connexe, adj.

Us. : Le sens étym. "noué avec" apparaît dans des expressions comme *cause connexe* (d'un procès), *branches connexes* (d'une industrie) ou en électrotechnique : *connexions* d'un montage, réseaux *interconnectés.*

Math. : La notion d'espace connexe et ses variantes sont des modélisations de la notion intuitive d'ensembles d'un seul tenant.
La connexité fut introduite en 1893 par C. Jordan (Cours d'analyse) puis développée par N.J. Lennes à partir de 1906.

Dans toute cette notice, E est un espace topologique.

1. Connexité.

Appelons *déconnexion* de E toute partition de E en deux ouverts non vides. Soit $\{A,B\}$ une déconnexion de E : alors A et B sont des parties de E à la fois ouvertes et fermées. Inversement, soit A une partie de E à la fois ouverte et fermée, autre que E ou ϕ ; alors $\{A, E \setminus A\}$ est une déconnexion de E. On dit que E est *connexe* lorsqu'il n'existe pas de déconnexion de E, c'est-à-dire lorsque E et ϕ sont les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées. Cette propriété est sur-topologique [TOPOLOGIE, *1.4.3*].

Grâce à la notion de topologie induite on peut parler de *parties connexes* d'un espace topologique [TOPOLOGIE, *1.3.4*].

Exemples :

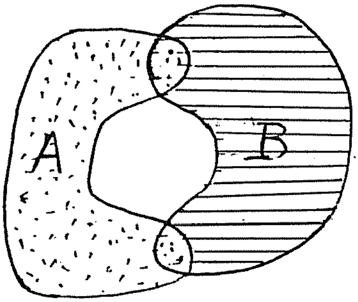
• Dans $\mathbf{R}$, les parties connexes sont les intervalles.

• Dans $\mathbf{R}^2$, soit G le graphe d'une application f d'une partie A de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors, si A est un intervalle et si f est continue, G est connexe ; la première condition est nécessaire, mais la seconde ne l'est pas. Prenons en effet pour A l'intervalle $[0;1]$, et pour f l'application

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left]0;\frac{1}{\pi}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors l'application f n'est pas continue et pourtant son graphe est connexe.

• Les lettres majuscules françaises sont toutes représentées par des parties connexes de $\mathbf{R}^2$, mais il n'en est pas de même des lettres minuscules "i" et "j".

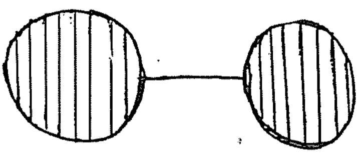


En général, l'intersection de deux parties connexes n'est pas une partie connexe (exemple ci-contre dans $\mathbf{R}^2$). Pourtant, dans $\mathbf{R}$ par exemple, toute intersection de parties connexes est connexe.

En général, une réunion de parties connexes n'est pas une partie connexe. En revanche, toute réunion de parties connexes qui ont au moins un point commun est une partie connexe. Il en est de même de la réunion d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties connexes vérifiant :

$$\forall n\in\mathbf{N}\ ,\ A_n\cap A_{n+1} \neq \phi$$

Toute partie connexe d'un espace topologique a pour adhérence une partie connexe.



En revanche, l'intérieur d'une partie connexe n'est pas toujours connexe (exemple ci-contre dans $\mathbf{R}^2$). On appelle *continu* tout espace topologique connexe et compact [CONTINU, n.m., COMPACT].

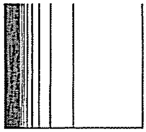
2. Connexité locale.

Soit x un point de l'espace E. On dit que E est *localement connexe en* x lorsque tout voisinage de x contient un voisinage connexe de x ; autrement dit, x possède une base de voisinages connexes. On dit que E est *localement connexe* lorsqu'il est localement connexe en chacun de ses points [LOCAL].

Exemples :

• Dans $\mathbf{R}$, $[1;2] \cup [3;4]$ est localement connexe mais n'est pas connexe ; $[1;2]$ et $[3;4]$ sont tous deux connexes et localement connexes.

- Dans $\mathbf{R}^2$, le peigne, réunion de $[0;1]\times\{0\}$ et de $\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}_*}\left\{\frac{1}{n}\right\}\cup\{0\}\right)\times[0;1]$



est connexe, mais n'est pas localement connexe en $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ par exemple. Ce peigne est néanmoins un continu.

- Le sous-espace **Q** de **R** n'est ni connexe ni localement connexe.

3. Connexité par arcs.

3.1. *Arc.*

On appelle *arc* tout espace topologique Γ tel qu'il existe au moins un segment réel S et une application continue surjective de S sur Γ. Cette propriété est sur-topologique.

Puisque la quasi-compacité et la connexité sont des propriétés sur-topologiques, tout arc est un espace connexe et quasi-compact ; donc tout arc séparé est un continu.

Inversement Hahn, Mazurkiewicz et Sierpinski ont montré entre 1914 et 1920 qu'un continu métrisable [MÉTRIQUE] non vide est un arc si et seulement s'il est localement connexe. En raison de ce théorème, les arcs métrisables sont parfois appelés *espaces de Peano*, en mémoire de ce mathématicien, qui avait démontré en 1890 que le carré $[0;1]\times[0;1]$ est l'image du segment $[0;1]$ par une application continue surjective.

Certains auteurs appellent "arcs" ce que nous appelons ici "arcs séparés". Notons qu'en anglais "arc" se traduit par "path", le mot anglais "arc" désignant une application continue injective d'un segment de **R** non réduit à un point vers un espace topologique.

Soit Γ un arc ; pour tout segment réel $[\alpha;\beta]$ de longueur non nulle, et tous points x et y de Γ, il existe au moins une surjection continue de $[\alpha;\beta]$ sur Γ qui envoie α sur x et β sur y ; il s'ensuit que, lorsqu'on parle des extrémités d'un arc Γ, on se réfère implicitement non à l'ensemble Γ lui-même, mais à l'arc paramétré, c'est-à-dire muni de l'une de ces surjections continues [COURBE]..

3.2. *Arc simple.*

Tout espace topologique homéomorphe à un segment réel non réduit à un point est appelé *arc simple* ; tout arc simple est donc un arc métrisable. Cette propriété est topologique et non surtopologique.

Soit A un arc simple et h un homéomorphisme d'un segment réel S sur A ; les images par h des bornes de S ne dépendent pas du choix de h : elles sont appelées *extrémités* de l'arc simple A. La notion d'extrémité d'arc simple est topologique.

On démontre que l'espace topologique A est un arc simple si et seulement si c'est un continu métrisable [MÉTRIQUE] qui contient deux points a et b tels que, pour tout x de $A \setminus \{a; b\}$, l'espace $A \setminus \{x\}$ ne soit plus connexe ; les points a et b sont nécessairement les extrémités de A. On démontre aussi que tout espace séparé qui est image de $[0;1]$ par une application continue ouverte est un arc simple.

Exemples : Les dessins suivants de lettres majuscules C, G, I, L, M, N, S, U, V, W, Z représentent des arcs simples. On notera qu'il n'en serait pas nécessairement de même si l'on utilisait d'autres types de caractères ; cette remarque s'applique également aux exemples donnés en **3.5.** qui font intervenir des caractères d'imprimerie.

En revanche les dessins des lettres A, B, D, E, F, H, K, O, P, Q, R, X, Y ainsi que ceux des signes $+$ et $\neq$ représentent des arcs qui ne sont pas des arcs simples ; celui du signe $=$ ne représente pas un arc.

3.3. *Connexité par arcs.*

L'espace topologique E est dit *connexe par arcs* lorsque, pour tous points x et y de E, il existe dans E un arc (non nécessairement séparé) contenant x et y. Cette propriété est surtopologique.

Il est clair que tout arc est un espace connexe par arcs. On montre que tout espace connexe par arcs est connexe. Les réciproques de ces deux assertions sont fausses. Toutefois, tout continu métrisable localement connexe est aussi connexe par arcs (et c'est même un arc [**3.1**]).

Exemples :

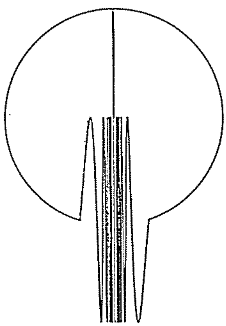
- Les ouverts de $\mathbf{R}^2$ qui sont connexes sont connexes par arcs.
- Dans $\mathbf{R}^2$ le graphe de $x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est connexe sans être connexe par arcs.

- Dans $\mathbf{R}^2$, l'ensemble $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2$ est connexe par arcs : soient a et b deux points quelconques de cet ensemble et D une droite de $\mathbf{R}^2$ ne contenant ni a ni b ; $\mathbf{Q}^2$ étant dénombrable, l'une au moins des lignes brisées amb, m appartenant à D, est incluse dans $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2$

- Le peigne [2, *exemple 2*] est un espace connexe par arcs qui n'est pas un arc : c'est un continu métrisable, mais il n'est pas localement connexe.

- La figure ci-dessous, inspirée du cercle de Varsovie, représente un espace compact connexe par arcs sans être lui-même un arc. Il est la réunion de trois parties E_1, E_2, E_3 définies comme suit :



E_1 est le graphe de la fonction

$x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$

définie sur $\left[-\frac{1}{\pi} ; 0 \right[\cup \left] 0 ; \frac{1}{\pi} \right]$

E_2 est la partie $\{0\} \times \left[-1 ; 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}} \right]$

E_3 est le plus grand arc du cercle de centre $(0;1)$ ayant pour extrémités les points $\left(-\frac{1}{\pi} ; 0 \right)$ et $\left(\frac{1}{\pi} ; 0 \right)$.

- Dans $\mathbf{R}^2$, l'adhérence de la spirale d'équation polaire $\varrho = 1 - \frac{1}{\theta}$, $\theta \in [1, \rightarrow)$

est la réunion de la spirale et du cercle centré à l'origine et de rayon 1. C'est un continu, car c'est l'adhérence d'un ensemble borné connexe ; mais ce n'est pas un espace connexe par arcs.

3.4. *Connexité par arcs simples.*

L'espace topologique E est dit *connexe par arcs simples* lorsque pour tous points x et y de E il existe dans E un arc simple d'extrémités x et y. Cette propriété est topologique et non surtopologique.

Il est clair que tout espace connexe par arcs simples est connexe par arcs et donc connexe. Il existe des espaces connexes par arcs qui ne sont pas connexes par arcs simples.

Exemple : Soit l'espace **N** muni de la topologie dont les ouverts sont **N** et toutes les parties de $\mathbf{N}_*$. Cet espace est connexe par arcs ; en effet, pour tous naturels x et y, $\{x ; 0 ; y\}$ est un arc. Mais cet espace n'est pas connexe par arcs simples, car il est infini dénombrable.

Remarque : En raison de la signification du mot anglais "arc" l'expression "arc connected" désigne une notion intermédiaire entre la connexité par arcs simples et la connexité par arcs.

On montre que tout arc métrisable est connexe par arcs simples. Il s'ensuit que, pour les espaces métrisables, la connexité par arcs simples équivaut à la connexité par arcs. En particulier tout continu métrisable localement connexe est à la fois connexe et connexe par arcs simples.

Exemples : Les ouverts de $\mathbf{R}^n$, les parties de $\mathbf{R}^2$ que représentent les dessins des lettres majuscules françaises, etc. sont des espaces connexes par arcs simples.

3.5. *Dendrites.*

On dit qu'un espace métrisable compact D est une *dendrite* lorsque, pour tous points x et y de D, il existe dans D un et un seul arc simple d'extrémités x et y.

Cette notion rend compte de l'idée intuitive d'espace connexe par arcs ne contenant pas de "boucle".

Toute dendrite localement connexe est un arc.

Exemples :

- Les dessins suivants des lettres majuscules françaises S, E, X représentent des dentrites de $\mathbf{R}^2$; il n'est est pas de même de B, O, A.
- Le peigne défini en **2** (2^e^ exemple) est une dendrite.
- Le cercle de Varsovie modifié [**3.3**, 4^e^ exemple] est une dendrite.

3.6. *Espaces unicohérents.*

On dit que E est *unicohérent* lorsqu'il est connexe et que, pour tous fermés connexes A et B de E vérifiant $A \cup B = E$, l'intersection $A \cap B$ est connexe. Toute dentrite localement connexe est un espace unicohérent.

Exemples :

• La partie de $\mathbf{R}^2$ qui est la réunion de $\{0\} \times [-1; 1]$ et du graphe de l'application $x \to \sin \frac{1}{x}$ définie sur $\left]0; \frac{1}{\pi}\right]$ est unicohérente et non connexe par arcs.

• Le cercle de Varsovie modifié n'est pas unicohérent.

• La sphère S^n de $\mathbf{R}^{n+1}$ est unicohérente si et seulement si n est au moins égal à 2.

4. Composantes connexes.

4.1. *Composantes et quasi-composantes.*

On appelle *composante connexe* de E toute partie connexe de E maximale pour la relation d'inclusion ; une telle partie est un fermé.

Tout point x de E appartient à une composante connexe et une seule : la réunion de toutes les parties connexes le contenant. Les composantes connexes de E en forment donc une partition.

Les espaces connexes sont ceux qui n'ont qu'une composante connexe.

L'ensemble des composantes connexes de E est fini si et seulement si l'ensemble des parties de E à la fois ouvertes et fermées est fini. Dans ce cas les composantes connexes de E sont les parties ouvertes et fermées non vides minimales.

Cependant, en général, une composante connexe n'est pas un ouvert.

Exemple : Soit $E = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbf{N}_* \right\}$. Les composantes connexes de E sont ses singletons, mais $\{0\}$ n'est pas un ouvert.

A tout point x de E on peut associer sa *quasi-composante,* qui est l'intersection de toutes les parties ouvertes et fermées le contenant ; c'est donc un fermé, mais ce n'est en général ni un ouvert ni une partie connexe. La quasi-composante d'un point inclut sa composante connexe ; elle lui est égale si et seulement si elle est elle-même connexe ; c'est le cas en particulier quand elle est ouverte.

Exemple : Soit l'espace topologique **N** dont les ouverts sont les parties ne contenant ni 0 ni 1, et les parties contenant 0 ou 1 et dont le complémentaire est fini. Cet espace est non séparé. La quasi-composante de 0, ainsi que de 1, est $\{0;1\}$ tandis que $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des composantes connexes.

Même dans le cas où E est séparé, les quasi-composantes ne coïncident pas nécessairement avec les composantes connexes.

Les quasi-composantes de E forment une partition de E moins fine que celle des composantes connexes. L'espace E est connexe si et seulement si E a une seule quasi-composante.

Exemple : Soit E le sous-espace de $\mathbf{R}^2 \smallsetminus \{(0;0)\}$ constitué des points $(x;y)$ tels que $-1 \leqslant y \leqslant 1$ et x appartienne à $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbf{N}_*\right\}$. La composante connexe de $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ dans E est $\{0\} \times]0;1]$, sa quasi-composante est $\{0\} \times \left([-1;1] \smallsetminus \{0\}\right)$.

4.2. Espaces discontinus.

On dit que E est *totalement discontinu* (resp. *totalement séparé*) lorsque ses composantes connexes (resp. ses quasi-composantes) sont ses singletons. Tout espace totalement séparé est séparé et totalement discontinu ; tout espace totalement discontinu est un espace accessible (T_1) [SÉPARATION].

Cette terminologie n'a pas toujours été utilisée. Ainsi, jusque dans les années 1940-1960, certains auteurs qualifiaient de *dispersés* ou d'*héréditairement discontinus* les espaces dont les composantes sont les singletons, et de *totalement discontinus* ou *nulle part continus* les espaces dont les quasi-composantes sont les singletons.

Soit E un espace topologique ; notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence "appartenir à une même composante connexe". L'espace quotient $E/\mathcal{R}$ est totalement discontinu.

On dit que E est *extrêmement discontinu* lorsqu'il est séparé et que l'adhérence de tout ouvert de E est un ouvert de E. Un tel espace est totalement séparé.

Lorsque tout point de E a une base de voisinages ouverts et fermés, on dit que E est de *dimension zéro* [DIMENSION].

On dit que E est *de Kolmogorov* ou T_0 lorsque pour toute paire d'éléments distincts de E il existe un voisinage de l'un au moins des deux points ne contenant pas l'autre ; tout espace à la fois T_0 et de dimension zéro est totalement séparé.

L'importance de ces notions tient à ce qu'elles permettent de caractériser des ensembles courants. Ainsi :

• un espace topologique est homéomorphe à l'ensemble de Cantor si et seulement s'il est compact, métrisable, totalement discontinu et sans point isolé ;

• tout espace métrique séparable de dimension zéro est homéomorphe à une partie de l'ensemble de Cantor ;

• tout espace métrique séparable, topologiquement complet [MÉTRIQUE], de dimension zéro, et dont les parties compactes sont d'intérieur vide est homéomorphe à l'ensemble des nombres irrationnels ;

• tout espace métrique infini dénombrable sans point isolé est homéomorphe à $\mathbf{Q}$.

Exemples :

• Tout espace discret est extrêmement discontinu ; il est donc totalement séparé, séparé et totalement discontinu.

• Dans $\mathbf{R}$, les sous-espaces $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et l'ensemble triadique de Cantor [TOPOLOGIE, *1.3.3*] sont des espaces totalement séparés, donc totalement discontinus ; ils ne sont pas extrêmement discontinus.

• Le deuxième exemple de **4.1** fournit un cas d'espace totalement discontinu, non séparé et donc non totalement séparé.

• Le compactifié de Stone-Čech de $\mathbf{N}$ est un espace extrêmement discontinu sans être discret [COMPACT].

• D'après le théorème de caractérisation de l'espace des irrationnels, $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie-produit [TOPOLOGIE, *3.2.3*] est homéomorphe à $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; les fractions continues permettent de construire un homéomorphisme [FRACTION, 4].

• $\mathbf{Q}\cap[0;1]$, $\mathbf{Q}\cap]0;1[$ et $\mathbf{Q}$ sont homéomorphes, car ce sont trois espaces métrisables infinis dénombrables sans point isolé.

• Tout espace métrique de cardinal strictement inférieur à celui du continu est de dimension zéro.

• Bing, puis Rittler ont donné des exemples d'espaces séparés dénombrables, connexes et même localement connexes ; ils ne sont, bien sûr, pas métrisables.

5. Connexité simple. Connexité d'ordre supérieur.

Soient E et E' des espaces topologiques, f et g des applications continues de E dans E'. On dit que f et g sont *homotopes* lorsqu'il existe une application continue H de $E\times[0;1]$ dans E' telle que f et g soient respectivement les fonctions $x\mapsto H(x;0)$ et $x\mapsto H(x;1)$. Une telle application est appelée *homotopie* entre f et g. Intuitivement, on peut passer continûment de f à g.

Soit $\mathbf{S}^n$ la sphère-unité de $\mathbf{R}^{n+1}$.

On dit que E est *simplement connexe* lorsqu'il est connexe par arcs et que toute application continue du cercle $\mathbf{S}^1$ dans E est homotope à une application constante (Intuitivement les boucles de E peuvent être réduites à un point par déformation continue dans E).

On dit que E est *contractile* lorsque l'application identique de E est homotope à une application constante (Intuitivement E tout entier peut être réduit à un point par déformation continue dans lui-même). Tout espace contractile est simplement connexe.

Exemples :

• Le plan privé d'une demi-droite est simplement connexe et même contractile.

• Le plan privé d'un singleton n'est pas simplement connexe ; il en est de même de $\mathbf{R}^3$ privé d'une droite.

• $\mathbf{R}^3$ privé d'un singleton est simplement connexe, mais pas contractile.

• Dans $\mathbf{R}^n$ l'hypercube $[0;1]^n$ est contractile.

• Le cercle de Varsovie modifié présenté en **3.3** est un espace simplement connexe, mais pas contractile ; néanmoins toute dendrite localement connexe est contractile.

Les notions d'espace contractile et d'espace simplement connexe sont topologiques et non sur-topologiques.

connexe, adj.

Les ouverts simplement connexes de **C** jouent un rôle important en théorie des fonctions analytiques. En effet, soit Ω un ouvert simplement connexe de **C**, et f une fonction analytique de Ω dans **C**. Alors, pour toute courbe fermée γ de Ω on a : $\int_\gamma f(z)dz = 0$. De plus, si f ne s'annule pas, il existe deux fonctions g et h analytiques sur Ω telles que $f = \exp \circ g$ et $f = h \times h$.

On montre que tout espace métrique connexe E tel que toute application continue de E dans $\mathbf{S}^1$ soit homotope à une application constante est unicohérent. La réciproque est vraie dans tout continu localement connexe.

Soit n un naturel ; soix x un point de E. On dit que E est *localement-connexe-pour-la-dimension n au point x* lorsque, pour tout voisinage U de x, il existe un voisinage V de x tel que toute application continue de $\mathbf{S}^n$ dans V admette un prolongement continu de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans U. On dit que E est *localement-connexe-pour-la dimension n* lorsque cette propriété est vraie en tout point de E. Pour $n=0$ (resp. $n=1$) cela revient à dire que E est connexe par arcs (resp. localement simplement connexe). Lorsque, pour tout naturel q au plus égal à n, E est localement connexe-pour-la-dimension q, on dit que E est *localement-connexe d'ordre n.*

On dit que E est *asphérique d'ordre n* lorsque toute application continue de $\mathbf{S}^n$ dans E a un prolongement continu de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans E. On dit que E est *connexe d'ordre n* lorsque, pour tout naturel q au plus égal à n, E est asphérique d'ordre q.

Tout espace contractile est asphérique d'ordre n pour tout n.

Exemples :

- Le cercle $\mathbf{S}^1$ n'est pas simplement connexe ; donc il n'est pas contractile. En revanche il est localement simplement connexe.

- Pour $n \geqslant 2$, $\mathbf{S}^n$ est simplement connexe et non contractile. Elle n'est pas asphérique d'ordre n, car l'application identique de $\mathbf{S}^n$ ne se prolonge pas en une application continue de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans $\mathbf{S}^n$(théorème de Brouwer).

• La sphère unité de tout espace vectoriel normé de dimension infinie est connexe d'ordre n pour tout naturel n.

La connexité d'ordre 1 (resp. 2) est une hypothèse importante sur les parties de $\mathbf{R}^3$ où l'on cherche un potentiel scalaire (resp. vecteur) associé à un champ donné [ROTATIONNEL].

6. Graphes connexes.

On dit qu'un graphe simple fini est connexe lorsque deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne [GRAPHE].

On peut relier la notion de connexité d'un graphe simple fini à celle d'espace connexe de la façon suivante : tout graphe simple fini est connexe si et seulement s'il peut être représenté par un sous-espace connexe de $\mathbf{R}^3$.

La notion de connexité d'un graphe se rencontre aussi à propos des graphes orientés, des graphes infinis,...

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \text{de dimension zéro et } T_o \arrow[d] & \\
\text{discret} \arrow[r] & \text{extrêmement discontinu} \arrow[rr] & & \text{totalement séparé} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & \text{Urysohn} \arrow[d] & & \text{totalement discontinu} \arrow[d] \\
 & & \text{séparé} \arrow[rr] & & \text{accessible}
\end{tikzcd}$$

Tableau récapitulatif des différentes notions liées à la non-connexité

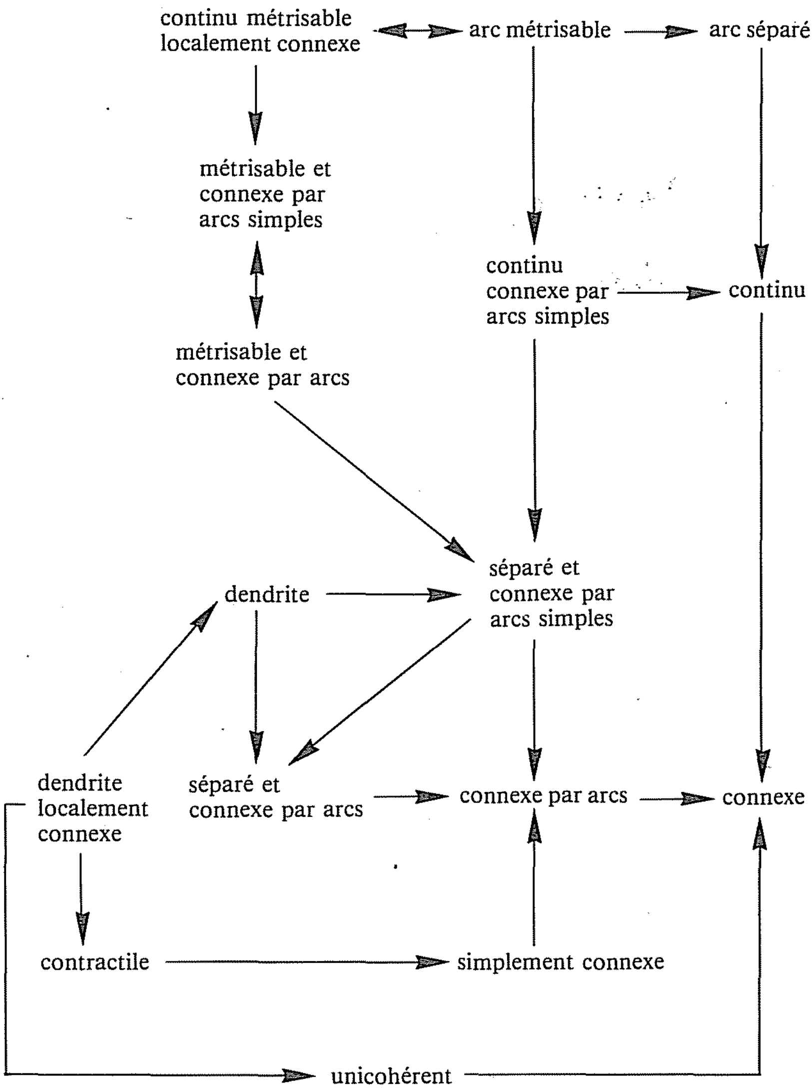


Tableau récapitulatif des
différentes notions globales de connexité

filtre, n. m.
[filtrant]

Math. : La notion et le terme *filtre* ont été introduits par Henri Cartan en 1935 ; il s'agissait à l'origine d'une sorte de généralisation de la notion de voisinages d'un point, permettant d'unifier les notions classiques de limites (en particulier, limites à droite, à gauche, infinies, à l'infini) sans avoir recours à une extension ou une restriction des ensembles sur lesquels on opère.

1. Filtres sur un ensemble.

1.1. *Définition.* Dans un ensemble E, un ensemble $\mathcal{A}$ non vide de parties non vides de E est un *filtre* lorsque toute intersection de deux éléments de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$ et que toute partie de E incluant un élément de $\mathcal{A}$ est elle-même un élément de $\mathcal{A}$.

Dans un ensemble infini, l'ensemble des complémentaires des parties finies est un filtre ; dans le cas de $\mathbf{N}$ il s'agit du *filtre de Fréchet*.

Un filtre $\mathcal{A}$ sur E est *principal* lorsqu'il existe une partie de E qui est un élément minimal de $\mathcal{A}$ pour l'inclusion. Un filtre principal n'a qu'un élément minimal, qui est son plus petit élément.

Inversement, dans tout ensemble, l'ensemble des parties incluant une partie A non vide est un filtre principal, appelé *filtre principal défini par A*.

Un ensemble est fini ssi tous ses filtres sont principaux.

1.2. *Base de filtre.* Soit $\mathcal{A}$ un filtre sur l'ensemble E, et soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$; on dit que $\mathcal{B}$ est une *base du filtre* $\mathcal{A}$ ou encore que $\mathcal{B}$ *engendre* le filtre $\mathcal{A}$ lorsque tout élément de $\mathcal{A}$ inclut un élément de $\mathcal{B}$.

On remarque que, comme dans le cas des bases de voisinages [TOPOLOGIE, *1.2.2*], on n'impose aucune condition de minimalité aux bases d'un filtre.

Exemple : L'ensemble des sections finissantes de $\mathbf{N}$ est une base du filtre de Fréchet.

Un ensemble non vide $\mathcal{B}$ de parties non vides de E est base d'un filtre ssi toute intersection d'éléments de $\mathcal{B}$ inclut un élément de $\mathcal{B}$; le filtre dont $\mathcal{B}$ est une base est alors l'ensemble des parties incluant un élément de $\mathcal{B}$. On dit dans ce cas que $\mathcal{B}$ est une *base de filtre.*

Les filtres principaux de E sont les filtres engendrés par un singleton de $\mathcal{P}(E)$.

1.3. *Filtre induit sur une partie.* Soit E un ensemble, F une partie non vide de E, $\mathcal{A}$ un filtre sur E. On dit que $\mathcal{A}$ *induit* un filtre sur F lorsque tout élément de $\mathcal{A}$ a une intersection non vide avec F ; l'ensemble des traces sur F des éléments de $\mathcal{A}$ est alors un filtre, dit *filtre induit* par $\mathcal{A}$ sur F.

Exemple : Le filtre de Fréchet induit un filtre sur toute partie infinie de $\mathbf{N}$.

1.4. *Relations entre filtres.*

1.4.1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ des filtres sur l'ensemble E. On dit que $\mathcal{A}$ est *moins fin* que $\mathcal{A}'$ lorsqu'il est inclus dans $\mathcal{A}'$. Cette relation entre filtres sur E est une relation d'ordre, en général partielle.

Exemple : L'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ contenant tous les entiers pairs à partir d'un certain rang est un filtre strictement plus fin que le filtre de Fréchet.

1.4.2. Les *ultrafiltres* sur E sont les éléments maximaux de l'ensemble des filtres pour la relation "être moins fin que". Un filtre sur E est un ultrafiltre ssi pour toute partie X de E il contient X ou $E \setminus X$.

Dans un ensemble E les filtres principaux qui sont des ultrafiltres sont les filtres principaux dont la partie génératrice est un singleton de E.

On ne peut démontrer l'existence d'ultrafiltres non principaux sur aucun ensemble infini sans ajouter d'axiome à la théorie des ensembles de Zermelo-Fränkel. L'axiome usuel du choix implique que tout filtre est inclus dans un ultrafiltre, et cette dernière assertion implique que dans tout ensemble infini il existe un ultrafiltre non principal. Aucune des réciproques de ces deux implications n'est vraie.

Les ultrafiltres non principaux sont tels que l'intersection de leurs éléments est vide. On montre qu'ils sont les ultrafiltres plus fins que le filtre des complémentaires des parties finies.

2. Filtres sur un espace topologique.

Soit $(E;\mathcal{O})$ un espace topologique.

2.1. *Filtres de voisinages.* L'ensemble des voisinages d'un point a de E est un filtre, noté $\mathcal{V}(a)$. Les bases du filtre $\mathcal{V}(a)$ sont les bases de voisinages de a.

Soit F une partie de E et a un point de E ; $\mathcal{V}(a)$ induit un filtre sur F ssi a est adhérent à F. Dans cette hypothèse, ce filtre induit n'est autre que le filtre des voisinages de a pour la topologie induite sur F par $\mathcal{O}$.

Inversement, soit $\mathcal{A}$ un filtre sur un ensemble X ; si l'intersection des éléments de $\mathcal{A}$ est non vide, il existe une topologie sur X pour laquelle $\mathcal{A}$ est l'ensemble des voisinages d'un point ; si l'intersection des éléments de $\mathcal{A}$ est vide, on se ramène au cas précédent en ajoutant à X un point ω et en considérant sur $X\cup\{\omega\}$ le filtre $\left\{A\cup\{\omega\}\ ;\ A\in\mathcal{A}\right\}$ (v. ci-dessous **3.4.**).

Exemples :

• Dans **R**, le filtre des complémentaires des parties majorées est le filtre induit sur **R** par le filtre $\mathcal{V}(+\infty)$ sur $\ddot{\mathbf{R}}$ muni de sa topologie usuelle.

• Dans **R**, le filtre des complémentaires des parties bornées est le filtre induit sur **R** par le filtre $\mathcal{V}(\infty)$ sur $\dot{\mathbf{R}}$ muni de sa topologie usuelle. Ce filtre est moins fin que celui de l'exemple précédent.

• Soit A une partie non vide de E; l'ensemble $\mathcal{V}(A)$ des voisinages de A [TOPOLOGIE, 1.2.] est un filtre sur E. On peut remarquer que ce filtre est moins fin que le filtre $\mathcal{V}(a)$ pour chaque point a de A.

2.2 *Point adhérent à un filtre; filtre convergeant vers un point.* Soit a un point de E et $\mathcal{A}$ un filtre sur E. On dit que a est *adhérent* à $\mathcal{A}$ lorsque chaque élément de $\mathcal{A}$ a une intersection non vide avec chaque voisinage de a. On dit que $\mathcal{A}$ *converge vers* a lorsque $\mathcal{V}(a)$ est moins fin que $\mathcal{A}$, c'est-à-dire lorsque tout voisinage de a appartient à $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ converge vers a, alors a est adhérent à $\mathcal{A}$.

Soit A une partie non vide de E ; alors tout point de A est adhérent au filtre principal défini par A.

Dans un espace séparé, tout filtre converge vers au plus un point. En particulier $\mathcal{V}(a)$ converge vers a. Si un filtre converge vers un point; celui-ci est son unique point adhérent.

Exemples :

- Dans $\mathbf{R}$, le filtre des "voisinages à droite" de a, c'est-à-dire des parties incluant l'intersection d'un voisinage de a avec $]a\,;\,\rightarrow)$, converge vers a, qui est son unique point adhérent.

- Dans $\ddot{\mathbf{R}}$, les points adhérents au filtre des complémentaires des parties bornées sont $+\infty$ et $-\infty$.

3. Limites suivant des filtres.

3.1. *Définitions.* Les filtres permettent de définir une notion étendue de limite [LIMITE, 2.3].

Soient f une fonction d'un ensemble E dans un ensemble E', $\mathcal{A}$ un filtre sur E qui induise sur déf f un filtre $\mathcal{F}$, et $\mathcal{A}'$ un filtre sur E'. Nous dirons que f *converge selon le couple* $(\mathcal{A}\,;\,\mathcal{A}')$ lorsque l'image réciproque $f(Y)$ de tout élément Y du filtre $\mathcal{A}'$ est un élément de $\mathcal{F}$.

Exemple : La fonction $x \mapsto x + \sin \frac{1}{x}$ converge selon $\big(\mathcal{V}(0)\,;\mathcal{V}([-1\,;\,1])\big)$.

Dans le cas où, E' étant muni d'une topologie $\mathcal{O}'$, le filtre $\mathcal{A}'$ est l'ensemble des voisinages d'un point b de E', on dit que *b est limite de f suivant le filtre* $\mathcal{A}$ pour exprimer que f converge selon $\big(\mathcal{A}\,;\mathcal{V}(b)\big)$. Dès que la topologie $\mathcal{O}'$ est séparée, on est assuré de l'unicité d'une telle limite et on peut écrire $\lim\limits_{\mathcal{A}} f = b$.

Cette notion de limite englobe la notion classique définie dans les espaces topologiques [LIMITE, 2.2]. En effet, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$

sont respectivement les filtres des voisinages de a et de b dans $(E\ ;\ \mathcal{O})$ et $(E';\ \mathcal{O}')$ respectivement, une fonction f de E dans E' converge selon $(\mathcal{A}\ ;\ \mathcal{A}')$ ssi, relativement à $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$, b est limite de f en a.

On évitera cependant de parler de "la limite" et d'utiliser l'écriture $\lim\limits_{\mathcal{A}} f = \mathcal{A}'$ dans le cas général de convergence d'une fonction selon un couple de filtres quelconques. En effet, il n'y aurait plus alors unicité de la limite ; ainsi, par exemple, si f converge selon $(\mathcal{A}\ ;\ \mathcal{A}')$ et si $\mathcal{A}'_1$ est un filtre sur E' moins fin que $\mathcal{A}'$, alors f converge également selon $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'_1)$. Ainsi dans **R**, le filtre des voisinages d'un point a induit des filtres sur $\mathbf{R}\backslash\{a\}$, sur $]a; \rightarrow)$ et sur $(\leftarrow\ ; a[$, qu'on peut noter respectivement $\mathcal{V}_*(a)$, $\mathcal{V}_+(a)$ et $\mathcal{V}_-(a)$, ce qui permet de retrouver les notions usuellement désignées par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$, $\lim\limits_{a^+} f$ et $\lim\limits_{a^-} f$.

Exemple : Soit m la fonction mantisse : $x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$; cette fonction converge selon $(\mathcal{V}_-(5)\ ;\ \mathcal{V}_-(1))$, ce qui revient à dire que la mantisse de x tend vers 1 à gauche (ou par valeurs inférieures) quand x tend vers 5 à gauche. Il serait cependant très dangereux d'écrire, comme on a pu le voir dans certains ouvrages, $\lim\limits_{5^-} \mathrm{m} = 1^-$, ce qui laisserait penser que 1^- désigne un objet mathématique. Or on a aussi $\lim\limits_{5^-} \mathrm{m} = 1$; se permettrait-on d'écrire $1 = 1^-$?

D'autre part, si une fonction f converge selon un couple de filtres $(\mathcal{A}\ ;\ \mathcal{A}')$, elle converge aussi selon le couple $(\mathcal{A}_1\ ;\ \mathcal{A}')$ pour tout filtre $\mathcal{A}_1$ plus fin que $\mathcal{A}$, et aussi selon $(\mathcal{A}\ ;\ \mathcal{A}'_1)$ pour tout filtre $\mathcal{A}'_1$ moins fin que $\mathcal{A}'$.

3.2. *Limites de restrictions.* Gardons les notations de **3.1.** Soit une partie F de E telle que $\mathcal{A}$ induise un filtre sur $(\text{déf} f) \cap F$; alors, si f converge selon $(\mathcal{A}\ ;\ \mathcal{A}')$, la restriction de f à F converge selon $(\mathcal{A}\ ;\ \mathcal{A}')$.

Soit un ensemble fini $\{F_1,\ldots,F_n\}$ de parties de E dont E est la réunion et tel que $\mathcal{A}$ induise un filtre $\mathcal{A}_i$ sur chaque F_i. Alors l'ensemble des parties de E qui sont de la forme $X_1 \cup \ldots \cup X_n$, où, pour tout i, X_i est un élément de $\mathcal{A}_i$, n'est autre que $\mathcal{A}$. Il en résulte que si, pour tout i, $\mathcal{A}$ induit un filtre sur $(\text{déf} f) \cap F_i$, alors f converge selon $(\mathcal{A} ; \mathcal{A}')$ ssi les restrictions de f à chaque F_i convergent selon $(\mathcal{A} ; \mathcal{A}')$.

Exemple : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et a pour limite α ssi $(u_{3n})_{n \in \mathbf{N}}$, $(u_{3n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n \in \mathbf{N}}$ convergent et ont pour limite α.

La propriété précédente ne se généralise pas à une réunion infinie. Soit un ensemble infini I de parties F de E dont E est la réunion et tel que $\mathcal{A}$ induise sur chaque F un filtre noté $\mathcal{A}_F$. L'ensemble des parties de E qui sont de la forme $\bigsqcup_{F \in I} X_F$ où, pour tout F, X_F est un élément de $\mathcal{A}_F$, est bien un filtre, mais ce filtre est en général strictement plus fin que $\mathcal{A}$.

Exemple : Dans $\mathbf{R}^2$ il existe des parties qui ne sont pas un voisinage de $(0;0)$ et qui coupent toute droite passant par $(0;0)$ selon un voisinage de $(0;0)$ sur cette droite. C'est le cas de l'ensemble des $(x;y)$ tels que $y = 0$ ou $|y| \geqslant x^2$. Il en résulte l'existence d'applications f de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0;0\}$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\lim_{y \to 0} f(0;y) = 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \lim_{x \to 0} f(x;\lambda x) = 0$$

et qui n'ont pas pour limite 0 en $(0;0)$. C'est le cas de

$$(x;y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

3.3. *Limites à l'infini ; limites infinies.*

3.3.1. Dans $\mathbf{R}$, le filtre des complémentaires des parties majorées (resp. minorées) permet de donner un sens à l'expression "tend vers $+\infty$" (resp. "tend vers $-\infty$"), aussi bien pour l'argument que pour la valeur d'une fonction. Ce filtre est le filtre induit sur $\mathbf{R}$ par le filtre $\mathcal{V}(+\infty)$ (resp. $\mathcal{V}(-\infty)$) sur $\ddot{\mathbf{R}}$; il admet pour base de filtre l'ensemble des sections finissantes (resp. commençantes) non vides de $\mathbf{R}$, mais aussi l'ensemble des sections finissantes (resp. commençantes) ouvertes, ou encore $\{[n ; \rightarrow) ; n \in \mathbf{N}\}$ (resp. $\{(\leftarrow ; -n] ; n \in \mathbf{N}\}$).

3.3.2. Plus généralement, soit E un ensemble totalement ordonné. Le filtre dont les sections finissantes (resp. commençantes) non vides de E constituent une base permet de définir l'expression "tend vers $+\infty$" (resp. "tend vers $-\infty$"). Dans le cas particulier où E a un plus grand (resp. plus petit) élément ω, ce filtre n'est autre que l'ensemble des voisinages de ω pour la topologie de l'ordre [TOPOLOGIE, 3.2].

3.3.3. Soit E un espace métrique non borné; les complémentaires des parties bornées de E constituent un filtre qui permet de donner un sens aux expressions "à l'infini" et "tend vers l'infini". Ce filtre admet pour base l'ensemble des complémentaires des boules ouvertes, ainsi que l'ensemble des complémentaires des boules fermées. Dans le cas de **R**, ce filtre n'est autre que le filtre induit sur **R** par le filtre des voisinages de ∞ dans $\dot{\mathbf{R}}$.

Exemples : En s'appuyant sur le filtre des complémentaires des parties bornées de ces différents espaces métriques, on peut écrire :

- dans **R** : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x-1}{x-1} = 3$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x-1}{x-1} = \infty$; $\lim\limits_{n \to \infty} n(-1)^n = \infty$;
- dans **C** : toute fonction polynomiale non constante a pour limite ∞ en ∞ ;
- dans $\mathbf{R}^2$: $\lim\limits_{(x;y) \to \infty} (x^4+y^2) = +\infty$;
- dans un espace métrique non borné quelconque : $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{d}(a;x) = +\infty$

3.4. *Filtres et complétions.* Dans un espace topologique $(E;\mathcal{O})$, soit $\mathcal{A}$ un filtre dont l'intersection de tous les éléments est vide. Si on a construit l'ensemble E' en adjoignant à E un élément ω, il existe sur E' une unique topologie $\mathcal{O}'$ dont $\mathcal{O}$ soit la topologie induite sur E, et telle que $\mathcal{A}$ soit le filtre induit sur E par le filtre des voisinages de ω dans $(E';\mathcal{O}')$. L'utilisation du filtre $\mathcal{A}$ permet donc de rendre compte des mêmes phénomènes que celle de l'espace topologique $(E';\mathcal{O}')$ en économisant le recours à un ensemble autre que E. C'est ainsi qu'on peut utiliser la notation "∞" dans **R** par référence au filtre des complémentaires des parties bornées (comme cela est fait ci-dessus) aussi bien que par référence au compactifié d'Aleksandrov $\dot{\mathbf{R}}$, et qu'on peut y utiliser les notations "$+\infty$" et "$-\infty$" en référence aux filtres des complémentaires des parties majorées et des complémentaires des parties minorées aussi bien qu'en référence à la droite achevée $\ddot{\mathbf{R}}$, le mélange de ces deux types de notations ne faisant d'ailleurs pas problème quand on se réfère aux filtres.

3.5. *Exemples d'utilisation de filtres.*

3.5.1. Intégrale de Riemann. Soit $[a; b]$ un segment de $\mathbf{R}$. Soit $\triangle$ l'ensemble des couples $(\omega ; \theta)$ où ω est un partage de $[a; b]$, c'est-à-dire une suite finie $(\omega_q)_{0 \leqslant q \leqslant n}$ strictement croissante telle que $\omega_0 = a$ et $\omega_n = b$, et θ une suite finie $(\theta_q)_{1 \leqslant q \leqslant n}$ telle que, pour chaque q, le réel θ_q appartienne à $[\omega_{q-1} ; \omega_q]$. Pour tout réel strictement positif ε notons V_ε l'ensemble des couples $(\omega ; \theta)$ qui vérifient $\sup_q(\omega_q - \omega_{q-1}) \leqslant \varepsilon$; soit $\mathcal{A}$ le filtre sur $\triangle$ dont l'ensemble des V_ε constitue une base.

Soit d'autre part f une application de $[a ; b]$ dans un espace vectoriel topologique séparé E (par exemple $\mathbf{R}$). A tout élément $(\omega ; \theta)$ de $\triangle$ on associe la somme de Riemann $\mathrm{R}_{\omega,\theta}(f)$, égale à $\sum_{q=1}^{n} (\omega_q - \omega_{q-1}) f(\theta_q)$.

Alors, f est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$ ssi l'application $(\omega ; \theta) \mapsto \mathrm{R}_{\omega,\theta}(f)$ admet une limite I suivant le filtre $\mathcal{A}$ (limite nécessairement unique, puisque E est supposé séparé). On a alors : $I = \int_a^b f.$

En remplaçant le filtre $\mathcal{A}$ par d'autres filtres sur $\triangle$, on pourrait aboutir à d'autres notions d'intégrabilité sur $[a; b]$.

3.5.2. Familles sommables. Soit E un groupe commutatif topologique [TOPOLOGIE, 4.1], dont l'opération est notée $+$.

Soit I un ensemble infini et $\mathfrak{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I. L'ensemble des sections finissantes de $\mathfrak{P}_f(I)$ pour la relation d'inclusion est une base d'un filtre $\mathcal{A}$ sur $\mathfrak{P}_f(I)$. A toute famille $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E, notée aussi x, on associe l'application σ_x de $\mathfrak{P}_f(I)$ dans E qui à toute partie finie J fait corresdre $\sum_{\alpha \in J} x_\alpha$.

On dit que la famille x est *sommable* et admet pour *somme* l'élément s de E lorsque s est limite de σ_x suivant le filtre $\mathcal{A}$, ce qui s'écrit :

$$\forall V \in \mathcal{V}(s)\ ,\ \exists J_0 \in \mathcal{P}_f(I)\ ,\ \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad \left(J \supset J_0 \Rightarrow \sum_{\alpha \in J} x_\alpha \in V\right)$$

Dans le cas où E est **R** ou **C** et où $I = \mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^p$, la famille x est sommable ssi la famille de terme général $|x_\alpha|$ est sommable. En particulier, si $I = \mathbf{N}$, la sommabilité d'une famille revient à la convergence absolue de la série associée. En revanche la notion de convergence d'une série s'obtient en remplaçant dans la définition ci-dessus de la sommabilité l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbf{N})$ par l'ensemble des sections commençantes finies non vides de **N**, l'application σ_x par sa restriction à cet ensemble, et le filtre $\mathcal{A}$ par le filtre qu'il induit sur cet ensemble, ce qui revient à utiliser l'ensemble **N**, l'application $n \mapsto \sum_{p=0}^{n} x_p$ et le filtre de Fréchet.

filtrant, adj.

Ensembles filtrants. Soit $(I\,;\prec)$ un ensemble ordonné ; on dit que I est *filtrant* lorsque toute paire de I est majorée, i.e. : pour tous a, b de I il existe c dans I tel que $a \prec c$ et $b \prec c$.

Exemples : Tout ensemble ordonné ayant un plus grand élément est filtrant. Tout treillis (et, en particulier, tout ensemble totalement ordonné) est filtrant.

Soit $(I\,;\prec)$ un ensemble ordonné filtrant ; la relation $\prec$ peut toujours donner naissance à un ordre réflexif [ORDONNÉ, 3.1.] permettant de définir sur I des sections finissantes fermées. L'ensemble de telles sections est une base de filtre ; le filtre qu'elle engendre est dit *associé* à $(I\,;\prec)$. C'est une généralisation du filtre de Fréchet.

Remarque : on pourrait étendre à ce type de filtre l'expression "tend vers $+\infty$".

Filets. On appelle *filet* sur un ensemble E toute famille $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ indexée par un ensemble filtrant. C'est une généralisation de la notion de suite. Quand $\mathcal{A}'$ est un filtre sur E, on dit que le filet $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ *converge suivant* $\mathcal{A}'$ lorsqu'il converge selon ($\mathcal{A}$; $\mathcal{A}'$), $\mathcal{A}$ étant le filtre associé à I. Ainsi, si E est un espace topologique, le filet $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge vers le point a de E ssi, pour tout voisinage V de a, il existe un élément α_0 de I tel que

$$\forall \alpha \in I \quad \alpha_0 \prec \alpha \Rightarrow x_\alpha \in V$$

ordonné, part. passé et adj.

Us. : Qualifie tout ce qui résulte d'un ordre, dans les divers sens du mot (la retraite qu'on a ordonnée peut fort bien n'être pas du tout ordonnée).

Math. : S'emploie exclusivement pour qualifier des ensembles munis d'une relation d'ordre.

1. Remarques préliminaires.

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{R}$ sera une relation binaire dans un ensemble E. Pour la définir, nous aurons recours, à diverses reprises, à la notation $(x, y) \mapsto \mathcal{R}\,(x, y)$, s'interprétant comme une application de $E \times E$ dans { vrai, faux }.

Bien que les remarques présentées ici aient un caractère général, c'est dans le cas des relations de préordre ou d'ordre qu'elles offrent le plus d'intérêt.

1.1. Toute relation $\mathcal{R}$ peut donner naissance à une relation réflexive (resp. antiréflexive) dans E : il suffit d'adjoindre (resp. d'enlever) au graphe de $\mathcal{R}$ les éléments de l'ensemble diagonal de $E \times E$. Cette "retouche" permet en général une plus grande commodité du discours.

1.2. Des éléments x, y de E sont dits *comparables pour* $\mathcal{R}$ lorsque $\mathcal{R}\,(x, y) \vee \mathcal{R}\,(y,x)$. Une relation $\mathcal{R}$ est dite *totale* lorsque deux éléments distincts quelconques de E sont comparables pour $\mathcal{R}$. On dit parfois qu'une relation est *partielle* quand on veut insister sur le fait qu'elle n'est pas totale.

Rem. On rencontre aussi la définition suivante : $\mathcal{R}$ est dite totale lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a $\mathcal{R}\,(x, y) \vee \mathcal{R}\,(y,x)$. Toutefois, avec cette définition, aucune relation non réflexive ne pourrait être totale ; c'est pourquoi la définition donnée ci-dessus paraît préférable.

1.3. On rappelle que la relation réciproque d'une relation $\mathcal{R}$, souvent notée $\mathcal{R}^{-1}$, est la relation définie par

$$\forall x \quad \forall y \quad \mathcal{R}^{-1}(x, y) \iff \mathcal{R}(y, x)$$

Il est clair que $(\mathcal{R}^{-1})^{-1}$ n'est autre que $\mathcal{R}$ et que, si $\mathcal{R}$ est totale (resp. réflexive, resp. antiréflexive), $\mathcal{R}^{-1}$ l'est également.

1.4. On rappelle enfin qu'à toute relation $\mathcal{R}$ peut être associée sa négation, souvent notée (non $\mathcal{R}$); il est clair que (non (non $\mathcal{R}$)) n'est autre que $\mathcal{R}$. Mais ici, si l'une des deux relations associées est totale, l'autre ne peut l'être que si la première est antisymétrique, et alors la seconde l'est également; si l'une des deux est réflexive (resp. antiréflexive), l'autre est antiréflexive (resp. réflexive).

2. Ensembles préordonnés.

2.1. *Relations de préordre.* On peut considérer que le trait essentiel des relations de préordre est la transitivité. Mais, supposant transitive une relation $\mathcal{R}$, s'il existe des éléments x et y pour lesquels on a simultanément $\mathcal{R}(x, y)$ et $\mathcal{R}(y, x)$, pour ces mêmes éléments on a aussi $\mathcal{R}(x, x)$ et $\mathcal{R}(y, y)$: $\mathcal{R}$ ne peut donc, en général, donner naissance à une relation antiréflexive [**1.1**] sans qu'on sacrifie la transitivité. Au contraire, rien ne s'oppose à ce que $\mathcal{R}$ donne naissance à une relation réflexive, aussi a-t-on l'habitude d'inclure la réflexivité dans la définition du préordre.

Définition : On appelle *relation de préordre* (ou, par abréviation *préordre*) toute relation transitive et réflexive.

Exemples de préordres :

- toute relation d'équivalence, toute relation d'ordre réflexive (v. ci-dessous **3.1**);
- la relation de divisibilité dans $\mathbf{Z}$;
- dans l'espace usuel, si l'on s'astreint à ne parler de parallélisme que d'un sous-espace vers un sous-espace de dimension au moins égale [AFFINE, **1.6**] (par exemple d'une droite vers une droite ou un plan, ou d'un plan vers un plan, mais en évitant le parallélisme d'un plan vers une droite), ce parallélisme peut être défini comme une relation de préordre dans l'ensemble des sous-espaces;
- dans $\mathbf{C}$, la relation $(z, z') \mapsto |z| \leqslant |z'|$.

Parmi les trois derniers exemples, seule la dernière relation est totale.

2.2. Si $\mathcal{R}$ est une relation de préordre définie sur un ensemble E, $\mathcal{R}^{-1}$ est également un préordre, total ssi $\mathcal{R}$ est totale **[1.3]**, mais (non $\mathcal{R}$) n'est pas un préordre **[1.4]**, sauf si E est vide.

2.3. Quand un ensemble E est muni d'une relation de préordre $\mathcal{R}$, on dit que le couple $(E, \mathcal{R})$ est un *ensemble préordonné*; si la relation $\mathcal{R}$ est totale, on dit que ce couple est un *ensemble totalement préordonné*. Naturellement, un même ensemble E peut être muni de plusieurs préordres $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, ..., donnant lieu à plusieurs ensembles préordonnés $(E, \mathcal{R})$, $(E, \mathcal{S})$, ...

Par exemple un ensemble de polynomes peut être préordonné soit par la relation de divisibilité, soit par la relation

$$(P, Q) \mapsto (\text{degré de } P \leqslant \text{degré de } Q)$$

soit encore par d'autres relations.

3. Ensembles ordonnés.

3.1. *Relations d'ordre.* L'habitude la plus répandue consiste à définir les relations d'ordre comme les relations transitives, antisymétriques et réflexives. Mais on rencontre souvent le mot "ordre", en particulier dans l'expression "ordre strict", à propos de relations transitives et antisymétriques, mais non réflexives, ce qui est pour le moins contradictoire.

Nous appellerons ici *relation d'ordre* toute relation transitive et antisymétrique. Cette définition, compatible avec tous les usages, permet d'étendre facilement à toute relation d'ordre $\mathcal{R}$ les définitions et les démonstrations que l'on fait classiquement dans les ensembles ordonnés. On utilise souvent pour cela la relation réflexive ou la relation antiréflexive associées à $\mathcal{R}$, lesquelles sont encore des relations d'ordre.

Les relations d'ordre réflexives étant les plus utilisées en mathématiques, on peut en général sans inconvénient omettre l'adjectif "réflexive". Mais alors, il devient très malencontreux d'appeler "ordre strict" une relation d'ordre antiréflexive, vu qu'il ne s'agit plus d'un ordre, au sens étroit de relation réflexive qui vient d'être rappelé.

Exemples de relations d'ordre (réflexives) :

- la relation de divisibilité dans $\mathbf{N}$;
- l'inclusion dans l'ensemble des parties d'un ensemble E;
- la relation $\leqslant$ dans $\mathbf{R}$.

De ces trois relations, seule en général la dernière est totale (toutefois la deuxième l'est aussi si le cardinal de E est 0 ou 1).

Exemples de relations d'ordre antiréflexives :

- la relation $<$ dans $\mathbf{R}$;
- la relation "être située en amont de" dans l'ensemble des villes arrosées par un même fleuve;
- la relation "être située en amont de" dans l'ensemble des villes arrosées par un fleuve ou l'un de ses affluents.

Seules les deux premières de ces relations sont totales.

3.2. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre,

- $\mathcal{R}^{-1}$ est également une relation d'ordre, totale si $\mathcal{R}$ est totale, et réflexive (resp. antiréflexive) si $\mathcal{R}$ est réflexive (resp. antiréflexive) [**1.3**]; chacun des deux ordres est dit, relativement à l'autre, ordre *opposé* ou ordre *dual* [DUALITÉ, **1.1**]; le dual d'un ordre noté $\prec$ est couramment noté $\succ$;

- (non $\mathcal{R}$) n'est une relation d'ordre que si la relation $\mathcal{R}$ est totale, auquel cas (non $\mathcal{R}$) l'est également; si l'une est réflexive (resp. antiréflexive), l'autre est antiréflexive (resp. réflexive) [**1.4**]; l'exemple le plus courant est celui de $\leqslant$ et $>$ dans $\mathbf{R}$.

Remarque. L'habitude qu'ont prise certains de dire "x n'est pas plus grand que y" pour exprimer que $x \leqslant y$ n'est pas à recommander; outre que cette tournure est assez artificielle, elle tombe en défaut si l'ordre n'est pas total : du fait que Châlons-sur-Marne n'est pas en aval de Bar-sur-Aube, on ne peut inférer que la première ville est en amont de la seconde ou confondue avec elle !

3.3. Quand un ensemble E est muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$, on dit que le couple $(E, \mathcal{R})$ est un *ensemble ordonné*; si cette relation $\mathcal{R}$ est totale, le couple $(E, \mathcal{R})$ est dit *ensemble totalement ordonné*, ou encore *chaîne* (dans le cas contraire, on dit parfois *partiellement ordonné*). Naturellement un ensemble E peut être muni de plusieurs relations d'ordre $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, ... donnant lieu à plusieurs ensembles ordonnés $(E, \mathcal{R})$, $(E, \mathcal{S})$, ...

Exemple : les ensembles ordonnés $(\mathbf{N}, \leqslant)$ et $(\mathbf{N}$, divise$)$.

3.4. *Ordre associé à un préordre.* Dans tout ensemble préordonné $(E, \mathcal{T})$ la relation $\mathcal{E}$ définie par

$$\mathcal{E}(x, y) \iff (\mathcal{T}(x, y) \wedge \mathcal{T}(y, x))$$

est une relation d'équivalence compatible avec $\mathcal{T}$. Notant $\dot{x}$ la classe de x, considérons dans l'ensemble-quotient $E/\mathcal{E}$ la relation $\dot{\mathcal{T}}$ définie par $\dot{\mathcal{T}}(\dot{x}, \dot{y}) \iff \mathcal{T}(x, y)$. On vérifie que $\dot{\mathcal{T}}$ est une relation d'ordre (réflexive), qui se trouve ainsi canoniquement associée au préordre $\mathcal{T}$.

Exemples. Reprenons certains des exemples de **2.1** et **3.1** :

- au préordre "divisibilité dans **Z**" est associé l'ordre "divisibilité dans **N**" (la classe d'entiers $\{x, -x\}$ est alors assimilée au naturel $|x|$);
- au parallélisme (tel qu'il a été défini) des sous-espaces affines d'un espace affine E, de direction $\vec{E}$, est associée l'inclusion, dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$ (la classe des espaces affines de même direction est alors assimilée à cette direction).

3.5. *Préordres associés à un ordre (réflexif).* Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F muni d'un ordre $\mathcal{S}$; la relation $\mathcal{R}$ définie dans E par $\mathcal{R}(x, y) \iff \mathcal{S}(f(x), f(y))$ est un préordre qu'on peut appeler image réciproque de l'ordre $\mathcal{S}$ par l'application f ; lorsque f est injective, ce préordre est un ordre.

Exemples :

- en **3.4**, $\mathcal{R}$ est l'image réciproque de $\dot{\mathcal{R}}$ par la surjection canonique $x \mapsto \dot{x}$;
- dans l'écriture des suites on adopte couramment pour ordre de succession des termes l'image réciproque de l'ordre des indices ; de même, on a l'habitude d'écrire les monomes d'un polynome de degré n, supposé réduit, dans un ordre qui est l'image réciproque soit de l'ordre usuel du segment $[0; n]$ de **N**, soit de l'ordre dual : c'est ce qu'on appelle "*ordonner*" le polynome selon les puissances croissantes ou selon les puissances décroissantes.

3.6. *Ordre-produit.* Soit $(E_i, \mathcal{R}_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles ordonnés, et E l'ensemble produit de la famille (E_i). Pour chaque élément a de E notons a_j son j-ième projeté, élément de E_j. Le produit E peut être ordonné par la relation

$$(a, b) \mapsto (\forall j \in I \quad \mathcal{R}_j(a_j, b_j)),$$

dite *ordre-produit.* Cet ordre est partiel, même si toutes les relations $\mathcal{R}_i$ sont totales (hormis le cas, sans grand intérêt, où tous les E_i, sauf peut-être un, se réduiraient à des singletons).

Exemples :

• Supposons que $I = \{1; 2; 3\}$ et que tous les $(E_i, \mathcal{R}_i)$ sont égaux à $(\mathbf{N}, \leqslant)$: le couple de triplets ((6; 4; 2), (9; 5; 2)) appartient au graphe de l'ordre-produit; par contre (6; 4; 2) n'est pas comparable à (6; 3; 4).

• Dans l'ensemble $\mathbf{R}^A$ des applications d'un ensemble quelconque A dans $\mathbf{R}$, la relation, notée en général $\leqslant$, définie par $(f \leqslant g) \iff (\forall x \in A \quad f(x) \leqslant g(x))$, n'est autre que l'ordre-produit dans $\mathbf{R}^A$; on peut d'ailleurs dans cet exemple remplacer $\mathbf{R}$ par un ensemble ordonné quelconque.

De même $(f < g) \iff (\forall x \in A \quad f(x) < g(x))$; mais on prendra garde qu'on peut avoir $f \neq g$ et $f \leqslant g$ sans avoir $f < g$.

4. Vocabulaire des ensembles ordonnés.

Dans tout ce paragraphe, E sera un ensemble ordonné par une relation $\mathcal{R}$.

4.1. Vocables généraux.

4.1.1. On dit qu'un élément x de E *précède* un élément y de E (pour l'ordre $\mathcal{R}$) lorsque le couple (x, y) appartient au graphe de $\mathcal{R}$; si, de plus, x et y sont distincts, on dit que x *précède strictement* y.

Exemple : dans $(\mathbf{N}, \leqslant)$, 0 précède 5; dans ($\mathbf{N}$, divise), 5 précède 0.

Lorsque $\mathcal{R}$ est réflexive, le mot "précède" doit évidemment être pris au sens large : ainsi, dans $(\mathbf{N}, \leqslant)$ ou dans ($\mathbf{N}$, divise), 5 précède 5; on emploie aussi, avec la même convention, la locution "est *inférieur* à". Enfin il est équivalent de dire que x est inférieur à y ou que y est *supérieur* à x; lorsque de plus x et y sont distincts, on dit que x est *strictement inférieur* à y, ou que y est *strictement supérieur* à x.

Il faut reconnaître que cet usage, qui appartient au vocabulaire technique mathématique, n'est pas celui de la langue courante; on ne s'étonnera donc pas de la persistance de locutions telles que "inférieur ou égal" (pour "inférieur") et "plus petit que" (pour "strictement inférieur à"). Les locutions "au plus égal" (pour "inférieur") et "au moins égal" (pour "supérieur") ont l'avantage de ne présenter aucune ambiguïté.

4.1.2. On dit qu'un élément z de E est *compris* entre x et y (voire, parfois, entre y et x) lorsque x précède z, lequel précède y; si, de plus, z est distinct de x et de y, on dit que z est *strictement compris* entre x et y.

4.1.3. On dit que y *couvre* x lorsque x précède strictement y et qu'aucun élément de E n'est strictement compris entre x et y.

L'ensemble des couples (x, y) tels que y couvre x est le graphe d'une relation antisymétrique et antiréflexive plus fine que $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire que ce graphe est inclus dans celui de $\mathcal{R}$). Inversement, à partir d'une telle relation "couvre", on peut toujours construire une relation d'ordre antiréflexive $\mathcal{R}'$ par le procédé suivant : x précède y pour $\mathcal{R}'$ ssi, x étant distinct de y, il existe une suite finie $z_0, z_1, \ldots, z_k$ telle que $z_0 = x$, $z_k = y$ et, pour tout i de $[1; k]$, z_i couvre z_{i-1}. La relation $\mathcal{R}'$ est toujours plus fine que la relation $\mathcal{R}$ dont on est parti; dans certains cas elle est identique à l'ordre antiréflexif associé à $\mathcal{R}$.

Exemples :

- Dans $(\mathbf{Z}, \leqslant)$, tout élément x couvre $x-1$, et la relation $\mathcal{R}'$ n'est autre que $<$.
- Dans $(\mathbf{Q}, \leqslant)$ ou $(\mathbf{R}, \leqslant)$, aucun élément n'en couvre un autre et la relation $\mathcal{R}'$ a pour graphe ϕ.
- Dans (**N**, divise), 30 couvre 6, 10 et 15, mais ne couvre pas 3; l'élément 0 ne couvre aucun élément, bien que tout élément de **N** le précède. Pour la relation $\mathcal{R}'$, 5 précède 30 mais ne précède pas 0.
- Dans $(\mathbf{N}_*$, divise$)$, $\mathcal{R}'$ est la relation "divise strictement".

4.2. *Eléments jouant un rôle particulier.* A est ici une partie de l'ensemble E ordonné par $\mathcal{R}$.

4.2.1. Minorants. On dit qu'un élément de E est un *minorant* de A lorsqu'il précède tous les éléments de A ; lorsque A admet au moins un minorant, on dit que A est *minoré.*

Ex. : Dans $(\mathbf{R}, \leqslant)$ n'importe quel réel négatif est un minorant de $\mathbf{N}$; au contraire $\mathbf{Z}$ n'est pas minoré.

4.2.2. Eléments minimaux. On dit qu'un élément de A est un *élément minimal* de A lorsqu'il n'est précédé par aucun autre élément de A.

Ex. : Partant de $(\mathbf{R}, \leqslant)$, on suppose $\mathbf{R}^2$ ordonné par l'ordre-produit; dans le demi-plan P défini par $0 \leqslant x+y$, les points de la droite $x+y = 0$ sont les éléments minimaux.

4.2.3. Plus petit élément. Il existe dans A au plus un minorant de A ; s'il y en a un, on l'appelle le *plus petit élément* de A.

Si une partie A possède un plus petit élément, celui-ci est aussi un élément minimal de A, et c'est le seul. Lorsque la relation $\mathcal{R}$ est totale, toute partie A possède au plus un élément minimal; si elle en possède un, il est le seul et c'est aussi le plus petit élément de A.

Exemples :

- Soit I l'ensemble $\{ x;\ x \in \mathbf{R}^+ /\ 2 \leqslant x^2 \leqslant 4 \}$; I admet $\sqrt{2}$ pour plus petit élément, tandis que $I \cap \mathbf{Q}$ n'a pas de plus petit élément.
- Le demi-plan P de l'exemple précédent n'a pas non plus de plus petit élément.

4.2.4. Majorants, éléments maximaux, plus grand élément. En remplaçant dans les définitions ci-dessus "précède" par "est précédé par", on obtient les définitions des termes *majorant, majoré, élément maximal, plus grand élément.* D'autre part, toute partie qui est à la fois minorée et majorée est dite *bornée.*

En reprenant les exemples ci-dessus, on obtient alors :

- ni $\mathbf{N}$, ni $\mathbf{Z}$ ne sont majorés dans $(\mathbf{R}, \leqslant)$;
- le demi-plan P rencontré en 4.2.2. n'admet aucun élément maximal (et les points de la droite $x+y = 0$ ne sont pas non plus des éléments maximaux du demi-plan complémentaire $x+y < 0$, puisqu'ils ne lui appartiennent pas);
- les parties I et $I \cap \mathbf{Q}$ admettent 2 pour plus grand élément;
- dans les exemples qui viennent d'être donnés, les seules parties bornées sont I et $I \cap \mathbf{Q}$.

Autres exemples :

• ($\mathbf{N}$, $\leqslant$) admet 0 pour plus petit élément et n'admet pas de plus grand élément; avec l'ordre dual, ($\mathbf{N}$, $\geqslant$) admet 0 pour plus grand élément et n'admet pas de plus petit élément;

• ($\mathbf{N}$, divise) admet 1 pour plus petit élément et 0 pour plus grand élément.

4.2.5. Borne inférieure, borne supérieure. Si, dans l'ensemble des minorants (resp. majorants) d'une partie A de E, il existe un plus grand (resp. plus petit) élément, cet élément est appelé la *borne inférieure* (resp. *borne supérieure*) de A dans E, et noté inf A (resp. sup A).

Remarques :

• Si A possède un plus petit (resp. plus grand) élément, celui-ci est lui-même la borne inférieure (resp. supérieure) de A. Réciproquement, si A admet une borne inférieure (resp. supérieure) qui appartient à A, celle-ci est le plus petit (resp. plus grand) élément de A.

• La terminologie usuelle qui vient d'être définie n'est pas à l'abri de tout reproche : une partie peut être bornée sans avoir de borne inférieure ou de borne supérieure.

Exemples : Si l'on reprend les exemples de *4.2.3*, $\sup I = \sup I \cap \mathbf{Q} = 2$. Dans $\mathbf{R}$, I et $I \cap \mathbf{Q}$ admettent $\sqrt{2}$ pour borne inférieure, mais $I \cap \mathbf{Q}$ n'a pas de borne inférieure dans $\mathbf{Q}$, bien que ce soit une partie bornée de $\mathbf{Q}$.

4.2.6. Atomes. On appelle *atomes* (ou, parfois, *points*) d'un ensemble ordonné possédant un plus petit élément les éléments qui couvrent celui-ci [TREILLIS, **1.4**]; ce sont les éléments minimaux de l'ensemble privé de son plus petit élément.

Exemple : Dans ($\mathbf{N}$, divise) les atomes sont les naturels premiers; dans ($\mathbf{N}$, $\leqslant$) le seul atome est 1; il n'y a pas d'atome dans ($\mathbf{R}^+$, $\leqslant$).

4.3. *Intervalles.*

Bien que ce mot ait eu, et ait encore pour certains, des sens plus restreints, nous adopterons ici la définition la plus large.

4.3.1. Définition. Dans un ensemble ordonné (E, $\mathcal{R}$), on appelle *intervalle* de E toute partie I de E telle que tout élément de E compris entre des éléments de I soit lui-même élément de I.

Cette définition permet d'englober parmi les intervalles les *sections commençantes* (resp. *finissantes*) de E, c'est-à-dire les parties I de E telles que tout élément de E inférieur (resp. supérieur) à un élément de I soit lui-même élément de I.

On vérifie que :

- toute réunion de sections commençantes (resp. finissantes) est une section commençante (resp. finissante);
- toute intersection de sections commençantes (resp. finissantes) est une section commençante (resp. finissante); plus généralement, toute intersection d'intervalles est un intervalle;
- tout intervalle peut être obtenu comme intersection d'une section commençante et d'une section finissante (et même de façon unique si l'ordre est total).

4.3.2. Parmi les intervalles d'un ensemble E muni d'un ordre réflexif $\prec$, on peut citer :

- la partie pleine E, qui est évidemment une section commençante et une section finissante;
- la partie vide, qui possède, en raison de la définition adoptée ici, la même propriété;
- pour chaque élément a de E, les parties

$\{x\,;\, x \in E \,/\, x \prec a\}$, notée $(\leftarrow, a]$

$\{x\,;\, x \in E \,/\, x \prec a \text{ et } x \neq a\}$, notée $(\leftarrow, a[$

qui sont appelées respectivement *section commençante fermée*, et *section commençante ouverte*, admettant a pour *extrémité*; on a un vocabulaire analogue pour les sections finissantes

$\{x\,;\, x \in E \,/\, a \prec x\}$, notée $[a, \rightarrow)$

$\{x\,;\, x \in E \,/\, a \prec x \text{ et } a \neq x\}$, notée $]a, \rightarrow)$;

- pour tous éléments a et b de E, les parties

$\{x\,;\, x \in E \,/\, a \prec x \prec b\}$, notée $[a, b]$

$\{x\,;\, x \in E \,/\, a \prec x \prec b \text{ et } a \neq x \text{ et } x \neq b\}$, notée $]a, b[$

$\{x\,;\, x \in E \,/\, a \prec x \prec b \text{ et } x \neq b\}$, notée $[a, b[$

$\{x\,;\, x \in E \,/\, a \prec x \prec b \text{ et } a \neq x\}$, notée $]a, b]$

appelées respectivement *intervalle fermé, intervalle ouvert, intervalle semi-ouvert à droite, intervalle semi-ouvert à gauche,* admettant a et b pour *extrémités*; ces intervalles sont vides dès que a ne précède pas b.

Remarques :

• Dans ces notations, la virgule est souvent remplacée par le point et virgule quand il y a risque de confusion avec la virgule de la notation décimale.

• En général ces notations sont suffisamment éclairées par le contexte ; en cas de doute sur l'ensemble E considéré, ou sur la relation d'ordre $\preccurlyeq$ ou sur les deux, il conviendrait évidemment de le lever, par exemple au moyen d'indices.

• On emploie parfois le terme *segment* avec le sens d'intervalle fermé, mais cela ne coïncide pas dans tous les cas avec la notion de segment dans un espace affine.

4.3.3. Conforme à l'idée courante d'intervalle, le vocabulaire de *4.3.2.* est bien adapté à l'ensemble **R**, muni de l'ordre usuel $\leqslant$ et de la topologie qui en découle. En effet, tout intervalle de **R** appartient à l'un des dix types signalés, et (sauf le vide) à un seulement ; de plus, tout intervalle autre que les parties vide et pleine admet une (ou deux) extrémité(s), bien déterminée(s), qui coïncide(nt) avec sa borne inférieure, ou sa borne supérieure (ou les deux).

Toutefois, aucune de ces propriétés n'est universelle, et, dès que l'on quitte **R**, les contre-exemples abondent.

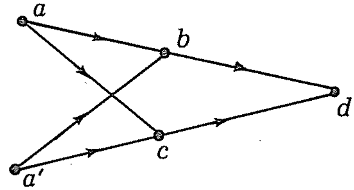
• Un même intervalle non vide peut appartenir à plusieurs des types énumérés. Ainsi, dans ($\mathbf{N}$, $\leqslant$), l'intervalle $[0\,;\,5[$ peut aussi s'écrire $[0\,;4]$ ou $(-\,;\,5[$ ou $(-\,;\,4]$, et la partie pleine est aussi $[0\,;\,-)$. Dans le treillis des diviseurs de 30, la partie pleine peut s'écrire $[1\,;\,-)$ ou $(-\,;\,30]$ ou $[1\,;\,30]$.

• L'ensemble $\{x;x \in \mathbf{D} \,/\, 1 \leqslant 3x\}$ est une section finissante de **D**, mais n'admet pas d'extrémité ni de borne inférieure dans **D** ; de même l'ensemble $\{x;\, x \in \mathbf{Q}^+ \,/\, 2 \leqslant x^2 \leqslant 3\}$ est un intervalle de **Q** mais n'admet ni extrémités ni bornes dans **Q**.

• Dans **Z**, tout intervalle, sauf la partie pleine, admet au moins une extrémité, mais elle n'est pas déterminée de façon unique et ne coïncide pas nécessairement avec une borne ; ainsi $]-3\,;\,7[\; = [-2\,;\,7[\; = \;]-3\,;\,6] = [-2\,;\,6]$; les bornes sont -2 et 6 ; -3 et 7 peuvent être des extrémités, mais non des bornes.

• Dans le treillis des diviseurs de 30, l'ensemble $\{2;6;10;15;30\}$, bien qu'il soit une section finissante, n'a pas d'extrémité inférieure ; sa borne inférieure, qui est 1, ne saurait jouer ce rôle.

• Dans l'ensemble ordonné ci-contre, la partie $\{b, c\}$ est un intervalle, qui peut être noté à volonté $]a, d[$ ou $]a', d[$; elle a donc deux extrémités inférieures possibles, mais pas de borne inférieure.



4.3.4. Dans tout ensemble E totalement ordonné l'ensemble des intervalles ouverts introduits en *4.3.2.* permet de construire une topologie $\mathcal{T}$ dite topologie de l'ordre [TOPOLOGIE , **3.2.**]. Or, ceux des ouverts de $\mathcal{T}$ qui sont des intervalles de E n'ont pas nécessairement d'extrémités dans E ; nous appellerons donc *intervalles ouverts* (ou, en particulier, *sections ouvertes*) les parties de E qui sont à la fois des intervalles et des ouverts de $(E, \mathcal{T})$. Les intervalles ouverts introduits en *4.3.2.* en sont des cas particuliers. On remarquera que la topologie engendrée par la totalité des intervalles ouverts (au sens présent) n'est autre que $\mathcal{T}$.

De même nous appellerons *intervalles fermés* les parties de E qui sont à la fois des intervalles et des fermés de $(E, \mathcal{T})$.

Cette acception élargie permet de dire que $\{x ; x \in \mathbf{Q}^+ / 2 \leqslant x^2 \leqslant 3\}$ est un intervalle ouvert de $\mathbf{Q}$, et aussi que c'est un intervalle fermé de $\mathbf{Q}$. C'est d'ailleurs la trace sur $\mathbf{Q}$ aussi bien de l'intervalle ouvert $]\sqrt{6}, \sqrt{3}[$ que de l'intervalle fermé $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ de $\mathbf{R}$.

De même $\{x ; x \in \mathbf{D} / 1 \leqslant 3x\}$ est une section finissante à la fois ouverte et fermée de $\mathbf{D}$. C'est la trace sur $\mathbf{D}$ aussi bien de la section finissante ouverte $]\,1/3, \rightarrow)$ que de la section finissante fermée $[1/3, \rightarrow)$ de $\mathbf{Q}$.

C'est par une démarche analogue qu'on écrit souvent les deux types de sections par exemple finissantes de $\mathbf{R}$ sous les formes $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ qui désignent en fait des intervalles de la réunion $\ddot{\mathbf{R}}$ de $\mathbf{R}$ et de $\{-\infty, +\infty\}$. Cet abus d'écriture n'a pas en général d'inconvénient grave ; cependant, si la première forme suggère bien un ouvert, la seconde peut masquer qu'il s'agit d'un fermé de $\mathbf{R}$. La notation $[a, \rightarrow)$ échappe à cette dernière critique, mais on prendra garde que sa signification dans $\mathbf{R}$ n'est pas la même que dans $\ddot{\mathbf{R}}$, où elle désigne l'ensemble $[a, +\infty]$.

4.4. *Ensembles ordonnés particularisés.*

4.4.1. Lorsque toute paire d'un ensemble E admet, pour l'ordre $\mathcal{R}$, une borne inférieure et une borne supérieure, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est un *ensemble réticulé* [TREILLIS, **1.1.**].

Exemple : l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque, ordonné par l'inclusion.

4.4.2. Rappelons pour mémoire que les ensembles totalement ordonnés sont des ensembles réticulés particuliers.

4.4.3. On dit que $(E, \mathcal{R})$ est un *ensemble bien ordonné* (ou encore que $\mathcal{R}$ est une relation de *bon ordre*) lorsque toute partie non vide de E admet un plus petit élément. On remarquera que les ensembles bien ordonnés sont des ensembles totalement ordonnés particuliers.

Exemples : $(\mathbf{N}, \leqslant)$ est un ensemble bien ordonné, mais $(\mathbf{N}, \geqslant)$ n'en est pas un puisqu'il n'a pas de plus petit élément. Ni $(\mathbf{Z}, \leqslant)$ ni $(\mathbf{R}, \leqslant)$ ni même $(\mathbf{R}^+, \leqslant)$ ne sont bien ordonnés.

Remarque. Le théorème de Zermelo, équivalent à l'axiome du choix, affirme que tout ensemble peut être bien ordonné; mais on peut démontrer, par exemple, qu'il est impossible de construire explicitement une relation de bon ordre sur $\mathbf{R}$.

4.4.4. Une relation d'ordre $\prec$ sur un ensemble E est dite un *ordre bien fondé*, ou parfois *ordre artinien*, lorsqu'il n'existe dans $(E, \prec)$ aucune suite strictement décroissante infinie; elle est dite *ordre nœthérien* lorsqu'il n'existe aucune suite strictement croissante infinie (pour "croissant", "décroissant", voir ci-dessous **5.1** et **5.2**).

On démontre que les bons ordres sont les ordres totaux bien fondés.

Exemples :

- Tout ordre dans un ensemble fini ou, plus généralement, tout ordre pour lequel l'ensemble des minorants de chaque singleton est fini est un ordre bien fondé : tel est le cas de $(\mathbf{N}, \leqslant)$ et de $(\mathbf{N}, \text{divise})$;

- Dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ les relations $\prec$ et $\lll$ définies par :

$$\forall\, n, n', p, p' \qquad (n,p) \prec (n',p') \iff n < n'$$
$$\forall\, n, n', p, p' \qquad (n,p) \lll (n',p') \iff (n < n' \text{ ou } (n = n' \text{ et } p < p'))$$

sont des ordres bien fondés, l'un partiel, l'autre total; cependant pour chacun d'eux l'ensemble des éléments inférieurs à (3;5) par exemple est infini; pour le second il existe même des suites décroissantes, de premier terme (3;5), de longueur arbitrairement grande.

Les relations d'ordre bien fondé sont utilisées en informatique notamment pour certaines preuves de programme. Les adjectifs *artinien* et *nœthérien* proviennent de la théorie des anneaux et modules : dire qu'un anneau est artinien (resp. nœthérien) revient à dire que, dans l'ensemble de ses idéaux, l'inclusion définit un ordre artinien (resp. nœthérien).

5. Morphismes d'ensembles ordonnés.

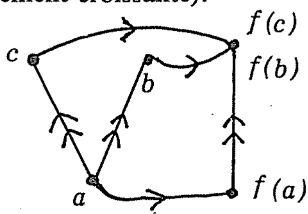
5.1 *Applications (strictement) croissantes.* Soient $(E, \mathcal{R})$ et $(F, \mathcal{S})$ des ensembles ordonnés; toute application f de E vers F qui satisfait à la condition :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \mathcal{R}(x, y) \Rightarrow \mathcal{S}(f(x), f(y))$$

est un morphisme d'ensembles ordonnés, qu'on appelle application *croissante* (pour les ordres $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$). Quand on veut spécifier qu'une telle application est croissante pour les ordres anti-réflexifs associés à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$, on dit qu'elle est *strictement croissante.*

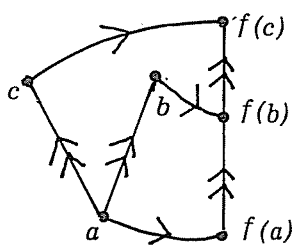
Toute composée d'applications croissantes (resp. strictement croissantes) est croissante (resp. strictement croissante).

Remarque : Toute application croissante qui est injective est strictement croissante, mais on ne peut affirmer la réciproque que si $\mathcal{R}$ est un ordre total, ce qu'illustre le contre-exemple ci-contre.



Lorsque f est une bijection croissante et que f^{-1} l'est également, ce sont des isomorphismes d'ensembles ordonnés.

Remarque : Ici encore la seconde partie de l'hypothèse (f^{-1} croissante) n'est nécessaire que si l'ordre $\mathcal{R}$ est partiel : dans l'exemple ci-contre où f^{-1} n'est pas croissante, il n'y a pas isomorphisme.



ordonné, part. passé et adj.

On dit que des ensembles ordonnés isomorphes entre eux ont le même *type d'ordre* [ORDINAL, **1.**].

Exemple d'ensembles ordonnés isomorphes : { ϕ, {a} , {b} , {a, b} } ordonné par l'inclusion et {1 ;2 ;3 ;6} ordonné par la relation "divise".

5.2. *Applications (strictement) décroissantes.* Avec les mêmes notations que ci-dessus, tout morphisme d'ensembles ordonnés de $(E, \mathcal{R})$ vers $(F, \mathcal{S}^{-1})$ est une application *décroissante* pour les ordres $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. On dit qu'elle est *strictement décroissante* lorsqu'elle est décroissante pour les ordres antiréflexifs associés.

Si f est une application croissante (resp. strictement croissante), et g une application décroissante (resp. strictement décroissante), $f{\circ}g$ et $g{\circ}f$ sont décroissantes (resp. strictement décroissantes). Toute composée d'un couple d'applications décroissantes (resp. strictement décroissantes) est croissante (resp. strictement croissante).

Lorsque f est une bijection décroissante et que f^{-1} l'est également, on dit que ce sont des *anti-isomorphismes d'ensembles ordonnés.*

5.3. *Applications (strictement) monotones.* On dit qu'une application est *monotone* lorsqu'elle est ou bien croissante, ou bien décroissante. On dit qu'elle est *strictement monotone* lorsqu'elle est ou bien strictement croissante, ou bien strictement décroissante.

Les ensembles ordonnés et les applications monotones sont respectivement les objets et les flèches d'une catégorie [CATÉGORIE]. Les applications strictement monotones et les applications croissantes en définissent deux sous-catégories ; les applications strictement croissantes définissent une sous-catégorie de chacune d'elles.

Les flèches inversibles de ces catégories sont les isomorphismes et les anti-isomorphismes d'ensembles ordonnés.

/...

6. Structures ordonnées.

6.1 Un ensemble E étant muni d'une loi $*$ et d'un ordre $\mathcal{R}$, dire que la loi $*$ *respecte* l'ordre $\mathcal{R}$ (ou que l'ordre $\mathcal{R}$ est *compatible* avec la loi $*$) signifie que :

$$\forall a \in E, \forall b \in E, \forall c \in E \quad \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow (\mathcal{R}(a*c, b*c) \wedge \mathcal{R}(c*a, c*b))$$

Soit alors $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Pour qu'une structure définie sur E soit dite "structure ordonnée" ("structure totalement ordonnée" au cas où l'ordre $\mathcal{R}$ est total), on exige que l'ordre $\mathcal{R}$ soit respecté, *au moins dans la mesure du possible,* par les lois qui définissent la structure.

On conçoit que, plus la structure est complexe, plus cette exigence risque d'être difficile à satisfaire, ce qui explique la précaution de langage prise ci-dessus. Il arrive même qu'il y ait impossibilité, comme cela apparaîtra sur certains des exemples donnés ci-après.

6.2. *Monoïdes ordonnés.* Soit $(M, *)$ un monoïde (v. ce mot); puisqu'une seule loi est en jeu, il suffit que la condition énoncée en **6.1** soit satisfaite pour que le triplet $(M, *, \mathcal{R})$ puisse être dit *monoïde ordonné.*

De cette condition résulte immédiatement que dans tout monoïde ordonné $(M, *, \prec)$ on a le droit de composer les "inégalités" membre à membre : si $a \prec b$ et $c \prec d$, alors $a*c \prec b*d$ et $c*a \prec d*b$.

Des exemples de monoïdes libres ordonnés seront donnés en **7**.

6.3. *Groupes ordonnés.* La définition est la même que pour les monoïdes et on en tire la même conséquence que ci-dessus.

Un exemple de groupe partiellement ordonné est fourni par l'ensemble des applications d'un ensemble A dans $\mathbf{R}$, muni de l'addition et de l'ordre défini au second exemple de **3.6**.

En pratique on s'intéresse surtout aux groupes totalement ordonnés. Ceux-ci sont nécessairement infinis (hormis le cas trivial des groupes à un seul élément); en effet, si a est distinct de l'élément neutre, la suite (a^n) est strictement monotone et son ensemble de valeurs ne saurait être fini. En revanche, les exemples de groupes totalement ordonnés infinis abondent : $(\mathbf{Z}, +, \leqslant)$, $(\mathbf{R}_*^+, \times, \leqslant)$ etc. Mais il n'est pas possible de faire de n'importe quel groupe infini un groupe totalement ordonné; c'est cette impossibilité, pour le groupe des rotations planes, qui est à l'origine de la plupart des difficultés relatives aux "angles".

$\mathcal{R}$ étant un ordre réflexif, et $(G, *, \mathcal{R})$ un groupe ordonné d'élément neutre e, on note habituellement G^+ l'ensemble $[e, \rightarrow)$ des éléments précédés par e. Cet ensemble G^+ possède les propriétés suivantes :

1) G^+ est stable pour la loi $*$
2) G^+ est invariant pour tout automorphisme intérieur de G
3) $e \in G^+$ et, si x et x^{-1} appartiennent à G^+, alors $x = e$.

Ces propriétés sont caractéristiques, en ce sens que, si l'on connaît un sous-ensemble X de G qui les possède, la relation $(a,b) \mapsto (b * a^{-1} \in X)$ est un ordre réflexif, qui confère à $(G,*)$ la structure de groupe ordonné, pour lequel X est l'ensemble $[e, \rightarrow)$.

On note de même G^- l'ensemble $(\leftarrow, e]$; ses éléments sont les symétriques de ceux de G^+. Dans tous les cas, $G^+ \cap G^- = \{ e \}$; mais on n'a $G^+ \cup G^- = G$ que si l'ordre est total.

Les éléments de G^+ (resp. G^-) peuvent être dits *positifs* (resp. *négatifs*); c'est pratiquement toujours le cas lorsque la loi du groupe est notée additivement, et son élément neutre appelé zéro.

Remarque. Dans l'exemple rappelé plus haut des applications de A dans $\mathbf{R}$, noter que l'ensemble des éléments positifs coïncide avec l'ensemble des "fonctions positives" suivant la terminologie habituelle.

Groupes archimédiens. Un groupe commutatif totalement ordonné $(G, +, \prec)$ est dit *archimédien* lorsque :

$$\forall a \in G^+ \setminus \{0\}\ ,\ \forall b \in G^+,\ \exists n \in \mathbf{N} \qquad b \prec na$$

6.4. *Anneaux ordonnés, corps ordonnés.* Soit $(A, +, \times)$ un anneau (resp. un corps) dont l'ensemble sous-jacent A est muni d'un ordre réflexif $\mathcal{R}$; on dit que le quadruplet $(A, +, \times, \mathcal{R})$ est un *anneau ordonné* (resp. un *corps ordonné*) lorsque :

1) $(A, +, \mathcal{R})$ est un groupe ordonné ;

2) la multiplication par tout élément *positif* respecte $\mathcal{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in A, \quad \forall c \in A^+$$
$$\mathcal{R}(a, b) \Rightarrow \mathcal{R}(a \times c, b \times c) \wedge \mathcal{R}(c \times a, c \times b)$$

Remarque. L'existence d'anneaux ordonnés et de corps ordonnés est notoire. Mais il a fallu astreindre la variable c à A^+ ; car il découle de la définition que la multiplication par les éléments strictement négatifs inverse l'ordre, qui ne peut donc être intégralement respecté par les deux lois à la fois.

L'ensemble A^+ possède les propriétés suivantes :
1) A^+ est stable pour les deux lois ;
2) $0 \in A^+$ et, si x et $-x$ appartiennent à A^+, alors $x = 0$.

Ces propriétés sont caractéristiques, en ce sens que, si l'on connaît un sous-ensemble X de A qui les possède, la relation $(a, b) \mapsto (b - a \in X)$ est un ordre réflexif, qui confère à $(A, +, \times)$ la structure d'anneau ordonné (ou de corps ordonné), pour lequel X est l'ensemble des éléments positifs.

Exemple. Dans $\mathbf{C}$, en posant $X = \mathbf{R}^+$, on obtient une structure de corps partiellement ordonné. Mais on s'intéresse surtout en pratique aux corps totalement ordonnés ; or, dans tout anneau totalement ordonné, tous les carrés sont positifs : cela exclut la possibilité de construire des corps totalement ordonnés à partir de corps algébriquement clos comme l'est $\mathbf{C}$.

6.5. *Treillis.* Pour mémoire, mentionnons à nouveau les treillis ; dans leur cas, il existe un ordre qui est respecté par les deux lois à la fois, et qui leur est même si étroitement lié qu'on le fait souvent figurer dans les axiomes qui définissent la structure de treillis.

7. Ordre des dictionnaires.

7.1. Soit E un ensemble, qu'on peut appeler "alphabet", et dont les éléments seront appelés "lettres" ; avec ces lettres on forme des "mots", qui constituent le monoïde libre $\mathrm{M}(E)$

engendré par E [MONOÏDE, **1.2.**]. On cherche à munir $\mathrm{M}(E)$ d'un ordre qui soit, autant que possible, respecté par la loi du monoïde, c'est-à-dire par la concaténation, de façon à construire un "dictionnaire".

On commence évidemment par munir E d'un ordre total $\mathcal{R}$, qu'on dira "alphabétique". Une infinité de solutions sont alors concevables ; on peut songer en premier lieu à l'ordre-produit défini en **3.6**. Reprenons en effet l'exemple de **3.6.** : si l'on transforme en quadruplets les triplets (6;4;2) et (9;5;2) en leur concaténant un 1-uplet quelconque, par exemple (13), le quadruplet (6;4;2;13) précède encore (9;5;2;13). Malheureusement l'ordre-produit n'est pas total, ce qui le rend impropre à la construction d'un dictionnaire, au sens usuel du terme.

7.2. *Ordre lexicographique.* Appelons longueur d'un n-uplet (c'est-à-dire, ici, d'un mot) le nombre n de ses termes. Notant alors "long" l'application qui à chaque mot associe sa longueur dans $\mathbf{N}_*$, et a_i la i-ième lettre du mot a (donc $1 \leqslant i \leqslant$ long a), considérons, dans l'ensemble des mots de longueur au moins égale à k ($k \in \mathbf{N}_*$), la relation $\mathcal{J}_k$ "avoir les $k-1$ mêmes lettres initiales" (en conséquence $\mathcal{J}_1$ est toujours vraie) :

$$\mathcal{J}_k(a,b) \Leftrightarrow \forall i<k\ ,\ a_i = b_i$$

Supposant antiréflexif l'ordre alphabétique $\mathcal{R}$, les dictionnaires usuels sont fondés sur l'ordre (réflexif) $\mathcal{S}$, défini par

$$\mathcal{S}\ (a,b) \Leftrightarrow \exists k(\ \mathcal{J}_k(a,b) \wedge\ (\mathcal{R}(a_k,b_k) \vee (a_k=b_k \wedge\ k = \text{long } a)))$$

Remarque. Dans une langue comme le français, qui possède des signes diacritiques (accents, tréma, cédille), des conventions accessoires sont nécessaires pour fixer l'ordre de certains mots comme : *cote, côte, côté,* ou bien *mais, maïs,* ou encore *pêche, péché,* etc.

7.3. *Ordre des cruciverbistes.* Les dictionnaires de mots croisés font appel à une autre relation d'ordre total : les mots y sont préordonnés suivant leur longueur, puis les mots de même longueur sont rangés suivant l'ordre lexicographique. Cette relation d'ordre est donc

$$(a,b) \mapsto (\text{long } a < \text{long } b \vee (\text{long } a = \text{long } b \wedge \mathcal{S}\ (a,b)))$$

Mais là ne se borne pas l'intérêt de cette relation. En effet elle visualise, dans l'écriture de position des naturels en base quelconque, l'ordre $\leqslant$ de **N** : par exemple, en base six, on n'a besoin d'aucun calcul pour "voir" que

$$343\ 021 \leqslant 1\ 523\ 205 \leqslant 1\ 525\ 003.$$

L'ordre lexicographique est respecté par la concaténation de préfixes (ce qui a peu d'intérêt pratique), mais pas toujours par la concaténation de suffixes : ainsi *fer* précède *ferme*, tandis que *fermement* précède *ferment*. Au contraire, l'ordre des cruciverbistes est respecté tant par la concaténation de préfixes que par la concaténation de suffixes : les dictionnaires de mots croisés sont donc des parties de monoïdes libres totalement ordonnés au sens de **6.2**.

ordre, n. m.

Us. : Sens usuels nombreux et malaisés à rattacher les uns aux autres. Toutefois ils comportent souvent une idée de succession et de rangement, qui est à l'origine des deux emplois principaux du mot en math.

Math. : 1) le sens qui est à présent le mieux codifié et le plus précis apparaît dans "relation d'ordre" — 2) des sens historiques plus divers peuvent être rattachés à l'idée de rang, de numérotage : le mot désigne alors le plus souvent un naturel, mais pas toujours.

1. Relations d'ordre.

Pour tout ce qui concerne les relations d'ordre et les ensembles ordonnés, voir la notice ORDONNÉ.

2. Algèbre.

2.1. *Ordre dans un groupe.*

2.1.1. Ordre d'un groupe fini. Le nombre des éléments d'un groupe fini s'appelle l'*ordre* du groupe.

Ex. : Le groupe des isométries du triangle équilatéral est d'ordre 6; le groupe des permutations d'un ensemble de cardinal n (groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$) a pour ordre $n!$

Tout sous-groupe d'un groupe a pour ordre un diviseur de l'ordre du groupe (théorème de Lagrange).

2.1.2. Ordre d'un élément. Soit a un élément d'un groupe noté multiplicativement; s'il existe des naturels non nuls n tels que a^n soit l'élément neutre, le plus petit de ces naturels s'appelle l'*ordre* de a. C'est aussi l'ordre du groupe cyclique engendré par a. Le neutre est le seul élément d'ordre 1 ; on appelle souvent *involutions* les éléments d'ordre 1 ou 2, en particulier dans les groupes de permutations : ce sont les éléments qui sont leur propre inverse.

S'il n'existe aucun naturel non nul n tel que a^n soit le neutre, on dit parfois que a est d'ordre infini.

Ex. : Dans le groupe des isométries d'un espace affine euclidien de dimension non nulle :

- les éléments d'ordre 2 sont les symétries orthogonales (par rapport aux points, droites, plans, ...) autres que l'identité;
- lorsque la dimension est 2 ou 3, les rotations d'angles $\frac{2k\pi}{n}$ où k est étranger à n sont des éléments d'ordre n ($n>2$); l'invariance par une telle rotation est parfois appelée "symétrie d'ordre n", par extension un peu abusive du sens du mot "symétrie" (v. ce mot).

La caractéristique d'un anneau unitaire [CARACTÉRISTIQUE, n.f.] n'est autre que l'ordre de l'élément 1 dans le groupe additif sous-jacent à l'anneau. Toutefois, si l'ordre de 1 est infini, on dit souvent que l'anneau est de caractéristique nulle.

2.1.3. Ordre d'une permutation circulaire (ou *cycle*). Toute permutation circulaire qui, dans un ensemble E de n éléments, laisse invariants n-q d'entre eux exactement est dite d'*ordre* q; c'est d'ailleurs son ordre, au sens de *2.1.2*, dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de E.

2.2. *Ordre d'une matrice carrée.* Dans une matrice carrée, le nombre des lignes, qui est aussi celui des colonnes, est appelé l'*ordre* de la matrice. L'expression "déterminant d'ordre n", parfois encore utilisée, doit être entendue comme "déterminant d'une matrice d'ordre n".

2.3. *Ordre d'un tenseur.* Soit E un espace vectoriel, E^* l'espace dual; toute forme n-linéaire sur $E^p \times (E^*)^q$ où $p+q = n$ est un tenseur p fois covariant et q fois contrevariant (relativement à E); n est appelé l'*ordre* de ce tenseur.

Ex. : Dans un espace de dimension n, les tenseurs de volume sont les tenseurs covariants antisymétriques non nuls d'ordre n.

3. Fonctions et équations.

3.1. *Fractions rationnelles.*

3.1.1. Soit d'abord un polynome P non nul à coefficients dans un corps commutatif K, et a un zéro (ou racine) de P; si P est divisible par $(X\text{-}a)^p$ sans l'être par $(X\text{-}a)^{p+1}$, on dit que l'*ordre* de ce zéro est p. Le zéro est dit *simple* si $p=1$, *double* si $p = 2$,... *multiple* dès que $p>1$.

Rappelons à titre d'exemple l'énoncé classique : "Tout polynome à coefficients réels qui admet dans **C** une racine non réelle admet aussi pour racine le complexe conjugué, avec le même ordre de multiplicité".

Pourvu que le corps K soit infini, cette définition et ce vocabulaire s'appliquent naturellement aux zéros de la fonction polynomiale et aux racines de l'équation dans K associées à P.

3.1.2. Pourvu que le corps K soit de caractéristique nulle, on démontre que a est un zéro d'ordre p pour le polynome P ssi c'est un zéro de P, de P', de P'',..., de $P^{(p-1)}$, sans être un zéro de $P^{(p)}$.

A nouveau on passe naturellement de là aux fonctions polynomiales, mais, sous cette nouvelle forme, la définition s'étend aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$.

3.1.3. Soient P et Q des polynomes non nuls, étrangers, à coefficients dans K. Lorsque a est un zéro d'ordre p de P, on dit encore que c'est un *zéro d'ordre p* de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$. Lorsque b est un zéro d'ordre q de $\dfrac{Q}{P}$, on dit que c'est un *pôle d'ordre q* de $\dfrac{P}{Q}$.

Comme ci-dessus, l'extension se fait naturellement aux fonctions rationnelles, et plus généralement, aux fonctions méromorphes : ainsi la fonction Γ (de **C** dans **C**) admet tous les entiers négatifs comme pôles d'ordre 1.

3.2. *Zéros et pôles généralisés.*

3.2.1. Dans les emplois ci-dessus, "ordre" est à peu près synonyme de "degré" (à tel point qu'on parlait couramment de l'ordre d'une surface ou d'une courbe algébrique). Mais une généralisation est possible, grâce à laquelle l'ordre ne sera plus nécessairement un naturel.

Les fonctions envisagées à présent auront pour ensemble de départ et pour ensemble d'arrivée des corps munis chacun d'une valeur absolue, ou, plus généralement, des espaces vectoriels munis chacun d'une norme (nous adopterons ici la même notation $|\ \ |$ pour les valeurs absolues et les normes). On dira que a est un *zéro* d'une fonction f lorsque f admet 0 pour limite en a (donc, si f est définie en a — ce qui n'est pas indispensable —, elle devra s'y annuler [LIMITE, 1.2]), et on appellera *pôle* d'une fonction g tout zéro de $\frac{1}{|g|}$ au sens présent.

Les définitions de l'ordre d'un zéro ou d'un pôle ne pourront donc plus faire appel à des conditions de divisibilité ou de dérivabilité comme en **3.1.**; cependant, on pourra vérifier que les définitions données en **3.1.** entrent comme cas particuliers dans celles qui vont suivre.

3.2.2. Ordre d'un zéro. Soit a un zéro (au sens ci-dessus) d'une fonction f; nous appellerons *ordre* de ce zéro la borne supérieure dans $\ddot{\mathbf{R}}$ de l'ensemble des réels α tels que

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x)|}{|x-a|^{\alpha}} = 0,$$

cette borne supérieure, nécessairement positive, pouvant être nulle ou infinie. On introduit ainsi un préordre dans l'ensemble des fonctions qui ont en a une limite nulle.

En particulier, si, pour un réel p strictement positif, la fonction $x \mapsto \frac{|f(x)|}{|x-a|^p}$ admet en a une limite finie non nulle, ou même si elle est encadrée au voisinage de a par deux réels strictement positifs, alors p est l'ordre du zéro de f en a. Certains adoptent soit l'une, soit l'autre de ces propriétés plus restrictives comme définition de l'ordre; mais ils excluent par là la possibilité d'avoir des zéros d'ordre nul ou infini.

Exemples dans **R** :

- $x \longmapsto \sqrt[4]{x(1+x)^3}$ admet 0 pour zéro d'ordre $\frac{1}{4}$ et -1 pour zéro d'ordre $\frac{3}{4}$ (quelle que soit la définition adoptée) ;
- $x \longmapsto x + |x|$ admet 0 pour zéro d'ordre 1 (mais ce ne serait pas vrai avec les définitions restrictives signalées);
- $x \longmapsto 2x + |x|$ admet aussi 0 pour zéro d'ordre 1 (mais cela n'est pas vrai si l'on exige l'existence d'une limite pour $\frac{|f(x)|}{|x|}$);
- $x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$ admet 0 pour zéro d'ordre nul;
- $x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$ admet 1 pour zéro d'ordre infini.

Exemple dans **C** :

$z \longmapsto e^{-1/|z|}$ admet 0 pour zéro d'ordre infini.

3.2.3. Ordre d'un pôle. Soit a un pôle (au sens de *3.2.1.*) d'une fonction f : on appelle *ordre* de ce pôle l'ordre de a considéré comme zéro de la fonction $\frac{1}{|f|}$; c'est donc la borne supérieure de l'ensemble des réels α tels que $\lim_{x \to a} |x-a|^\alpha |f(x)| = +\infty$.

Exemples dans **R** :

- $x \longmapsto \frac{1}{\ell n^2 x^2}$ admet 1 et -1 pour pôles d'ordre 1;
- $x \longmapsto \frac{\ell n |\pi - x|}{\sqrt[3]{1+\cos x}}$ admet tous les multiples de rang impair de π pour pôles d'ordre $\frac{2}{3}$.

3.2.4. Ordre d'un zéro ou d'un pôle en un point à l'infini. Posant $F(x) = f(\frac{1}{x})$, on dit que f admet au point à l'infini un zéro (resp. un pôle) d'ordre p lorsque F admet en 0 un zéro (resp. un pôle) d'ordre p.

Exemples : pour les fonctions de **R** dans **R** suivantes, le point à l'infini est :

- un zéro d'ordre 2 pour la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2 \ell n\, x}$
- un zéro d'ordre infini pour $x \longmapsto e^{-x^2}$
- un pôle d'ordre $\frac{1}{2}$ pour $x \longmapsto \sqrt{x}$
- un pôle d'ordre 1 pour $x \longmapsto \sqrt[4]{x(1+x)^3}$
- un pôle d'ordre 0 pour la fonction ℓn.

3.2.5. Un point, qu'il soit ou non un zéro ou un pôle pour une fonction, peut l'être (au sens présent) pour certaines de ses restrictions ; il peut même arriver que, suivant la restriction considérée, un même point soit un zéro, ou un pôle, et avec des ordres différents. De même, en *3.2.4.*, il sera en général nécessaire de distinguer plusieurs "points à l'infini", c'est-à-dire plusieurs "chemins vers l'infini".

Exemples :

• l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: $x \longmapsto |x| + \sin x$ admet 0 pour zéro d'ordre 1 "à droite" et pour zéro d'ordre 3 "à gauche" ;

• l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: $x \longmapsto e^x$ admet $+\infty$ pour pôle d'ordre infini, et $-\infty$ pour zéro d'ordre infini ;

• l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$: $z \longmapsto e^{1/z}$ n'admet ni pôle ni zéro au point 0 ; toutefois, si S et S' sont des saillants fermés de sommet 0, respectivement inclus (sauf le sommet) dans les demi-plans d'équations $\mathcal{R}(z) > 0$ et $\mathcal{R}(z) < 0$, le point 0 est un pôle d'ordre infini pour $f|_S$ et un zéro d'ordre infini pour $f|_{S'}$;

• la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$: $(x,y) \longmapsto \frac{y}{x}$ n'admet $(0, 0)$ ni comme zéro ni comme pôle ; toutefois, si on la restreint aux parties de $\mathbf{R}^2$ respectivement définies par :

$|x \,\ell n |x|| \leqslant |y|$, alors $(0, 0)$ est un pôle d'ordre 0 ;

$|y| \leqslant x^4$, alors $(0, 0)$ est un zéro d'ordre 3 ;

$|y| \leqslant x^6$, alors $(0, 0)$ est un zéro d'ordre 5.

On remarquera que le dernier ensemble est, au voisinage de $(0, 0)$, inclus dans le précédent ; plus généralement, en prenant une restriction à un ensemble plus petit, on ne peut qu'augmenter l'ordre d'un zéro ou d'un pôle.

3.3. *Ordre de grandeur. Notations de Landau.* Les fonctions envisagées ici ont des ensembles d'existence dont l'adhérence contient un même point a (éventuellement à l'infini).

3.3.1. La notation O. Soient f et g de telles fonctions : la propriété "Il existe un voisinage V de a et un réel positif M tels que, pour tout x de V, $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$ " sera notée $f = O(g)$. La relation $(f, g) \longmapsto f = O(g)$ est visiblement un préordre partiel (par exemple, il n'existe pas de voisinage de l'infini sur lequel $\frac{\sin x}{\cos x}$ ou $\frac{\cos x}{\sin x}$ serait borné).

Comme tout préordre, cette relation donne naissance à une relation d'équivalence : lorsque $f = O(g)$ et $g = O(f)$, les fonctions f et g appartiennent à une même classe, qu'on peut appeler leur *ordre de grandeur* ; et on peut traduire $f = O(g)$ par : l'ordre de grandeur de f est au plus égal à celui de g.

Ne pas confondre cette notion avec celle, plus restrictive, de "fonctions équivalentes" : deux fonctions équivalentes ont le même ordre de grandeur, mais la réciproque est fausse.

La notation $f = O(g)$, due à Landau, n'est pas à l'abri de toute critique. Elle utilise abusivement le signe $=$ à la place de $\in$, la notation $O(g)$ ne pouvant désigner de façon satisfaisante que l'ensemble des fonctions dont l'ordre de grandeur est au plus celui de g; nous nous réservons d'utiliser, éventuellement, le signe d'appartenance. En outre, la notation de Landau n'indique pas le point a au voisinage duquel sont comparées les fonctions. Enfin, dans la pratique, on substitue presque toujours aux fonctions leurs valeurs en un point courant : par exemple on écrit $f(x) = O(x^\alpha)$. Malgré ces abus de langage, la commodité de cette notation est incontestable, en particulier dans l'écriture des développements limités.

Exemples dans **R** :

- au voisinage de 0 : on peut écrire que $e^{-x^2/2} - \cos x = O(x^3)$ mais non que $x^3 = O(e^{-x^2/2} - \cos x)$; par contre $e^{-x^2/2} - \cos x$ et x^4 sont du même ordre de grandeur ;
- au voisinage de $+\infty$, $\sqrt[3]{x^2+1} = O(x^{2/3})$, et $\sqrt[3]{x^2+1} - x^{2/3} = O(x^{-4/3})$;
- au voisinage de $-\infty$, écrire que $(1+\operatorname{th} x)\, e^{-2x} = O(1)$ peut être un moyen commode d'exprimer que le premier membre est borné.

3.3.2. La notation o. Parmi les fonctions f telles que $f = O(g)$ au voisinage d'un point a, on peut distinguer plus particulièrement celles qui vérifient la propriété "Quel que soit le réel strictement positif α, il existe un voisinage V de a tel que, pour tout x de V, $|f(x)| \leqslant \alpha \, |g(x)|$". Cette propriété sera notée $f = o(g)$ et on dira que f est *négligeable* devant g, ou que g est *prépondérante* sur f. La relation $(f, g) \mapsto f = o(g)$ est visiblement un ordre antiréflexif partiel.

Egalement due à Landau, cette écriture appelle les mêmes remarques que ci-dessus.

3.3.3. Il va de soi que les trois notions — ordre d'un zéro ou d'un pôle, prépondérance, ordre de grandeur — ne sont pas indépendantes; mais c'est une raison de plus pour qu'on évite toute confusion entre elles. En particulier, la première des trois est la seule qui permette une évaluation numérique de l' "ordre", mais elle ne rend pas compte de certaines nuances.

• Si f et g ont le même ordre de grandeur en a, et si a est un zéro (resp. un pôle) pour f, c'en est un, et avec le même ordre, pour g.

• Si f est prépondérante sur g en a, et si a est un zéro pour f, c'en est un pour g, avec un ordre au moins égal; si a est un pôle pour g, c'en est un pour f, avec un ordre au moins égal.

• Si $f \in o(g)$, il est clair que $f \in O(g)$ et que $g \notin O(f)$.

Mais les réciproques de ces propositions sont fausses.

Exemples :

• si $f(x) = x^{3/2}$ et $g(x) = x^{3/2} \ln x$, f et g ont un zéro d'ordre 3/2 au point 0, cependant non seulement g est prépondérante sur f, mais il est possible d'intercaler entre f et g une infinité de fonctions h_i telles que $f \in o(h_i)$, $h_i \in o(h_{i+1})$, $h_{i+1} \in o(g)$;

• les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^3$ ont en 0 des zéros respectivement d'ordre 2 et d'ordre 3, cependant f n'est pas prépondérante sur g;

• à l'infini, $\sqrt{x} \sin x = O(\sqrt{x})$, sans que $\sqrt{x}$ soit $O(\sqrt{x} \sin x)$; cependant $\sqrt{x} \sin x$ n'est pas $o(\sqrt{x})$.

4. Ordre dans les développements limités.

Les développements limités sont de types très divers [DÉVELOPPEMENT] : parler d'ordre dans le cas général ne signifie rien de plus qu'un numérotage des termes. En revanche, dans certains cas, dont beaucoup sont d'usage courant, on peut associer à cette indexation l'idée d'un ordre de grandeur.

4.1 *Développements fonctionnels.* Les hypothèses sont évidemment celles de *3.2.1.* : fonctions d'un espace vectoriel normé vers un espace vectoriel normé.

4.1.1. Ordre d'un développement polynomial. Bornons-nous d'abord au cas où l'ensemble de départ des fonctions est un corps valué. Alors on dit qu'un polynome P, de degré au plus égal à n, est *développement limité d'ordre n* d'une fonction f au voisinage de a lorsque $f(x) - P(x-a)$ est $o(x-a)^n$. On en démontre l'unicité.

Ex. : $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ est un développement limité d'ordre 5, et aussi d'ordre 6, de la fonction sinus au voisinage de 0.

En particulier [DÉRIVÉE, *1.3.4.*], si la fonction f est $n-1$ fois dérivable au voisinage de a et admet en a une dérivée n-ième, elle donne lieu au développement limité de Taylor, d'ordre n,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a).$$

Si de plus les conditions du théorème de Lagrange sont réalisées, le reste, plus précisément que $o(x-a)^n$, est $O(x-a)^{n+1}$.

Lorsque la notion de "point(s) à l'infini" a un sens, la définition donnée ci-dessus s'applique au voisinage d'un tel point : il suffit d'y remplacer $x-a$ par $\frac{1}{x}$.

Ex. : $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o(\frac{1}{x^4})$ au voisinage de $+\infty$.

4.1.2. Revenons au cas général. Se plaçant au voisinage d'un point a (éventuellement à l'infini), soit Φ une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de fonctions, indexée par un ensemble totalement ordonné $(A, \prec)$, l'ordre antiréflexif $\prec$ étant tel que $\alpha \prec \beta$ entraîne $\varphi_\beta \in o(\varphi_\alpha)$. Alors, étant donnés une fonction f et un élément α de A, lorsqu'il existe une suite (strictement) croissante $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$ d'éléments de A, où α_p est au plus égal à α, et une suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ de scalaires, telles que $f - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_{\alpha_k} \in o(\varphi_\alpha)$, on dit que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_{\alpha_k}$ *est un développement limité d'ordre* α de la fonction f relativement à la famille Φ, et l'on écrit usuellement :

$$f = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_{\alpha_k} + o(\varphi_\alpha)$$

En particulier :

• si l'on prend $(A, \prec) = (\mathbf{N}, <)$ et $\varphi_n(x) = (x-a)^n$, on retrouve les développements polynomiaux ;

• si l'on prend $(A, \prec) = (\mathbf{Z}, <)$ et $\varphi_n(x) = x^n$, on obtient les développements limités asymptotiques en 0 ; par exemple : $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x^2)$; on obtient de même les développements asymptotiques à l'infini à condition de munir $\mathbf{Z}$ de l'ordre dual $>$; par exemple, au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{x^4 + x} = x^2 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) ;$$

• si l'on prend $(A, \prec) = (\mathbf{R}, <)$ et $\varphi_\alpha(x) = x^\alpha$, on obtient par exemple au voisinage de 0 :

$$\arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\,x^{1/2} - \frac{\sqrt{2}}{12}x^{3/2} + o(x^2).$$

On démontre encore qu'un tel développement limité, s'il existe, est unique. De plus, ses termes sont stables, c'est-à-dire que, si $\alpha \prec \beta$, ceux des termes du développement d'ordre β qui ont un ordre au plus égal à α sont exactement les termes du développement d'ordre α.

4.1.3. Partie principale. Pourvu que la fonction f ne soit pas nulle, parmi les termes de son développement limité il en existe un qui est prépondérant sur tous les autres : c'est le premier terme dont le coefficient n'est pas nul. On l'appelle *partie principale* du développement ; il est du même ordre de grandeur que f, au sens de *2.3.1.*

Reprenant les exemples de *4.1.1.* et *4.1.2.*, on voit que les parties principales des développements limités sont respectivement :

$$x, \frac{1}{2x}, \frac{1}{x}, x^2, \frac{\pi}{2}.$$

4.2. *Développements numériques.* La locution "ordre de grandeur" se retrouve en calcul numérique, mais avec un sens moins net qu'en *3.3.1.* ; en aucun cas elle ne peut désigner une classe d'équivalence. L'acception la plus courante est sans doute : évaluation un peu floue, mais rapide et facile à utiliser ; elle ne manque pas d'intérêt pratique, mais échappe à toute définition précise.

Etant donné un réel a strictement positif, la puissance de 10, d'exposant n entier (positif ou négatif), telle que $10^n \leqslant a < 10^{n+1}$ fournit un ordre de grandeur de a. C'est elle qui intervient dans l'écriture dite "flottante normalisée"; l'exposant n est appelé *taille* ou *magnitude* de a [FLOTTANT, TAILLE].

Le problème de la représentation décimale des réels, bien que différent du problème traité en **4.1.**, présente avec lui des analogies, que le numérotage des paragraphes de **4.2.** suffira à mettre en évidence.

4.2.1. Ordre d'un développement décimal limité. Soit a un réel positif, et n un naturel : il existe une suite $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de naturels, strictement inférieurs à 10 sauf peut-être λ_0, telle que la différence $a - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\frac{1}{10})^k$ soit positive et strictement inférieure à $(\frac{1}{10})^n$. Le décimal $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\frac{1}{10})^k$ est appelé *développement décimal limité d'ordre n* du réel a; on montre que ce développement est unique et que ses termes $\lambda_k (\frac{1}{10})^k$ sont stables quand on considère des développements d'ordre croissant du même réel a. D'après sa définition même, le développement décimal d'ordre n de a coïncide avec l'approximation décimale *d'ordre n*, par défaut, de a [APPROXIMATION, **5**].

Un tel développement se met usuellement sous la forme d'une écriture décimale : λ_0 en est la partie entière, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en sont les décimales successives; le naturel n est aussi appelé *ordre* de cette écriture décimale, il n'est autre que le nombre des chiffres à droite de la virgule.

Dans le cas où a est négatif, son développement décimal d'ordre n est l'opposé de celui de $-a$; il coïncide alors avec l'approximation décimale d'ordre n, par excès, de a.

Exemple : $\frac{5359}{13}$ admet	412	pour développement	décimal	d'ordre	0
	412,2	"	"	"	1
	412,23	"	"	"	2
	412,230	"	"	"	3
	412,2307	"	"	"	4
	etc.				

Remarque. De même qu'en *4.1.1.* (développement de la fonction sinus), ici le décimal 412,23 est aussi bien le développement d'ordre 3 que le développement d'ordre 2 de $\frac{5359}{13}$.

Au contraire, aucune ambiguïté n'affecte l'ordre d'une écriture décimale : "412,23" est une écriture d'ordre 2, et "412,230" est une écriture d'ordre 3, sans équivoque possible. C'est pourquoi la convention suivante est usuellement adoptée en calcul numérique : quand on dit que le développement est 412,230, le dernier zéro, loin d'être superflu, attire l'attention sur l'ordre 3 qu'on attribue au développement, et du même coup à l'approximation : celle-ci est donc plus fine que l'approximation 412,23, qui est seulement d'ordre 2.

4.2.2. On n'a pas l'habitude de considérer des valeurs négatives de l'ordre d'un développement décimal, mais rien ne s'y opposerait en théorie. Il suffit d'admettre pour cela que, dans la définition donnée en *4.2.1.*, l'indice k est élément de $\mathbf{Z}$ et que tous les λ_k sans exception sont strictement inférieurs à 10. Rien n'est changé quant à l'unicité et la stabilité de tels développements.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on pourrait dire que 410 est le développement d'ordre -1 de $\frac{5359}{13}$, que 400 est son développement d'ordre -2 et que ses développements d'ordre strictement inférieurs à -2 sont tous nuls.

Toutefois, l'écriture "en virgule fixe" des approximations décimales d'ordre négatif serait dangereuse. Ainsi, contrairement au zéro de "412,230" en *4.2.1.*, le zéro de l'écriture "410" dans l'exemple ci-dessus n'est pas significatif : on commettrait une erreur en interprétant cette écriture comme celle d'une approximation d'ordre 0, puisque dans celle-ci ce zéro est remplacé par 2. En revanche, la stabilité est évidente quand on utilise la "virgule flottante".

Ainsi les développements décimaux successifs, ainsi que les approximations décimales, par défaut, de $\frac{5359}{13}$ sont :

4×10^2	à l'ordre		-2
$4{,}1 \times 10^2$	"	"	-1
$4{,}12 \times 10^2$	"	"	0
$4{,}122 \times 10^2$	"	"	1
etc.			

4.2.3. On vérifiera que la taille d'un réel non nul est celle du premier terme non nul de son développement décimal limité (aussi bien avec la définition de *4.2.1.* qu'avec celle de *4.2.2.*); dans l'exemple donné, cette taille est 2.

5. Géométrie.

Pour les questions touchant à l'ordre d'un point, d'un contact, etc., voir la notice COURBE. Le mot s'emploie aussi parfois pour les surfaces et les variétés.

topologie, n. f.

A partir des problèmes de contiguïté et de connexité, dont l'exemple le plus connu est celui qu'a donné Euler avec les ponts de Königsberg sur le Pregel, s'est constituée l'*analysis situs*. Plus tard, le mot *topologie* fut introduit en 1836 par J.-B. Listing et défini par lui-même comme "étude des lois qualitatives des relations de lieux". On a rassemblé sous ce nom ceux des problèmes d'espaces métriques qui sont invariants par les déformations continues. Peu à peu la topologie s'est affranchie de tout support métrique avec Cantor (1883), H.-F. Riesz (1909), Kuratowski (1922), Aleksandrov (1925), Sierpinski (1926), Fréchet (1928).

Aujourd'hui le mot désigne à la fois une branche des mathématiques et la structure qui en est le fondement actuel.

1. Notions de base.

1.1. *Topologies sur un ensemble; ouverts et fermés.*

1.1.1. Soit $\mathcal{O}$ un ensemble de parties d'un ensemble E : on dit que $\mathcal{O}$ est une *topologie* sur E, ou encore que $(E;\ \mathcal{O})$ est un *espace topologique,* lorsque ϕ et E appartiennent à $\mathcal{O}$, que toute réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ est élément de $\mathcal{O}$, et que toute intersection de deux éléments de $\mathcal{O}$ est élément de $\mathcal{O}$.

Remarque 1. En disant "toute réunion" on sous-entend qu'il peut s'agir de la réunion d'une infinité, dénombrable ou non, d'éléments de $\mathcal{O}$; en revanche, de l'intersection de deux éléments de $\mathcal{O}$ on passe de proche en proche à l'intersection d'une famille finie de tels éléments mais pas au-delà.

Remarque 2. Comme il est d'usage pour tous les ensembles structurés, quand il n'y a pas de risque de confusion on emploie souvent, pour désigner un espace topologique $(E;\ \mathcal{O})$, la notation de l'ensemble sous-jacent E.

Pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ est une topologie sur E, dite *topologie discrète*, et $(E;\mathcal{P}(E))$ est un espace topologique *discret ;* $\{E;\ \phi\}$ est une topologie sur E, dite *topologie grossière.*

Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ des topologies sur l'ensemble E; on dit que $\mathcal{O}$ est *plus fine* que $\mathcal{O}'$ lorsque $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}'$. La topologie discrète (resp. grossière) est donc la topologie la plus fine (resp. la moins fine) des topologies sur un ensemble.

Dans le cas où E est infini, l'ensemble des parties finies n'est pas une topologie, même si l'on y rajoute E ; mais l'ensemble des complémentaires des parties finies auquel on rajoute ϕ est une topologie sur E.

Dans **R** (resp. **Q**) les réunions d'intervalles du type $]a;b[$ où a et b sont des réels (resp. des rationnels) tels que $a \leqslant b$ forment une topologie, dite *topologie usuelle de* **R** (resp. **Q**).

Dans $\mathbf{R}^n$, où l'on appelle *pavé ouvert* tout produit cartésien de n intervalles $]a_i; b_i[$, les réunions de pavés ouverts constituent une topologie, dite *topologie usuelle de* $\mathbf{R}^n$. Ceci permet, en particulier, de parler de la topologie usuelle de l'ensemble des matrices réelles de format $(m;n)$.

1.1.2. Dans un espace topologique $(E; \mathcal{O})$ les parties de E qui sont éléments de $\mathcal{O}$ sont appelées *ouverts* de la topologie $\mathcal{O}$, et leurs complémentaires sont appelés *fermés* de la topologie $\mathcal{O}$. Il est clair qu'un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de E est l'ensemble des fermés d'une topologie de E et d'une seule ssi $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés duales de celles de *1.1.1,* à savoir : ϕ et E sont éléments de $\mathcal{F}$, toute intersection d'éléments de $\mathcal{F}$ est élément de $\mathcal{F}$, toute réunion de deux éléments de $\mathcal{F}$ est élément de $\mathcal{F}$; les ouverts de cette topologie sont les complémentaires dans E des éléments de $\mathcal{F}$.

Remarque. La remarque faite en *1.1.1.* s'applique ici à condition qu'on y échange "intersection" et "réunion".

Dans un espace topologique $(E; \mathcal{O})$ une partie de E peut être à la fois ouverte et fermée (c'est le cas notamment de E et ϕ), elle peut n'être ni ouverte ni fermée.

Exemples :

- Dans un espace discret, toute partie est à la fois ouverte et fermée.
- Dans **Q** muni de sa topologie usuelle, $[0;1[$ n'est ni ouvert ni fermé. La partie $\{x; x \in \mathbf{Q} \,/\, x^2 \leqslant 2\}$ est ouverte et fermée; c'est un intervalle à la fois ouvert et fermé qui n'a pas d'extrémité dans **Q** [ORDONNÉ, *4.3.4*].

topologie, n. f.

• Dans **R** muni de sa topologie usuelle, les intervalles qui sont des ouverts sont **R**, ϕ, les intervalles des types $]a;b[$, $]a;\to)$, $(\leftarrow;b[$; ceux qui sont des fermés sont **R**, ϕ, les intervalles des types $[a;b]$, $[a;\to)$, $(\leftarrow;b]$. Ainsi, pour les intervalles bornés de **R**, l'emploi courant des termes "intervalle ouvert" et "intervalle fermé" se trouve-t-il justifié.

• Toujours dans **R**, les ensembles $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$, ainsi que
$]0;\frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3};\frac{3}{4}[\cup]\frac{4}{5};\frac{5}{6}[\cup\ldots$ sont des ouverts qui ne sont pas des intervalles. D'ailleurs les ouverts de **R** ne sont autres que les réunions finies ou dénombrables d'intervalles ouverts.

1.2. *Voisinages d'un point, d'une partie.*

On se place dans un espace topologique $(E;\ \mathcal{O})$.

1.2.1. On appelle *voisinage* d'un point a de E toute partie de E incluant un ouvert qui contient a. Les ouverts sont les parties de E qui sont voisinages de chacun de leurs points.

Plus généralement, on appelle *voisinage* d'une partie A de E toute partie de E qui inclut un ouvert incluant A.

Exemples : Dans **R** l'intervalle $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ est, pour tout réel ε strictement positif, un voisinage de a, mais il en est de même par exemple de $[a-\varepsilon;a+\varepsilon[$, $(\leftarrow;a+\varepsilon]$, **R**, $[a-2\varepsilon;\ a+\varepsilon[$, ou encore de $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]\cup\mathbf{Q}$.

1.2.2. On note usuellement $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a. Il est clair que a appartient à tous ses voisinages, que toute partie de E incluant un voisinage de a est elle-même un voisinage de a, et que l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a.

On montre, réciproquement, que toute famille $\mathcal{V}$ où, pour chaque a de E, $\mathcal{V}(a)$ est un ensemble de parties de E contenant a, est la famille des ensembles de voisinages des points de E pour une topologie (unique), dès que

$$\forall a\in E \quad \forall V\in\mathcal{V}(a)\ \forall W\supset V \qquad W\in\mathcal{V}(a)$$
$$\forall a\in E \quad \forall V,V'\in\mathcal{V}(a) \qquad V\cap V'\in\mathcal{V}(a)$$
$$\forall a\in E \quad \forall V\in\mathcal{V}(a)\quad \exists W\in\mathcal{V}(a)\quad [W\subset V \text{ et } \forall b\in W, V\in\mathcal{V}(b)]$$

Les ouverts de cette topologie sont les parties U de E telles que, pour tout a de U, U soit élément de $\mathcal{V}(a)$.

Une partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}(a)$ est dite une *base de voisinages* de a lorsque chaque voisinage de a inclut au moins une partie de E qui est élément de $\mathcal{U}$. Les voisinages de a sont alors les parties de E qui incluent au moins un élément de $\mathcal{U}$.

Exemples :

• Dans tout espace topologique les ouverts contenant a constituent une base de voisinages de a.

• Dans **R**, l'ensemble des intervalles $]\alpha\,;\,\beta[$ tels que $\alpha<a<\beta$ où α,β sont réels (resp. rationnels, resp. décimaux) est une base de voisinages de a ; il en est de même de l'ensemble des intervalles $]a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon[$ où $\varepsilon>0$, ou de l'ensemble des intervalles $]a-x_n\,;\,a+y_n[$ où (x_n) et (y_n) sont des suites strictement positives ayant pour limite 0.

Une partie $\mathcal{B}$ de la topologie $\mathcal{O}$ est une *base* de $\mathcal{O}$ lorsque, pour tout point a de E, l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ contenant a est une base de voisinages de a. Cela revient à dire que les ouverts de $\mathcal{O}$ sont les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemples dans **R** : les intervalles ouverts forment une base de la topologie usuelle ; on obtient encore une base de cette topologie en se restreignant aux intervalles ouverts bornés, ou encore aux intervalles ouverts d'extrémités rationnelles, ou encore aux intervalles ouverts de longueur au plus égale à 0,01.

Remarques :

• Dans **R**, pour tout point a l'ensemble $\mathfrak{J}_a$ des intervalles fermés qui contiennent a sans que a en soit une borne est une base de voisinages de a. En revanche la réunion $\mathfrak{J}$ de la famille $(\mathfrak{J}_a)_{a\in\mathbf{R}}$, soit encore l'ensemble des intervalles fermés de longueur non nulle, n'est pas une base de la topologie usuelle de **R**, puisque ce n'est pas un ensemble d'ouverts ; pourtant chaque ouvert de **R** est réunion (et même réunion dénombrable) d'éléments de $\mathfrak{J}$.

• On a vu qu'une base de voisinages de a (resp. une base de $\mathcal{O}$) est d'une certaine façon une partie génératrice de $\mathcal{V}(a)$ (resp. de $\mathcal{O}$) ; mais il n'y a pas ici de condition de minimalité, contrairement à l'usage du mot en Algèbre linéaire ; en général d'ailleurs, une topologie ne possède aucune base minimale (pour l'inclusion).

1.3. *Points et parties d'un espace topologique.*

Soit $(E\,;\,\mathcal{O})$ un espace topologique.

1.3.1. Un élément a de E est dit *point adhérent* à une partie A lorsque tout voisinage de a contient au moins un élément de A ; il

topologie, n. f.

est dit *point d'accumulation* de A lorsque tout voisinage de a contient au moins un élément de A autre que a. On voit qu'un élément de E est point adhérent à A ssi il appartient à A ou en est un point d'accumulation, ce qui n'est évidemment pas incompatible.

Les éléments de A qui ne sont pas points d'accumulation de A sont dits *points isolés* de A ; un point a de A en est un point isolé ssi a n'est pas adhérent à $A \smallsetminus \{a\}$.

Un point a est *intérieur* à A lorsque A est un voisinage de a. Un point non adhérent à A est dit aussi *extérieur* à A. Un point adhérent à A et à $\complement A$ est un *point-frontière* de A.

Exemples : Dans **R** muni de sa topologie usuelle,

- 10^{-12} est un point intérieur à $[0;1]$; 1 est un point-frontière, 3 est un point extérieur ;
- **Z** n'a pas de point intérieur ni de point d'accumulation ; tous ses points en sont des points isolés ;
- l'ensemble $\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbf{N}_*\}$ n'a pas de point intérieur, mais 0 en est un point d'accumulation ;
- -2 et π sont des points d'accumulation de l'ensemble $[-2;\ \pi[\cup \mathbf{Z}$, 7 en est un point isolé, -2, π, 7 en sont des points-frontière, 0 en est un point intérieur.

1.3.2. L'ensemble des points adhérents à une partie A est l'*adhérence* de A et se note $\overline{A}$. On vérifie que c'est aussi la *fermeture* de A, c'est-à-dire la plus petite partie fermée incluant A, laquelle n'est autre que l'intersection de tous les fermés incluant A (ne pas confondre avec "l'opération fermeture" décrite ci-dessous).

L'ensemble des points intérieurs à A est l'*intérieur* de A et se note $\overset{\circ}{A}$; on vérifie que c'est le plus grand ouvert inclus dans A.

L'ensemble des points extérieurs à A est l'*extérieur* de A ; c'est à la fois le complémentaire de $\overline{A}$ et l'intérieur de $\complement A$.

L'ensemble des points-frontière de A s'appelle la *frontière* de A et se note $\mathrm{fr}(A)$; on montre que c'est un fermé, et que l'intérieur de A, l'extérieur de A et la frontière de A constituent une partition de E.

L'ensemble des points d'accumulation de A s'appelle *ensemble dérivé* de A et se note A' ; A est fermé ssi $A' \subset A$; on dit que A est *parfait* lorsque $A' = A$ (historiquement, l'étude, faite par Cantor, des ensembles dérivés successifs des parties de $\mathbf{R}$ a donné naissance à la théorie des ordinaux).

L'application $\varphi : A \longmapsto \overline{A}$ vérifie, pour tous A, B de $\mathcal{P}(E)$,

(1) $\varphi(A) \supset A$

(2) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$

(3) $\varphi(\phi) = \phi$

(4) $\varphi\big(\varphi(A)\big) = \varphi(A)$.

L'application $\omega : A \longmapsto \mathring{A}$ vérifie, pour tous A,B de $\mathcal{P}(E)$, les propriétés duales :

(1′) $\omega(A) \subset A$

(2′) $\omega(A \cap B) = \omega(A) \cap \omega(B)$

(3′) $\omega(E) = E$

(4′) $\omega\big(\omega(A)\big) = \omega(A)$

Réciproquement, soit E un ensemble ; appelons *fermeture* (resp. *ouverture*) sur E toute application φ (resp. ω) de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (1), (2), (3), (4) (resp. (1′), (2′), (3′), (4′)). Il existe alors une unique topologie sur E telle que, pour toute partie A de E, on ait $\varphi(A) = \overline{A}$ (resp. $\omega(A) = \mathring{A}$).

En effectuant alternativement fermeture et ouverture on fait apparaître, pour toute partie A, sept parties pouvant être distinctes : A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$. On a en effet : $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$. Outre les égalités, les inclusions toujours vérifiées entre ces parties sont celles qui sont indiquées dans le diagramme ci-contre, ou en découlent par transitivité.

topologie, n. f.

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{A} & & \overline{\mathring{\overline{A}}} \arrow[ll] & \\
A \arrow[ur] & & \overline{\mathring{A}} \arrow[ur] & & \mathring{\overline{A}} \arrow[ul] \\
 & \mathring{A} \arrow[ul] \arrow[rr] & & \mathring{\overline{\mathring{A}}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ces parties sont toutes distinctes dans l'exemple : $E = \mathbf{R}$, $A = (]0;1[\cap \mathbf{Q}) \cup [2;3[\cup]3;4] \cup \{5\}$; de plus il n'y a pas d'autre inclusion entre elles.

1.3.3. Soit A une partie de l'espace topologique E et soit x un point de E. Nous dirons que la partie A est *dense en* x lorsque tout voisinage de x contient un ouvert inclus dans A. Nécessairement x est alors un point adhérent à A.

Exemples dans $\mathbf{R}$:

- $]0;1]$ est dense en 0 ;
- L'ensemble A des inverses d'entiers naturels n'est pas dense en 0, bien que 0 soit adhérent à A.

L'ensemble A est dit *partout dense,* ou *dense dans E* lorsqu'il est dense en tout point de E. Il revient au même de dire que $\overline{A} = E$ ou encore que tout ouvert non vide de E rencontre A.

L'ensemble A est dit *nulle part dense* ou encore *rare*, ou encore *non dense*, lorsqu'il n'est dense en aucun point. Il revient au même de dire que $\overline{A}$ n'a aucun point intérieur. On prendra garde que "non dense" n'est pas la négation de "dense". Toute réunion finie d'ensembles rares est un ensemble rare. Les réunions dénombrables d'ensembles rares s'appellent ensembles *maigres* ou *de première catégorie.* Lorsque dans E tout ensemble maigre est d'intérieur vide, on dit que E est un *espace de Baire :* le théorème de Baire affirme que $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ et plus généralement les espaces métriques complets sont des espaces de Baire [MÉTRIQUE].

Exemples dans **R** :

- les ensembles **Q** et **R** — **Q** sont partout denses ;
- l'ensemble **Q** est maigre ;
- l'ensemble triadique de Cantor, c'est-à-dire l'ensemble des réels dont un développement (propre ou impropre) en base trois ne comporte que des 0 et des 2, est rare, bien que non dénombrable.

On rencontre d'autres acceptions du mot "dense" ; un ensemble A est dit souvent "dense en lui-même" lorsqu'il n'a aucun point isolé (i.e. $A' \supset A$), ce qui ne correspond pas à la notion de "dense en tous ses points".

1.3.4. Soit $(E; \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de E ; l'ensemble $\mathcal{O}_A$ des traces dans A des ouverts de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire l'ensemble $\{U \cap A\ ;\ U \in \mathcal{O}\}$, est une topologie sur A, appelée *topologie induite* par $\mathcal{O}$ sur A. On appelle *sous-espace topologique* de $(E; \mathcal{O})$ tout espace topologique $(A; \mathcal{Q})$ où $A \subset E$ et où $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_A$.

Les ouverts de E qui sont inclus dans A sont des ouverts de A ; mais la réciproque n'est vraie que si A est lui-même un ouvert de E.

Exemples :

- Prenons $E = \mathbf{R}$ et $A = [0\,;1]$; alors $[0\,;\frac{1}{2}[$ est un ouvert de A qui n'est pas un ouvert de E.
- Prenons $E = \mathbf{R}^2$ et soit A un cercle : un arc de A de longueur non nulle privé de ses extrémités est un ouvert de A qui n'est pas un ouvert de E.

Remarque. En adjoignant A à l'ensemble des ouverts de E qui sont inclus dans A, on obtiendrait une topologie $\mathcal{O}'_A$ sur A, qui est en général distincte de la topologie induite $\mathcal{O}_A$ et moins fine qu'elle. Ainsi, reprenons $E = \mathbf{R}$ et $A = [0\,;1]$; les éléments de $\mathcal{O}_A \setminus \mathcal{O}'_A$ sont les ensembles, autres que $[0\,;1]$, de la forme $U \cup V$ où U est un élément de $\mathcal{O}'_A$ et V une partie non vide de $\{0\,;1\} \cap \overline{U}$: par exemple $[0\,;\frac{1}{2}[$, qui est la réunion de $]0\,;\frac{1}{2}[$, et de $\{0\}$.

Dans l'exemple où A est un cercle de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{O}'_A$ n'est autre que la topologie grossière.

Les fermés du sous-espace A de E sont les traces sur A des fermés de E. Les fermés de E qui sont inclus dans A sont des fermés de A ; la réciproque n'est vraie que si A est lui-même un fermé de E.

Exemple : Prenons $E = \mathbf{R}$ et $A = \mathbf{Q}$; alors $\{x ; x \in \mathbf{Q} / x^2 < 2\}$ est à la fois un ouvert et un fermé de A.

Soit a un point de A ; les voisinages dans A de a sont les traces dans A des voisinages de a dans E.

Exemple : Prenons $E = \mathbf{R}$ et $A = \mathbf{Q}$; alors $\left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[\cap \mathbf{Q}$ est un voisinage de 1 dans A sans en être un dans E.

Soit X une partie de A ; l'adhérence de X dans A n'est autre que la trace dans A de l'adhérence de X dans E. Par contre, on n'a pas en général une propriété analogue en ce qui concerne l'intérieur ; par exemple l'intérieur de A dans A est lui-même, donc (sauf si A est un ouvert de E) diffère de l'intérieur de A dans E.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété sur les espaces topologiques (par exemple : être discret, compact, connexe (voir ci-dessous). On dit que la partie A de l'espace topologique $(E ; \mathcal{O})$ vérifie $\mathcal{P}$ lorsque le sous-espace $(A ; \mathcal{O}_A)$ la vérifie. Ainsi une partie A de E est discrète lorsque la topologie $\mathcal{O}_A$ est discrète, c'est-à-dire lorsque tout point de A est isolé ou lorsque A ne contient aucun de ses points d'accumulation (donc $A \cap A' = \phi$).

Exemples : Dans $\mathbf{R}$, les parties $\mathbf{Z}$ et $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ sont discrètes ; mais on remarquera que $\overline{A}$ n'est pas une partie discrète.

Une propriété $\mathcal{P}$ portant sur les espaces topologiques est dite *héréditaire* (resp. *faiblement héréditaire*) lorsque tout sous-espace topologique (resp. tout sous-espace topologique fermé) a lui-même la propriété $\mathcal{P}$.

Exemples :

• Les propriétés désignées par les qualificatifs "discret", "métrisable" [MÉTRIQUE] "séparé" (v. ci-dessous), "complètement régulier" [SÉPARATION] sont des propriétés héréditaires.

• La compacité (v. ci-dessous) et la compacité locale [LOCAL] sont des propriétés faiblement héréditaires, sans être héréditaires.

• La connexité et la connexité par arcs (v. ci-dessous) ne sont pas même faiblement héréditaires [CONNEXE].

• La propriété "être un espace de Baire" n'est pas même faiblement héréditaire ; cependant tout ouvert d'un espace de Baire est lui-même un espace de Baire.

1.4. Morphismes.

1.4.1. Les morphismes d'espaces topologiques sont les applications continues, c'est-à-dire continues en tout point [CONTINU, adj., *1.2.2.*]. On rappelle qu'une application f est continue au point a lorsque l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ des bases de voisinages de a et de $f(a)$ respectivement : pour que f soit continue en a, il suffit que l'image réciproque de tout élément de $\mathcal{U}'$ contienne un élément de $\mathcal{U}$ (c'est de ce théorème que découle la possibilité de ne raisonner qu'avec les "ε" et les "α" pour traiter des questions de continuité).

Une application f d'un espace topologique $(E\,;\mathcal{O})$ dans un espace topologique $(F;\mathcal{O}')$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E, ou encore l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

Remarque. En général l'image directe d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue n'est pas un ouvert (resp. fermé). On dit qu'une application g de E dans F est *ouverte* (resp. *fermée*) lorsque l'image directe par g de tout ouvert (resp. fermé) de E est un ouvert (resp. fermé) de F.

Exemples :

• L'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est continue et fermée mais non ouverte, car l'ouvert $]-2;3[$ a pour image $[0;9[$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbf{R}$.

• L'application sinus de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est continue mais n'est ni ouverte ni fermée, car son ensemble-image n'est pas un ouvert de $\mathbf{R}$, et l'image du fermé $\{2n\pi + \frac{1}{n}\,;\, n\in\mathbf{N}_*\}$ est la partie $\{\sin \frac{1}{n}\,;\, n\in\mathbf{N}_*\}$ qui n'est pas un fermé de $\mathbf{R}$.

• L'application caractéristique de la partie $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{R}$ est une application de $\mathbf{R}$ dans $\{0;1\}$ qui est ouverte et fermée, mais n'est pas continue.

• L'application arctan de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est continue, ouverte et non fermée, car l'image du fermé $[1\,;\,\rightarrow)$ est $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, qui n'est pas un fermé de $\mathbf{R}$.

• Les applications continûment différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, dont le jacobien ne s'annule pas, sont ouvertes.

• L'application canonique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$: $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est continue, ouverte et fermée.

On montre qu'une application f de E dans F est continue (resp. ouverte, resp. fermée) ssi pour toute partie A de E on a

$$\vec{f}(\bar{A}) \subset \overline{\vec{f}(A)} \quad \left(\text{resp. } \vec{f}(\bar{A}) \supset \overline{\vec{f}(A)}\ , \text{ resp. } \vec{f}(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\overline{\vec{f}(A)}}\ \right)$$

1.4.2. Les isomorphismes d'espaces topologiques sont les *homéomorphismes.* On dit que les espaces topologiques E et F sont *homéomorphes* lorsqu'il existe au moins un homéomorphisme de E sur F.

Exemple : Les parties de $\mathbf{R}^2$ représentées par les caractères E, F, T, Y sont deux à deux homéomorphes. On notera qu'il n'en serait pas de même si l'on utilisait d'autres types de caractères.

Une application bijective f de E sur F est un homéomorphisme ssi f et f^{-1} sont continues, ou encore ssi f est continue et ouverte ou encore ssi f est continue et fermée. En général il ne suffit pas que f soit continue.

Exemple : Soit E le sous-espace $[0\,;\,1[\,\cup\,[2\,;\,3]$ de $\mathbf{R}$ et F le sous-espace $[0\,;\,2]$ de $\mathbf{R}$: l'application $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}\mathrm{E}(x)$ est continue, bijective, mais son application réciproque n'est pas continue en 1.

Cependant, pour certains choix des espaces topologiques E et F, toutes les applications bijectives continues de E sur F sont des homéomorphismes. C'est le cas notamment lorsque E et F sont des intervalles réels, car toute application continue injective définie sur un intervalle et à valeurs réelles est strictement monotone, et aussi lorsque E et F sont des espaces compacts (v. ci-dessous).

En particulier, soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ des topologies sur E ; $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$ ssi l'application identique est continue de $(E, \mathcal{O})$ dans $(E\,;\ \mathcal{O}')$. Soit E un espace topologique et soit A un sous-espace de E : l'injection canonique j de A dans E est continue ; la topologie induite [*1.3.4.*] est, sur A, la moins fine des topologies qui rendent j continue.

1.4.3. Soit $\mathcal{T}$ une propriété vérifiée par certains espaces topologiques. On dit que la propriété $\mathcal{T}$ est *topologique* lorsque tout espace topologique homéomorphe à un espace ayant la propriété $\mathcal{T}$ a lui-même la propriété $\mathcal{T}$.

Cette notion prend surtout de l'intérêt lorsqu'elle s'applique à des espaces munis de structures additionnelles compatibles avec leurs topologies (distances, ordres, structures algébriques) et que la propriété $\mathcal{T}$ s'exprime généralement à l'aide de ces structures.

Lorsque l'image par une application continue de tout espace topologique ayant la propriété $\mathcal{T}$ est un espace ayant la propriété $\mathcal{T}$, nous dirons que la propriété $\mathcal{T}$ est *sur-topologique.*

Exemples :

- La propriété "être séparable" (c'est-à-dire : posséder une partie dénombrable et partout dense) est topologique et même sur-topologique.

- La propriété "être discret" est topologique, mais non sur-topologique. Ainsi, soit E le sous-espace $\mathbf{N}$ de $\mathbf{R}$, et F le sous-espace $\{0 ; 1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4}; \ldots\}$; l'application de E sur F

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$ est continue; or E est discret et F ne l'est pas.

- Pour les sous-espaces topologiques de $\mathbf{R}$, la propriété "être borné" n'est pas topologique; ainsi les intervalles $]0;1[$ et $]0;\rightarrow)$ sont homéomorphes par la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$.

- Les propriétés "être connexe", "être compact" sont topologiques et même sur-topologiques. La propriété "être séparé" n'est que topologique (voir ci-dessous).

2. Propriétés d'espaces topologiques.

2.1. *Connexité.* On dit que E est *connexe* lorsque E et ϕ sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées. Cette propriété est sur-topologique.

Exemple : Dans l'espace des matrices réelles carrées d'ordre n, muni de sa topologie usuelle [1.1.], le sous-espace des matrices orthogonales n'est pas connexe ; en effet le sous-ensemble des matrices de déterminant $+1$ et celui des matrices de déterminant -1 sont deux parties à la fois ouvertes et fermées.

topologie, n. f.

Pour ce qui concerne la connexité et les notions apparentées voir CONNEXE.

2.2. *Séparation.* On dit que l'espace E est *séparé* lorsque deux points quelconques distincts de E possèdent des voisinages disjoints ; on dit aussi que E est un *espace de Hausdorff.* Cet axiome permet d'affirmer que toute application à valeurs dans E ayant une limite en un point n'en a qu'une en ce point. Cette propriété est topologique, mais non sur-topologique.

Un exemple de topologie non séparée est donné ci-dessous (3ème exemple de **3.3.**). On peut définir diverses notions de séparation [SÉPARATION].

2.3. *Compacité.* Soit E un espace séparé. On dit que E est un espace *compact* lorsque de tout ensemble d'ouverts de E dont la réunion est E on peut extraire un sous-ensemble fini dont la réunion est E. En particulier, tout segment de $\mathbf{R}$ vérifie cette propriété (théorème de Borel-Lebesgue).

Cette propriété est sur-topologique et héréditaire.

Exemple : Les sous-espaces compacts de $\mathbf{R}^n$ sont ses parties fermées bornées.

Voir COMPACT pour la notion de compacité et les notions voisines.

3. Engendrement de topologies.

3.1. *Les topologies sur un ensemble.*

3.1.1. La relation "être moins fine que" [*1.1.1*] est une relation d'ordre réflexive dans l'ensemble des topologies sur un ensemble E. Dans cet ensemble ordonné, toute partie non vide a une borne supérieure et une borne inférieure. Ces propriétés permettent de définir "la plus fine parmi les topologies qui..." ou "la moins fine parmi les topologies qui...''. On l'a déjà vu pour la topologie induite [*1.4.2.*].

3.1.2. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. La moins fine des topologies pour lesquelles tout élément de $\mathcal{A}$ est un ouvert s'appelle la *topologie engendrée par* $\mathcal{A}$. Notons $\mathcal{A}'$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$; alors la topologie engendrée par $\mathcal{A}$ n'est autre que celle dont les ouverts sont E, ϕ, et l'ensemble des réunions (finies ou non) d'éléments de $\mathcal{A}'$. On dit que $\mathcal{A}$ est une *sous-base* de la topologie $\mathcal{O}$ lorsque $\mathcal{O}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{A}$ et que E est la réunion des éléments de $\mathcal{A}$.

Une sous-base $\mathcal{A}$ d'une topologie en est une base [*1.2.2.*] ssi pour tout x de E l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ contenant x est une base de filtre [FILTRE].

3.2. *Topologie de l'ordre.* Dans tout ensemble totalement ordonné $(E;\prec)$ appelons *topologie de l'ordre* $\prec$ la topologie engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts et des sections ouvertes d'extrémités quelconques [ORDONNÉ, *4.3.2*].

Exemples : Dans **R** la topologie usuelle est aussi la topologie associée à l'ordre usuel ; il en est de même pour $\ddot{\mathbf{R}}$ et pour **Q**.

Remarque. Les intervalles ouverts de E, avec ou sans extrémités [ORDONNÉ, *4.3.4*], engendrent aussi la topologie de l'ordre.

Soit F une partie de E : la topologie induite par E sur F et la topologie de l'ordre induit par E sur F ne coïncident pas nécessairement.

Exemple : Soit A le complémentaire de $]-1;0]$ dans **R** ; dans A muni de la topologie de l'ordre induit par l'ordre de **R**, on a $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = -1$. Du reste, en tant qu'ensembles ordonnés, A et **R** sont isomorphes ; ils sont donc homéomorphes quand on les munit chacun de la topologie de son ordre.

Dans le cas d'un ensemble ordonné, non nécessairement totalement, on utilise aussi une autre topologie associée à l'ordre, dite *topologie de l'arbre*, engendrée par les sections commençantes ouvertes.

3.3. *Topologies associées à des distances.*

3.3.1. Soit d une distance ou, plus généralement, un écart sur un ensemble E [MÉTRIQUE], cet écart pouvant éventuellement prendre la valeur $+\infty$. La topologie engendrée par l'ensemble des boules ouvertes de l'espace métrique $(E\,;\,d)$ sera dite *associée* à d ; les voisinages d'un point x sont les parties de E qui incluent au moins une boule ouverte de centre x. Les boules ouvertes de centre x constituent donc une base de voisinages de x. Il en est de même des boules fermées de centre x et de rayon non nul. L'ensemble des boules ouvertes est une base de la topologie de E.

Lorsque E est un espace affine sur un espace vectoriel muni d'une (semi-)norme N [NORME], et que d est la distance associée à N, la topologie associée à d est dite aussi associée à N.

Des distances (resp. écarts, semi-normes, normes) sont dites *topologiquement équivalentes* lorsqu'elles définissent la même topologie sur E. Inversement une topologie est dite *métrisable* lorsqu'il existe au moins une distance à laquelle elle est associée. Toute topologie métrisable est séparée, mais ce n'est pas en général le cas pour les topologies associées à des écarts.

Les normes sur un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie sont toutes topologiquement équivalentes et même équivalentes [MÉTRIQUE]. Sur $\mathbf{R}^n$ ou, plus généralement, sur tout espace vectoriel réel de dimension finie, elles donnent la topologie usuelle [*1.1.1.*].

Exemples :

- La topologie usuelle de $\mathbf{R}$ est associée à la distance usuelle de $\mathbf{R}$: $(x;y) \longmapsto |x-y|$.

- $(x;y) \longmapsto |\arctan x - \arctan y|$ est une distance sur $\mathbf{R}$ topologiquement équivalente à la distance usuelle; cependant $\mathbf{R}$, muni de cette distance, est borné.

- $(x;y) \longmapsto |x^2-y^2|$ est un écart sur $\mathbf{R}$; il engendre une topologie non séparée pour laquelle la paire $\{-1\,;1\}$ est connexe.

3.3.2. Soit D un ensemble de distances (ou d'écarts) sur E. Pour chaque point a de E, chaque famille $r = (r_d)_{d \in D}$ de réels strictement positifs indexée par D permet de définir pour chaque distance d une boule ouverte de centre a et de rayon r_d; nous appellerons multi-boule ouverte de centre a et de multi-rayon r l'intersection de toutes ces boules. La topologie engendrée par l'ensemble de toutes les multi-boules ouvertes ainsi construites dans E est dite associée à l'ensemble de distances D.

L'ensemble F étant muni d'une distance (ou d'un écart) d, et E étant un ensemble quelconque, pour chaque x de E l'application $d_x : (f; g) \mapsto d(f(x); g(x))$ est un écart sur l'ensemble F^E des applications de E dans F. L'application
$\delta : (f; g) \mapsto \mathrm{Sup}\{d(f(x); g(x)\}$ est également un écart sur F^E.
La topologie associée à l'ensemble D des écarts d_x est dite *topologie de la convergence simple.* Pour cette topologie, une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une fonction f pour limite ssi, pour chaque x de E, la suite des $f_n(x)$ admet $f(x)$ pour limite. La topologie associée à l'écart δ est dite *topologie de la convergence uniforme.* Elle est plus fine que la topologie de la convergence simple. Si l'écart d est une distance sur F, les deux topologies sont séparées.

Exemple : la suite des fonctions de $[0; 1[$ dans $\mathbf{R}$: $x \mapsto x^n$ converge simplement vers la fonction nulle alors qu'elle n'admet pas de limite pour la topologie de la convergence uniforme.

3.4. *Construction de topologies à partir de topologies sur d'autres ensembles.* Soit E un ensemble qu'on cherche à munir d'une topologie.

3.4.1. Soit f une application de E dans un espace topologique $(E'; \mathcal{O}')$; l'ensemble des images réciproques des ouverts de E' est une topologie sur E ; on l'appelle *topologie-image réciproque* de $\mathcal{O}'$ par f ; c'est la moins fine des topologies sur E qui rendent f continue.

3.4.2. Soit f une application surjective d'un espace topologique $(E'; \mathcal{O}')$ sur E. L'ensemble des images directes des ouverts de E' engendre une topologie sur E ; on appelle celle-ci *topologie transportée* ou *image* de $\mathcal{O}'$ par f. C'est la plus fine des topologies sur E qui rendent f continue ; ses ouverts sont les parties de E dont les images réciproques sont des ouverts de E'. Lorsque l'application f est bijective, elle est un homéomorphisme de E' sur l'espace E muni de sa topologie transportée.

Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique E' ; la *topologie-quotient* sur $E'/\mathfrak{R}$ est la topologie image de celle de E' par la surjection canonique.

3.4.3. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'espaces topologiques dont E soit la réunion. On suppose que pour tous éléments F et F' de $\mathcal{F}$ les topologies induites par F et F' sur leur intersection coïncident. On appelle *topologie faible sur E relativement à* $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de E dont la trace sur chaque élément F de $\mathcal{F}$ est un ouvert de F. C'est la plus fine des topologies qui rendent continues toutes les injections canoniques des éléments de $\mathcal{F}$ dans E. Une application définie sur E muni de la topologie faible associée à $\mathcal{F}$ et à valeurs dans un espace topologique quelconque est continue ssi ses restrictions aux éléments de $\mathcal{F}$ sont continues.

3.4.4. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espaces topologiques non vides dont E soit le produit.

On appelle *ouverts élémentaires* de E les produits $\prod_{i \in I} U_i$ où, pour tout i, U_i est un ouvert de E_i égal à E_i sauf pour un nombre fini d'indices i. On appelle *topologie-produit* sur E la topologie engendrée par les ouverts élémentaires. C'est la moins fine des topologies qui rendent continues toutes les projections canoniques de E sur les E_i. L'ensemble E étant muni de sa topologie-produit, une application d'un espace topologique quelconque dans E est continue ssi pour tout i sa composée avec la projection canonique de E sur E_i est continue.

Exemple : la topologie usuelle de $\mathbf{R}^n$ n'est autre que la topologie-produit de n copies de $\mathbf{R}$.

On appelle *topologie forte* ou *topologie-boîte* sur E la topologie engendrée par les produits $\prod_{i \in I} U_i$, où, pour chaque i, U_i est un ouvert de E_i. Cette topologie est plus fine que la topologie-produit; les deux topologies coïncident dans le cas où I est fini, la topologie-boîte est strictement plus fine que la topologie-produit dans le cas où une infinité des E_i ne sont pas munis de la topologie grossière.

3.4.5. Considérons un système projectif [LIMITE, 6] constitué par une suite d'espaces topologiques $(E_n; \mathcal{O}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et une famille p d'applications continues $p_{n,m}$ de E_n dans E_m. La limite projective de la suite d'ensembles $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ relativement à la famille p est la partie A *de* $\prod_{n \in \mathbf{N}} E_n$ dont les éléments sont les $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tels que, pour tous naturels m et n, on ait $p_{n,m}(x_n) = x_m$. On appelle *limite projective* sur A de la suite $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ relativement à p la topologie induite sur A par la topologie-produit sur $\prod_{n \in \mathbf{N}} E_n$.

3.4.6. On définit de façon similaire la *limite inductive* d'une suite de topologies $\mathcal{O}_n$ sur des ensembles organisés en un système inductif $\left((E_n)_{n \in \mathbf{N}}; j\right)$ pour lequel chaque $j_{n,m}$ est une application continue ; c'est la topologie sur l'ensemble limite inductive du système, topologie-quotient [*3.4.2*] de la topologie faible [*3.4.3*] sur la somme des ensembles E_n.

4. Compatibilité entre structures algébriques et topologies.

La compatibilité entre une structure algébrique et une ou des topologie(s) consiste en la continuité des applications qui définissent la structure algébrique. Mais on ne se contente pas de la continuité des opérations de base de la structure algébrique, on exige aussi que soient continues toutes les applications dont les axiomes imposent l'existence.

4.1. *Groupes topologiques.* Ainsi, un groupe est un quadruple $(E; *; e; s)$ où $*$ est une loi interne associative dans E (donc une application de $E \times E$ dans E), où e est un élément de E, neutre

topologie, n. f.

pour$*$, et où s est une application de E dans E, telle que, pour tout x de E, on ait $x * s(x) = e = s(x) * x$. On dit que cette structure de groupe *respecte* une topologie $\mathcal{O}$ de E, ou que $\mathcal{O}$ est *compatible* avec elle, ou encore que $(E; *; e; s; \mathcal{O})$ est un *groupe topologique* lorsque $*$ et s sont des applications continues, E étant muni de la topologie $\mathcal{O}$ et $E \times E$ de la topologie-produit associée.

Exemples :

• La topologie discrète et la topologie grossière sont, sur tout groupe, compatibles avec la structure de groupe.

• Dans l'espace topologique des matrices réelles carrées d'ordre n, le groupe des matrices inversibles est un groupe topologique ; il en est de même du groupe orthogonal.

4.2. *Autres structures algébrico-topologiques.* On définit de manière analogue les anneaux topologiques, les corps topologiques, les espaces vectoriels topologiques, les algèbres topologiques, les groupes topologiques ordonnés, etc. Dans le cas des corps on n'oubliera pas d'exiger la continuité de l'application $x \mapsto x^{-1}$.

Exemples :

• Tout corps valué, en particulier **Q**, **R** et **C**. est canoniquement un corps topologique.

• La topologie associée à la norme de tout espace vectoriel normé fait de celui-ci un espace vectoriel topologique.

On peut définir dans les espaces vectoriels topologiques des notions algébrico-topologiques qui, dans les espaces de dimension infinie, ne coïncident généralement pas avec les notions algébriques dont elles sont issues, tout en portant bien souvent le même nom. Ainsi on parle de famille topologiquement libre, topologiquement génératrice (ou encore totale), de base topologique, de base de Hilbert, de dual topologique, [DUALITÉ], etc. Pour éviter les confusions, on emploie en général l'adjectif "topologique" pour désigner ces nouvelles notions, et parfois l'adjectif "algébrique" pour les notions mères ; mais on prendra garde que ces précisions sont souvent omises dans les ouvrages spécialisés.

5. Quelques théories mathématiques apparentées à la topologie.

5.1. *La topologie dynamique.* Le concept de topologie dynamique a été introduit en 1970 par G. Whyburn pour désigner la partie de la topologie reposant sur l'étude des fonctions.

A cette branche se rattache l'étude de la décomposition d'un espace topologique associée à une application de cet espace dans un autre espace topologique, c'est-à-dire la partition en images réciproques des singletons par cette application ; on impose généralement à celle-ci des conditions particulières.

On y rencontre aussi l'étude fine de la connexité : caractérisation des arcs simples par les points de coupure, théorème de Jordan sur le séparation du plan en deux régions par une courbe simple [COURBE].

5.2. *La topologie différentielle.* Elle a pour objet l'étude des propriétés topologiques des variétés différentiables. Comme exemple de problème relevant de cette branche, signalons la classification des surfaces de $\mathbf{R}^3$. On y montre que toute sous-variété différentiable de $\mathbf{R}^3$, de dimension 2, compacte, connexe et orientable est homéomorphe à une sphère à laquelle on a rattaché un certain nombre de "poignées". On y montre aussi que toute variété différentiable de dimension 2, compacte, connexe et non orientable est homéomorphe à une sphère dans laquelle on a d'abord percé un certain nombre de "trous" puis dont on a identifié, pour chaque trou, les points "diamétralement opposés".

5.3. *La topologie algébrique.* Elle a pour but d'associer aux espaces topologiques des êtres algébriques (groupes, modules, algèbres) et aux applications continues des morphismes des structures utilisées. A des espaces homéomorphes est associé le même être algébrique. On parle alors d'invariants algébriques pour ces espaces ou ces fonctions. On peut alors simplifier la résolution de certains problèmes topologiques. Par exemple,

topologie, n. f.

pour montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes, il suffit de trouver un invariant algébrique différent pour l'un et pour l'autre. On en tire aussi des résultats sur la théorie des points de coïncidence entre fonctions (i.e. : trouver pour des fonctions f et g les points x tels que $f(x) = g(x)$) ; ainsi le théorème de Borsuk-Ulam assure, pour toute application continue f de la sphère-unité centrée à l'origine de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, l'existence d'un point x tel que $f(x) = f(-x)$.

Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

LA MATHÉMATIQUE PARLÉE PAR CEUX QUI L'ENSEIGNENT

connexe
filtre
ordonné
ordre
topologie

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public - 1986 N° 62