

Us.: Le lat. *alter*, qui a donné *autre*, signifiait plus précisément "l'autre quand il s'agit de deux". Cette nuance de sens se retrouve dans *alterner*, *alternatif*, etc.: ainsi on parle de stationnement alterné suivant les jours pairs ou impairs. La situation math. n'est pas sans analogie, la notion d'alternance étant liée dans la plupart des cas à la parité des permutations.

1. Applications multilinéaires alternées.

1.1. Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K . Une application multilinéaire f de E^p dans F est dite *alternée* si, chaque fois que deux au moins des éléments $x_1, \dots, x_p$ de E sont égaux, $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$. On en déduit que

$$f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = -f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$$

c'est-à-dire que l'application f est antisymétrique. Réciproquement, dans le cas où le corps K est de caractéristique différente de 2, toute application multilinéaire antisymétrique est alternée et il n'y a pas lieu, alors, de distinguer entre applications multilinéaires "alternées" et "antisymétriques".

Comme il est de règle pour toutes les applications linéaires ou multilinéaires, on dit, lorsque $F = K$, *forme multilinéaire alternée*.

Ex.: La multiplication vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ est une application bilinéaire alternée de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$; le produit mixte usuel est une forme trilinéaire alternée de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

1.2. Propriétés principales. Si f est une application p -linéaire alternée et si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont linéairement dépendants, alors $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est nul; il en résulte que toute application multilinéaire alternée d'ordre strictement supérieur à la dimension de E est nulle.

Si l'espace est de dimension finie n sur K , soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Si $x_i = \sum_{1 \leq j \leq n} x_i^j e_j$, on a, en utilisant la linéarité:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{1 \leq j_1 \leq n} \dots \sum_{1 \leq j_p \leq n} x_1^{j_1} \dots x_p^{j_p} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$$

Parmi les $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ tous ceux qui ont au moins deux indices égaux sont nuls, et tous ceux dont les ensembles d'indices sont les mêmes sont égaux ou opposés: il suffit donc de connaître les vecteurs $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ pour toute suite strictement croissante $j: i \mapsto j_i$ qui applique $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Inversement, si l'on se donne un vecteur v_j pour chaque suite j strictement croissante, il existe une application p -linéaire alternée f et une seule qui satisfait à

$$\forall j, f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = v_j.$$

Dans le cas où $p = n$, il suffit de se donner $f(e_1, \dots, e_n)$ et on a alors :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left[\sum_j \sigma(j) x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right] f(e_1, \dots, e_n)$$

où j décrit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ et $\sigma(j)$ désigne la signature de la permutation j [PERMUTATION].

En particulier, si $F = K$, $f(e_1, \dots, e_n)$ est un scalaire, par suite les formes n -linéaires alternées sur E^n (E étant de dimension n) forment un espace vectoriel de dimension 1.

2. Groupe alterné.

On sait que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ constitue un groupe appelé groupe symétrique; l'ensemble des permutations paires en constitue un sous-groupe invariant, appelé *groupe alterné*, usuellement noté $\mathfrak{A}_n$ [PERMUTATION].

3. Produit extérieur de formes linéaires alternées.

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K qui n'est pas de caractéristique 2. On note $\Lambda_p(E)$ l'espace vectoriel des formes p -linéaires alternées sur E . On sait que $\Lambda_0(E)$ peut être identifié avec K , que $\Lambda_1(E)$ est le dual E' de E , que $\Lambda_p(E)$ est l'espace nul pour $p > n$.

3.1. Produit extérieur de formes linéaires. Si $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des formes linéaires sur E , on appelle *produit extérieur de* $f_1, f_2, \dots, f_p$ et on note $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p$ la forme p -linéaire alternée qui à tout p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E associe $\det(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}$.

3.2 Base de $\Lambda_p(E)$.

A toute partie X de $\{1; 2; \dots; n\}$, associons une suite injective I dont X est l'ensemble-image. On définit ainsi une application $S: X \rightarrow I$. Notons T_p l'image par S de l'ensemble des parties à p éléments, et T la réunion des T_p .

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; si I est un élément de T , on note e_I la suite $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ telle que $I = (i_1, \dots, i_p)$. Soit $(g_1, \dots, g_n)$ la base duale de B ; on note g_I la forme p -linéaire alternée $g_{i_1} \wedge \dots \wedge g_{i_p}$.

On montre que $(g_I)_{I \in T_p}$ est une base de $\Lambda_p(E)$, qui vérifie la propriété caractéristique suivante: $g_I(e_J) = 0$ chaque fois que les ensembles-images de I et J sont des parties distinctes à p éléments, et $g_I(e_J) = 1$ si $I = J$.

On en déduit en particulier que, pour p au plus égal à n , $\Lambda_p(E)$ est de dimension C_n^p .

3.3. Produit extérieur de deux formes linéaires alternées. On définit d'abord le *produit extérieur* de deux formes qui sont chacune un produit extérieur de formes linéaires; on a, par définition,

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_p) \wedge (f'_1 \wedge \dots \wedge f'_q) = f_1 \wedge \dots \wedge f_p \wedge f'_1 \wedge \dots \wedge f'_q.$$

On montre alors que pour tous naturels p, q , il existe une et une seule application bilinéaire de $\Lambda_p(E) \times \Lambda_q(E)$ dans $\Lambda_{p+q}(E)$ qui prolonge l'application ainsi définie sur les produits extérieurs de formes linéaires. Dans l'ensemble de toutes les formes linéaires alternées, on a ainsi une loi interne, appelée *produit extérieur* et notée $\wedge$.

On montre que $\wedge$ est associative ; en particulier le produit de p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ n'est autre que $((f_1 \wedge f_2) \wedge \dots) \wedge f_p$, ce qui justifie la définition adoptée plus haut.

On montre que si h et h' sont des formes respectivement p -linéaire et q -linéaire alternées, alors $h' \wedge h = (-1)^{pq} h \wedge h'$.

3.4. Usage du produit extérieur.

L'utilisation principale concerne les formes différentielles [DIFFÉRENTIABLE, 3.2.].

4. Antisymétrisation d'une forme multilinéaire.

Lorsque K est un corps de caractéristique nulle, on définit une opération $\mathcal{A}$ qui, à toute forme p -linéaire φ , associe une forme p -linéaire alternée $\mathcal{A}\varphi$, appelée *antisymétrisée* de φ :

$$\mathcal{A}\varphi(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ de $\{1; 2; \dots; p\}$.

$\mathcal{A}$ est un projecteur. Pour toute forme p -linéaire alternée φ , on a $\mathcal{A}\varphi = \varphi$.

Dans le cas particulier important où

$$(x_2, \dots, x_p) \mapsto \varphi(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

est une forme $(p-1)$ -linéaire alternée pour tout x_1 , on a :

$$\mathcal{A}\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \varphi(x_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) .$$