

Ce mot n'est employé que par les mathématiciens, avec un sens qui découle clairement de sa formation.

N. B. Dans toute cette notice,  $K$  désigne un corps commutatif.

## Applications multilinéaires

1.1 Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n$  ( $n \geq 2$ ) et  $F$  des espaces vectoriels sur  $K$ ,  $f$  une application de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  dans  $F$ . Assignant une valeur à l'indice  $i$ , et fixant un vecteur  $x_j$  dans chaque espace  $E_j$  dont l'indice  $j$  diffère de  $i$ , on considère l'application partielle qui à chaque vecteur  $x_i$  de  $E_i$  associe la valeur  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . On dit que  $f$  est *n-linéaire* si et seulement si pour chaque  $i$  et pour tous les choix des  $x_j$  toutes les applications partielles sont linéaires. Lorsque  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ), on dit *bilinéaire* (resp. *trilinéaire*); le terme *multilinéaire* englobe tous les cas où  $n \geq 2$ .

On a exclu le cas où  $n = 1$ , pour lequel  $f$  serait linéaire. En effet il faut se garder de confondre les deux notions, une application multilinéaire ne pouvant être linéaire que dans le cas de l'application nulle. Si  $f$  et  $g$  sont définies sur  $E_1 \times E_2$ ,  $f$  étant bilinéaire et  $g$  linéaire, on a :

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)$$

alors que

$$g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2),$$

et de même:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 f(x, y)$$

alors que

$$g(\alpha x, \alpha y) = \alpha g(x, y).$$

Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont le même espace  $E$ , on parle par abus de langage d'application *n-linéaire* de  $E$  dans  $F$ .

De même que pour les applications linéaires, on dit *forme n-linéaire* quand  $F = K$ .

*Ex.1.* Dans  $K$ , l'application qui à  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fait correspondre le produit  $x_1 x_2 \dots x_n$  est  $n$ -linéaire.

*Ex.2.* La multiplication vectorielle canonique dans  $\mathbb{R}^3$  est une application bilinéaire de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

*Ex.3.* Si  $E_1$  et  $E_2$  sont l'espace vectoriel  $P$  des fonctions polynomes sur  $\mathbb{R}$ , l'application

$$(A, B) \longmapsto \int_a^b A(t) B(t) dt$$

est une forme bilinéaire sur  $P$ .

*Ex.4.* Soit  $E^\star$  l'espace des formes linéaires sur  $E$  [DUAL],  $f$  l'une de ces formes,  $f(x)$  la valeur qu'elle prend pour le vecteur  $x$  de  $E$ , parfois notée  $\langle x, f \rangle$ ; l'application de  $E \times E^\star$  dans  $K$ :  $(x, f) \longmapsto \langle x, f \rangle$  est alors appelée *forme bilinéaire fondamentale* (ou *canonique*) sur  $E \times E^\star$ .

*Ex.5.* Si  $E_1 = E_2 = K^n$ , l'application qui au couple de vecteurs  $((x^1, x^2, \dots, x^n), (y^1, y^2, \dots, y^n))$  associe le scalaire  $x^1 y^1 + \dots + x^n y^n$  est la forme bilinéaire (symétrique) appelée *multiplication scalaire canonique* sur  $K^n$ .

**1.2. Propriétés principales.** Certaines propriétés des applications multilinéaires rappellent celles des applications linéaires; en particulier les applications multilinéaires de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  dans  $F$  constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  dans  $F$ , et la multilinéarité entraîne l'existence d'identités analogues à celles des applications linéaires; ainsi dans le cas d'une application bilinéaire  $f$  on a:

$$f\left(\sum_i x^i a_i, \sum_j y^j b_j\right) = \sum_{i,j} x^i y^j f(a_i, b_j)$$

où les  $a_i$  sont des vecteurs de  $E_1$ , les  $b_j$  des vecteurs de  $E_2$ , les  $x^i$  et les  $y^j$  étant des scalaires et les  $f(a_i, b_j)$  des vecteurs de  $F$ .

Dans le cas de dimensions finies, si  $(a_1, \dots, a_p)$  est une base de  $E_1$  et  $(b_1, \dots, b_q)$  une base de  $E_2$  et si les  $x^i$  et les  $y^j$  sont respectivement les coordonnées des vecteurs  $x$  de  $E_1$  et  $y$  de  $E_2$  par rapport à ces bases, on voit que l'application  $f$  est parfaitement déterminée par la donnée des  $pq$  éléments  $f(a_i, b_j)$  de  $F$ , dont il suffit de connaître les coordonnées par rapport à une base de  $F$ . En particulier une forme bilinéaire est définie par les  $pq$  scalaires  $f(a_i, b_j)$ ; ainsi, pour retrouver le produit scalaire de l'exemple 5, il suffit de prendre pour  $(a_1, \dots, a_n)$  la base canonique de  $K^n$  et de poser, pour tout  $i$  et tout  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f(a_i, a_j) = 1$  et, si  $i \neq j$ ,  $f(a_i, a_j) = 0$ .

On se reportera à la notice TENSORIEL pour l'importante propriété que voici. Etant donné deux espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  sur  $K$ , on sait construire un espace vectoriel sur  $K$ , noté  $E_1 \otimes E_2$ , et une application bilinéaire  $u$  de  $E_1 \times E_2$  dans  $E_1 \otimes E_2$  possédant la propriété suivante: quels que soient l'espace vectoriel  $F$  sur  $K$  et l'application bilinéaire  $f$  de  $E_1 \times E_2$  dans  $F$ , il existe une application linéaire  $\hat{f}$  vérifiant  $f = \hat{f} \circ u$ . Ceci permet, notamment quand on connaît  $E_1 \otimes E_2$  et  $u$ , de ramener tous les problèmes d'applications bilinéaires définies sur  $E_1 \times E_2$  à des problèmes d'applications linéaires définies sur  $E_1 \otimes E_2$ . Le procédé se généralise au cas d'un nombre  $n$  quelconque d'espaces vectoriels  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sur un corps  $K$ .