater la réussite ou l'échec.

Remarque : *Il est clair que la maîtresse n'a pas introduit de vocabulaire superflu comme « carnet de messages » « fiche de contrôle »... ni d'exigences formelles à propos de la présentation des messages — que les enfants devraient apprendre à respecter. Il n'y a pas eu de consigne générale à ce sujet, seulement des aides et des corrections particulières auprès des enfants mal inspirés.*

(1)

numéro de l'équipe	I	
1er jeu : message émis	E : 10 = 1 mn	
réponse	R : D	réussi
2ème jeu : message émis	E : 21 = 1 mn	
réponse	R : B	réussi
3ème jeu : message émis	E : 8 = 2 mn	
réponse	R : A	réussi

carnet de messages

	I	
1er jeu	1	D
3ème jeu	3	A

feuille de contrôle

Si certaines équipes n'étaient pas arrivées à faire des messages efficaces, la maîtresse aurait organisé une nouvelle phase de concertation, par équipe, pour la recherche d'un code (même consigne que dans la première phase).

Mais ce fait ne s'est jamais produit (sur 8 expériences identiques). Les enfants sont arrivés à faire 2 ou 3 parties de jeu.

Pendant ce jeu, on observe 3 attitudes différentes chez les enfants :

— *certains choisissent un nombre de feuilles dont ils mesurent l'épaisseur*
— *certains choisissent une épaisseur et comptent le nombre de feuilles*
— *d'autres cherchent au hasard épaisseur et nombre de feuilles*

On remarque aussi que les enfants choisissent de préférence les types de feuilles d'épaisseur extrême : les plus fines ou les plus épaisses pour faciliter le travail de leurs camarades.

4.1.4. 3ème Phase : Résultat des jeux et des codes (20 à 25 mn) (confrontation)

a) Présentation de la situation et consigne

Pour cette phase, les enfants reprennent leur place en équipes de 5 comme pour la 1ère phase de la séance. La maîtresse annonce une comparaison des résultats et prépare le tableau à double entrée : (équipes) X (types de papier) dans lequel elle inscrira les messages échangés et les points obtenus par les équipes (voir tableau I CM2 b 1977) au fur et à mesure de leur compte rendu.

b) Déroulement et remarques

A tour de rôle, chaque équipe envoie un « représentant » qui lit les messages à haute voix, explique le code choisi et indique le résultat du jeu.

Les différents messages sont comparés et discutés par les enfants. Comme ils sont souvent très différents, la maîtresse leur demande d'adopter un code commun.

Exemple : 10 = 1 mm
TF
60 feuilles 7 mm

Après discussion, la classe entière a décidé de marquer :
10 f ; 1 mm
60 f ; 7 mm

Lorsque tous les messages sont inscrits, les enfants observent le tableau et font spontanément des remarques du type : « ça, ça ne va pas » ou « ici, c'est bien » etc.

Ces remarques pourraient être classées en 4 catégories :

1ère catégorie :

Si les feuilles sont de type différent, à un même nombre de feuilles doivent correspondre des épaisseurs différentes.

Exemples du tableau I :

19 f ; 3 mm → Type A
19 f ; 3 mm → Type B } *« ça ne va pas »*

19 f ; 2 mm → Type C
19 f ; 2 mm → Type D } *« ça ne va pas »*

2ème catégorie :

Pour un même type de feuilles, au même nombre de feuilles correspond la même épaisseur

Exemple du tableau I :

30 f ; 2 mm → Type C
30 f ; 3 mm → Type C } *« ça ne va pas »*

3ème catégorie :

S'il y a 2 fois plus de feuilles, l'épaisseur est 2 fois plus grande.

Exemple du tableau I :

30 f ; 3 mm → Type C
15 f ; 1 mm → Type C } *« ça ne va pas »*

et les enfants rajoutent « on aurait dû trouver » :

30 f ; 3 mm
15 f ; 1 mm *parce que* $x2\left(\begin{array}{l}15\ f\ ;\ 1\ mm \\ 30\ f\ ;\ 2\ mm\end{array}\right)x2$

4ème catégorie :

Des différences sur le nombre de feuilles ne doivent pas correspondre à des différences égales de mesures :

Exemple :

19 f ; 3 mm
20 f ; 4 mm } *« ça ne va pas parce qu'une feuille ne peut pas mesurer 1 mm »*

A la fin de la séance, le maîtresse propose aux enfants de reprendre l'examen de ce tableau à la prochaine séance de vérifier collectivement les mesures par la manipulation et de les rectifier si c'est nécessaire.

Remarque : *La présentation des opérations effectuées sur les nombres dans la recherche de couples équivalents à l'aide de flèches n'a aucun caractère formel ni obligatoire, c'est une « manifestation » familière de l'emploi des opérateurs naturels auquel les enfants sont habitués.*

4.1.5. Résultats

Les enfants savent tous mesurer l'épaisseur d'un certain nombre de feuilles de papier, écrire le couple correspondant et rejeter un type de papier ne correspondant pas à une écriture qui leur est donnée. La plupart est alors capable de mettre en œuvre une stratégie de comparaison et en conclusion d'accepter un type de papier comme correspondant à une mesure. Quelques-uns ont formulé cette stratégie. La plupart des enfants peut analyser un tableau de mesures et signaler des incohérences en se servant implicitement du modèle linéaire.

4.2. Comparaison d'épaisseurs et couples équivalents (Activité 1, Séance 2)

4.2.1. Préparation du matériel et des lieux

Le matériel est le même que pour la séance 1 : les tas de feuilles disposés de la même manière, les pieds à coulisse.

4.2.2. 1ère phase (25 à 30 mn)

a) Présentation de la situation — Consigne

La maîtresse demande aux enfants de reprendre l'examen du tableau réalisé au cours de la 1ère séance.

Cette observation se fait d'abord silencieusement, pour que les enfants puissent repérer les incompatibilités les plus évidentes de certaines mesures. Puis la maîtresse leur propose de relever les erreurs qu'ils ont vues, ligne après ligne (pour chaque type de papier).

b) Déroulement et remarques

Les enfants, après observation, et sur leur demande, viennnent à tour de rôle au tableau pour montrer les « messages » qui leur apparaissent inexacts et proposent éventuellement une correction.

Ces corrections sont discutées par l'ensemble des enfants. S'ils sont tous d'accord, la correction est faite sinon, ils proposent de vérifier par une manipulation : ils recomptent le nombre de feuilles indiquées dans le message et font la mesure. Après vérification collective, le nouveau message est adopté et inscrit sur le tableau (cette manipulation est faite par groupes : 2 groupes vérifient un message, 2 autres, un autre message... etc). Il est arrivé souvent que lorsque le même type de papier est mesuré par des groupes d'enfants différents ces groupes ne trouvent pas des mesures compatibles. Ceci est dû souvent aux erreurs de lecture ou au fait que les enfants ont plus ou moins tassé les feuilles. Ils s'en rendent compte très vite et le disent.

Il est arrivé également pour des types de papier d'épaisseurs très voisines que les mesures trouvées ne permettent pas de reconnaître de quel papier il s'agit. C'est au cours de cette phase que les enfants se sont rendu compte qu'ils ont plus de chance de distinguer des épaisseurs de papier voisines en prenant un plus grand nombre de feuilles. En effet, 15 ou 20 feuilles seulement de papiers d'épaisseurs très voisines ont des mesures si proches que les enfants ne peuvent pas les distinguer avec précision. C'est alors qu'ils proposent souvent de mesurer l'épaisseur de 50, 80 ou 100 feuilles.

Exemples de remarques d'enfants *(ces exemples sont pris dans le tableau II)*

10 f ; 2 mm
et 5 f ; 1 mm *pour le type B, c'est bien.*

Un enfant ajoute :

$$x3\begin{pmatrix} 5\ f\ ;\ 1\ mm \\ 15\ f\ ;\ 3\ mm \end{pmatrix}x3$$

Ces trois mesures : 5 f ; 1 mm — 10 f; 2 mm et 15 f ; 3 mm sont donc conservées.

Par contre dans la ligne du type C, les mesures :

12 f ; 1 mm

et 8 f ; 1 mm sont contestées et rejetées par les enfants qui proposent de les refaire.

Autre exemple (tableau II)

Equipes	Type C	Type D	Conclusions des enfants
1	100 f ; 8 mm	100 f ; 11 mm	⟹ 1) D > C (D est plus épais que C)
2	12 f ; 1 mm	10 f ; 1 mm	⟹ 2) D > C (D est plus épais que C)
3	8 f ; 1 mm		3) C > D (C est plus épais que D)
4		14 f ; 1 mm	

Les deux premières conclusions ne correspondent pas à la 3ème — les enfants décident de conserver la 1ère conclusion car ils voient que sur 100 feuilles, il y a 3 mm de différence alors qu'avec 8 f, 14 f, 12 f, il n'y a pas de différence de mesure.

Ils disent aussi qu'une différence de 3f (12—8) ou de 2 f (14—12) ne change pas la mesure (ils vérifient par une manipulation).

4.2.3. 2ème phase : finition du tableau : recherche des valeurs manquantes (20 à 25 mn)

a) Présentation de la situation — consigne

Les enfants remarquent que certains types de papier n'ont pas été choisis au cours du jeu de communication et qu'il manque des mesures.

La maîtresse propose alors aux enfants de compléter le tableau en mesurant les types de papier manquant.

b) Déroulement et remarques

Les enfants se partagent le travail par groupes de 5 non plus concurrents mais coopérants et pas forcément les mêmes que dans la séance précédente (plusieurs groupes prennent le même type de papier et vérifient ensuite la comptabilité des mesures)

Exemple pour le type C :

$$x8\left(\begin{array}{l}12\ f\ ;\ 1\ mm\\96\ f\ ;\ 8\ mm\end{array}\right)x8$$

Quand tous les enfants sont d'accord, les nouvelles mesures sont inscrites dans le tableau (tableau III). A la fin de cette phase, le tableau est donc entièrement corrigé et complété. Il y a plusieurs messages compatibles pour chaque type de papier.

4.2.4. 3ème phase : jeu de communication (15 mn)

— La maîtresse propose aux enfants de refaire le jeu de communication de la 1ère activité en tenant compte de toutes les remarques et corrections qu'ils ont faites (grand nombre de feuilles, tassement du papier...)

— Le jeu est donc repris une fois à la grande satisfaction des enfants qui réussisent tous, même si on ajoute un ou deux nouveaux types de papier.

4.2.5. Résultats

Ces enfants savent adapter le nombre des feuilles choisies aux besoins de la discrimination de leurs épaisseurs (augmenter le nombre de feuilles lorsque les épaisseurs sont très voisines). Ils savent trouver par le calcul, des couples correspondants au même type de papier. Tous savent maintenant utiliser le modèle linéaire pour analyser un tableau. Une partie d'entre eux est capable d'utiliser des relations de voisinage entre les couples. Un grand nombre d'enfants a été conduit à juger des déclarations et à argumenter lui-même.

EXEMPLES DE 1er TABLEAU DE MESSAGES (non corrigé)

type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	19 f ; 3 mm	10 f ; 2 mm	20 f ; 4 mm	
B	19 f ; 3 mm		4 f ; 1 mm	15 f ; 2 mm
C	19 f ; 2 mm	30 f ; 2 mm	100 f ; 8 mm	30 f ; 3 mm 15 f ; 1 mm 20 f ; 2 mm
D	19 f ; 2 mm 12 f ; 1 mm		100 f ; 9 mm	
E			9 f ; 4 mm	13 f ; 5 mm 7 f ; 3 mm

Tableau III – classe de CM2 b (1977)

type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	48 f ; 9 mm			
B			10 f ; 2 mm	5 f ; 1 mm 15 f ; 3 mm
C	100 f ; 8 mm	12 f ; 1 mm 96 f ; 8 mm	8 f ; 1 mm 64 f ; 8 mm 12 f ; 1 mm	
D	100 f ; 11 mm	10 f ; 1 mm 100 f ; 10 mm		14 f ; 1 mm 154 f ; 11 mm
E	23 f ; 10 mm	10 f ; 4 mm 8 f ; 3 mm	6 f ; 2 mm	

4.2.6. Résumé de la suite de la séquence (Séance3)

Après avoir vérifié que les élèves savaient reconnaître des feuilles désignées par leur épaisseur : (48 ; 9) par exemple, l'enseignant demande de trouver d'autres écritures pour désigner chaque épaisseur, puis de ranger les feuilles de la plus mince à la plus épaisse (25 f; 7 mm) qu'il faut ranger avec les autres.

En fin de séance, l'enseignant *expose* aux élèves une méthode d'écriture de l'épaisseur d'une feuille : (50 ; 4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm d'épaisseur, l'épaisseur d'une de ces feuilles s'écrit $\frac{4}{50}$ que l'on lit : « quatre cinquantièmes de millimètres ». Il vérifie par des exercices que cette information est transmise.

La distinction entre l'épaisseur d'une feuille et la désignation d'un tas de feuilles est essentielle mais difficile et ne sera apprise que progressivement.

4.2.7. Résultats

Les enfants savent trouver des couples équivalents. Ils savent comparer les épaisseurs de feuilles (beaucoup avec 2 méthodes). Ils ont une stratégie de rangement des couples, d'après ces comparaisons. Ils savent désigner l'épaisseur d'une feuille de papier à l'aide d'une fraction et trouver des fractions égales.

Ils ne savent pas trouver l'égalité de 2 fractions dans le cas général.

Remarque : Ces savoir-faire sont constatés en situations. Il n'est pas possible à ce moment-là de détacher une question du contexte et de la poser de façon indépendante. On ne pourra donc pas encore s'appuyer sur ces résultats en tant que connaissances « acquises » et identifiées comme telles par l'enfant.

Bibliographie sommaire

- Revue N. CRDP Grenoble n^{os} 5-10-17-18-20-21 + numéro spécial CM.
- Histoire des mathématiques pour les collèges. Editions Cedic (Fractions et décimaux pages 50 à 64)
- Mots (A.P.M.E.P.) tomes 1-2-3-4-5-6.
- ERMEL Apprentissage mathématique à l'école élémentaire (SERMAP-Hatier) CM tome 2.
- Revue Recherche en didactique des mathématiques. Editions "La Pensée Sauvage", Grenoble.
  - — R. Douady : Apprentissage des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (n° 1.1)
  - — G. Brousseau : Problèmes de l'enseignement des décimaux (n° 1.1).
  - — G. Brousseau : Problèmes de didactique des décimaux (n° 2.1).
  - — A. Rouchier : Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs (n° 1.2).
- Thèse de R. Douady : Jeu de cadres et dialectique outil-objet, disponible à l'IREM de Paris VII.
- Brochures IREM
  - — Fractions et Rationnels. IREM de Rennes 1979-1980
  - — L'introduction des Fractions au Cours Moyen. IREM de Reims, 1980.
  - — Aides Pédagogiques pour les maîtres du cycle moyen IREM de Nice, 1980.
  - — Colloque Liaison école-collège (CM2-6^{e}). IREM de Limoges, janvier 1981.
  - — Colloque PEN du Touquet (compte rendu) IREM de Lille, 1981.
  - — De nouveaux nombres : une introduction. IREM de Poitiers, 1981.
  - — Le nombre décimal IREM-CDDP. Corse 1981
  - — Décimaux au CM1. IREM de Poitiers 1982
  - — Les décimaux au CM1 grâce aux calculatrices de poche. IREM de Lorraine 1982.
  - — Nombres décimaux. IREM de Limoges 1982-83.
  - — La notion de fraction au CM. IREM de Rouen 1984.

— Liaison Ecole Collège : Nombre décimaux. IREM de Paris-Sud (Paris VII) à paraître en octobre 1985.

Vous pouvez consulter l'IREM de votre Académie qui dispose sans doute de toutes ces brochures et peut-être d'autres encore sur le sujet.

Films CNDP

- Approchez, approchez... et vous verrez (émission diffusée en mars 1982) et son document d'accompagnement.
- Les décimaux sont dans la course (émission diffusée en mars 1982). Le document d'accompagnement n'a pas été édité par le CNDP mais est disponible à l'IREM de Paris VII.

ADRESSES ET BULLETINS DES I.R.E.M.

Directeurs

BESANÇON — **Danielle ROGER**

Faculté des Sciences et des Techniques, La Bouloie, Route de Gray — 25030 BESANÇON CEDEX - Tél. : 81.50.59.30. (direct) ; 81.81.80.08 (p. 389)
Bulletin de liaison de l'IREM de Besançon. 1 numéro par trimestre.

BORDEAUX — **Pierre DAMEY**

351, cours de la Libération — 33405 TALENCE CEDEX
Tél. : 56.80.74.42
Annexes de l'IREM :

— en Martinique (responsable M. LA PIQUONNE)
IREM, Bât. N6 — Rez-de-chaussée — E.N. Pointe des Nègres
97200 FORT-DE-FRANCE

— en Guadeloupe (responsable Mme MARIE-ALIE)
Section Guadeloupéenne — Bât. P — 3e étage — B.P. 17
97110 POINTE-A-PITRE

— en Guyane (responsable M. RICHARD)
Lycée d'Etat Mixte Félix Eboué — 97300 CAYENNE

— en Polynésie (responsable M. DAUBET)
B.P. 33.40
TAHITI Polynésie française

BREST (ou Bretagne Occidentale) — **Bernard PETIT**

Faculté des Sciences et Techniques, 6 avenue V. Le Gorgeu — 29283 BREST CEDEX
Tél. : 98.03.16.94 (poste 488)
Taol Lagad — 1 par trimestre ; pour les personnes de l'académie : gratuit ; pour les personnes extérieures : s'adresser à l'IREM.

CAEN (ou Basse-Normandie) — **André MADIC**

I.U.T., Boulevard Maréchal Juin — 14000 CAEN
Tél. : 31.44.27.91

CLERMONT-FERRAND **Bruno INGRAO**
B.P. 45 — 63170 AUBIERE — Tél. : 73.26.41.10 (poste 33.10)
Bulletin de liaison de l'IREM de Clermont-Ferrand
Trimestriel ; gratuit pour les personnes de l'académie.
Abonnement à l'ensemble des publications de l'IREM : 80 F.

DIJON **Jean-Claude CORTET**
Université de DIJON — IREM B.P. 138 — 21004 DIJON CEDEX
Tél. : 80.66.64.13 (poste 641)
Feuille de Vigne. Tous les deux mois ; gratuit.

GRENOBLE **Président ADIRE**
B.P. 41 — 38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
Tél. : 76.51.46.62 ; 76.51.46.00 (p. 502)
Revue *"Petit x"* (par abonnement)
Abonnement à l'ensemble des publications : 100 F.

LILLE **Rudolf BKOUCHE**
Université de Lille 1 — B.P. 36 — 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX
Tél. : 20.43.41.81 ou 20.43.41.82
Bulletin de l'IREM de Lille
Abonnement à l'ensemble des publications : 130 F (Etablissement).

LIMOGES **Georges LION**
123, avenue Albert Thomas — 87060 LIMOGES CEDEX — Tél. : 55.79.24.12
Bulletin de l'IREM - Trimestriel ; gratuit pour les personnes de l'académie ; pour les personnes extérieures : 10 F.

LORRAINE **Philippe LOMBARD**
Université Nancy I — Faculté des Sciences (Administrateur provisoire)
B.P. n° 239 — 54506 VANDOEUVRE-LÈS-NANCY CEDEX
Tél. : 83.27.55.51
La Caverne — Gratuit pour les personnes de l'académie.

LYON **Alain BOUVIER**
Université Claude Bernard — 43, bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX — Tél. : 78.89.84.55 - 78.89.81.24 (poste 37.24).
Sans Tambour ni Trompette (IREM + A.P.M.E.P. Régionale) : 3 numéros/an : 90 F (port compris). Ce bulletin est distribué aux adhérents A.P.M.E.P. de l'Académie. La Feuille à Problèmes (trimestriel) : gratuit — ZOOM-INFO (trimestriel).

MARSEILLE **Yves CHEVALLARD**
U.E.R. de Marseille Luminy, 70 Route Léon Lachamp, case 901
13288 MARSEILLE CEDEX 9 — Tél. : 91.41.39.40 - 91.26.90.91
La Lettre de l'IREM - Semestriel ; gratuit.
Annexe : La Réunion (responsable : P. GIGORD)
Centre Universitaire du Chaudron, 97490 Ste-Clotilde

MONTPELLIER **Gérard AUDIBERT**
Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Place Bataillon
34060 MONTPELLIER CEDEX — Tél. : 67.63.42.14

NANTES **Yves BOYDRON**
38, boulevard Michelet — BP 1044 — 44037 NANTES CEDEX
Tél. : 40.74.50.70 (poste 297)
Bulletin de liaison ; et *collection Nanta Iremica* — Vente au numéro.
Annexe : LE MANS.

NICE **Jean-Philippe LABROUSSE**

Université de Nice, Parc Valrose — 06034 NICE CEDEX
Tél. : 93.52.98.98 (poste 9873)

ORLEANS **Jean-Pierre LAMARCHE**

Université — Domaine Universitaire de la Source — BP 6759 —
45067 ORLEANS CEDEX 2 — Tél. : 38.63.22.16 (poste 638)

PARIS NORD **Michel BOURBION**

Université Paris-Nord — Avenue J.-B. Clément — 93430 VILLETANEUSE
Tél. : (1) 48.21.61.70 (poste 4390 à 4394)
Panirem — Mensuel ; gratuit.

PARIS SUD **Michèle ARTIGUES**

Université Paris VII — 2, place Jussieu, Tour 56 — 75005 PARIS
Tél. : (1) 43.36.25.25 (poste 5383)
Circulaire IREM (gratuite ; envoyée aux correspondants).

PICARDIE **Michelle MONTANARI**

48 rue Raspail — BC 619 — 02100 SAINT-QUENTIN
Tél. : 23.67.06.18 et (23) 62.62.98
Pas de bulletin régulier.

POITIERS **Raymond BARRA**

40, Avenue du Recteur Pineau — 86022 POITIERS CEDEX
Tél. : 49.46.27.35

REIMS **Bertrand TURCO**

Moulin de la Housse — B.P. 347 — 51062 REIMS CEDEX
Tél. : 26.85.12.21
Bulletin de liaison de l'IREM — 2 par an ; gratuit.

RENNES **Roger LE ROUX**

Ave du Gl Leclerc — Rennes-Beaulieu — 35042 RENNES CEDEX
Tél. : 99.38.81.36 — 99.36.48.15 (poste 2328)
Bulletin d'Information de l'IREM de Rennes — 2 par an ; gratuit.

ROUEN **Alain CARDON**

B.P. 27 — 76130 MONT SAINT AIGNAN
Tél. : 35.70.42.73 - 35.74.03.32 (poste 86)

STRASBOURG **Jacques FARAUD**

10 rue du Général Zimmer — 67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88.61.48.20
L'Ouvert journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg.
Trimestriel (4 numéros par an).
Expédié gratuitement aux membres de la régionale A.P.M.E.P.
Le numéro : 15 F ; abonnement : Alsace : 80 F ; Autres départements : 106 F ;
Etrangers : 95 F.

TOULOUSE **André ANTIBI**

UER MIG. Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne —
31062 TOULOUSE CEDEX — Tél. : 61.55.68.83
L'Autan et *Bulletin de l'IREM de Toulouse.*
Le Bulletin est trimestriel. Gratuit pour les personnes de l'académie.
Bulletin : 15 F pour les personnes extérieures.

MOTS

vous connaissez ?

6 fascicules
plus de 50 rubriques
(angles, approximation, ensemble, équation, proportionnalité...)

Un nouveau fascicule est paru consacré à angle, symétrie, orientation, angle-de-couples, repérage .

MOTS

n'est ni un dictionnaire, ni un lexique, ni un manuel

MOTS

présente les réflexions d'une équipe à propos de mots ou de phrases couramment employés

MOTS

est vraiment l'ouvrage qui vous manque !

ISBN 2-902680-38-4

VAUDREY *Impression* - LYON
N° d'édition 30969
Dépôt légal Février 1986