

L'illustration de la couverture est obtenue à l'aide des carrés magiques 3×3 (ch. 1 § 1), en les disposant sous la forme $\begin{matrix} C & D \\ A & B \end{matrix}$ de sorte que les lignes médianes coïncident. On joint alors dans chaque carré 1-2-3-...-9, puis on noircit une surface sur deux.

INTRODUCTION

Dans cette brochure nous nous étendrons simplement sur l'aspect algébrique de l'étude des carrés magiques, aspect intimement lié au groupe des isométries du carré Δ_4 .

Le premier chapitre n'entend pas faire preuve d'une grande originalité, cependant il met déjà en place les différents éléments nécessaires à notre étude (base, groupe Δ_4 ...).

Dès le second nous proposons une étude plus générale de l'ensemble \mathcal{C}_n des carrés magiques à n lignes et n colonnes. La plus grande partie de ce chapitre est consacrée à la recherche d'une base de cet espace vectoriel, de dimension $n(n-2)$, par une méthode dont l'efficacité s'est avérée considérable pour la suite. L'action du groupe Δ_4 sur cet espace permet de mettre en évidence la structure de module de \mathcal{C}_n sur l'ensemble \mathcal{M}_2 des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes.

Avec les chapitres 3 et 4, on pourra d'abord voir une illustration du précédent, puis une introduction, par une approche purement calculatoire, aux différents groupes opérant sur les "blocs" qui composent chacun des carrés ; les deux derniers chapitres 5 et 6 relevant l'aspect tensoriel de ces considérations.

CHAPITRE 1

carrés magiques 3x3

I. On se propose de disposer les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 dans un carré à trois lignes et trois colonnes de telle sorte que la somme des entiers sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale soit la même (on l'appellera sa somme linéaire).

Soit

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

 un tel carré et s sa somme linéaire

La somme $\sum_{i=1}^9 x_i$ est égale à celle des nombres de 1 à 9, soit 45.

Donc $3s = 45$ et $s = 15$.

En ajoutant les quatre sommes où figure x_5 on obtient :

$$(x_4 + x_5 + x_6) + (x_2 + x_5 + x_8) + (x_1 + x_5 + x_9) + (x_3 + x_5 + x_7) = 4s$$

d'où il vient : $3s + 3x_5 = 4s$

$$3x_5 = s = 15$$

et finalement : $x_5 = \frac{s}{3} = 5$

Restent à placer les autres nombres.

Si 9 est x_1 alors le coin opposé est 1, la somme en diagonale devant être 15 ; par suite $x_2 + x_3$ et $x_4 + x_7$ sont deux décompositions en sommes de 6. $3+3$ est impossible ; $5+1$ aussi, ces deux nombres étant déjà employés ; il ne reste donc plus que $4+2$; comme cette décomposition ne peut être employée qu'une seule fois, on conclut que 9 ne peut être x_1 , ni tout autre coin.

Donc 9 est "au milieu" d'un côté (quatre possibilités). Au centre du côté opposé nous avons 1. Par exemple :

	9	
	5	
	1	

Alors 4 et 2 sont les sommets du côté dont le centre est 9 (deux possibilités) :

4	9	2
	5	
	1	

ou

2	9	4
	5	
	1	

On complète alors les carrés sachant que leur somme linéaire est 15. On obtient :

$$4+5+6 = 15$$

$$2+5+8 = 15$$

$$4+3+8 = 15$$

$$2+7+6 = 15$$

d'où par exemple le carré

4	9	2
3	5	7
8	1	6

On peut obtenir de la sorte les huit carrés

A =

4	9	2
3	5	7
8	1	6

B =

2	9	4
7	5	3
6	1	8

C =

8	1	6
3	5	7
4	9	2

D =

6	1	8
7	5	3
2	9	4

E =

4	3	8
9	5	1
2	7	6

F =

8	3	4
1	5	9
6	7	2

G =

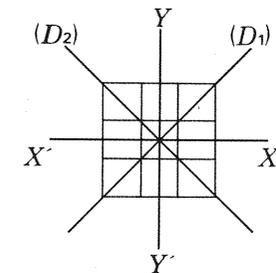
2	7	6
9	5	1
4	3	8

H =

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Considérons les transformations du carré suivantes :

- Id : identité
- S_1 : symétrie par rapport à $(Y'Y)$
- S_2 : symétrie par rapport à $(X'X)$
- S_3 : symétrie par rapport à la 1^{re} diagonale
- S_4 : symétrie par rapport à la 2^e diagonale
- R_1 : rotation d'un quart de tour
- R_2 : demi-tour ou symétrie centrale
- R_3 : rotation de trois quarts de tour



Muni de la composition des applications, l'ensemble de ces transformations possède une structure de groupe ; c'est le groupe diédral Δ_4 , dont la table est donnée ci-contre.

	Id	R ₁	R ₂	R ₃	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
Id	Id	R ₁	R ₂	R ₃	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
R ₁	R ₁	R ₂	R ₃	Id	S ₄	S ₃	S ₁	S ₂
R ₂	R ₂	R ₃	Id	R ₁	S ₂	S ₁	S ₄	S ₃
R ₃	R ₃	Id	R ₁	R ₂	S ₃	S ₄	S ₂	S ₁
S ₁	S ₁	S ₃	S ₂	S ₄	Id	R ₂	R ₁	R ₃
S ₂	S ₂	S ₄	S ₁	S ₃	R ₂	Id	R ₃	R ₁
S ₃	S ₃	S ₂	S ₄	S ₁	R ₃	R ₁	Id	R ₂
S ₄	S ₄	S ₁	S ₃	S ₂	R ₁	R ₃	R ₂	Id

L'action de ce groupe sur les carrés est donnée par le tableau ci-contre, pour la lecture duquel l'image d'un carré par une application figure à l'intersection de la ligne où est lue l'application, et de la colonne où est lu le carré initial.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Id	A	B	C	D	E	F	G	H
R ₁	G	E	H	F	C	A	D	B
R ₂	D	C	B	A	H	G	F	E
R ₃	F	H	E	G	B	D	A	C
S ₁	B	A	D	C	F	E	H	G
S ₂	C	D	A	B	G	H	E	F
S ₃	H	F	G	E	D	B	C	A
S ₄	E	G	F	H	A	C	B	D

II. CARRÉS MAGIQUES (3 × 3)

On appelle ainsi tout carré, à coefficients dans \mathbf{R} vérifiant les conditions posées au I.

On peut alors définir l'addition de tels carrés par :

$$C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x'_4 & x'_5 & x'_6 \\ x'_7 & x'_8 & x'_9 \end{bmatrix} \quad C + C' = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & y_5 & y_6 \\ y_7 & y_8 & y_9 \end{bmatrix}$$

avec pour tout i , $1 \leq i \leq 9$, $y_i = x_i + x'_i$.

De même, pour tout réel λ , on définit le produit

$$\lambda \cdot C = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{bmatrix} \quad \text{en posant pour tout } i \quad z_i = \lambda x_i$$

En appelant C_3 l'ensemble des carrés magiques (3 × 3), à coefficients dans \mathbf{R} , on constate que C_3 , muni de ces deux lois de composition possède une structure d'espace vectoriel sur \mathbf{R} .

Le paragraphe suivant est consacré à la recherche d'une base de cet espace.

III. BASE DE C_3

PROPRIÉTÉ 1.1.

Tout carré magique de C_3 est la somme, de manière unique, d'un carré dont les composantes sont toutes égales et d'un carré magique de somme linéaire nulle.

En effet, puisque tout carré magique de C_3 a pour terme central le tiers de sa somme linéaire, on a :

$$C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 & x_5 & x_5 \\ x_5 & x_5 & x_5 \\ x_5 & x_5 & x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & 0 & y_6 \\ y_7 & y_8 & y_9 \end{bmatrix}$$

avec $y_i = x_i - x_5$.

Le premier carré s'écrit $x_5 I$ en posant $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

En posant aussi $y_1 = b$ et $y_3 = c$, le second devient :

$$\begin{bmatrix} b & -b-c & +c \\ c-b & 0 & b-c \\ -c & b+c & -b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Appelons J et K les carrés

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

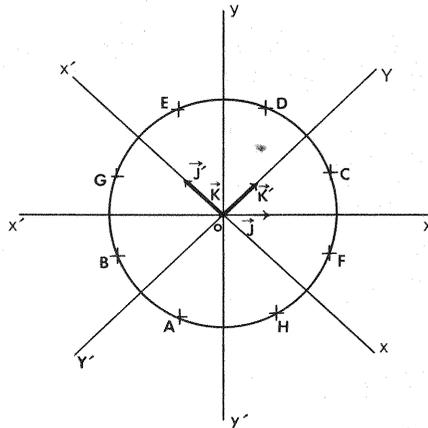
Le carré initial devient $C = aI + bJ + cK$ avec $a = x_5$
 $b = x_1 - x_5$
 $c = x_3 - x_5$

On obtient ainsi une partie génératrice de C_3 . Il est aisé de vérifier que cette partie est libre et par suite constitue une base de C_3 , dont la dimension est par conséquent égale à 3.

IV. Considérons donc dans C_3 , rapporté à la base rangée (I, J, K) les carrés A, B, C, D, E, F, G et H. Leur première coordonnée est 5.

On peut donc, à chacun de ces carrés, associer le couple formé par ses deux autres coordonnées, et le représenter dans le plan euclidien par un point. On obtient les huit points :

- A(-1 ; -3)
- B(-3 ; -1)
- C(3 ; 1)
- D(1 ; 3)
- E(-1 ; 3)
- F(3 ; -1)
- G(-3 ; 1)
- H(1 ; -3)



Si l'on change de base en posant $J' = K - J$ et $K' = K + J$, le repère (O, J', K') change l'orientation. Dans ce nouveau repère on retrouve alors :

- Id : identité
- R_1 : rotation d'un quart de tour
- R_2 : rotation d'un demi-tour
- R_3 : rotation de trois quart de tour
- S_3 : symétrie par rapport à la 1^{re} bissectrice
- S_4 : symétrie par rapport à la 2^e
- S_1 : symétrie par rapport à $(Y'Y)$
- S_2 : symétrie par rapport à $(X'X)$

V. Notons \mathcal{E} l'ensemble de ces huit carrés.

Quels que soient les éléments X et Y de \mathcal{E} , il existe une application unique T de Δ_4 telle que $Y = T(X)$.

Le groupe Δ_4 opère donc transitivement et fidèlement sur l'ensemble \mathcal{E} . Soit d'autre part X et X' deux carrés quelconques de C_3 ; X et μ étant deux réels aussi quelconques, on a :

$$T(\lambda X + \mu X') = \lambda T(X) + \mu T(X')$$

Donc Δ_4 est un groupe d'applications linéaires opérant sur C_3 .

L'action de Δ_4 sur un carré magique X est donnée par le tableau :

	I	J	K	$X = aI + bJ + cK$
Id	I	J	K	$aI + bJ + cK$
R_1	I	-K	J	$aI + cJ - bK$
R_2	I	-J	-K	$aI - bJ - cK$
R_3	I	K	-J	$aI - cJ + bK$
S_1	I	K	J	$aI + cJ + bK$
S_2	I	-K	-J	$aI - cJ - bK$
S_3	I	-J	K	$aI - bJ + cK$
S_4	I	J	-K	$aI + bJ - cK$

La relation définie sur C_3 par

$$\mathcal{R}(X, X') \Leftrightarrow \exists T \in \Delta_4 \quad X' = T(X)$$

est une relation d'équivalence (démonstration classique).

L'orbite d'un élément X de C_3 est l'ensemble des carrés Y tels que $\mathcal{R}(X; Y)$; ainsi \mathcal{E} est l'orbite de chacun des carrés A, B, ..., H.

On constate alors que tous les points représentant l'orbite de $X(a, b, c)$ sont situés sur un même cercle, situé dans le plan d'équation $x = a$, de centre le point de coordonnées $(a; 0; 0)$, de rayon $R = \sqrt{b^2 + c^2}$.

On est donc amené à examiner les coordonnées cylindriques des différents éléments de l'orbite de X.

En posant $b=R\cos\theta$ et $c=R\sin\theta$ on obtient :

$$\begin{aligned} & X(a;R;\theta) \\ & S_1 X(a;R;\frac{\pi}{2}-\theta) \\ & S_2 X(a;R;\frac{3\pi}{2}-\theta) \\ & S_3 X(a;R;\pi-\theta) \\ & S_4 X(a;R;-\theta) \\ & R_1 X(a;R;\frac{\pi}{2}+\theta) \\ & R_2 X(a;R;\pi+\theta) \\ & R_3 X(a;R;\frac{3\pi}{2}+\theta) \end{aligned}$$

d'où finalement l'orbite de $X(a;R;\theta)$ est

$$\{Y(a;R;k\frac{\pi}{2}\pm\theta) / k\in\mathbf{Z}\}$$

CHAPITRE 2

cas général

I. L'ESPACE VECTORIEL C_n

L'ensemble des carrés magiques C_n est formé des carrés magiques, ayant n^2 cases, que nous noterons de façon générale

$$(x_{ij}) \quad (1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n).$$

Lorsqu'il est muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un réel habituelle, cet ensemble possède une structure d'espace vectoriel.

Afin de pouvoir poursuivre notre étude, nous avons besoin dans chaque cas d'une base. L'essentiel de ce paragraphe est d'en déterminer une, dans laquelle on obtient rapidement les coordonnées d'un carré quelconque.

a) PROPRIÉTÉ 2.1.

Tout carré magique est égal à la somme d'un carré dont toutes les composantes sont égales et d'un carré magique de somme linéaire nulle ; la décomposition est unique.

En effet, appelons B_0 le carré dont toutes les composantes sont égales à 1 (il est magique de somme linéaire n).

La somme du carré magique C étant s , on obtient :

$$C = \frac{s}{n} B_0 + C', \quad C' \text{ désignant alors un carré magique de somme nulle.}$$

Par la suite, nous nous limiterons donc aux carrés de somme linéaire nulle, dont l'ensemble noté C_n^0 est un sous-espace vectoriel de C_n tel que l'on ait

$$\dim C_n = 1 + \dim C_n^0$$

b) Le groupe Δ_4

Considérons sur l'ensemble C_n les huit transformations suivantes :

S_1 : échangeant x_{ij} et $x_{i,n-j+1}$

S_2 : échangeant x_{ij} et $x_{n-i+1,j}$

S_3 : échangeant x_{ij} et $x_{n-j+1,n-i+1}$

S_4 : échangeant x_{ij} et x_{ji}

R_1 : transportant x_{ij} en $x_{n-j+1,i}$

R_2 : transportant x_{ij} en $x_{n-i+1,n-j+1}$

R_3 : transportant x_{ij} en $x_{j,n-i+1}$

Id : identité

Ces huit transformations forment un groupe qui n'est autre que celui des isométries du carré vu au chapitre 1.

D'autre part, ces huit transformations sont linéaires, vu qu'elles n'interviennent que pour des "changements de place" des composantes.

c) Carrés particuliers

Nous appellerons alors carré de la forme A.A.A (ou plus simplement carré A.A.A.) tout carré S_4 antisymétrique, S_3 antisymétrique et S_2 antisymétrique.

On a alors :

$$x_{ij} = -x_{ji} = -x_{n-j+1,n-i+1} = -x_{i,n-j+1} = -x_{n-i+1,j}$$

Nous appellerons carré A.A.S tout carré S_4 antisymétrique, S_3 antisymétrique et S_2 symétrique.

Nous pourrions définir de façon analogue des carrés S.S.A, S.S.S, S.A (S_4 symétriques et S_3 antisymétriques) et A.S.

Nous obtenons alors la propriété suivante :

THÉORÈME 2.1.

Tout carré (magique de somme linéaire nulle) est décomposable de manière unique en somme d'un carré A.A.A, d'un carré A.A.S, d'un carré S.S.A, d'un carré S.S.S, d'un carré S.A et d'un carré A.S.

La démonstration repose sur le fait que tout carré est somme (de manière unique) d'un carré symétrique et d'un carré antisymétrique, ceci quelle que soit la symétrie considérée (aucun privilège pour S_4).

Conséquence :

Appelons C_n^{AAA} (respectivement C_n^{AAS} , C_n^{SSA} , C_n^{SSSo} , C_n^{SA} et C_n^{AS}) l'ensemble des carrés magiques de la forme AAA (respectivement AAS, SSA, SSS de somme nulle, SA et AS).

On a alors :

$$C_n^0 = C_n^{AAA} \oplus C_n^{AAS} \oplus C_n^{SSA} \oplus C_n^{SSSo} \oplus C_n^{SA} \oplus C_n^{AS}$$

Donc la dimension de C_n^0 est la somme des dimensions de ces sous-espaces vectoriels.

Il nous suffit (!) donc de rechercher une base de chacun de ces six sous-espaces vectoriels.

PROPRIÉTÉ 2.2.

S_1 est un isomorphisme de C_n^{AS} sur C_n^{SA} .

S_1 est un isomorphisme (involutif) de C_n . Il nous suffit donc de démontrer que :

- 1) $D \in C_n^{AS} \Rightarrow S_1 D \in C_n^{SA}$
- 2) $C \in C_n^{SA} \Rightarrow S_1 C \in C_n^{AS}$

1°) Pour tout carré D de C_n^{AS} on a :

$$x_{ij} = -x_{ji} \quad \text{et} \quad x_{ij} = x_{n-j+1, n-i+1}$$

Soit x_{ij} les composantes de $S_1 D$,

alors $x_{ij} = x_{i, n-j+1} = x_{j, n-i+1} = x_{ji}$

et $x_{ij} = x_{i, n-j+1} = -x_{n-j+1, i} = -x'_{n-j+1, n-i+1}$

donc $S_1 D \in C_n^{AS}$.

2°) Démonstration tout à fait analogue.

Par conséquent $\dim C_n^{AS} = \dim C_n^{SA}$, d'autre part toute base de l'un de ces espaces se déduit d'une base de l'autre par application de S_1 .

d) Recherche d'une base de C_n^{AS}

Considérons un carré magique AS. La première diagonale n'est composée que de zéros. Le carré étant antisymétrique par rapport à S_4 la partie triangulaire inférieure dépend de la supérieure.

Le nombre de cases situées en dessous de cette diagonale est $\frac{n^2-n}{2}$.

Si n est pair, la partie restante est composée de $\frac{n}{2}$ cases situées en diagonale et de deux parties symétriques. En remarquant que les coefficients situés dans l'une de ces parties dépendent de ceux de l'autre (ils leurs sont respectivement égaux, cela permet de considérer seulement $\frac{n^2}{4}$ cases (soit le quart d'un carré).

De plus, les carrés étant magiques, les coefficients situés sur la diagonale dépendent des autres ; on peut en effet, pour une moitié de diagonale restante, compléter ses cases en prenant l'opposé des cases situées sur la même ligne. La symétrie S_3 transformant alors la ligne i en la colonne n-i+1, les sommes sur les colonnes sont nulles. Par antisymétrie S_4 la somme des composantes sur la seconde diagonale est nulle ; le carré obtenu est bien magique.

Il en résulte que les cases restantes sont indépendantes ; leur nombre étant $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$, on obtient $\dim C_n^{AS} = \dim C_n^{SA} = \frac{n^2-2n}{4}$.

Si n est impair, on procède de la même manière, mais en constatant que les diagonales ont une case (celle du centre) commune. Aussi obtient-on :

$$\dim C_n^{SA} = \dim C_n^{AS} = \frac{n^2-2n+1}{4}$$

d'où la

PROPRIÉTÉ 2.3.

Si n est pair , $\dim C_n^{AS} = \dim C_n^{SA} = \frac{n^2-2n}{4}$

Si n est impair , $\dim C_n^{AS} = \dim C_n^{SA} = \frac{n^2-2n+1}{4}$

e) De façon tout à fait analogue, on démontre la propriété :

PROPRIÉTÉ 2.4.

Si n est pair , $\dim C_n^{AAA} = \frac{n^2-2n}{8}$

Si n est impair , $\dim C_n^{AAA} = \frac{n^2-4n+3}{8}$

On remarque que :

si n pair , $\frac{n-2}{2} + \frac{n-4}{2} + \dots + \frac{n-n}{2} = \frac{n^2-2n}{8}$

si n impair , $\frac{n-3}{2} + \frac{n-5}{2} + \dots + \frac{n-n}{2} = \frac{n^2-4n+3}{8}$

PROPRIÉTÉ 2.5.

Si n pair , $\dim C_n^{AAS} = \frac{n^2-6n+8}{8}$

Si n impair , $\dim C_n^{AAS} = \dim C_n^{AAA} = \frac{n^2-4n+3}{8}$

Compte tenu de la nullité de la somme linéaire, on obtient :

— si n est pair, $\frac{n-4}{2}$ carrés indépendants sur la première ligne, $\frac{n-6}{2}$ sur la seconde, etc... En utilisant la remarque de la propriété 4, on obtient le résultat annoncé ;

— si n est impair, les cases situées sur la ligne du milieu peuvent être utilisées pour annuler la somme des autres. Les cases indépendantes sont donc les mêmes que pour les carrés AAA, d'où l'égalité des dimensions.

PROPRIÉTÉ 2.6.

$$\text{Si } n \text{ est pair, } \dim C_n^{SSA} = \frac{n^2 + 2n - 8}{8}$$

$$\text{Si } n \text{ est impair, } \dim C_n^{SSA} = \frac{n^2 - 9}{8}$$

En effet,

— si n est pair, les sommes sur les lignes et les colonnes sont nulles (antisymétrie S_2). La nullité des diagonales entraîne qu'une case de chaque demi-diagonale dépend des autres, d'où le dénombrement suivant :

$$\dim C_n^{SSA} = \frac{n^2 - 2n}{8} + \frac{n-2}{2} = \frac{n^2 - 2n + 4n - 8}{8} = \frac{n^2 + 2n - 8}{8}$$

— si n est impair, la colonne et la ligne du milieu sont nulles (antisymétrie S_2). Sur la moitié de la diagonale (le zéro du centre étant retiré, on doit également retrancher la dernière case qui annule les autres (la diagonale étant symétrique). Il nous reste donc

$$\frac{n^2 - (4n - 3)}{8} + \frac{n-3}{2} \text{ soit } \frac{n^2 - 9}{8} \text{ cases linéairement indépendantes.}$$

PROPRIÉTÉ 2.7.

$$\text{Si } n \text{ pair, on a : } \dim C_n^{SSSO} = \frac{n^2 - 2n - 8}{8}$$

$$\text{Si } n \text{ impair, on a : } \dim C_n^{SSSO} = \frac{n^2 - 9}{8}$$

Si n est impair, on procède comme pour P.6 car la colonne et la ligne du milieu annulent les autres. On obtient une relation entre les différentes cases à l'aide de la nullité de la somme linéaire des cases en diagonales, ce qui permet d'en exclure une. On retrouve alors le même dénombrement que pour $\dim C_n^{SSA}$.

Si n est pair, on a quatre blocs symétriques tels que :

- la somme sur chaque ligne soit nulle,
- la somme sur chaque colonne soit nulle,
- la somme des coefficients situés sur l'une des diagonales soit nulle,
- ils soient symétriques par rapport à cette partie de diagonale.

En posant $a = \frac{n}{2}$ on obtient :

$$\dim C_n^{SSS} = \frac{a^2 - (3a - 2)}{2} + a - 2 = \frac{n^2 - 6n + 8 - 4n - 16}{8}$$

$$\text{donc } \dim C_n^{SSS} = \frac{n^2 - 2n - 8}{8}$$

THÉORÈME 2.2.

Pour tout entier n , on a $\dim C_n = n(n-2)$.

Pour n impair on a :

$$\begin{aligned} \dim C_n^0 &= \frac{n^2 - 2n + 1}{4} \times 2 + \frac{n^2 - 4n + 3}{8} \times 2 + \frac{n^2 - 9}{8} \times 2 \\ &= n^2 - 2n - 1 \end{aligned}$$

Pour n pair on a : $\dim C_n^0 =$

$$\frac{n^2 - 2n}{4} \times 2 + \frac{n^2 - 2n}{8} + \frac{n^2 - 6n + 8}{8} + \frac{n^2 + 2n - 8}{8} + \frac{n^2 - 2n - 8}{8}$$

soit $\dim C_n^0 = n^2 - 2n - 1$.

Pour tout n on obtient donc :

$$\dim C_n = 1 + \dim C_n^0 = n^2 - 2n$$

soit encore :

$$\dim C_n = n(n-2) = (n-1)^2 - 1$$

II. LE MODULE C_n

a) Appelons \mathcal{M}_2 l'ensemble des matrices carrées (2×2) à coefficients dans \mathbf{R} .

\mathcal{M}_2 est un espace vectoriel sur \mathbf{R} , de dimension 4 dont la base canonique est : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ étant linéairement indépendantes forment une base de \mathcal{M}_2 .

D'autre part l'application qui a tout réel x , fait correspondre $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de \mathbf{R} sur son image dans \mathcal{M}_2 , ce qui permet d'identifier ces deux objets. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice communément notée i (imaginaire complexe), et en notant s la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on constate que la quatrième n'est autre que le produit is (que l'on notera par la suite k). De sorte que toute matrice de \mathcal{M}_2 , se note de manière unique sous la forme :

$$A + Bi + Cs + Dk = (A+Bi) + (C+iD)s$$

\mathcal{M}_2 est aussi une algèbre sur \mathbf{R} , dont la table de multiplication est donnée par :

x	1	i	s	k
1	1	i	s	k
i	i	-1	k	-s
s	s	-k	1	-i
k	k	s	i	1

Pour $M = a+bi+cs+dk$ et $M' = a'+b'i+c's+d'k$ on a :

$$MM' = (aa' - bb' + cc' + dd') + (ab' + ba' + dc' - cd')i + (ac' + ca' + db' - bd')s + (ad' + da' + bc' - cb')k$$

b) Représentation de Δ_4

Soit X un point du plan euclidien, de coordonnées (x, y) .

$$\text{on a : } S_1X(-x; y) \quad ; \quad S_2X(x; -y) \quad ; \quad S_3X(y; x) \quad ; \quad S_4X(-y; -x) \\ R_1X(-y; +x) \quad ; \quad R_2X(-y; x) \quad ; \quad R_3X(y; -x)$$

On obtient la correspondance biunivoque :

1	↔	id
i	↔	R_1
s	↔	S_3
k	↔	S_1
-1	↔	R_2
-s	↔	S_4
-k	↔	S_2

c) Or on sait que C_n est un espace vectoriel sur \mathbf{R} et que le groupe Δ_4 opère sur C_n .

On peut alors définir une loi de composition externe sur C_n , à opérateurs dans \mathcal{M}_2 par la correspondance :

$$1.C = \text{id } C = C \\ i.C = R_1C \\ s.C = S_3C \\ k.C = S_1C$$

$$\text{et } (a + bi + cs + dk).C = aC + bi.C + cs.C + dk.C$$

Alors C_n muni de l'addition et de la multiplication précédente possède une structure de module à gauche sur \mathcal{M}_2 .

A/ En effet, pour tout carré magique C , on a $1.C = C$.

B/ Quels que soient les éléments M et M' de \mathcal{M}_2 et le carré C

$$(M+M').C = [(a+a') + (b+b')i + (c+c')s + (d+d')k].C \\ = (aC + bi.C + cs.C + dk.C) + (a'.C + b'i.C + c's.C + d'k.C) \\ = M.C + M'.C$$

C/ Quels que soient les carrés magiques C et C' et la matrice M

$$M.(C+C') = (a+bi+cs+dk).(C+C') \\ = aId(C+C') + bR_1(C+C') + cS_3(C+C') + dS_1(C+C')$$

Les applications Id, R_1, S_3, S_1 sont linéaires, on obtient alors :

$$M.(C+C') = (aIdC + bR_1C + cS_3C + dS_1C) \\ + (aIdC' + bR_1C' + cS_3C' + dS_1C') \\ = (a+bi+cs+dk).C + (a+bi+cs+dk).C' \\ = M.C + M'.C$$

D/ Enfin, quelles que soient les matrices M et M' et le carré magique C

$$M.(M'.C) = M.(a'.C + b'R_1C + c'S_3C + d'S_1C) \\ = aId(a'.C + b'R_1C + c'S_3C + d'S_1C) \\ + bR_1(a'.C + b'R_1C + c'S_3C + d'S_1C) \\ + cS_3(a'.C + b'R_1C + c'S_3C + d'S_1C) \\ + dS_1(a'.C + b'R_1C + c'S_3C + d'S_1C)$$

Compte tenu de la linéarité des applications de Δ_4 on a :

$$M.(M'.C) = aa'.C + ab'R_1C + ac'S_3C + ad'S_1C \\ + ba'R_1C + bb'R_2C + bc'S_1C + bd'S_4C \\ + ca'S_3C + cb'S_2C + cc'.C + cdR_3C \\ + da'S_1C + ab'S_3C + dc'R_1C + dd'.C \\ = (aa' - bb' + cc' + dd')C + (ab' + ba' + dc' - cd')i.C \\ + (ac' + ca' + db' - bd')s.C + (ad' + da' + bc' - cb')k.C \\ = (M \times M').C$$

E/ Alors l'action de \mathcal{M}_2 sur C_n peut se traduire par le tableau suivant où :

A_i est le i^e vecteur de base de C_n^{AAA}

A'_j est le j^e vecteur de base de C_n^{AAS}

B_k est le k^e vecteur de base de C_n^{SSA}

B'_l est le l^e vecteur de base de C_n^{SSA}

C_m est le m^e vecteur de base de C_n^{SA}

D_m est le m^e vecteur de base de C_n^{AS}

	A_i	A'_j	B_k	B'_l	C_m	D_m
1	A_i	A'_j	B_k	B'_l	C_m	D_m
i	A_i	$-A'_j$	B_k	$-B'_l$	$-D_m$	C_m
s	$-A_i$	$-A'_j$	B_k	B'_l	$-C_m$	D_m
k	$-A_i$	A'_j	B_k	$-B'_l$	D_m	C_m

Ainsi, si l'on considère les différents carrés magiques planétaires d'ordre n impair (3 Saturne, 5 Mars, 7 Vénus, 9 Lune) on constate qu'ils sont tous de la forme :

$$\frac{n^2+1}{2} B_0 + (n+k).C \quad \text{où } C \text{ est un carré S.A.}$$

CHAPITRE 3

l'ensemble C4

L'ensemble C_4 des carrés magiques à 4 lignes et 4 colonnes, muni de l'addition et de la multiplication par un réel habituelles est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_4), dont la dimension est 8. Le groupe Δ_4 opère sur cet espace ; mais nous allons pouvoir prolonger l'étude de celui-ci par le fait que tout carré magique de C_4 est formé de quatre blocs de deux lignes et deux colonnes, chacun d'eux pouvant être déplacé de manière analogue à chaque case elle-même.

I. GÉNÉRALITÉS

a) Conformément au cas général, nous obtenons donc huit carrés de base que l'on peut classer en quatre groupes.

1°) un carré AAA

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

2°) deux carrés SSA et le carré SSS B_0

$$B_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$B_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$B_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

3°) deux carrés AS

$$D_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

4°) deux carrés SA

$$C_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

b) Appelons X un carré magique quelconque de C_4 . Il s'écrit :

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ \hline x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \hline x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ \hline x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ \hline \end{array}$$

avec les relations :

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = S \quad (l_1) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = S \quad (l_2) \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = S \quad (l_3) \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = S \quad (l_4) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = S \quad (c_1) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = S \quad (c_2) \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = S \quad (c_3) \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = S \quad (c_4) \\ x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44} = S \quad (d_1) \\ x_{14} + x_{23} + x_{32} + x_{41} = S \quad (d_2) \end{array}$$

En faisant opérer sur X le groupe diédral Δ_4 on obtient de nouveaux carrés magiques.

D'autre part, appelons R' la symétrie centrale, mais qui, au lieu de permuter les cases seules, permute les blocs de quatre cases. On obtient ainsi un nouveau carré $R'X$ qui est aussi magique. Il paraît évident que l'on a $R' \circ R' = \text{Id}$.

$$R'X = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_{33} & x_{34} & x_{31} & x_{32} \\ \hline x_{43} & x_{44} & x_{41} & x_{42} \\ \hline x_{13} & x_{14} & x_{11} & x_{12} \\ \hline x_{23} & x_{24} & x_{21} & x_{22} \\ \hline \end{array}$$

Cette transformation commute avec chacune de celles de Δ_4 et, en examinant l'action de différentes applications obtenues sur les carrés de base, on obtient le tableau(*) :

	Id	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	R ₁	R ₂	R ₃	R'	R'S ₁	R'S ₂	R'S ₃	R'S ₄	R'R ₁	R'R ₂	R'R ₃
A	A	-A	-A	-A	-A	A	A	A	-A	A	A	A	A	-A	-A	-A
B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀
B ₁	B ₁	-B ₁	-B ₁	B ₁	B ₁	-B ₁	B ₁	-B ₁	-B ₁	B ₁	B ₁	-B ₁	-B ₁	B ₁	-B ₁	B ₁
B ₂	B ₂	-B ₂	-B ₂	B ₂	B ₂	-B ₂	B ₂	-B ₂	B ₂	-B ₂	-B ₂	B ₂	B ₂	B ₂	-B ₂	B ₂
D ₁	D ₁	C ₁	-C ₁	D ₁	-D ₁	C ₁	-D ₁	-C ₁	D ₁	C ₁	-C ₁	D ₁	-D ₁	C ₁	-D ₁	-C ₁
D ₂	D ₂	C ₂	-C ₂	D ₂	-D ₂	C ₂	-D ₂	-C ₂	-D ₂	-C ₂	C ₂	-D ₂	D ₂	-C ₂	D ₂	C ₂
C ₁	C ₁	D ₁	-D ₁	-C ₁	C ₁	-D ₁	-C ₁	D ₁	C ₁	D ₁	-D ₁	-C ₁	C ₁	-D ₁	-C ₁	D ₁
C ₂	C ₂	D ₂	-D ₂	-C ₂	C ₂	-D ₂	-C ₂	D ₂	-C ₂	-D ₂	D ₂	C ₂	-C ₂	D ₂	C ₂	-D ₂

II. CARRÉS DE LA FORME SA + AS

Ce sont les carrés engendrés par l'ensemble {C₁, C₂, D₁, D₂}. Leur somme linéaire est nulle ; et chacun d'eux est égal à la somme d'un carré AS et d'un carré SA (d'où la notation).

La partie précédente montre que l'ensemble de ces carrés est fermé pour toute application du groupe Δ_4 et pour R' (que l'on notera désormais R'₂).

La considération de ces carrés est due au fait que si, sur l'ensemble des carrés de C₄, on fait opérer un nouveau groupe Δ'_4 de transformations, analogues à celles de Δ_4 , mais qui, au lieu de permuter des cases, permutent des blocs de quatre cases, on obtient le tableau :

	Id	S' ₁	S' ₂	S' ₃	S' ₄	R' ₁	R' ₂	R' ₃
A	A	-B ₁	B ₁	 	 	 	-A	
B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀	B ₀
B ₁	B ₁	-A	A	 	 	 	-B ₁	
B ₂	B ₂	 	 	B ₂	B ₂	 	B ₂	
D ₁	D ₁	-D ₁	-D ₁	D ₁	D ₁	-D ₁	D ₁	-D ₁
D ₂	D ₂	-C ₂	C ₂	D ₂	-D ₂	-C ₂	-D ₂	C ₂
C ₁	C ₁	-C ₁	-C ₁	C ₁	C ₁	-C ₁	C ₁	-C ₁
C ₂	C ₂	-D ₂	D ₂	-C ₂	C ₂	D ₂	-C ₂	-D ₂

(Les cases barrées indiquent que le carré obtenu n'est pas magique).

* On n'écrira plus le symbole o pour la composition des applications, ni les parenthèses pour l'image d'un carré : par exemple on écrira R'S₁D₂ = -C₂.

On peut remarquer que si l'ensemble C₄ n'est pas fermé pour ces applications, l'ensemble des carrés C₄^{AS+SA} l'est.

En composant ces applications avec celles de Δ_4 on obtient un nouveau groupe, non commutatif, dans lequel :

— la composition de deux éléments de Δ_4 est donnée par le tableau de la page 6 ;

— la composition de deux éléments de Δ'_4 est donnée par le même tableau (en primant les applications) ;

on a les relations :

$$\begin{array}{lllll}
 S'_1 S'_1 = S_1 S'_1 & S'_2 S'_1 = S_1 S'_2 & S'_3 S'_1 = S_1 S'_3 & S'_4 S'_1 = S_1 S'_4 & R'_1 S'_1 = S_1 R'_1 \\
 S'_1 S'_2 = S_2 S'_1 & S'_2 S'_2 = S_2 S'_2 & S'_3 S'_2 = S_2 S'_3 & S'_4 S'_2 = S_2 S'_4 & R'_1 S'_2 = S_2 R'_1 \\
 S'_1 S'_3 = S_3 S'_2 & S'_2 S'_3 = S_3 S'_1 & S'_3 S'_3 = S_3 S'_3 & S'_4 S'_3 = S_3 S'_4 & R'_1 S'_3 = S_3 R'_1 \\
 S'_1 S'_4 = S_4 S'_2 & S'_2 S'_4 = S_4 S'_1 & S'_3 S'_4 = S_4 S'_3 & S'_4 S'_4 = S_4 S'_4 & R'_1 S'_4 = S_4 R'_1 \\
 S'_1 R'_1 = R_1 S'_1 & S'_2 R'_1 = R_1 S'_1 & S'_3 R'_1 = R_1 S'_1 & S'_4 R'_1 = R_1 S'_1 & R'_1 R'_1 = R_1 R'_1 \\
 S'_1 R'_2 = R_2 S'_1 & S'_2 R'_2 = R_2 S'_2 & S'_3 R'_2 = R_2 S'_3 & S'_4 R'_2 = R_2 S'_4 & R'_1 R'_2 = R_2 R'_1 \\
 S'_1 R'_3 = R_3 S'_2 & S'_2 R'_3 = R_3 S'_1 & S'_3 R'_3 = R_3 S'_4 & S'_4 R'_3 = R_3 S'_3 & R'_1 R'_3 = R_3 R'_1
 \end{array}$$

enfin R'₂ commute avec toutes les applications du groupe Δ_4 .

Posons alors X = xD₁ + yD₂ + zC₁ + tC₂ et examinons l'action de $\Delta'_4 \circ \Delta_4$ sur ce carré, nous obtenons :

IdX(x;y;z;t)	R' ₁ X(-x;t;-z;-y)	R' ₂ X(x;-y;z;t)	R' ₃ X(-x;-t;-z;y)
R ₁ X(-z;-t;x;y)	R' ₁ R ₁ X(z;y;-x;t)	R' ₂ R ₁ X(-z;t;x;-y)	R' ₃ R ₁ X(z;-y;-x;-t)
R ₂ X(-x;-y;-z;-t)	R' ₁ R ₂ X(x;-t;z;y)	R' ₂ R ₂ X(-x;y;-z;t)	R' ₃ R ₂ X(x;t;z;-y)
R ₃ X(z;t;-x;-y)	R' ₁ R ₃ X(-z;-y;x;-t)	R' ₂ R ₃ X(z;-t;-x;y)	R' ₃ R ₃ X(-z;y;x;t)
S ₁ X(z;t;x;y)	R' ₁ S ₁ X(-z;y;-x;t)	R' ₂ S ₁ X(z;-t;x;-y)	R' ₃ S ₁ X(-z;-y;-x;t)
S ₂ X(-z;-t;-x;-y)	R' ₁ S ₂ X(z;-y;x;t)	R' ₂ S ₂ X(-z;t;-x;y)	R' ₃ S ₂ X(z;y;x;-t)
S ₃ X(x;y;-z;-t)	R' ₁ S ₃ X(-x;-t;z;y)	R' ₂ S ₃ X(x;-y;-z;t)	R' ₃ S ₃ X(-x;t;z;y)
S ₄ X(-x;-y;z;t)	R' ₁ S ₄ X(x;t;-z;y)	R' ₂ S ₄ X(-x;y;z;-t)	R' ₃ S ₄ X(x;-t;-z;-y)
S' ₁ X(-x;-t;-z;-y)	S' ₂ X(-x;t;-z;y)	S' ₃ X(x;y;z;-t)	S' ₄ X(x;-y;z;t)
S' ₁ S' ₁ X(-z;-y;-x;-t)	S' ₂ S' ₁ X(-z;y;-x;t)	S' ₃ S' ₁ X(z;t;x;-y)	S' ₄ S' ₁ X(z;-t;x;y)
S' ₁ S' ₂ X(z;y;x;t)	S' ₂ S' ₂ X(z;-y;x;-t)	S' ₃ S' ₂ X(-z;-t;-x;y)	S' ₄ S' ₂ X(-z;t;-x;-y)
S' ₁ S' ₃ X(-x;t;z;-y)	S' ₂ S' ₃ X(-x;-t;z;y)	S' ₃ S' ₃ X(x,y,-z,t)	S' ₄ S' ₃ X(x;-y;-z;-t)
S' ₁ S' ₄ X(x;-t;-z;y)	S' ₂ S' ₄ X(x;t;-z;y)	S' ₃ S' ₄ X(-x;-y;z;-t)	S' ₄ S' ₄ X(-x;y;z;t)
S' ₁ R' ₁ X(z;-y;-x;t)	S' ₂ R' ₁ X(z;y;-x;-t)	S' ₃ R' ₁ X(-z;-t;x;-y)	S' ₄ R' ₁ X(-z;t;x;y)
S' ₁ R' ₂ X(x;t;z;y)	S' ₂ R' ₂ X(x;-t;z;-y)	S' ₃ R' ₂ X(-x;-y;-z;t)	S' ₄ R' ₂ X(-x;y;-z;-t)
S' ₁ R' ₃ X(-z;y;x;t)	S' ₂ R' ₃ X(-z;-y;x;t)	S' ₃ R' ₃ X(z;-t;-x;y)	S' ₄ R' ₃ X(z;-t;-x;-y)

Dans le plan euclidien \mathcal{E} , on peut alors associer à X le couple de points (P;P') où P a pour coordonnées (x;z) et P' a pour coordonnées (y;t).

Considérons alors dans ce plan les huit éléments de Δ_4 comme au chapitre 1 ; on obtient :

$$\begin{aligned} \text{id}(P) &= P_1(x,z) & \text{id}(P') &= P'_1(y;t) \\ s_1(P) &= P_2(z;x) & s_1(P') &= P'_2(t;y) \\ s_2(P) &= P_3(-z;-x) & s_2(P') &= P'_3(-t;-y) \\ s_3(P) &= P_4(x;-z) & s_3(P') &= P'_4(y;-t) \\ s_4(P) &= P_5(-x;z) & s_4(P') &= P'_5(-y;t) \\ r_1(P) &= P_6(-z;x) & r_1(P') &= P'_6(-t;y) \\ r_2(P) &= P_7(-x;-z) & r_2(P') &= P'_7(-y;-t) \\ r_3(P) &= P_8(z;-x) & r_3(P') &= P'_8(t;-y) \end{aligned}$$

Les points P_i se situent sur le cercle de centre O, de rayon $\sqrt{x^2+z^2}$.
Les points P'_i se situent sur le cercle de centre O, de rayon $\sqrt{y^2+t^2}$.
A chaque transformation du groupe $\Delta_4 \circ \Delta_4$ se trouve ainsi associé un couple de transformations du plan, dont elle est somme directe, conformément au tableau ci-dessous :

	id	s_1	s_2	s_3	s_4	r_1	r_2	r_3
id	Id	$S'_1 S_2$	$S'_2 S_1$	$S'_3 S_3$	$S'_4 S_4$	$R'_3 R_3$	$R'_2 R_2$	$R'_1 R_1$
s_1	$S'_1 R_2$	S_1	$R'_2 S_2$	$R'_1 S_4$	$R'_3 S_3$	$S'_4 R_1$	S'_2	$S'_3 R_3$
s_2	$S'_2 R_2$	$R'_2 S_1$	S_2	$R'_3 S_4$	$R'_1 S_3$	$S'_3 R_1$	S'_1	$S'_4 R_3$
s_3	S'_3	$R'_3 S_2$	$R'_1 S_1$	S_3	$R'_2 S_4$	$S'_1 R_3$	$S'_4 R_2$	$S'_2 R_1$
s_4	S'_4	$R'_1 S_2$	$R'_3 S_1$	$R'_2 S_3$	S_4	$S'_2 R_3$	$S'_3 R_2$	$S'_1 R_1$
r_1	$R'_1 R_2$	$S'_4 S_1$	$S'_3 S_2$	$S'_1 S_4$	$S'_2 S_3$	R_1	R'_3	$R'_2 R_3$
r_2	R'_2	$S'_2 S_2$	$S'_1 S_1$	$S'_4 S_3$	$S'_3 S_4$	$R'_1 R_3$	R_2	$R'_3 R_1$
r_3	$R'_3 R_2$	$S'_3 S_1$	$S'_4 S_2$	$S'_2 S_4$	$S'_1 S_3$	$R'_2 R_1$	R'_1	R_3

On obtient alors la PROPRIÉTÉ suivante :

Pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$ tel que $d_i \in \{\text{id}, s_1, s_2, s_3, s_4, r_1, r_2, r_3\}$ on a :

$$(d_1 \oplus d_2) \circ (d_3 \oplus d_4) = (d_1 \circ d_3) \oplus (d_2 \circ d_4)$$

Ceci provient du fait que $\Delta'_4 \circ \Delta_4$ n'est autre que la somme directe de deux groupes isomorphes à Δ_4 .

Exemple :

$$\begin{aligned} (s_3 \oplus s_4) \circ (r_1 \oplus s_2) &= R'_2 S_3 S'_3 R_1 \\ &= R'_2 S_3 R_1 S'_4 \\ &= R'_2 S_2 S'_4 \\ &= S'_4 S_2 \end{aligned}$$

et $(s_3 \circ r_1) \oplus (s_4 \circ s_2) = s_2 \oplus r_3 = S'_4 S_2$

III. On peut également définir sur C_4 (et par restriction sur C_4^{AS+SA}) des transformations opérant sur chacun des blocs de quatre carrés. On obtient ainsi un nouveau groupe $\overline{\Delta}_4$ de huit transformations que l'on notera Id, $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3, \overline{S}_4, \overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3$.

En faisant opérer ce nouveau groupe sur un carré quelconque, on constate que :

$$\begin{aligned} \overline{S}_1 &= S'_1 S_1 & \overline{R}_1 &= R'_3 R_1 \\ \overline{S}_2 &= S'_2 S_2 & \overline{R}_2 &= R'_2 R_2 (*) \\ \overline{S}_3 &= S'_3 S_3 & \overline{R}_3 &= R'_1 R_3 \\ \overline{S}_4 &= S'_4 S_4 \end{aligned}$$

Il est à remarquer cependant que ces huit transformations commutent avec chacune des huit transformations de Δ'_4 (puisque les premières agissent dans les blocs de quatre carrés, alors que les secondes agissent, de façon indépendante, sur la disposition de ces blocs dans le carré 4×4).

Ainsi toute transformation de $\Delta'_4 \circ \Delta_4$ est la composée d'une application de Δ'_4 et d'une application de Δ_4 , en particulier on obtient :

$$\begin{aligned} S_1 &= S'_1 \overline{S}_1 = \overline{S}_1 S'_1 \\ S_2 &= S'_2 \overline{S}_2 = \overline{S}_2 S'_2 \\ S_3 &= S'_3 \overline{S}_3 = \overline{S}_3 S'_3 \\ S_4 &= S'_4 \overline{S}_4 = \overline{S}_4 S'_4 \\ R_1 &= R'_1 \overline{R}_1 = \overline{R}_1 R'_1 \\ R_2 &= R'_2 \overline{R}_2 = \overline{R}_2 R'_2 \\ R_3 &= R'_3 \overline{R}_3 = \overline{R}_3 R'_3 \end{aligned}$$

IV. CARRÉ DE JUPITER

A titre d'exemple, nous allons examiner le carré magique dit de Jupiter. C'est le carré

$$J = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 14 & 15 & 1 \\ \hline 9 & 7 & 6 & 12 \\ \hline 5 & 11 & 10 & 8 \\ \hline 16 & 2 & 3 & 13 \\ \hline \end{array}$$

qui se décompose en somme de la manière suivante :

* La transformation \overline{R}_2 est celle qui est également décrite dans la Brochure "Les Carrés Magiques" (§ 17) de l'A.P.M.E.P.

$$J = \frac{17}{2} B_0 + \frac{1}{2} J' \quad \text{avec} \quad J' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -9 & 11 & 13 & -15 \\ \hline 1 & -3 & -5 & 7 \\ \hline -7 & 5 & 3 & -1 \\ \hline 15 & -13 & -11 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Ce dernier carré étant égal à $5(D_1 + 2D_2) + 3(C_1 + 2C_2)$ est donc un carré $AS + SA$.

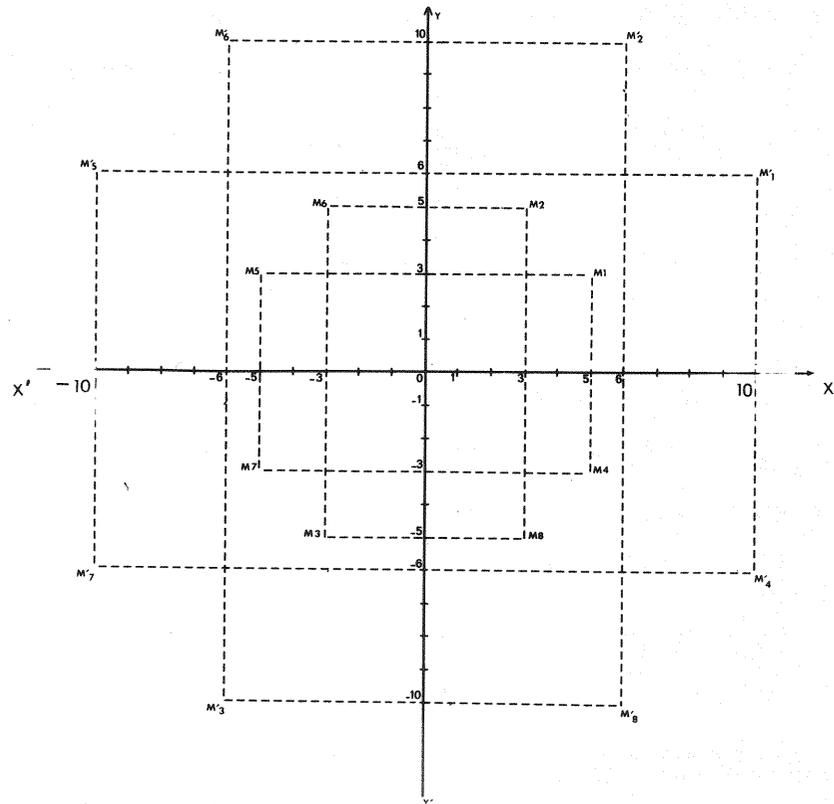
Par suite, on peut obtenir, en appliquant $\Delta'_4 \circ \Delta_4$ à J , 63 autres carrés magiques.

Action de $\Delta'_4 \circ \Delta_4$ sur J' :

On obtient $J'(5; 10; 3; 6)$.

A l'orbite de J' par $\Delta'_4 \circ \Delta_4$ correspondent les points : $M_1(5, 3)$ $M'_1(10, 6)$ et leurs homologues par le groupe diédral Δ_4 .

D'où la représentation par 16 points de l'ensemble $\Delta'_4 \circ \Delta_4(J)$.



CHAPITRE 4

l'espace \mathcal{C}_8

Après l'étude de C_4 proposée au chapitre précédent, on peut être tenté de passer à C_8 . Pourquoi ? Eh bien parce que chaque carré 8×8 peut être décomposé en 4 blocs de carrés 4×4 , lesquels peuvent eux-mêmes être redécoupés en 4 blocs de carrés 2×2 . Cependant, toutes les transformations que nous considérerons étant linéaires, il nous faut d'abord rechercher une base de cet espace vectoriel (selon la méthode exposée au chapitre 2).

I. BASE DE C_8

C_8 est un espace vectoriel de dimension 48.

a) Carrés AAA.

Ils sont de la forme générale

0	a	b	c	-c	-b	-a	0	(*)
-a	0	d	e	-e	-d	0	a	
-b	-d	0	f	-f	0	d	b	
-c	-e	-f	0	0	f	e	c	
c	e	f	0	0	-f	-e	-c	
b	d	0	-f	f	0	-d	-b	
a	0	-d	-e	e	d	0	-a	
0	-a	-b	-c	c	b	a	0	

On obtient alors six carrés de base :

$$A_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

* Les cases grisées indiquent où l'on peut lire les coordonnées respectives, ce qui sera très utile pour établir les tableaux des paragraphes II et III.

$$A_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$A_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$A_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$A_6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

b) Carrés AAS.

Ils sont de la forme générale :

0	a	b	c	c	b	a	0
-a	0	d	e	e	d	0	-a
-b	-d	0	f	f	0	-d	-b
-c	-e	-f	0	0	-f	-e	-c
-c	-e	-f	0	0	-f	-e	-c
-b	-d	0	f	f	0	-d	-b
-a	0	d	e	e	d	0	-a
0	a	b	c	c	b	a	0

avec
$$\begin{aligned} a &= -b - c \\ d &= f - b \\ e &= -f - c \end{aligned}$$

On en déduit alors les trois carrés de base qui sont :

$$A'_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$A'_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$A'_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

c) Carrés SSS.

Ils sont de la forme

a	b	c	-a -b -c	-a -b -c	c	b	a
b	d	e	a +c +d	a +c +d	e	d	b
c	e	f	a +b +d	a +b +d	f	e	c
-a -b -c	a +c +f	a +b +d	-a -d -f	-a -d -f	a +b +d	a +c +f	-a -b -c
-a -b -c	a +c +f	a +b +d	-a -d -f	-a -d -f	a +b +d	a +c +f	-a -b -c
c	e	f	a +b +d	a +b +d	f	e	c
b	d	e	a +c +f	a +c +f	e	d	b
a	b	c	-a -b -c	-a -b -c	c	b	a

+ kB₀

avec
e = -(a + c + d + f)

d'où les 6 carrés :

$$B_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$B_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$B_7 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$B_8 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$B_9 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

e) Carrés SA.

Ils sont de la forme générale :

•	f	e	d	c	b	a	0
f	•	n	j	k	h	0	-a
e	n	•	m	l	0	-h	-b
d	j	m	•	0	-l	-k	-c
c	k	l	0	•	-m	-j	-d
b	h	0	-l	-m	•	-n	-e
a	0	-h	-k	-j	-n	•	-f
0	-a	-b	-c	-d	-e	-f	•

Les cases pointées ont pour composante l'opposée de la somme des autres nombres situés sur la même ligne (ou la même colonne).
On obtient ainsi 12 carrés de base.

$$C_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$C_6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$D_7 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D_8 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D_9 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D_{10} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D_{11} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D_{12} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

II. ÉTUDE DES CARRÉS AA ET SS

1. a) Action de Δ_4

	S_1	S_2	S_3	S_4	R_1	R_2	R_3	Id
A_1	$-A_1$	$-A_1$	$-A_1$	$-A_1$	A_1	A_1	A_1	A_1
A_2	$-A_2$	$-A_2$	$-A_2$	$-A_2$	A_2	A_2	A_2	A_2
A_3	$-A_3$	$-A_3$	$-A_3$	$-A_3$	A_3	A_3	A_3	A_3
A_4	$-A_4$	$-A_4$	$-A_4$	$-A_4$	A_4	A_4	A_4	A_4
A_5	$-A_5$	$-A_5$	$-A_5$	$-A_5$	A_5	A_5	A_5	A_5
A_6	$-A_6$	$-A_6$	$-A_6$	$-A_6$	$+A_6$	$+A_6$	A_6	A_6

A'_1	A'_1	A'_1	$-A'_1$	$-A'_1$	$-A'_1$	A'_1	$-A'_1$	A'_1
A'_2	A'_2	A'_2	$-A'_2$	$-A'_2$	$-A'_2$	A'_2	$-A'_2$	A'_2
A'_3	A'_3	A'_3	$-A'_3$	$-A'_3$	$-A'_3$	A'_3	$-A'_3$	A'_3

B_0								
B_1								
B_2								
B_3								
B_4								
B_5								

B'_1	$-B'_1$	$-B'_1$	B'_1	B'_1	$-B'_1$	B'_1	$-B'_1$	B'_1
B'_2	$-B'_2$	$-B'_2$	B'_2	B'_2	$-B'_2$	$+B'_2$	$-B'_2$	B'_2
B'_3	$-B'_3$	$-B'_3$	B'_3	B'_3	$-B'_3$	B'_3	$-B'_3$	B'_3
B'_4	$-B'_4$	$-B'_4$	B'_4	B'_4	$-B'_4$	B'_4	$-B'_4$	B'_4
B'_5	$-B'_5$	$-B'_5$	B'_5	B'_5	$-B'_5$	B'_5	$-B'_5$	B'_5
B'_6	$-B'_6$	$-B'_6$	B'_6	B'_6	$-B'_6$	B'_6	$-B'_6$	B'_6
B'_7	$-B'_7$	$-B'_7$	B'_7	B'_7	$-B'_7$	B'_7	$-B'_7$	B'_7
B'_8	$-B'_8$	$-B'_8$	B'_8	B'_8	$-B'_8$	B'_8	$-B'_8$	B'_8
B'_9	$-B'_9$	$-B'_9$	B'_9	B'_9	$-B'_9$	B'_9	$-B'_9$	$+B'_9$

1. b) Action de Δ_4' (les applications de Δ_4' permutant des blocs 2×2)
On se contentera d'étudier les symétries et R_2' (*)

	S_1'	S_2'	S_3'	S_4'	R_2'
A_1	$-B_1' + B_3'$	$B_1' - B_3'$			$-A_1$
A_2	$\frac{1}{2}(-A_3 - A_4 - B_4' + B_6')$	$\frac{1}{2}(-A_3 - A_4 + B_4' - B_6')$			A_5
A_3	$\frac{1}{2}(-A_2 - A_5 - B_3' + B_7')$	$\frac{1}{2}(-A_2 - A_5 + B_3' - B_7')$			A_4
A_4	$\frac{1}{2}(-A_2 - A_5 + B_3' - B_7')$	$\frac{1}{2}(-A_2 - A_5 - B_3' + B_7')$			A_3
A_5	$\frac{1}{2}(-A_3 - A_4 + B_4' - B_6')$	$\frac{1}{2}(-A_3 - A_4 - B_4' + B_6')$			A_2
A_6	$-B_6'$	$-B_6'$			$-A_6$
A_1'	$\frac{1}{2}(-A_1' + A_2' - 2B_1 + B_3 + 2B_4)$	$\frac{1}{2}(-A_1' + A_2' + 2B_1 - B_3 - 2B_4)$	$\frac{1}{2}(2A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 - A_1' + A_2')$	$\frac{1}{2}(-2A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_1' + A_2')$	$-A_2'$
A_2'	$\frac{1}{2}(A_1' - A_2' - 2B_1 + B_3 + 2B_4)$	$\frac{1}{2}(A_1' - A_2' + 2B_1 - B_3 - 2B_4)$	$\frac{1}{2}(2A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 - A_1' - A_2')$	$\frac{1}{2}(-2A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_1' - A_2')$	$-A_1'$
A_3'	$\frac{1}{2}(A_1' - A_2' - B_3 + 2B_5)$	$\frac{1}{2}(A_1' - A_2' + B_3 - 2B_5)$	$\frac{1}{2}(A_2 + A_3 - A_4 - A_5 - 2A_6 - A_1' - A_2')$	$\frac{1}{2}(-A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + 2A_6 - A_1' - A_2')$	$-A_1' + A_2'$ $-A_3'$

	B_0	B_0	B_0	B_0	B_0
B_0	B_0	B_0	B_0	B_0	B_0
B_1			$\frac{1}{2}(B_1 + B_3 + B_4 - B_5 - B_1' + B_3' + B_5' - B_7' - B_8')$	$\frac{1}{2}(B_1 + B_3 + B_4 - B_5 + B_1' - B_3' - B_5' + B_7' + B_8')$	$B_3 + B_4$ $-B_5$
B_2			B_2	B_2	B_2
B_3	$-B_3$	$-B_3$	B_3	B_3	B_3
B_4			$\frac{1}{2}(B_1 + B_4 - B_5 + B_1' + B_4' - B_5' - B_6' - B_8')$	$\frac{1}{2}(B_1 + B_4 - B_5 - B_1' - B_4' + B_5' + B_6' + B_8')$	$B_1 - B_5$
B_5	$\frac{1}{2}(A_1' - A_2' + 2A_3' - B_3)$	$\frac{1}{2}(-A_1' + A_2' - 2A_3' - B_3)$	$\frac{1}{2}(B_3 + B_3' - B_4' - B_6' - B_7' - 2B_8')$	$\frac{1}{2}(B_3 - B_3' + B_4' + B_6' + B_7' + 2B_8')$	$B_3 - B_5$

	B_1'	B_2'	B_3'	B_4'	B_5'	B_6'	B_7'	B_8'	B_9'
B_1'	$\frac{1}{2}(-A_1 - A_6 - B_2' + B_9')$								$B_5' - B_6'$
B_2'		B_2'							B_2'
B_3'	$\frac{1}{2}(-A_3 + A_4 - B_4' - B_6')$								B_7'
B_4'	$\frac{1}{2}(-A_2 + A_5 - B_3' - B_7')$								B_6'
B_5'	$\frac{1}{2}(A_1 - A_6 - B_2' + B_9')$								$B_1' - B_6'$
B_6'	$\frac{1}{2}(A_2 - A_5 - B_3' - B_7')$								B_4'
B_7'	$\frac{1}{2}(A_3 - A_4 - B_4' - B_6')$								B_3'
B_8'	$-A_6$								$-B_8'$
B_9'			B_9'						B_9'

(*) Les cases grisées indiquent que le carré obtenu n'est pas magique.

1. c) Action de Δ_4' (les applications de Δ_4' agissant sur les blocs 4×4)

	S_1'	S_2'	S_3'	S_4'	R_2''
A_1	$\frac{1}{2}(-A_2 + A_5 - B_3' + B_7')$	$\frac{1}{2}(-A_2 + A_5 + B_3' - B_7')$			$-A_6$
A_2	$\frac{1}{2}(-A_1 + A_6 - B_2' + B_9')$	$\frac{1}{2}(-A_1 + A_6 + B_2' - B_9')$			$-A_5$
A_3	$-B_1'$	B_1'			$-A_3$
A_4	$-B_5' + B_8'$	$B_5' - B_8'$			$-A_4$
A_5	$\frac{1}{2}(A_1 - A_6 - B_2' + B_9')$	$\frac{1}{2}(A_1 - A_6 + B_2' - B_9')$			$-A_2$
A_6	$\frac{1}{2}(A_2 - A_5 - B_3' + B_7')$	$\frac{1}{2}(A_2 - A_5 + B_3' - B_7')$			$-A_1$

A_1'	$\frac{1}{2}(-A_1' - A_3' + B_2 - B_3 - 2B_4 + 2B_5)$	$\frac{1}{2}(-A_1' - A_3' + B_2 - B_3 - 2B_4 + 2B_5)$	$\frac{1}{2}(A_1 - A_2 + 2A_4 - A_5 + A_6 + A_1' + A_3')$	$\frac{1}{2}(-A_1 + A_2 - 2A_4 + A_5 - A_6 + A_1' + A_3')$	A_3'
A_2'	$\frac{1}{2}(-A_1' - A_3' - B_2 - B_3 + 2B_4)$	$\frac{1}{2}(-A_1' - A_3' - B_2 - B_3 + 2B_4)$	$\frac{1}{2}(A_1 + A_2 - 2A_3 + A_5 + A_6 + A_1' + A_3')$	$\frac{1}{2}(-A_1 - A_2 + 2A_3 - A_5 - A_6 + A_1' + A_3')$	$A_1' - A_2' + A_3'$
A_3'	$\frac{1}{2}(-A_1' - A_3' - B_2 + B_3 + 2B_4 - 2B_5)$	$\frac{1}{2}(-A_1' - A_3' - B_2 + B_3 + 2B_4 - 2B_5)$	$\frac{1}{2}(-A_1 + A_2 - 2A_4 + A_5 - A_6 + A_1' + A_3')$	$\frac{1}{2}(A_1 - A_2 + 2A_4 - A_5 + A_6 + A_1' + A_3')$	A_1'

B_0	B_0	B_0	B_0	B_0	B_0
B_1			$\frac{1}{2}(B_2 + B_3 - 2B_1' + B_2' + B_3' - B_7' - B_9')$	$\frac{1}{2}(B_2 + B_3 + 2B_1' - B_2' - B_3' + B_7' + B_9')$	$-B_1 + B_2 - B_3$
B_2			B_2	B_2	B_2
B_3			B_3	B_3	B_3
B_4			$\frac{1}{2}(-B_1 + B_2 + B_4 + B_5 - B_1' + B_2' - B_5' + B_8' - B_9')$	$\frac{1}{2}(-B_1 + B_2 + B_4 + B_5 + B_1' - B_2' + B_5' - B_8' + B_9')$	$-B_1 + B_2 + B_5$
B_5			$\frac{1}{2}(-B_1 + B_3 + B_4 + B_5 - B_1' + B_3' + B_5' - B_7' - B_8')$	$\frac{1}{2}(-B_1 + B_3 + B_4 + B_5 + B_1' - B_3' - B_5' + B_7' + B_8')$	$-B_1 + B_3 + B_4$

B_1'	$-A_3$	A_3			$-B_1'$
B_2'	$\frac{1}{2}(-A_2 - A_5 - B_3' - B_7')$	$\frac{1}{2}(A_2 + A_5 - B_3' - B_7')$			B_9'
B_3'	$\frac{1}{2}(-A_1 - A_6 - B_2' - B_9')$	$\frac{1}{2}(A_1 + A_6 - B_2' - B_9')$			B_7'
B_4'			B_4'	B_4'	B_4'
B_5'	$\frac{1}{2}(-A_3 - A_4 + B_4' - B_6')$	$\frac{1}{2}(A_3 + A_4 + B_4' - B_6')$			$-B_1' + B_8'$
B_6'			B_6'	B_6'	B_6'
B_7'	$\frac{1}{2}(A_1 + A_6 - B_2' - B_9')$	$\frac{1}{2}(-A_1 - A_6 - B_2' - B_9')$			B_3'
B_8'	$\frac{1}{2}(-A_3 + A_4 + B_4' - B_6')$	$\frac{1}{2}(A_3 - A_4 + B_4' - B_6')$			$-B_1' + B_3'$
B_9'	$\frac{1}{2}(A_2 + A_5 - B_3' - B_7')$	$\frac{1}{2}(-A_2 - A_5 - B_3' - B_7')$			B_2'

2. Compte tenu des résultats des deux derniers tableaux, on est amené naturellement à considérer les nouveaux carrés de base suivants :

2. a) Carrés AAA

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 + A_6 & E_3 &= A_2 + A_5 & E_5 &= A_3 + A_4 \\ E_2 &= A_1 - A_6 & E_4 &= A_2 - A_5 & E_6 &= A_3 - A_4 \end{aligned}$$

2. b) Carrés AAS

$$\begin{aligned} E'_1 &= A'_1 + A'_3 & E'_2 &= A'_1 - A'_2 & E'_3 &= A'_3 - A'_2 \end{aligned}$$

2. c) Carrés SSA

$$\begin{aligned} F_1 &= B'_2 + B'_5 & F_3 &= B'_3 + B'_7 & F_5 &= B'_4 + B'_6 \\ F_2 &= B'_2 - B'_5 & F_4 &= B'_3 - B'_7 & F_6 &= B'_4 - B'_6 \\ F_7 &= B'_1 - B'_5 + B'_8 & & & & \\ F_8 &= B'_1 + B'_5 - B'_8 & & & & \\ F_9 &= -B'_1 + B'_5 + B'_8 & & & & \end{aligned}$$

2. d) Carrés SSS

On conserve B_0 (toujours transformé en lui-même)

$$\begin{aligned} F'_1 &= B_2 - B_3 \\ F'_2 &= -B_1 + B_2 - B_4 + B_5 \\ F'_3 &= -B_1 + B_3 + B_4 - B_5 \\ F'_4 &= B_1 - B_4 - B_5 \end{aligned}$$

On ne considèrera pas de carré F'_5 , ce carré ne pouvant être transformé en carré magique par les applications ci-dessus (donc ne présentant plus aucun intérêt pour notre étude).

3. a) On peut alors établir un nouveau tableau pour étudier l'action de Δ'_4 . On obtient :

	S'_1	S'_2	S'_3	S'_4	R'_1	R'_2	R'_3	Id
E_1	$-F_7$	F_7				$-E_1$		E_1
E_2	F_9	$-F_9$				$-E_2$		E_2
E_3	$-E_5$	$-E_5$	$-E_3$	$-E_3$	E_5	E_3	E_5	E_3
E_4	$-F_6$	F_6				$-E_4$		E_4
E_5	$-E_3$	$-E_3$	$-E_5$	$-E_5$	$+E_3$	E_5	E_3	E_5
E_6	$-F_4$	F_4				$-E_6$		E_6

E'_1	$-F'_4$	F'_4	$E_2 + E_4$	$-E_2 - E_4$	$F_9 - F_6$	$-E'_1$	$F_6 - F_9$	E'_1
E'_2	$-E'_2$	$-E'_2$	$-E'_2$	$-E'_2$	E'_2	E'_2	E'_2	E'_2
E'_3	$-F'_3$	F'_3	$-E_1 + E_6$	$E_1 - E_6$	$F_7 - F_4$	$-E'_3$	$F_4 - F_7$	E'_3

F_1			F_1	F_1		F_1		F_1
F_2	$-F_8$	$-F_8$	F_2	F_2	$-F_8$	F_2	$-F_8$	F_2
F_3	$-F_5$	$-F_5$	F_3	F_3	$-F_5$	F_3	$-F_5$	F_3
F_4	$-E_6$	$-E_6$				$-F_4$		F_4
F_5	$-F_3$	$-F_3$	F_5	F_5	$-F_3$	F_5	$-F_3$	F_5
F_6	$-E_4$	E_4				$-F_6$		F_6
F_7	$-E_1$	E_1				$-F_7$		F_7
F_8	$-F_2$	$-F_2$	F_8	F_8	$-F_2$	F_8	$-F_2$	F_8
F_9	E_2	$-E_2$				$-F_9$		F_9

F'_1			F'_1	F'_1		F'_1		F'_1
F'_2	$-F'_2$	$-F'_2$	F'_2	F'_2	$-F'_2$	F'_2	$-F'_2$	F'_2
F'_3	$-E'_3$	E'_3	$F_7 - F_4$	$F_4 - F_7$	$E_6 - E_1$	$-F'_3$	$E_1 - E_6$	F'_3
F'_4	$-E'_1$	E'_1	$F_9 - F_6$	$F_6 - F_9$	$E_2 + E_4$	$-F'_4$	$-E_2 - E_4$	F'_4
F'_5								

3. b) De même on obtient pour Δ''_4 :

	S''_1	S''_2	S''_3	S''_4	R''_1	R''_2	R''_3	Id
E_1	$-F_4$	F_4				$-E_1$		E_1
E_2	$-E_4$	$-E_4$	E_2	E_2	$-E_4$	E_2	$-E_4$	E_2
E_3	$-F_2$	E_2				$-E_3$		E_3
E_4	$-E_2$	$-E_2$	E_4	E_4	$-E_2$	E_4	$-E_2$	E_4
E_5	$-F_8$	$-F_8$				$-E_5$		E_5
E_6	$-F_7$	F_7				$-E_6$		E_6

E'_1	$-E'_1$	$-E'_1$	E'_1	E'_1	$-E'_1$	$+E'_1$	$-E'_1$	E'_1
E'_2	F'_2	$-F'_2$	$E_5 - E_3$	$E_3 - E_5$	$F_8 - F_2$	$-E'_2$	$F_2 - F_8$	E'_2
E'_3	F'_3	$-F'_3$	$E_6 - E_1$	$E_1 - E_6$	$F_7 - F_4$	$-E'_3$	$F_7 - F_4$	E'_3

F_1	$-F_3$	$-F_3$	F_1	F_1	$-F_3$	F_1	$-F_3$	F_1
F_2	$-E_3$	E_3				$-F_2$		F_2
F_3	$-F_1$	$-F_1$	F_3	F_3	$-F_1$	F_3	$-F_1$	F_3
F_4	$-E_1$	$-E_1$				$-F_4$		F_4
F_5			F_5	F_5		F_5		F_5
F_6	F_9	F_9	F_6	F_6	F_9	F_6	F_9	F_6
F_7	$-E_6$	E_6				$-F_7$		F_7
F_8	$-E_5$	E_5				$-F_8$		F_8
F_9	F_6	F_6	F_9	F_9	F_6	F_9	F_6	F_9

F'_1	$-F'_1$	$-F'_1$	F'_1	F'_1	$-F'_1$	F'_1	$-F'_1$	F'_1
F'_2	E'_2	$-E'_2$	$F_8 - F_2$	$F_2 - F_8$	$E_5 - E_3$	$-F'_2$	$E_5 - E_3$	F'_2
F'_3	E'_3	$-E'_3$	$F_7 - F_4$	$F_4 - F_7$	$E_6 - E_1$	$-F'_3$	$-E_6 + E_1$	F'_3
F'_4	$-F'_4$	$-F'_4$	F'_4	F'_4	$-F'_4$	F'_4	$-F'_4$	F'_4
F'_5								

4. a) Considérons les nouveaux carrés AAA et SSA suivants :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= E_1 + E_6 & \Lambda_3 &= E_3 + E_5 & \Lambda_5 &= E_2 + E_4 \\ \Lambda_2 &= E_1 - E_6 & \Lambda_4 &= E_3 - E_5 & \Lambda_6 &= E_2 - E_4 \\ \Phi_1 &= F_4 + F_7 & \Phi_3 &= F_2 + F_8 & \Phi_5 &= F_6 - F_9 \\ \Phi_2 &= F_4 - F_7 & \Phi_4 &= F_2 - F_8 & \Phi_6 &= F_6 + F_9 \end{aligned}$$

puis, pour harmoniser les notations, posons :

$$\begin{aligned} \Lambda'_1 &= E'_1 & \Lambda'_2 &= E'_2 & \Lambda'_3 &= E'_3 \\ \Phi'_1 &= F'_4 & \Phi'_2 &= F'_2 & \Phi'_3 &= F'_3 \\ \Phi'_4 &= F'_1 & & & & \end{aligned}$$

On obtient alors le tableau suivant sur lequel on constate que chacun des trois sous-espaces engendrés par les ensembles $\{\Lambda_4, \Phi_4, \Lambda'_2, \Phi'_2\}$, $\{\Lambda_2, \Phi_2, \Lambda'_3, \Phi'_3\}$ et $\{\Lambda_5, \Phi_5, \Lambda'_1, \Phi'_1\}$ est globalement stable par le groupe $\Delta_4'' \circ \Delta_4' \circ \Delta_4$.

Le fait qu'il n'y ait que trois carrés AAS indépendants implique que le sous-espace engendré par ces 12 carrés, auxquels on ajoute B_0 , est le "plus grand" espace inclus dans C_8^{AA+SS} stable par ce même groupe.

	action de Δ_4'														
	S'_1	S'_2	S'_3	S'_4	R'_1	R'_2	R'_3	Id	S''_1	S''_2	S''_3	S''_4	R''_1	R''_2	R''_3
Λ_1	$-\Phi_1$	Φ_1				$-\Lambda_1$		Λ_1	$-\Phi_1$	Φ_1				$-\Lambda_1$	
Λ_2	$-\Phi_2$	Φ_2	$-\Lambda'_3$	Λ'_3	Φ'_3	$-\Lambda_2$		Λ_2	$-\Phi_2$	Φ_2	$-\Lambda'_3$	Λ'_3	Φ'_3	$-\Lambda_2$	$-\Phi'_3$
Λ_3	$-\Lambda_3$	$-\Lambda_3$	$-\Lambda_3$	$-\Lambda_3$	Λ_3	Λ_3	Λ_3	Λ_3	$-\Phi_3$	Φ_3	$-\Lambda_3$	Λ_3	$-\Phi_3$	$-\Lambda_3$	
Λ_4	Λ_4	Λ_4	$-\Lambda_4$	$-\Lambda_4$	$-\Lambda_4$	$-\Lambda_4$	$-\Lambda_4$	Λ_4	$-\Lambda_4$	Λ_4	$-\Lambda_4$	$-\Lambda_4$	$-\Lambda_4$	$-\Lambda_4$	$-\Phi'_2$
Λ_5	$-\Phi_5$	$+\Phi_5$	Λ'_1	$-\Lambda'_1$	$-\Phi'_1$	$-\Lambda_5$	Φ'_1	Λ_5	$-\Lambda_5$	Λ_5	Λ_5	Λ_5	$-\Lambda_5$	Λ_5	$-\Lambda_5$
Λ_6	Φ_6	$-\Phi_6$				$-\Lambda_6$		Λ_6	Λ_6	Λ_6	Λ_6	Λ_6	Λ_6	Λ_6	Λ_6
Φ_1	$-\Lambda_1$	Λ_1				$-\Phi_1$		Φ_1	$-\Lambda_1$	Λ_1			$-\Phi_1$		
Φ_2	$-\Lambda_2$	Λ_2				$-\Phi_2$		Φ_2	$-\Lambda_2$	Λ_2			$-\Phi_2$		$-\Lambda'_3$
Φ_3	$-\Phi_3$	$-\Phi_3$	Φ_3	Φ_3	$-\Phi_3$	$-\Phi_3$	$-\Phi_3$	Φ_3	$-\Phi_3$	Φ_3			$-\Phi_3$		
Φ_4	Φ_4	Φ_4	Φ_4	Φ_4	Φ_4	Φ_4	Φ_4	Φ_4	$-\Phi_4$	Φ_4			$-\Phi_4$		$-\Lambda'_2$
Φ_5	$-\Lambda_5$	Λ_5				$-\Phi_5$		Φ_5	$-\Phi_5$	Φ_5			$-\Phi_5$		$-\Phi_5$
Φ_6	Λ_6	$-\Lambda_6$				$-\Phi_6$		Φ_6	Φ_6	Φ_6			Φ_6		Φ_6
Λ'_1	$-\Phi'_1$	Φ'_1				$-\Phi_1$		Λ'_1	$-\Lambda'_1$	Λ'_1			$-\Lambda'_1$		$-\Lambda'_1$
Λ'_2	$-\Lambda'_2$	$-\Lambda'_2$				$-\Lambda_2$		Λ'_2	$-\Lambda'_2$	Λ'_2			$-\Lambda'_2$		Φ_4
Λ'_3	$-\Phi'_3$	Φ'_3				$-\Lambda_3$		Λ'_3	$-\Lambda'_3$	Λ'_3			$-\Lambda'_3$		Φ_2
Φ'_1	$-\Lambda'_1$	Λ'_1				$-\Phi_1$		Φ'_1	$-\Phi'_1$	Φ'_1			$-\Phi'_1$		$-\Phi'_1$
Φ'_2	$-\Phi'_2$	$-\Phi'_2$				$-\Lambda_2$		Φ'_2	$-\Lambda'_2$	Φ'_2			$-\Phi'_2$		Λ_4
Φ'_3	$-\Lambda'_3$	Λ'_3				$-\Phi_3$		Φ'_3	$-\Lambda'_3$	Φ'_3			$-\Phi'_3$		$-\Phi'_3$
Φ'_4						$-\Phi_4$		Φ'_4	$-\Phi'_4$	Φ'_4			$-\Phi'_4$		$-\Phi'_4$

III. ÉTUDE DES CARRÉS AS ET SA

1. a) Action de Δ_4

Pour tout indice i compris entre 1 et 12 on a :

	S_1	S_2	S_3	S_4	R_1	R_2	R_3	Id
C_i	D_i	$-D_i$	$-C_i$	C_i	$-D_i$	$-C_i$	D_i	C_i
D_i	C_i	$-C_i$	D_i	$-D_i$	C_i	$-D_i$	$-C_i$	D_i

1. b) Action de Δ'_4

Elle se résume par le tableau suivant (sur lequel on a omis R'_1 et R'_3 qui peuvent s'obtenir par composition) (*)

	S'_1	S'_2	S'_3	S'_4	R'_2
C_1	$-C_1$	$-C_1$	C_1	C_1	C_1
C_2	$\frac{1}{2}(D_3 - D_6 + D_7 + D_{12} - C_1 + C_4 - C_{10} + C_{11})$	$\frac{1}{2}(-D_3 + D_6 - D_7 - D_{12} - C_1 + C_4 - C_{10} + C_{11})$			$-C_6$
C_3	$\frac{1}{2}(D_2 - D_6 + D_8 + D_{12} - C_1 + C_5 - C_9 - C_{11})$	$\frac{1}{2}(-D_2 + D_6 - D_8 - D_{12} - C_1 + C_5 - C_9 - C_{11})$	$-C_7$	C_3	$-C_7$
C_4	$\frac{1}{2}(D_3 - D_6 + D_8 - D_{12} - C_1 + C_2 - C_8 + C_{11})$	$\frac{1}{2}(-D_3 + D_6 - D_8 + D_{12} - C_1 + C_2 - C_8 + C_{11})$			$-C_{10}$
C_5	$\frac{1}{2}(D_4 - D_6 + D_{10} - D_{12} - C_1 + C_3 - C_7 - C_{11})$	$\frac{1}{2}(-D_4 + D_6 - D_{10} + D_{12} - C_1 + C_3 - C_7 - C_{11})$	$-C_9$	C_5	$-C_9$
C_6	$-D_6$	D_6	$-C_6$	C_6	$-C_6$
C_7	$\frac{1}{2}(D_2 - D_6 + D_8 + D_{12} + C_1 - C_5 + C_9 + C_{11})$	$\frac{1}{2}(-D_2 + D_6 - D_8 - D_{12} + C_1 - C_5 + C_9 + C_{11})$	$-C_3$	C_7	$-C_3$
C_8	$\frac{1}{2}(D_3 - D_6 + D_7 + D_{12} + C_1 - C_4 + C_{10} - C_{11})$	$\frac{1}{2}(-D_3 + D_6 - D_7 - D_{12} + C_1 - C_4 + C_{10} - C_{11})$			$-C_2$
C_9	$\frac{1}{2}(D_4 - D_6 + D_{10} - D_{12} + C_1 - C_3 + C_7 + C_{11})$	$\frac{1}{2}(-D_4 + D_6 - D_{10} + D_{12} + C_1 - C_3 + C_7 + C_{11})$	$-C_5$	C_9	$-C_5$
C_{10}	$\frac{1}{2}(D_3 - D_6 + D_8 - D_{12} + C_1 - C_2 + C_8 - C_{11})$	$\frac{1}{2}(-D_3 + D_6 - D_8 + D_{12} + C_1 - C_2 + C_8 - C_{11})$			$-C_4$
C_{11}	$-C_{11}$	$-C_{11}$	C_{11}	C_{11}	C_{11}
C_{12}	$-D_{12}$	D_{12}	$-C_{12}$	C_{12}	$-C_{12}$

	$-D_1$	$-D_1$	D_1	D_1	D_1
D_2	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_4 - D_{10} + D_{11} + C_3 - C_6 + C_7 + C_{12})$	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_4 - D_{10} + D_{11} - C_3 + C_6 - C_7 - C_{12})$			$-D_8$
D_3	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_5 - D_9 - D_{11} + C_2 - C_8 + C_9 + C_{12})$	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_5 - D_9 - D_{11} - C_2 + C_8 - C_9 - C_{12})$	D_3	$-D_7$	$-D_7$
D_4	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_2 - D_8 + D_{11} + C_5 - C_6 + C_9 - C_{12})$	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_2 - D_8 + D_{11} - C_5 + C_6 - C_9 + C_{12})$			$-D_{10}$
D_5	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_3 - D_7 - D_{11} + C_4 - C_6 + C_{10} - C_{12})$	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_3 - D_7 - D_{11} - C_4 + C_6 - C_{10} + C_{12})$	D_5	$-D_9$	$-D_9$
D_6	$-C_6$	C_6	D_6	$-D_6$	$-D_6$
D_7	$\frac{1}{2}(D_1 - D_3 + D_9 - D_{11} + C_2 - C_6 + C_8 + C_{12})$	$\frac{1}{2}(D_1 - D_3 + D_9 - D_{11} - C_2 + C_6 - C_8 - C_{12})$	D_7	$-D_3$	$-D_3$
D_8	$\frac{1}{2}(D_1 - D_4 + D_{10} - D_{11} + C_3 - C_6 + C_{10} - C_{12})$	$\frac{1}{2}(D_1 - D_4 + D_{10} - D_{11} - C_3 + C_6 - C_{10} + C_{12})$			$-D_2$
D_9	$\frac{1}{2}(D_1 - D_3 + D_7 + D_{11} + C_4 - C_6 + C_{10} - C_{12})$	$\frac{1}{2}(D_1 - D_3 + D_7 + D_{11} - C_4 + C_6 - C_{10} + C_{12})$	D_9	$-D_5$	$-D_5$
D_{10}	$\frac{1}{2}(D_1 - D_2 + D_8 - D_{11} + C_5 - C_6 + C_9 - C_{12})$	$\frac{1}{2}(D_1 - D_2 + D_8 - D_{11} - C_5 + C_6 - C_9 + C_{12})$			$-D_4$
D_{11}	$-D_{11}$	$-D_{11}$	D_{11}	D_{11}	D_{11}
D_{12}	$-C_{12}$	C_{12}	D_{12}	$-D_{12}$	$-D_{12}$

(*) Remarquons que pour construire ce tableau (comme le suivant) il suffit de faire les calculs pour les C_i , ceux sur les D_i étant obtenus par application de S_1 qui commute avec S'_1 et S'_2 , et par conséquent en intervertissant les lettres C et D.

1. c) Action de Δ_4'

Comme pour Δ_4 et avec la même remarque, nous obtenons le tableau suivant :

	S_1'	S_2'	S_3'	S_4'	R_2'
C_1	$\frac{1}{2}(D_2 - D_4 - D_8 + D_{10} - C_3 + C_5 + C_7 - C_9)$	$\frac{1}{2}(-D_2 + D_4 + D_8 - D_{10} - C_3 + C_5 + C_7 - C_9)$			C_{11}
C_2	$\frac{1}{2}(D_1 - D_4 + D_{10} - D_{11} - C_3 + C_6 - C_7 - C_{12})$	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_4 - D_{10} + D_{11} - C_3 + C_6 - C_7 - C_{12})$			$-C_8$
C_3	$-C_3$	$-C_3$	C_3	C_3	C_3
C_4	$-D_4$	D_4	$-C_4$	C_4	$-C_4$
C_5	$\frac{1}{2}(-D_4 + D_6 - D_{10} + D_{12} + C_1 - C_3 + C_7 + C_{11})$	$\frac{1}{2}(D_4 - D_6 + D_{10} - D_{12} + C_1 - C_3 + C_7 + C_{11})$	$-C_9$	C_5	$-C_9$
C_6	$\frac{1}{2}(-D_4 + D_5 + D_9 - D_{10} + C_2 - C_3 - C_7 + C_8)$	$\frac{1}{2}(D_4 - D_5 - D_9 + D_{10} + C_2 - C_3 - C_7 + C_8)$	$-C_{12}$	C_6	$-C_{12}$
C_7	$-C_7$	$-C_7$	C_7	C_7	C_7
C_8	$\frac{1}{2}(-D_1 + D_4 - D_{10} + D_{11} - C_3 + C_6 - C_7 - C_{12})$	$\frac{1}{2}(D_1 - D_4 + D_{10} - D_{11} - C_3 + C_6 - C_7 - C_{12})$			C_2
C_9	$\frac{1}{2}(-D_4 + D_6 - D_{10} + D_{12} - C_1 + C_3 - C_7 - C_{11})$	$\frac{1}{2}(D_4 - D_6 + D_{10} - D_{12} - C_1 + C_3 - C_7 - C_{11})$	$-C_5$	C_9	$-C_5$
C_{10}	$-D_{10}$	D_{10}	$-C_{10}$	C_{10}	$-C_{10}$
C_{11}	$\frac{1}{2}(-D_2 + D_4 + D_8 - D_{10} - C_3 + C_5 + C_7 - C_9)$	$\frac{1}{2}(D_2 - D_4 - D_8 + D_{10} - C_3 + C_5 + C_7 - C_9)$			C_1
C_{12}	$\frac{1}{2}(-D_4 + D_5 + D_9 - D_{10} - C_2 + C_3 + C_7 - C_8)$	$\frac{1}{2}(D_4 - D_5 - D_9 + D_{10} - C_2 + C_3 + C_7 - C_8)$	$-C_6$	C_{12}	$-C_6$

D_1	$\frac{1}{2}(C_2 - C_4 - C_6 + C_{10} - D_3 + D_5 + D_7 - D_9)$	$\frac{1}{2}(-C_2 + C_4 + C_6 - C_{10} - D_3 + D_5 + D_7 - D_9)$			D_{11}
D_2	$\frac{1}{2}(C_1 - C_4 + C_{10} - C_{11} - D_3 + D_6 - D_7 - D_{12})$	$\frac{1}{2}(-C_1 + C_4 - C_{10} + C_{11} - D_3 + D_6 - D_7 - D_{12})$			D_8
D_3	$-D_3$	$-D_3$	D_3	D_3	D_3
D_4	$-C_4$	C_4	D_4	$-D_4$	$-D_4$
D_5	$\frac{1}{2}(-C_4 + C_6 - C_{10} + C_{12} + D_1 - D_3 + D_7 + D_{11})$	$\frac{1}{2}(C_4 - C_6 + C_{10} - C_{12} + D_1 - D_3 + D_7 + D_{11})$	D_5	$-D_9$	$-D_9$
D_6	$\frac{1}{2}(-C_4 + C_5 + C_9 - C_{10} + D_2 - D_3 - D_7 + D_8)$	$\frac{1}{2}(C_4 - C_5 - C_9 + C_{10} + D_2 - D_3 - D_7 + D_8)$	D_6	$-D_{12}$	$-D_{12}$
D_7	$-D_7$	$-D_7$	D_7	D_7	D_7
D_8	$\frac{1}{2}(-C_1 + C_4 - C_{10} + C_{11} - D_3 + D_6 - D_7 - D_{12})$	$\frac{1}{2}(C_1 - C_4 + C_{10} - C_{11} - D_3 + D_6 - D_7 - D_{12})$			$-D_2$
D_9	$\frac{1}{2}(-C_4 + C_6 - C_{10} + C_{12} - D_1 + D_3 - D_7 - D_{11})$	$\frac{1}{2}(C_4 - C_6 + C_{10} - C_{12} - D_1 + D_3 - D_7 - D_{11})$	D_9	$-D_5$	$-D_5$
D_{10}	$-C_{10}$	C_{10}	D_{10}	$-D_{10}$	$-D_{10}$
D_{11}	$\frac{1}{2}(-C_2 + C_4 + C_6 - C_{10} - D_3 + D_5 + D_7 - D_9)$	$\frac{1}{2}(C_2 - C_4 - C_6 + C_{10} - D_3 + D_5 + D_7 - D_9)$			D_1
D_{12}	$\frac{1}{2}(-C_4 + C_5 + C_9 - C_{10} - D_2 + D_3 + D_7 - D_8)$	$\frac{1}{2}(C_4 - C_5 - C_9 + C_{10} - D_2 + D_3 + D_7 - D_8)$	D_{12}	$-D_6$	$-D_6$

2. On pose alors

$$\begin{aligned} K_1 &= C_1 + C_{11} \\ K_2 &= C_1 - C_{11} \\ K_3 &= C_2 + C_8 \\ K_4 &= C_2 - C_8 \\ K_5 &= C_5 + C_9 \\ K_6 &= C_5 - C_9 \\ K_7 &= C_6 + C_{12} \\ K_8 &= C_6 - C_{12} \\ K_9 &= C_3 + C_7 \\ K_{10} &= C_3 - C_7 \\ K_{11} &= C_4 + C_{10} \\ K_{12} &= C_4 - C_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= D_1 + D_{11} \\ T_2 &= D_1 - D_{11} \\ T_3 &= D_2 + D_8 \\ T_4 &= D_2 - D_8 \\ T_5 &= D_5 + D_9 \\ T_6 &= D_5 - D_9 \\ T_7 &= D_6 + D_{12} \\ T_8 &= D_6 - D_{12} \\ T_9 &= D_3 + D_7 \\ T_{10} &= D_3 - D_7 \\ T_{11} &= D_4 + D_{10} \\ T_{12} &= D_4 - D_{10} \end{aligned}$$

On obtient alors les tableaux suivants :

2. a) Action de Δ_4 , par linéarité, pour tout indice i variant de 1 à 12

	S_1	S_2	S_3	S_4	R_1	R_2	R_3	Id
K_i	T_i	$-T_i$	$-K_i$	K_i	$-T_i$	$-K_i$	T_i	K_i
T_i	K_i	$-K_i$	T_i	$-T_i$	K_i	$-T_i$	$-K_i$	T_i

2. b) Action de Δ_4'

	S_1'	S_2'	S_3'	S_4'	R_1'	R_2'	R_3'	Id
K_1	$-K_1$	$-K_1$	K_1	K_1	$-K_1$	K_1	$-K_1$	K_1
K_2	$-K_2$	$-K_2$	K_2	K_2	$-K_2$	K_2	$-K_2$	K_2
K_3	$T_9 - T_8$	$T_8 - T_9$	$-K_3$	K_3	$T_8 - T_9$	$-K_3$	$T_9 - T_8$	K_8
K_4	$K_{12} - K_2$	$K_{12} - K_2$				K_4		K_4
K_5	$T_{11} - T_7$	$T_7 - T_{11}$	$-K_5$	K_5	$T_7 - T_{11}$	$-K_5$	$T_{11} - T_7$	K_5
K_6	$K_{10} - K_1$	$K_{10} - K_1$	K_6	K_6	$K_{10} - K_1$	K_6	$K_{10} - K_1$	K_6
K_7	$-T_7$	T_7	$-K_7$	K_7	T_7	$-K_7$	$-T_7$	K_7
K_8	$-T_8$	T_8	$-K_8$	K_8	$+T_8$	$-K_8$	$-T_8$	K_8
K_9	$T_3 - T_8$	$T_8 - T_3$	$-K_9$	K_9	$T_8 - T_3$	$-K_9$	$T_3 - T_8$	K_9
K_{10}	$K_6 - K_1$	$K_6 - K_1$	K_{10}	K_{10}	$K_6 - K_1$	K_{10}	$K_6 - K_1$	K_{10}
K_{11}	$T_5 - T_7$	$T_7 - T_5$	$-K_{11}$	K_{11}	$T_7 - T_5$	$-K_{11}$	$T_5 - T_7$	K_{11}
K_{12}	$K_4 - K_{12}$	$K_4 - K_{12}$				K_{12}		K_{12}

T ₁	-T ₁	-T ₁	T ₁	T ₁	-T ₁	T ₁	-T ₁	T ₁
T ₂	-T ₂	-T ₂	T ₂	T ₂	-T ₂	+T ₂	-T ₂	T ₂
T ₃	K ₉ -K ₈	K ₈ -K ₉	T ₃	-T ₃	K ₉ -K ₈	-T ₃	K ₈ -K ₉	T ₃
T ₄	T ₁₂ -T ₂	T ₁₂ -T ₂				T ₄		T ₄
T ₅	K ₁₁ -K ₇	K ₇ -K ₁₁	T ₅	-T ₅	K ₁₁ -K ₇	-T ₅	K ₇ -K ₁₁	T ₅
T ₆	T ₁₀ -T ₁	T ₁₀ -T ₁	T ₆	T ₆	T ₁₀ -T ₁	T ₆	T ₁₀ -T ₁	T ₆
T ₇	-K ₇	K ₇	T ₇	-T ₇	-K ₇	-T ₇	K ₇	T ₇
T ₈	-K ₈	K ₈	T ₈	-T ₈	-K ₈	-T ₈	K ₈	-T ₈
T ₉	K ₃ -K ₈	K ₈ -K ₃	T ₉	-T ₉	K ₃ -K ₈	-T ₉	K ₈ -K ₃	T ₉
T ₁₀	T ₆ -T ₁	T ₆ -T ₁	T ₁₀	T ₁₀	T ₆ -T ₁	+T ₁₀	T ₆ -T ₁	T ₁₀
T ₁₁	K ₅ -K ₇	K ₇ -K ₅	T ₁₁	-T ₁₁	K ₅ -K ₇	-T ₁₁	K ₇ -K ₅	T ₁₁
T ₁₂	T ₄ -T ₂	T ₄ -T ₂				T ₁₂		T ₁₂

T ₁	T ₆ -T ₁₀	T ₆ -T ₁₀	T ₁	T ₁	T ₆ -T ₁₀	T ₁	T ₆ -T ₁₀	T ₁
T ₂	K ₄ -K ₁₂	K ₁₂ -K ₄				-T ₂		T ₂
T ₃	T ₈ -T ₉	T ₈ -T ₉	T ₃	T ₃	T ₈ -T ₉	T ₃	T ₈ -T ₉	T ₃
T ₄	K ₂ -K ₁₂	K ₁₂ -K ₂				-T ₄		T ₄
T ₅	K ₇ -K ₁₁	K ₁₁ -K ₇	T ₅	-T ₅	K ₇ -K ₁₁	-T ₅	K ₁₁ -K ₇	T ₅
T ₆	T ₁ -T ₁₀	T ₁ -T ₁₀	T ₆	T ₆	T ₁ -T ₁₀	T ₆	T ₁ -T ₁₀	T ₆
T ₇	K ₅ -K ₁₁	K ₁₁ -K ₅	T ₇	-T ₇	K ₅ -K ₁₁	-T ₇	K ₁₁ -K ₅	T ₇
T ₈	T ₃ -T ₉	T ₃ -T ₉	T ₈	T ₈	T ₃ -T ₉	T ₈	T ₃ -T ₉	T ₈
T ₉	-T ₉	-T ₉	T ₉	T ₉	-T ₉	T ₉	-T ₉	T ₉
T ₁₀	-T ₁₀	-T ₁₀	T ₁₀	T ₁₀	-T ₁₀	T ₁₀	-T ₁₀	T ₁₀
T ₁₁	-K ₁₁	K ₁₁	T ₁₁	-T ₁₁	-K ₁₁	-T ₁₁	K ₁₁	T ₁₁
T ₁₂	-K ₁₂	K ₁₂	T ₁₂	-T ₁₂	-K ₁₂	-T ₁₂	K ₁₂	T ₁₂

2. c) Action de Δ_4''

	S ₁ ''	S ₂ ''	S ₃ ''	S ₄ ''	R ₁ ''	R ₂ ''	R ₃ ''	Id
K ₈	K ₆ -K ₁₀	K ₆ -K ₁₀	K ₁	K ₁	K ₆ -K ₁₀	K ₁	K ₆ -K ₁₀	K ₁
K ₂	T ₄ -T ₁₂	T ₁₂ -T ₄				-K ₂		K ₂
K ₃	K ₈ -K ₉	K ₈ -K ₉	K ₃	K ₃	K ₈ -K ₉	K ₃	K ₈ -K ₉	K ₃
K ₄	T ₂ -T ₁₂	T ₁₂ -T ₂				-K ₄		K ₄
K ₅	T ₇ -T ₁₁	T ₁₁ -T ₇	-K ₅	K ₅	T ₁₁ -T ₇	-K ₅	T ₇ -T ₁₁	K ₅
K ₆	K ₁ -K ₁₀	K ₁ -K ₁₀	K ₆	K ₆	K ₁ -K ₁₀	K ₆	K ₁ -K ₁₀	K ₆
K ₇	T ₅ -T ₁₁	T ₁₁ -T ₅	-K ₇	K ₇	T ₁₁ -T ₅	-K ₇	T ₅ -T ₁₁	K ₇
K ₈	K ₃ -K ₉	K ₃ -K ₉	K ₈	K ₈	K ₃ -K ₉	K ₈	K ₃ -K ₉	K ₈
K ₉	-K ₉	-K ₉	K ₉	K ₉	-K ₉	K ₉	-K ₉	K ₉
K ₁₀	-K ₁₀	-K ₁₀	K ₁₀	K ₁₀	-K ₁₀	K ₁₀	-K ₁₀	K ₁₀
K ₁₁	-T ₁₁	T ₁₁	-K ₁₁	K ₁₁	T ₁₁	-K ₁₁	-T ₁₁	T ₁₁
K ₁₂	-T ₁₂	T ₁₂	-K ₁₂	K ₁₂	T ₁₂	-K ₁₂	-T ₁₂	K ₁₂

3. Sous-espaces de $\mathbb{C}^{\text{SA}+\text{AS}}$ stables par le groupe $\Delta_4'' \circ \Delta_4' \circ \Delta_4$

3. a) Posons :

$$\begin{aligned} K'_1 &= K_1 + K_6 - K_{10} & T'_1 &= T_1 + T_6 - T_{10} \\ K'_2 &= K_1 - K_6 + K_{10} & T'_2 &= T_1 - T_6 + T_{10} \\ K'_3 &= -K_1 + K_6 + K_{10} & T'_3 &= -T_1 + T_6 + T_{10} \end{aligned}$$

Nous obtenons :

	K' ₁	K' ₂	K' ₃	T' ₁	T' ₂	T' ₃
S ₁	T' ₁	T' ₂	T' ₃	K' ₁	K' ₂	K' ₃
S ₂	-T' ₁	-T' ₂	-T' ₃	-K' ₁	-K' ₂	-K' ₃
S ₃	-K' ₁	-K' ₂	-K' ₃	T' ₁	T' ₂	T' ₃
S ₄	K' ₁	K' ₂	K' ₃	-T' ₁	-T' ₂	-T' ₃
R ₁	-T' ₁	-T' ₂	-T' ₃	K' ₁	K' ₂	K' ₃
R ₂	-K' ₁	-K' ₂	-K' ₃	-T' ₁	-T' ₂	-T' ₃
R ₃	T' ₁	T' ₂	T' ₃	-K' ₁	-K' ₂	-K' ₃

S'_1	$-K'_1$	$-K'_2$	K'_3	$-T'_1$	$-T'_2$	T'_3
S'_2	$-K'_1$	$-K'_2$	K'_3	$-T'_1$	$-T'_2$	T'_3
S'_3	K'_1	K'_2	K'_3	T'_1	T'_2	T'_3
S'_4	K'_1	K'_2	K'_3	T'_1	T'_2	T'_3
R'_1	$-K'_1$	$-K'_2$	$-K'_3$	$-T'_1$	$-T'_2$	$+T'_3$
R'_2	K'_1	K'_2	K'_3	T'_1	T'_2	T'_3
R'_3	$-K'_1$	$-K'_2$	$-K'_3$	$-T'_1$	$-T'_2$	$+T'_3$

S''_1	K'_1	$-K'_2$	$-K'_3$	T'_1	$-T'_2$	$-T'_3$
S''_2	K'_1	$-K'_2$	$-K'_3$	T'_1	$-T'_2$	$-T'_3$
S''_3	K'_1	K'_2	K'_3	T'_1	T'_2	T'_3
S''_4	K'_1	K'_2	K'_3	T'_1	T'_2	T'_3
R''_1	K'_1	$-K'_2$	$-K'_3$	T'_1	$-T'_2$	$-T'_3$
R''_2	K'_1	K'_2	K'_3	T'_1	T'_2	T'_3
R''_3	K'_1	$-K'_2$	$-K'_3$	T'_1	$-T'_2$	$-T'_3$

3. b) Posons :

$$\begin{aligned} K'_4 &= K_8 + K_3 - K_9 & T'_4 &= T_8 + T_3 - T_9 \\ K'_5 &= K_8 - K_3 + K_9 & T'_5 &= T_8 - T_3 + T_9 \\ K'_6 &= -K_8 + K_3 + K_9 & T'_6 &= -T_8 + T_3 + T_9 \end{aligned}$$

Nous obtenons :

	K'_4	K'_5	K'_6	T'_4	T'_5	T'_6
S_1	T'_4	T'_5	T'_6	K'_4	K'_5	K'_6
S_2	$-T'_4$	$-T'_5$	$-T'_6$	$-K'_4$	$-K'_5$	$-K'_6$
S_3	$-K'_4$	$-K'_5$	$-K'_6$	T'_4	T'_5	T'_6
S_4	K'_4	K'_5	K'_6	$-T'_4$	$-T'_5$	$-T'_6$
R_1	$-T'_4$	$-T'_5$	$-T'_6$	K'_4	K'_5	K'_6
R_2	$-K'_4$	$-K'_5$	$-K'_6$	$-T'_4$	$-T'_5$	$-T'_6$
R_3	T'_4	T'_5	T'_6	$-K'_4$	$-K'_5$	$-K'_6$

S'_1	$-T'_4$	$-T'_5$	T'_6	$-K'_4$	$-K'_5$	K'_6
S'_2	T'_4	T'_5	$-T'_6$	K'_4	K'_5	$-K'_6$
S'_3	$-K'_4$	$-K'_5$	$-K'_6$	$+T'_4$	T'_5	T'_6
S'_4	K'_4	K'_5	K'_6	$-T'_4$	$-T'_5$	$-T'_6$
R'_1	T'_4	T'_5	$-T'_6$	$-K'_4$	$-K'_5$	K'_6
R'_2	$-K'_4$	$-K'_5$	$-K'_6$	$-T'_4$	$-T'_5$	$-T'_6$
R'_3	$-T'_4$	$-T'_5$	$+T'_6$	K'_4	K'_5	$-K'_6$

S''_1	K'_4	$-K'_5$	$-K'_6$	T'_4	$-T'_5$	$-T'_6$
S''_2	K'_4	$-K'_5$	$-K'_6$	T'_4	$-T'_5$	$-T'_6$
S''_3	K'_4	K'_5	K'_6	T'_4	T'_5	T'_6
S''_4	K'_4	K'_5	K'_6	T'_4	T'_5	$+T'_6$
R''_1	K'_4	$-K'_5$	$-K'_6$	T'_4	$-T'_5$	$-T'_6$
R''_2	K'_4	K'_5	K'_6	T'_4	T'_5	T'_6
R''_3	K'_4	$-K'_5$	$-K'_6$	T'_4	$-T'_5$	$-T'_6$

3. c) Posons encore :

$$\begin{aligned} K'_7 &= K_7 + K_5 - K_{11} & T'_7 &= T_7 + T_5 - T_{11} \\ K'_8 &= K_7 - K_5 + K_{11} & T'_8 &= T_7 - T_5 + T_{11} \\ K'_9 &= -K_7 + K_5 + K_{11} & T'_9 &= -T_7 + T_5 + T_{11} \end{aligned}$$

Nous obtenons :

	K'_7	K'_8	K'_9	T'_7	T'_8	T'_9
S_1	T'_7	T'_8	T'_9	K'_7	K'_8	K'_9
S_2	$-T'_7$	$-T'_8$	$-T'_9$	$-K'_7$	$-K'_8$	$-K'_9$
S_3	$-K'_7$	$-K'_8$	$-K'_9$	T'_7	T'_8	T'_9
S_4	K'_7	K'_8	K'_9	$-T'_7$	$-T'_8$	$-T'_9$
R_1	$-T'_7$	$-T'_8$	$-T'_9$	K'_7	K'_8	K'_9
R_2	$-K'_7$	$-K'_8$	$-K'_9$	$-T'_7$	$-T'_8$	$-T'_9$
R_3	T'_7	T'_8	T'_9	$-K'_7$	$-K'_8$	$-K'_9$

S_1'	$-T_7'$	$-T_8'$	K_9'	$-K_7'$	$-K_8'$	K_9'
S_2'	T_7'	T_8'	$-T_9'$	K_7'	K_8'	$-K_9'$
S_3'	$-K_7'$	$-K_8'$	$-K_9'$	T_7'	T_8'	T_9'
S_4'	K_7'	K_8'	K_9'	$-T_7'$	$-T_8'$	$-T_9'$
R_1'	T_7'	T_8'	$-T_9'$	$-K_7'$	$-K_8'$	K_9'
R_2'	$-K_7'$	$-K_8'$	$-K_9'$	$-T_7'$	$-T_8'$	$-T_9'$
R_3'	$-T_7'$	$-T_8'$	T_9'	K_7'	K_8'	$-K_9'$

S_1''	T_7'	$-T_8'$	$-T_9'$	K_7'	$-K_8'$	$-K_9'$
S_2''	$-T_7'$	T_8'	T_9'	$-K_7'$	K_8'	K_9'
S_3''	$-K_7'$	$-K_8'$	$-K_9'$	T_7'	T_8'	T_9'
S_4''	K_7'	K_8'	K_9'	$-T_7'$	$-T_8'$	$-T_9'$
R_1''	$-T_7'$	T_8'	T_9'	K_7'	$-K_8'$	$-K_9'$
R_2''	$-K_7'$	$-K_8'$	$-K_9'$	$-T_7'$	$-T_8'$	$-T_9'$
R_3''	T_7'	$-T_8'$	$-T_9'$	$-K_7'$	K_8'	K_9'

IV. LE CARRÉ DE MERCURE

C'est le carré :

M =

9	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Il est formé par les 64 premiers entiers non nuls. Sa somme linéaire est 260.

Coordonnées de M

On a alors :

$$M = \frac{65}{2} B_0 + \frac{1}{2}$$

-49	51	53	-55	-57	59	61	-63
33	-35	-37	39	41	-43	-45	47
17	-19	-21	23	25	-27	-29	+31
-1	3	5	-7	-9	11	13	-15
15	-13	-11	9	7	-5	-3	1
-31	29	27	-25	-23	21	19	-17
-47	45	43	-41	-39	37	35	-33
63	-61	-59	57	55	-53	-51	49

En notant M' le dernier carré, on obtient :

$$M' =$$

-49	42	35	-28	-21	14	7	0
42	-35	-28	21	14	-7	0	-7
35	-28	-21	14	7	0	7	-14
-28	21	14	-7	0	-7	-14	+21
-21	14	8	0	7	-14	-21	28
14	-7	0	-7	-14	21	28	-35
7	0	+7	-14	-21	28	35	-42
0	-7	-14	21	28	-35	-42	49

+

0	9	18	-27	-36	45	54	-63
-9	0	-9	18	27	-36	-45	54
-18	9	0	9	18	-27	-36	45
27	-18	-9	0	-9	18	27	-36
36	-27	-18	9	0	9	18	-27
-45	36	27	-18	-9	0	-9	18
-54	45	36	-27	-18	9	0	9
63	-54	-45	36	27	-18	-9	0

C'est un carré de la forme $AS + SA$. De plus on constate que
 $M' = 7K' + 9T'$ avec

$$K' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -7 & 6 & 5 & -4 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 6 & -5 & -4 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 5 & -4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline -4 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ \hline -3 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ \hline 2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 3 & 4 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 4 & 5 & -6 \\ \hline 0 & -1 & -2 & 3 & 4 & -5 & -6 & 7 \\ \hline \end{array}$$

et $T' = S_1 K'$

On obtient $K' = K'_1 + 2K'_4 + 4K'_7$
 et alors $T' = T'_1 + 2T'_4 + 4T'_7$

$$\text{d'où } M = \frac{65}{2} B_0 + \frac{7}{2} (K'_1 + 2K'_4 + 4K'_7) + \frac{9}{2} (T'_1 + 2T'_4 + 4T'_7).$$

Cela montre que l'on peut obtenir 511 autres carrés magiques par application de $\Delta_4'' \circ \Delta_4' \circ \Delta_4$.

CHAPITRE 5

produit tensoriel

de carrés magiques

I. EXEMPLE

Considérons C_3 rapporté à la base $\{I, J, K\}$ définie au chapitre 1. On rappelle que :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considérons aussi dans C_9 le carré le plus simple, celui dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il pourra aussi apparaître intéressant d'écrire B_0 sous la forme

$$B_0 = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix} \quad \text{où } I \text{ désigne le bloc dont toutes les composantes sont } 1.$$

On peut alors prendre B_0 comme un carré à trois lignes et trois colonnes dont les composantes sont elles-mêmes des carrés en posant

$$B_0 = I \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Reconnaissant alors l'écriture de I nous poserons :

$$B_0 = I \otimes I$$

Nous pourrons ainsi déterminer huit autres carrés (9×9) qui sont :

$$I \otimes J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J \otimes I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$I \otimes K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J \otimes K = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$J \otimes J = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$K \otimes I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$K \otimes J = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$K \otimes K = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

On peut remarquer que tous ces carrés sont magiques, donc éléments de C_9 .

D'autre part, quels que soient les carrés X, Y, Z de C_3 et quel que soit le réel a on obtient :

$$\begin{aligned} X \otimes (Y+Z) &= X \otimes Y + X \otimes Z \\ (Y+Z) \otimes X &= Y \otimes X + Z \otimes X \\ aX \otimes Y &= X \otimes aY = a(X \otimes Y) \end{aligned}$$

ainsi considérons le carré A de Saturne. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} A \otimes A &= (5I - J - 3K) \otimes (5I - J - 3K) \\ &= 25I \otimes I - 5(I \otimes J + J \otimes I) + 3(J \otimes K + K \otimes J) \\ &\quad - 15(I \otimes K + K \otimes I) + J \otimes J + 9K \otimes K \end{aligned}$$

avec

$A \otimes A =$	16	36	8	36	81	18	8	18	4
	12	20	28	27	45	63	6	10	14
	32	4	24	72	9	54	16	2	12
	12	27	6	20	45	10	28	63	14
	9	15	21	15	25	35	21	35	49
	24	3	18	40	5	30	56	7	42
	32	72	16	4	9	2	24	54	12
	24	40	56	3	5	7	18	30	42
	64	8	48	8	1	6	48	6	36

On va établir que l'espace engendré par les neuf carrés $I \otimes I$; $I \otimes J$; $J \otimes I$; $K \otimes I$; $I \otimes K$; $J \otimes J$; $K \otimes K$; $K \otimes J$ et $J \otimes K$ n'est autre que le carré tensoriel de C_3 (espace noté C_3^2 ou $C_3 \otimes C_3$).

II. CAS GÉNÉRAL

C_n est un espace vectoriel de dimension $n(n-2)$

$C_{n'}$ est un espace vectoriel de dimension $n'(n'-2)$

Si V_i est un vecteur de base de C_n et V_j un vecteur de base de $C_{n'}$, alors $V_i \otimes V_j$ est l'un des générateurs de $C_n \otimes C_{n'}$.

D'autre part, si M est un élément de C_n et M' un élément de $C_{n'}$, alors $M \otimes M'$ est un élément de $C_{n \times n'}$ et sa somme linéaire est égale au produit des sommes linéaires de M et M' .

Démonstration :

Les trois propriétés suivantes, valables quels que soient le réel a , les carrés M et N de C_n et les carrés M' et N' de $C_{n'}$, sont évidentes de part la formation des carrés produits

$$\begin{aligned} (M+N) \otimes M' &= M \otimes M' + N \otimes M' \\ M \otimes (M'+N') &= M \otimes M' + M \otimes N' \\ a(M \otimes M') &= aM \otimes M' = M \otimes aM'. \end{aligned}$$

Le fait que l'ensemble des carrés obtenus par combinaison linéaire des $V_i \otimes V_j$ soit le produit tensoriel de C_n et $C_{n'}$ est une conséquence du cas plus général des produits tensoriels de matrices (cf. § III).

Le seul point restant à établir est $C_n \otimes C_{n'} \subset C_{n \times n'}$, autrement dit que le produit tensoriel de deux carrés magiques est un carré magique.

En vertu de la bilinéarité, il suffit d'établir la propriété pour les éléments $V_i \otimes V_j$.

Si l'un des carrés est de somme linéaire nulle, alors le carré $V_i \otimes V_j$ est aussi de somme linéaire nulle. En effet, chaque ligne, colonne ou diagonale est composée de n' tranches de n nombres de somme nulle ou de n tranches de n' nombres de somme nulle. On obtient alors un carré de $C_{n \times n'}$.

Le seul cas restant alors à considérer est celui dont tous les coefficients sont égaux à 1. Le carré produit est alors celui de $C_{n \times n'}$ dont tous les coefficients sont aussi 1. Il est magique.

Dans C_n on a alors $M = \frac{s}{n} B_0^n + N$ avec $N \in C_n^0$.

Dans $C_{n'}$ on a aussi $M' = \frac{s'}{n'} B_0^{n'} + N'$ avec $N' \in C_{n'}^0$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} M \otimes M' &= \frac{s \cdot s'}{n \cdot n'} B_0^n \otimes B_0^{n'} + \left(\frac{s}{n} B_0^n \otimes N' + \frac{s'}{n'} N \otimes B_0^{n'} + N \otimes N' \right) \\ &= \frac{s \cdot s'}{n \cdot n'} B_0^{n \times n'} + M'' \text{ avec } M'' \in C_{n \times n'}^0 \end{aligned}$$

Vu l'unicité de cette décomposition (Ch. 2, propriété 2.1), la somme linéaire de $M \otimes M'$ est s.s'.

III. ANNEXE: PRODUIT TENSORIEL DE DEUX MATRICES

Il s'agit ici de justifier, tout en les généralisant, les notions précédentes dont le champ d'application dépasse amplement celui des carrés magiques.

Soit $M = (x_{ij})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}$ (ensemble des matrices à m lignes et n colonnes).

Soit $M' = (x'_{i'j'})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m',n'}$.

Au couple (M, M') on peut associer la matrice notée $M \otimes M'$ appartenant à $\mathcal{M}_{m \times m', n \times n'}$, décomposable en blocs $M_{i'j'}$ égaux respectivement à $x'_{i'j'} M$.

Soit E un espace vectoriel de dimension m , de base $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$

Soit E' un espace vectoriel de dimension m' , de base $(u'_{i'})_{1 \leq i' \leq m'}$

Soit F un espace vectoriel de dimension n , de base $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$

Soit F' un espace vectoriel de dimension n' , de base $(v'_{j'})_{1 \leq j' \leq n'}$

Soit f l'application linéaire de E dans F dont la matrice par rapport aux bases ci-dessus est $M = (x_{ij})$.

Soit f' l'application linéaire de E' dans F' dont la matrice par rapport aux bases ci-dessus est $M' = (x'_{i'j'})$.

On sait qu'il existe une application linéaire h de $E \otimes E'$ dans $F \otimes F'$ telle que $h(u_i \otimes u_{i'}) = f(u_i) \otimes f'(u_{i'})$, h étant l'application $f \otimes f'$ et appelée le produit tensoriel de f et f' .

Compte tenu que les produits $(u_i \otimes u_{i'})$ et $(v_j \otimes v_{j'})$ forment des bases respectivement de $E \otimes E'$ et $F \otimes F'$, la matrice de $f \otimes f'$, relativement à ces bases, n'est autre que $M \otimes M'$ définie ci-dessus.

Démonstration

Rangeons les bases de $E \otimes E'$ et $F \otimes F'$ de la manière suivante :

$u_{i_1} \otimes u_{i'_1}$ est avant $u_{i_2} \otimes u_{i'_2}$ si et seulement si
 soit $i'_1 < i'_2$
 soit $i'_1 = i'_2$ et $i_1 < i_2$

$v_{j_1} \otimes v_{j'_1}$ est avant $v_{j_2} \otimes v_{j'_2}$ si et seulement si
 soit $j'_1 < j'_2$
 soit $j'_1 = j'_2$ et $j_1 < j_2$

La matrice de l'application $f \otimes f'$ appartient à l'ensemble $\mathcal{M}_{m \times m', n \times n'}$; appelons $x''_{i''j''}$ ses coefficients.

On a $i'' = p'i + r$ (division euclidienne de i'' par i)
 $j'' = q'j + s$ (division euclidienne de j'' par j)
 alors, compte tenu de la position des éléments de base, on a :

$$x''_{i''j''} = x'_{p'q'} \cdot x_{rs}$$

ce qui établit la propriété.

Par conséquent, cela justifie le nom (et la notation) de produit tensoriel donné à la matrice $M \otimes M'$.

L'ensemble $\mathcal{M}_{m \times m', n \times n'}$ est le produit tensoriel des espaces $\mathcal{M}_{m,n}$ et $\mathcal{M}_{m',n'}$, mais c'est aussi le produit $\mathcal{M}_{m',n'} \otimes \mathcal{M}_{m,n}$. Il faut remarquer cependant qu'en général $M \otimes M' \neq M' \otimes M$.

D'autre part, la multiplication tensorielle des matrices est associative, ce qui permet de parler du produit tensoriel de plusieurs carrés magiques, puisque l'on a $C_m \otimes (C_n \otimes C_p) = (C_m \otimes C_n) \otimes C_p$ et pour tout élément M de C_m , N de C_n et P de C_p : $M \otimes (N \otimes P) = (M \otimes N) \otimes P$.

D'autres conséquences sont données par les trois propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 5.1. (Décomposition en blocs)

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}$. Posons $M = (x_{ij})$.
 Supposons $m = m' \times m''$ et $n = n' \times n''$.

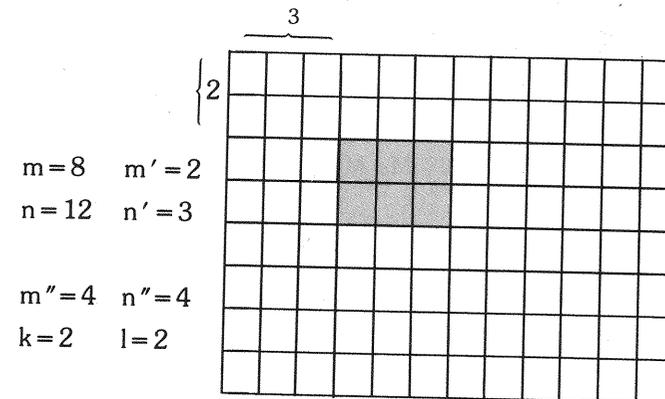
Pour k et l tels que $1 \leq k \leq m'$ et $1 \leq l \leq n''$ on note $\Delta_{m'',n''}^{l,k}$ la matrice à m'' lignes, n'' colonnes dont la composante x_{kl} est 1, toutes les autres étant nulles. On a alors :

$$M = \sum_{(k,l)} M_{k,l} \otimes \Delta_{m'',n''}^{k,l}$$

où $M_{k,l}$ est la matrice à m' lignes et n' colonnes dont les coefficients sont pour $1 \leq i' \leq m'$ et $1 \leq j' \leq n'$

$$x_{i',j'}^{k,l} = x_{m'(k-1)+i', n'(l-1)+j'}$$

Ceci n'est qu'un problème de division euclidienne, comme le montre l'exemple suivant :



$$x_{2,1}^{2,2} = x_{2(2-1)+2, 3(2-1)+1} = x_{4,4}$$

PROPRIÉTÉ 5.2.

Quelles que soient les matrices M, N, M', N' telles que
 $M \in \mathcal{M}_{m,n}$ $N \in \mathcal{M}_{n,p}$ $M' \in \mathcal{M}_{m',n'}$ et $N' \in \mathcal{M}_{n',p'}$
 on a :

$$(N \otimes N') \cdot (M \otimes M') = (N \cdot M) \otimes (N' \cdot M')$$

E, E', F, F', G, G' sont des espaces vectoriels de dimension m, m', n, n', p, p' .

f application de E dans F de matrice M

f' application de E' dans F' de matrice M'

g application de F dans G de matrice N

g' application de F' dans G' de matrice N'

on a alors le schéma :

$$\begin{array}{ccccc} E \otimes E' & \xrightarrow{f \otimes f'} & F \otimes F' & \xrightarrow{g \otimes g'} & G \otimes G' \\ & \searrow & & & \uparrow \\ & & (g \circ f) \otimes (g' \circ f') & = & (g \otimes g') \circ (f \otimes f') \end{array}$$

L'égalité ayant lieu car les images d'une base de $E \otimes E'$ par les deux applications sont identiques, d'où le passage à l'égalité des matrices (éléments de $\mathcal{M}_{m \times m', p \times p'}$).

PROPRIÉTÉ 5.3.

(Produit matriciel par blocs)

M matrice de blocs $(M_{ij}) \ i \leq m ; j \leq n$

M' matrice de blocs $(M'_{i'j'}) \ i' \leq n ; j' \leq p$

Alors le produit matriciel (s'il est défini) de M et de M' est la matrice de blocs :

$$M''_{ij'} = \sum_{k=1}^n M_{ik} M'_{kj'}$$

C'est une conséquence directe des propriétés 5.1 et 5.2.

Remarquons que, si ces propriétés n'ont pas de conséquences au niveau des carrés magiques, elles en prennent beaucoup plus dans le cas de carrés semi-magiques (dont les produits matriciels ou tensoriels sont semi-magiques), ou de matrices bistochastiques (voir à ce propos la brochure A.P.M.E.P. "Les carrés magiques" § 15).

CHAPITRE 6

le groupe $\Delta_4 \otimes \Delta_4$

I. CAS GÉNÉRAL

Rappelons que le groupe Δ_4^n (en abrégé Δ_4) agissant sur un carré de C_n est constitué des huit transformations $\text{Id}, S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3$.

Considérons un carré M de C_n et un second carré M' de $C_{n'}$. Soit Φ une transformation de Δ_4^n et Ψ une transformation de $\Delta_4^{n'}$. Les carrés $M \otimes M'$ et $\Phi(M) \otimes \Psi(M')$ sont tous deux magiques et l'automorphisme de $C_n \otimes C_{n'}$ qui, à tout élément de la forme $M \otimes M'$ fait correspondre $\Phi(M) \otimes \Psi(M')$, est (par définition) le produit tensoriel des automorphismes Φ et Ψ que l'on note $\Phi \otimes \Psi$. De sorte que l'on obtient

$$\Phi \otimes \Psi(M \otimes M') = \Phi(M) \otimes \Psi(M')$$

L'ensemble des applications ainsi obtenues (à 64 éléments) est le produit tensoriel (sur \mathbf{Z}) des groupes Δ_4^n et $\Delta_4^{n'}$ que l'on note $\Delta_4^n \otimes \Delta_4^{n'}$ ou plus simplement $\Delta_4 \otimes \Delta_4$.

On peut alors se demander comment agit l'application $\Phi \otimes \Psi$ sur un carré (non nécessairement magique d'ailleurs).

Ce carré étant partagé en n^2 blocs de n^2 éléments chacun, on peut définir de manière analogue au chapitre 3 le groupe Δ_4' des huit transformations $\text{Id}, R_1', R_2', R_3', S_1', S_2', S_3', S_4'$ obtenues à partir de Δ_4 , mais intervenant sur les blocs de n^2 cases au lieu d'agir sur les cases elles-mêmes. On peut de même définir un troisième groupe $\bar{\Delta}_4$ formé de huit transformations analogues mais agissant sur tous les blocs à la fois, sans les permuter entre eux. Par composition de ces applications on obtient un nouveau groupe de 64 éléments tels que (rappelons-le) :

— la composée de deux applications de Δ_4' est donnée par le tableau p. 3 (chapitre 1) ;

— la composée de deux applications de $\bar{\Delta}_4$ est donnée par le même tableau ;

— le transformé d'un carré de $C_n \otimes C_{n'}$ est un carré du même ensemble.

De plus, on a la relation

$$\Phi \otimes \Psi = \bar{\Phi} \circ \Psi' = \Psi' \circ \bar{\Phi}$$

On peut constater que les applications du groupe $\bar{\Delta}_4 \circ \Delta_4'$ ne sont pas fermées sur $C_{n \times n'}$, mais que l'ensemble des carrés magiques transformés en carrés magiques par ces applications est un sous-espace de $C_{n \times n'}$.

contenant $C_n \otimes C_{n'}$. En considérant d'autre part le groupe $\Delta_4^{n \times n'}$ opérant sur $C_{n \times n'}$ (ou $\mathcal{M}_{n \times n'}$) on obtient de nouveau les relations du chapitre 3 :

$$\begin{aligned} R_1 &= \bar{R}_1 R_1' = R_1' \bar{R}_1 = R_1 \otimes R_1 \\ R_2 &= \bar{R}_2 R_2' = R_2' \bar{R}_2 = R_2 \otimes R_2 \\ R_3 &= \bar{R}_3 R_3' = R_3' \bar{R}_3 = R_3 \otimes R_3 \\ S_1 &= \bar{S}_1 S_1' = S_1' \bar{S}_1 = S_1 \otimes S_1 \\ S_2 &= \bar{S}_2 S_2' = S_2' \bar{S}_2 = S_2 \otimes S_2 \\ S_3 &= \bar{S}_3 S_3' = S_3' \bar{S}_3 = S_3 \otimes S_3 \\ S_4 &= \bar{S}_4 S_4' = S_4' \bar{S}_4 = S_4 \otimes S_4 \end{aligned}$$

On est alors à même de préciser davantage les liens entre ces résultats et ceux du chapitre 3 auquel il est fait si souvent allusion.

Pour cela, posons :

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \bar{F} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \quad G = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_1 &= F \otimes G & C_1 &= -\bar{F} \otimes G \\ D_2 &= G \otimes F & C_2 &= -G \otimes \bar{F} \end{aligned}$$

alors chaque transformation du groupe $\Delta_4' \circ \bar{\Delta}_4$ (ou $\Delta_4 \circ \Delta_4'$) est le produit tensoriel de deux applications de Δ_4 opérant sur \mathcal{M}_2 .

L'action de Δ_4 sur les carrés F, G, \bar{F} est donnée par le tableau :

	Id	R_1	R_2	R_3	S_1	S_2	S_3	S_4
F	F	\bar{F}	-F	$-\bar{F}$	\bar{F}	$-\bar{F}$	F	-F
\bar{F}	\bar{F}	-F	$-\bar{F}$	F	F	F	$-\bar{F}$	\bar{F}
G	G	-G	G	-G	-G	-G	G	G

(*)

III. A titre d'exemple, nous nous proposons d'établir comment opère ce groupe sur l'ensemble $C_3 \otimes C_3$ (sous-espace vectoriel de C_9). Ces applications étant linéaires, il suffit de limiter notre étude à la base de cet espace proposée au chapitre précédent, d'autre part, les applications du groupe étant obtenues par composition des éléments de Δ_4 et de ceux de Δ_4' , il suffit de se limiter aux éléments de ces deux ensembles (l'étude de Δ_4 pouvant être faite simplement par considération de la nature des carrés obtenus).

(*) De même au chapitre 4 le groupe $\Delta_4' \circ \Delta_4 \circ \Delta_4$ n'est autre que $\Delta_4 \otimes \Delta_4 \otimes \Delta_4$.

Posons pour cela :

$$\begin{array}{lll}
 B_0 = I \otimes I & & \\
 A = K \otimes J & A' = J \otimes K & \text{carrés AA} \\
 B = K \otimes K & B' = J \otimes J & \text{carrés SS} \\
 C = K \otimes I & C' = I \otimes K & \text{carrés SA} \\
 D = J \otimes I & D' = I \otimes J & \text{carrés AS}
 \end{array}$$

1. Action de Δ_4

Elle se résume par le tableau :

	A	A'	B ₀	B	B'	C	C'	D	D'
Id	A	A'	B ₀	B	B'	C	C'	D	D'
R ₁	-A'	-A	B ₀	B'	B	D	D'	-C	-C'
R ₂	A	A'	B ₀	B	B'	-C	-C'	-D	-D'
R ₃	-A'	-A	B ₀	B'	B	-D	-D'	C	C'
S ₁	A'	A	B ₀	B'	B	D	D'	C	C'
S ₂	A'	A	B ₀	B'	B	-D	-D'	-C	-C'
S ₃	-A	-A'	B ₀	B	B'	C	C'	-D	-D'
S ₄	-A	-A'	B ₀	B	B'	-C	-C'	D	D'

2. Action de Δ'_4

Elle se résume par le tableau :

	A	A'	B ₀	B	B'	C	C'	D	D'
Id	A	A'	B ₀	B	B'	C	C'	D	D'
R' ₁	-B	B'	B ₀	A	-A'	C	+D'	D	-C'
R' ₂	-A	-A'	B ₀	-B	-B'	C	-C'	D	-D'
R' ₃	B	-B'	B ₀	-A	A'	C	-D'	D	C'
S' ₁	B	B'	B ₀	A	A'	C	D'	D	C'
S' ₂	-B	-B'	B ₀	-A	-A'	C	-D'	D	-C'
S' ₃	-A	A'	B ₀	B	-B'	C	C'	D	-D'
S' ₄	A	-A'	B ₀	-B	B'	C	-C'	D	D'

3. Action de $\overline{\Delta}_4$

Elle se résume par le tableau :

	A	A'	B ₀	B	B'	C	C'	D	D'
Id	A	A'	B ₀	B	B'	C	C'	D	D'
R ₁	B'	-B	B ₀	A'	-A	D	C'	-C	-D'
R ₂	-A	-A'	B ₀	-B	-B'	-C	C'	-D	D'
R ₃	-B'	-B	B ₀	-A	-A'	-D	C'	C	D'
S ₁	B'	B	B ₀	A'	A	D	C'	C	D'
S ₂	-B'	-B	B ₀	-A'	-A	-D	C'	-C	D'
S ₃	A	-A'	B ₀	B	-B	C	C'	-D	D'
S ₄	-A	A'	B ₀	-B	B'	-C	C'	D	D'

Au vu de ces trois tableaux nous pouvons constater que les sous-espaces engendrés par $\{A; A'; B; B'\}$ et $\{C; C'; D; D'\}$ sont globalement stables par le groupe $\Delta_4 \otimes \Delta_4$. Nous sommes alors amenés à nous demander s'il existe d'autres espaces de carrés magiques (sous-espaces de C_9) globalement stables par ce groupe. La réponse est affirmative. Elle peut être obtenue de différentes façons dont l'une, purement calculatoire, est similaire à celle utilisée au chapitre 4 pour l'étude de C_8 .

BIBLIOGRAPHIE

- 1 "Bulletin de liaison des Professeurs de Mathématiques" n° 14 (1977) article "des carrés magiques" de Christian GUIPAUD.
- 2 "Algèbre linéaire et tensorielle" de MM. CHAMBADAL et OVAERT.
- 3 Publication de l'A.P.M.E.P. "Carrés Magiques" par BELOUZE GLAYMANN, HAUG et HERTZ.
- 4 "Vie et Mystère des nombres" (chapitre 8) de François-Xavier CHABOCHE, publié chez Albin-Michel dans la collection "Les chemins de l'impossible".

BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

Sont indiqués pour chaque brochure la date de parution et le nombre de pages.

0. *Pour apprendre à conjecturer : initiation au Calcul des Probabilités*, par L. Guerber et P.L. Hennequin, 1968, 232 p.

1. *Charte de Chambéry*, étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1968, 32 p.

2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes* par Jean Itard, 1969, 32 p.

5. *Eléments de logique pour servir à l'enseignement mathématique* par J. Adda et W. Faivre, 1971, 52 p.

6. *Charte de Caen*, étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1972, 32 p.

8. *Mots I*, 1974, 100 p.

9. *Elem-Math I*, 1975, 56 p.

10. *Carrés magiques* par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p.

11. *Mots II*, 1975, 108 p.

13. *Mathématique pour la formation d'adultes (CUEEP)* par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p.

14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième* (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 2^e édition, 1976, 220 p.

15. *Mots III*, 1976, 136 p.

16. *Elem-Math II*, 1976, 56 p.

17. *Hasardons-nous*, 1976, 220 p.

19. *Elem-Math III, La division à l'école élémentaire*, 1977, 100 p.

20. *Quelques apports de l'Informatique à l'enseignement des mathématiques*, 1977, 280 p.

21. *Géométrie au premier cycle, tome I*, 1977, 208 p.

22. *Géométrie au premier cycle, tome 2*, 1978, 328 p.

23. *Pavés et bulles* par Françoise Pécaut, 1978, 288 p.

24. *Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM)*, 1978, 120 p.

25. *Mots IV*, 1978, 152 p.
26. *Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire*, 1978, 64 p.
28. *Analyse des données, tome I*, 1980, 248 p.
29. *Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Élémentaire*, 1979, 192 p.
30. *Les manuels scolaires de mathématiques*, 1979, 280 p.
32. *Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978* dans le prolongement des Chartes de Chambéry et de Caen. (Ce texte figure aussi dans le Bulletin n° 314).
33. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome I*, 1979, 248 p.
35. *Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes*, 1979, 104 p.
36. *Elem-Math VI, Le triangle à l'Ecole Élémentaire*, 1980, 64 p.
37. *Mots V*, 1980, 114 p.
38. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 2*, 1981, 140 p.
40. *Analyse des données, tome 2*, 1980, 296 p.
41. *Fragments d'histoire des mathématiques*, 1981, 176 p.
42. "Mini-grille" *d'analyse des manuels scolaires de mathématiques*, 1981, 56 p.
43. *Mathématique active en Seconde*, 1981, 228 p.
44. *Jeu 1. Les jeux et les mathématiques*, 1982, 184 p. et 13 fiches.
45. *Mathématiques et Sciences Physiques en L.E.P., brochure U.d.P. — A.P.M.E.P.*, 1981, 48 p., gratuit.
46. *Mots VI : Grandeur — Mesure*, 1982, 134 p.
47. *Obstacles et déblocages en mathématiques*, par M. Bruston et C. Rouxel, 1982, 130 p.
48. *Evariste Galois (1811-1832), format 21 × 29,7*, 1982, 56 p.
49. *Elem-Math VII, Aides pédagogiques pour le cycle moyen*, 1983, 116 p.
50. *Du matériel pour les Mathématiques (Journées de Poitiers 82)*, 1983, 100 p.

51. *Ciel, Passé, Présent*, par G. Walusinski, 1983, 222 p.

52. *Ludofiches 83 (19 fiches de Jeux)*, 1983.

53. *Musique et Mathématique*, par B. Parzys et Y. Helle-gouarch, 1983, 160 p.

54. *La Presse et les Mathématiques*, par M. Chouchan, 1984, 120 p.

55. *Algèbre des Carrés magiques*, par J.-M. Groizard, 1984, 80 p.

56. *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*, par G. Audibert, 1984, 830 p.

D1. *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent, dictionnaire de l'A.P.M.E.P.*, 1962-1979, 113 notices, 211 fiches.

D2. *Dictionnaire A.P.M.E.P.*, millésime 1980, 20 fiches.

*
* *
* *

Publications de la Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P. :

- *Initiation à la mathématique de base*, 213 p.
- *Initiation au langage mathématique, analyse d'une expérience d'enseignement*, par J. Adda, 190 p.

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe près de 11 000 enseignants concernés par les mathématiques ("de la Maternelle à l'Université").

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, "de la Maternelle à l'Université", mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen *, en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte *, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'École Élémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies, (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association, ainsi qu'un supplément d'actualité (4 N°s par an). Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3^e, CAP et BEP, Baccalauréat, D.E.U.G.

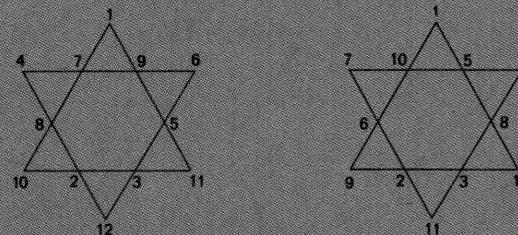
De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

* et dans le Texte d'Orientation 1978.

Produit tensoriel de deux étoiles magiques

Voici deux étoiles magiques :



Le produit tensoriel de ces deux étoiles se trouve au verso.

La somme des 16 nombres alignés sur chaque frontière de chaque bande est constante et est égale au produit des sommes linéaires des deux étoiles ci-dessus ($26 \times 26 = 676$).