

Etym. : lat. de basse époque *nucale* (semblable à une noix), provençal anc. *nogalh* ; a peut-être subi l'influence du lat. populaire *nodellus* (nœud). Les équivalents germaniques, all. *Kern*, angl. *kernel*, qui ont donné naissance à la notation *Ker*, se rattachent à la famille de *grain*.

Le sens pr. (partie centrale de certains fruits) se retrouve parfois en géométrie sous forme un peu vague : ainsi certains parlent du « noyau » de la surface des ondes de Fresnel. Mais c'est plutôt le sens fig. (partie essentielle ou génératrice d'un tout) qui est à l'origine des sens math. spécialisés.

1. Algèbre.

1.1. Noyau d'un homomorphisme de groupe. Étant donné un homomorphisme f d'un groupe G dans un groupe H , on sait que l'image réciproque de tout sous-groupe de H est un sous-groupe de G ; en particulier, si e est l'élément neutre de H , l'ensemble des éléments de G qui ont e pour image forme un sous-groupe de G , et même un sous-groupe distingué : c'est ce sous-groupe qu'on appelle *noyau* de l'homomorphisme f ; on le note usuellement $\text{Ker}(f)$. Si f est injective, $\text{Ker}(f)$ ne contient que l'élément neutre de E ; la réciproque de cette proposition est vraie.

1.2. Noyau d'un homomorphisme d'anneau. Tout homomorphisme d'anneau est nécessairement un homomorphisme de groupe pour le groupe additif de l'anneau ; ici, de plus, le noyau de cet homomorphisme de groupe est un sous-anneau et même un idéal. On l'appelle aussi noyau de l'homomorphisme d'anneau ; si l'anneau est un corps, tout homomorphisme de corps étant injectif, le noyau se réduit à l'élément neutre (zéro) du groupe additif.

1.3. Noyau d'un homomorphisme d'espace vectoriel. De même, si f est un homomorphisme d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F , $\text{Ker}(f)$ est l'image réciproque du vecteur nul

de F ; on montre que c'est un sous-espace vectoriel de E , et que, si E est de dimension finie,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim f^+(E)$$

Si l'on désigne E par $\operatorname{def}(f)$, et par $\operatorname{Im}(f)$ l'image $f^+(E)$ de E par f , cette formule peut encore s'écrire

$$\dim \operatorname{def}(f) = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$$

2. Analyse.

On se placera dans l'espace vectoriel complexe F des fonctions définies sur une partie compacte E de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et à module de carré sommable; N désignera une fonction définie sur $E \times E$ à valeurs complexes et à module de carré sommable.

2.1. Noyau d'une transformation intégrale. L'application h qui à toute fonction f de F associe la fonction $x \mapsto \int_E N(x, t) f(t) dt$ est dite *transformation intégrale de noyau* N ; on démontre que c'est un endomorphisme de F .

2.2. Noyaux d'équations intégrales. Considérons les équations intégrales de type Volterra-Fredholm :

$$\lambda f = h(f) + g \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

où g est une fonction donnée, f la fonction inconnue et h l'endomorphisme ci-dessus : N est alors appelé *noyau* de l'équation intégrale.

Une méthode générale d'intégration consiste à former les *noyaux itérés* :

$$N_1 = N$$

$$N_{n+1}(x, t) = \int_E N_n(x, u) N(u, t) du$$

puis, sous réserve de convergence, le *noyau résolvant* $N^* = \sum_{1 \leq n} \frac{N_n}{\lambda^n}$ auquel est attaché l'endomorphisme h^* ; on obtient finalement

$$f = \frac{1}{\lambda} [g + h^*(g)]$$

Remarque: Il existe d'autres noyaux intégraux (noyaux de Poisson) et des noyaux de distribution, non intégraux, qui généralisent les précédents. On pourra consulter : Leçons d'Analyse fonctionnelle, de Riesz Nagy.

3. Théorie des graphes.

En théorie des graphes le mot *noyau* est aussi utilisé dans le sens suivant. Étant donné un graphe G sur un ensemble E , c'est-à-dire un sous-ensemble de $E \times E$, on dit qu'une partie N de E est un *noyau* du graphe G si et seulement si, en désignant par Γ_x la coupe de G suivant x :

$$\forall x \in N, \Gamma_x \cap N = \emptyset \quad \text{et} \quad \forall x \in \bigcup_E N, \Gamma_x \cap N \neq \emptyset$$

Cette notion est particulièrement intéressante dans le cas d'un graphe représentant une *relation de préférence*. En effet, si N est un noyau pour cette relation, cela signifie d'une part qu'aucun élément de N ne peut être préféré à un autre élément de N , mais d'autre part qu'à tout élément de E n'appartenant pas à N on peut préférer au moins un élément de N .