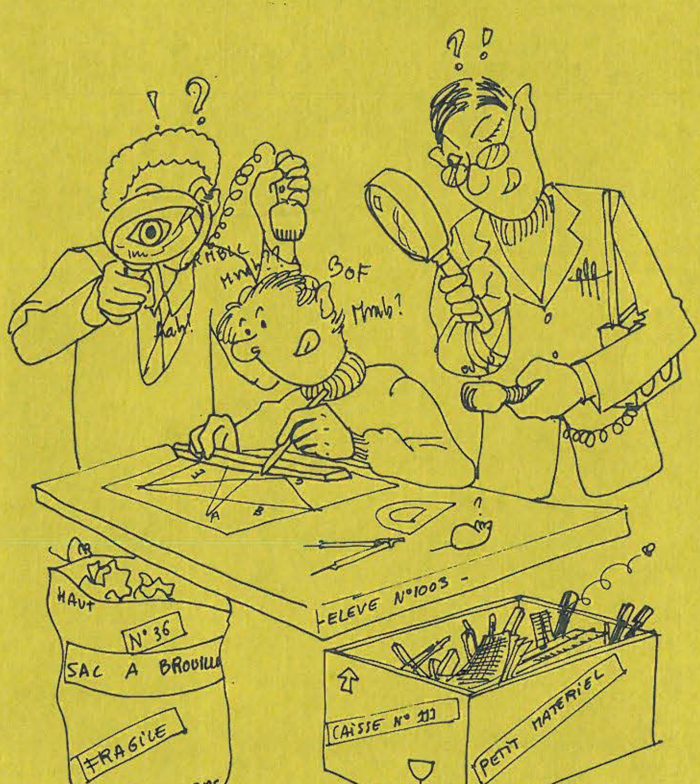
DÉMARCHES DE PENSÉE ET CONCEPTS UTILISÉS PAR LES ÉLÈVES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE

VOLUME II

par
Gérard AUDIBERT



Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)
1984 — N° 56

PARTIE E

COMPLEMENTS

- CHAPITRE XXIV -

NOTES

PAGE 26 -1

Nous allons citer les dualités qui nous paraissent les plus importantes dans les études d'épistémologie génétique postérieures à 1974. Nous proposons, pour chaque dualité, la référence qui nous paraît le plus explicite.

. affirmation et négation	PIAGET J.(1974b), pages 165 et suivantes.
. abstraction empirique et abstraction réfléchissante	PIAGET J.(1977b), pages 318 et suivantes.
. réfléchissement et réflexion	PIAGET J.(1977b), pages 301 et suivantes.
. compréhension et extension	PIAGET J., HENRIQUES G.(1978), pages 223 et suivantes.
. généralisation opératoire et généralisation formelle	PIAGET J., HENRIQUES G.(1978), pages 249 et suivantes.
. différenciation et intégration	PIAGET J. et HENRIQUES G.(1978), de la page 227 à la page 236, puis pages 241 et suivantes.
. assimilation et accommodation	PIAGET J.(1975), de la page 9 à la page 14.
. causalité et opération logico-mathématiques	PIAGET J., GARCIA R. (1971) de la page 11 à la page 21.
. contenu et forme	PIAGET J.(1975), de la page 137 à la page 241, ou encore PIAGET J., HENRIQUES G.(1978) de la page 221 à la page 227.
. objet et sujet	PIAGET J.(1975), pages 49 et suivantes.
. observables et coordination	PIAGET J.(1975), pages 50, 51, 52 et 53.

L'inventaire de toutes les dualités utilisées par l'Ecole de Genève ainsi que leur classification selon leurs différentes natures est, bien entendu, hors de notre propos. Signalons toutefois que nous trouvons encore maintes dualités spécifiques à certains domaines étudiés, comme les images reproductrices et les images anticipatrices de PIAGET J. et INHELDER B. (1966) ou la causalité linéaire et la causalité circulaire de HALBWACHS F. (1971) ou les fonctions constituantes et les fonctions constituées de PIAGET J., GRIZE J.B., SEZMINSKA A., VINH BANG (1968), ou périmètre et surface de VINH BANG et LUNZER E. (1965), etc ...

D'autres dualités sont si bien établies et depuis si longtemps dans les grands classiques de l'Ecole de Genève qu'on pourrait les oublier dans la recherche d'un catalogue exhaustif. Nous avons notamment la dualité des opérations de classification et des opérations de sériation de PIAGET J. et INHELDER B. (1959) (de la page 288 à la fin); la dualité des valeurs cardinales et des valeurs ordinales de PIAGET J. et SZEMINSKA A. (1941) (pages 198 et suivantes); la dualité du déplacement et de la partition de

PIAGET J., INHELDER B., SZEMINSKA A. (1948) (deuxième partie) ou encore la double dualité du groupe INRC dont une étude théorique a été présentée par GRIZE J.B. (1967) (page 282), etc ...

D'autres, enfin, relevant du bon sens courant ne demandent pas, jusqu'à nouvel ordre, un important développement conceptuel; c'est le cas des dualités : correction - renforcement, ressemblance - différence, proactif - rétroactif, etc ...

PAGE 27 -1

Pour avoir plus de détails sur ces journées nationales de l'Association des Pbofesseurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P.) on peut se référer aux bulletins N° 328, 329 et 332 de cette association, cités dans la bibliographie sous les références APMEP (1981-a), APMEM (1981-b), APMEP (1982).

PAGE 27 -2

Les notions de perturbations, régulation, compensation et équilibration majorante sont définies respectivement page 24, page 23, page 32 et paragraphe 6, par PIAGET J. (1975).

PAGE 31 -1

Les trois grandes formes d'équilibration sont décrites par PIAGET J. (1975), au paragraphe 2.

PAGE 32 -1

Les trois principales conduites α, β, γ sont décrites par PIAGET J. (1975), au paragraphe 13.

PAGE 32 -2

Les différentes citations de la page 32 se trouvent dans le paragraphe 8 de PIAGET J. (1975).

PAGE 38 -1

Les programmes du B.O.E.N. (1968; 1971a; 1969; 1970a; 1971c) ont été mis en application, pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème, 3ème, 2ème, lère et Terminale, respectivement aux rentrées scolaires 1969, 1970, 1971, 1972, 1969, 1970, 1971. Ils sont restés en vigueur, respectivement, jusqu'aux rentrées scolaires 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, (1982) et (1983). Quand il en est question, nous parlons des programmes de la décennie 70-80.

De nouveaux programmes sont présentés par les B.O.E.N. (1977a; 1978; 1981) et l'A.P.M.E.P. (1981c).Quand il est question de ces nouveaux programmes, nous parlons des programmes des années 80. Précisons que les programmes de Première et Terminale, applicables aux rentrées 1982 et 1983 n'ont pas été encore publiés.

PAGE 39 -1

La définition de la droite euclidienne se trouve dans le B.O.E.N. (1971 b), page 2887.

PAGE 39 -2

Pour distinguer *les deux géométries, vectorielle et affine,* nous pouvons procéder de la manière suivante :

Etant donné un espace vectoriel réel V(les axiomes d'espace vectoriel sont présentés, entre autre, par DIEUDONNE J.(1964) aux pages 31 et 29), la géométrie vectorielle n'utilise, comme transformation, que les applications linéaires de V dans V et, en particulier, les applications linéaires bijectives de V dans V. Ce dernier ensemble d'applications est appelé le groupe linéaire. Il est noté GL(V).

Etant donné un espace vectoriel réel V, la géométrie affine n'utilise comme transformation que les applications linéaires de V dans V, les translations et les compositions des précédentes applications. Parmi ces transformations, celles qui sont bijectives forment un ensemble appelé groupe affine, noté GA(V).

Les deux géométries vectorielle et affine se distinguent à cause de l'inclusion stricte :

$$GL(V) \subset GA(V)$$

Comparons maintenant les géométries affine et euclidienne.

Un espace euclidien E est un espace vectoriel réel qui est, de plus, muni d'une distance (DIEUDONNE J.(1964) définit un tel espace dans le cas des dimensions deux et trois aux pages 29, 30 et 85). C'est l'existence de cette distance qui permet, essentiellement, de distinguer l'espace euclidien de l'espace affine.

Mais une autre distinction est intéressante. E étant un espace vectoriel réel, on peut lui associer GL(E) et GA(E). On considère, alors, plus particulièrement, parmi les transformations appartenant à GA(E) celles qui conservent la distance. On les appelle : isométries. Elles sont engendrées par les rotations, les translations et les symétries. Si on note IS(E), l'ensemble des isométries, on obtient l'inclusion stricte :

$$IS(E) \subset GA(E)$$

Parmi les transformations appartenant à GA(E), on considère aussi l'ensemble des similitudes, noté S(E), et alors, nous avons deux inclusions strictes :

$$IS(E) \subset S(E) \subset GA(E)$$

On peut dire, pour être très sommaire, que faire de la géométrie euclidienne consiste à concentrer son activité sur S(E), donc en particulier sur IS(E).

En définitive, on peut dire que, sur un même espace euclidien, les géométries vectorielle et affine se distinguent à cause de l'inclusion stricte :

$$GL(E) \subset GA(E) ,$$

tandis que les géométries affine et euclidienne se distinguent à cause de l'inclusion stricte :

$$S(E) \subset GA(E).$$

Bien entendu, cette présentation structurelle des trois géométries vectorielle, affine et euclidienne, fondée sur les groupes de transformation, a pour objectif de donner un très brève vue d'ensemble de ces géométries, et non de proposer un modèle pour un déroulement de l'enseignement.

PAGE 41 -1

On trouvera le programme dans le texte de l'Académie des Sciences (1978) édité par l'A.P.M.E.P.

PAGE 41 -2

Les nouveaux programmes des années 80 sont présentés par les B.O.E.N. (1977a; 1978; 1981) et l'A.P.M.E.P. (1981 c).

PAGE 42 -1

Les trois citations que nous donnons du programme d'Erlangen de KLEIN F.(1891) sont extraites du paragraphe 1 intitulé : Groupes de transformations de l'espace. Groupe principal. Problème général. Elles se retrouvent aux pages 6 et 7 de l'Edition Gauthier-Villars (1974).

PAGE 42 -2

Les deux citations que nous donnons de HILBERT D.(1899) se trouvent respectivement aux pages 10 et 174 de l'Edition Dunod (1971). Les appendices dont il est question sont les appendices II et IV, respectivement aux pages 192 et 235.
La deuxième citation se trouve dans la traduction de LANGEL L. éditée par Gauthier-Villars en 1900.

PAGE 43 -1

Les deux ouvrages de Jacques Hadamard auxquels nous nous sommes référés sont HADAMARD J.(1898) et HADAMARD J.(1901). La première édition du tome I date de 1898 d'après HADAMARD J.(1898), page VI.

PAGE 43 -2

C'est ainsi que nous trouvons dans DELTHEIL R. et CAIRE D. (1950), édition fondée sur les programmes officiels du 27 Juin 1945 de la classe de mathématiques, appelée actuellement classe de terminale, le concept de groupe de déplacements ainsi que celui de sous-groupe de translations et de rotations de centré donné, à la page 40 de cette édition. Dans DELTHEIL R. et CAIRE D. (1951), livre réservé aux candidats aux grandes écoles, ce sont les groupes de transformations qui servent de trame à tout l'ouvrage : groupes euclidiens du plan et de l'espace des chapitres I et III, groupes projectifs à deux et trois dimensions du chapitre VI, groupe circulaire du plan au chapitre VII, groupe conforme de l'espace au chapitre VIII.

PAGE 43 - 3

On peut se référer aux B.O.E.N. (1971a, 1971b).
La présentation proposée par les commentaires du programme de quatrième pour la droite euclidienne comme pour la droite affine, est fondée sur la notion de groupe de transformation. Pour la droite affine c'est le groupe affine, appelé Φ par le B.O.E.N. (1971 b) à la page 2887. Pour la droite euclidienne que nous avons présentée à la page 38 de notre chapitre II, c'est le groupe des isométries de la droite, appelé F par le B.O.E.N. (1971 b) à la page 2887.

PAGE 44 -1

On peut trouver la définition du groupe diédral chez WEYL H. (1952) page 71.

PAGE 44 -2

Le groupe euclidien, ou groupe principal d'un espace euclidien est le groupe des similitudes (directes et inverses). On trouve ces questions largement développées par DELTHEIL R. et CAIRE D. (1951), LELONG-FERRAND J. et ARNAUDIES J.M. (1975) ou encore BERGER M. (1977 b). Le groupe euclidien est présenté aux pages 42 et 134 par DELTHEIL R. (ibid). Il est symbolisé au moyen de $\mathcal{S}A(\mathcal{E}_n)$, page 128, par LELONG-FERRAND J. (ibid) et au moyen de GO(E), page 52, par BERGER M. (ibid).

PAGE 45 -1

Nous souhaitons utiliser les trois notions de géométrie intra-figurales, interfigurales et transfigurales avec beaucoup de prudence car elles ont des significations mal délimitées par l'Ecole de Genève. C'est ainsi que pour GRIZE J.B. (1964) et pour PIAGET J. (1964) la composante interfigurale est "celle qui relève d'activités portant sur des objets réunis en classes" (page 67), tandis que pour GARCIA R. (1980), l'interfigural est la reconnaissance de l'"espace englobant", avec des "symétries de référence entraînant tout l'espace" (page 240), conception rejointe par CRIZE J.B. (1964), pages 84 et 85.

PAGE 45 -2

Le programme de technologie de troisième, publié par le B.O.E.N. (1970b) consacrait un de ses trois chapitres à la rotation comme le montrent les paragraphes I1, I2 et I4 du premier chapitre de ce programme.

PAGE 45 -3

Pour une tentative de coordination en formation des maîtres, de la translation et du mouvement de translation, on peut se référer à l'I.R.E.M. de Montpellier (1977).
Dans ses recherches sur les correspondances, PIAGET J. (1980) est amené à utiliser les mouvements de rotation (chapitre III) et de translation (chapitre IV). Nous avons là une étude de la coordination entre transformations et mouvements pour des enfants de moins de 10 ans.
Si le chapitre III a un souci de généralisation rendant les conclusions difficilement utilisables dans notre enseignement secondaire, par contre, dans le chapitre IV, cette coordination absente à l'étape III (cf. PIAGET J. (1980), page 74) aboutit à l'étape IV à la "notion de solide indéformable" avec transfert des "valeurs mesurables"; ce qui nous amène à réfléchir sur la géométrie euclidienne dès le début de la sixième.

PAGE 46 -1

Les angles ont été introduits en classe de troisième et en classe de première avec un très grand souci de rigueur théorique comme le montrent les B.O.E.N. (1971 a, 1971 b, [illegible], [illegible]
L'I.R.E.M. de Montpellier (1973 a, 1973 b, 1976, 1980) s'est particulièrement intéressé à cette notion.

PAGE 46 -2

Nous devons aussi suivre attentivement les travaux de CIOSEK M. portant sur l'angle au centre et l'angle inscrit. Un premier compte-rendu de ces travaux concernant l'enseignement élémentaire sera donné dans les actes de la XXXIIIème rencontre de la CIEAEM.

PAGE 46 -3

On se référera au B.O.E.N. (1971 c), page 1600 et au B.O.E.N. (1971 d), page 1910.

Signalons, de plus, qu'un programme comme le programme marocain, quasiment identique au programme français des années 70-80, a conservé en fin de troisième l'étude des cas de similitudes des triangles qui ont disparu chez nous.

La notion de triangles semblables est absente même de certains enseignements techniques courts, comme le BEP industriel, et l'I.R.E.M. de Montpellier (1973 a) signale qu'elle fait défaut.

PAGE 47 -1

La géométrie euclidienne à trois dimensions qui ne peut pas être complètement déconnectée de notre travail, bénéficie de nombreuses recherches en psychologie cognitive. Il y a les travaux de PIAGET J. et INHELDER B. (1947). Plus récemment, CARON-PARGUE J. (1979, 1981) a réalisé une importante recherche sur le cube et les codages de propriétés spatiales chez des enfants de 3 à 11 ans. PAEZ SANCHEZ L. (1980), de son côté, contribue à éclaircir le rôle des représentations bidimensionnelles d'objets ou de situations tridimensionnelles.

- La géométrie euclidienne à trois dimensions, reste un souci majeur de l'enseignement actuel comme le montrent les colloques Inter-IREM de Clermont-Ferrand (on peut se référer à l'IREM de Clermont (1981)) et de Bordeaux qui a lieu les 11 et 12 Mai 1982.

Au sujet des questions soulevées par l'introduction de la géométrie de l'espace en classe de seconde, on peut examiner les tentatives de l'I.R.E.M. de Montpellier (1981) pour introduire la géométrie à 3 dimensions au moyen du cube en perspective cavalière qui reste un compromis entre le respect de l'orthogonalité propre à la géométrie euclidienne et la visualisation attachée à la perspective vraie.

Sur un plan plus mathématique, nous pouvons récolter une riche moisson de thèmes traitant de la géométrie dans l'espace avec HILBERT D. et COHN VOSSEN S. (1952) et avec BERGER M. (1977 a, 1978 a, 1978 b, 1977 c).

PAGE 47 -2

On pourra lire, à ce sujet, PIAGET J. et HENRIQUES G. (1978), et plus particulièrement le paragraphe 3 des conclusions générales.

En ce qui concerne la géométrie orthogonale et même la géométrie symplectique, on peut se référer à ARTIN E. (1957).

PAGE 48 -1

On peut consulter à ce sujet LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J.M. (1975), pages 19 et 20, ainsi que AUDIBERT G. (1977), et notamment la page 6 de ce dernier document. On se réfèrera ainsi à la note qui se trouve à la page 483.

PAGE 48 -2

Dans leur conclusion, PIAGET J., INHELDER B. et SZEMINSKA A. (1948) présentent un troisième et dernier palier, caractéristiques du stade IV avec "intervention de la multiplication mathématique, comme instrument de coordination complétant la multiplication logique ainsi que la mesure simple ..." (page 462). Dans la conclusion du premier chapitre, VINH BANG (1965) affirme que "la qualification des surfaces suppose une compensation multiplicative des côtés qui ne peut être dégagée que vers 11-12 ans" (page 36).

PAGE 48 -3

On trouvera l'essentiel des recherches associées au champ conceptuel des "structures multiplicatives" de Gérard VERGNAUD et de ses collaborateurs dans les travaux de VERGNAUD G. et collaborateurs (1979), VERGNAUD G. et coll. (1978), ROUCHIER et coll. (1980).
En ce qui concerne plus spécifiquement, les surfaces et les volumes, deux communications ont été faites aux SEMINAIRES de DIDACTIQUES des 19 Octobre 1980 et 17 Janvier 1981 par RICCO G. et VERGNAUD G. Une première présentation de ce travail est relatée par RICCO G. et ROUCHIER A. (1981) et une publication détaillée est annoncée par les auteurs.
On pourra, pour les mesures de longueur, de surface et de volume, consulter encore ROGALSKI J. (1979, 1981).

PAGE 48 -4

Notre méthode de travail (cf. chapitre III) nous permet de laisser de côté les concepts d'aire et de volume, ce qui restreint, et, donc, facilite nos investigations dans le champ de la géométrie euclidienne plane. Mais, certaines expériences que nous n'étudions pas ici, nous ont montrées qu'on doit s'attendre chez nos élèves de premier cycle à une non différenciation très tenace entre la conservation de l'aire et les isométries (symétrie orthogonale et symétrie centrale). Le problème que nous avons étudié à ce sujet consiste à donner un triangle ABC et à poser la question "trouver d'autres positions du sommet C telles que le triangle ABC garde la même aire". Les trois solutions privilégiées par les élèves sont celles obtenues par symétrie : symétrie orthogonale par rapport à AB et à la médiatrice de AB, symétrie par rapport au milieu I de AB. Nous représentons sur la figure 285 ces trois solutions : C_1, C_2 et C_3.

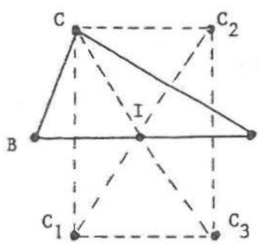


Figure 285

PAGE 49 -1

Les premiers éléments de géométrie analytique apparaissent dans le B.O.E.N. (1978) sous le libellé suivant :
"Applications linéaires et applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; leur représentation graphique ...".

PAGE 49 -2

Nous n'évitons pourtant pas les questions d'approximation et d'unités qui sont essentielles à la géométrie euclidienne. A propos de l'unité, on peut consulter le chapitre 10 de GRIZE J.B. (1964), ou encore PIAGET J. et Coll. (1948).

PAGE 49 -3

Au sujet de la coordination entre la formulation linguistique et la représentation symbolique en géométrie, on peut consulter les travaux de GUILLERAULT M. et LABORDE C. (1980, 1981), ainsi que AUDIBERT G. (1970). Le peu d'information que nous obtenons sur la représentation symbolique peut signifier que l'élève n'en ressent pas la nécessité. GUILLERAULT M. et LABORDE C. (1981) ont constaté, de même, que"le codage est en fait beaucoup plus souvent adopté comme solution linguistique ..." (cf. page 294).

PAGE 51 -1

Nous tenons à ajouter qu'en plus de la remarquable synthèse de DENIS M. (1979) et des travaux de l'Ecole de Genève sur le figuratif avec PIAGET J. (1966) ou encore HATWELL Y. (1974), d'autres chercheurs apportent une aide non négligeable à notre réflexion : WEIL-FASSINA A. (1979) qui propose une revue de question sur la présentation spatiale des données de travail mais s'est aussi intéressé à la lecture du dessin industriel; VERMERSCH P. (1979a, 1979b) qui s'intéresse tant au côté pratique avec le dessin technique qu'au côté théorique avec la mise au point de la notioe de registres de fonctionnement pour l'adulte; VERMERSCH P. SEJOURNANT S. et GUIHARD L. (1978) et leurs travaux sur les documents photographiques en géographie.

PAGE 52 -1

L'I.R.E.M. de Montpellier (1979), dans le chapitre consacré à la conservation du milieu par projection, présente aux élèves de 4ème l'un à côté de l'autre le texte et le dessin (figure 286) suivant :

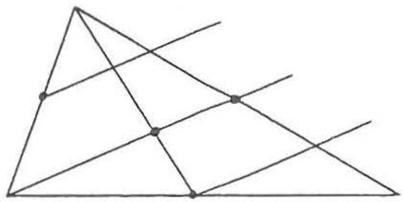


Figure 286

Les médianes d'un triangle sont concourantes. Le point de concours partage dans le rapport $\frac{2}{3}$ chaque segment ayant pour origine l'un des sommets et pour extrémité le milieu au côté opposé.
Il estime que le dessin suscite la démonstration qui reste à faire en classe. Quelles sont les conséquences d'une telle présentation pour l'apprentissage du raisonnement ? des mathématiques ?

PAGE 52 -2

Pour aborder une réflexion sur la question délicate des mesures d'angles, on peut examiner la proposition de l'I.R.E.M. de Montpellier (1976).

PAGE 54 -1

Michel FAYOL nous a communiqué une étude synthétique sur la résolution de problèmes. Les deux premiers chapitres de cette étude sont consacrés à l'associationnisme et à la théorie de la forme. Ils constituent actuellement un manuscrit de 35 pages. Le troisième chapitre de 21 pages, est consacré à "la pensée mise à l'épreuve de l'hyptohèse". Ce travail est noté dans la bibliographie :
FAYOL M. Résolution de problèmes Manuscrit

PAGE 55 -1

Nous pouvons, par exemple, entreprendre une analyse dialectique (cf. paragraphe XIV-5) des procédures suivies par le singe Tschego le 1er et 2

Mars 1914 sur la simple description donnée par KOHLER W. (1927), pages 85 et 86.

PAGE 55 -2

Un des problèmes les plus longuement étudié par NEWELL A. et SIMON H.A. est le problème suivant :

```
    D O N A L D        D ⟵ 5
  + G E R A L D
  -------------
    R O B E R T
```

Chaque lettre représente un chiffre (0, 1, 2, ..., 9) distinct. Nous savons que D est le chiffre 5. Quels chiffres doit-on attribuer aux lettres de telle sorte que, les lettres étant remplacées par leurs chiffres correspondants, l'addition ci-dessus soit satisfaite ?
Ce problème est étudié de la page 141 à la page 401 par NEWELL A. et SIMON H.A. (1972).

PAGE 55 -3

Comme exemple de recherche inductive, signalons le problème page 30 et suivantes de POLYA (1954) :
En combien de régions, l'espace est-il divisé par 5 plans ?
Pour analyser certaines découvertes historiques (POLYA G. (1954)) fait appel aux travaux de BERNOUILLI J. et d'EULER (page 15), d'EULER (page 64), de BERNOUILLI J. (page 107), d'ARCHIMEDE (page 110), de DESCARTES et de Lord RAYLEIGH (page 115). Il aborde aussi l'histoire du théorème d'EULER (page 20).

PAGE 56 -1

POLYA G. (1962), à la page 3, propose, pour construire un triangle dont les trois côtés sont donnés, d'utiliser la méthode des deux lieux, chacun des lieux étant un cercle. Nos élèves dans la résolution du problème PEN, ont eu l'occasion de traiter cette question et on peut constater que leur procédure est très éloignée de la méthode des deux lieux de POLYA G. (cf. chapitre XVIII).

PAGE 57 -1

Dans l'article de KRYGOVSKA A.Z. et CIOSEK M. (1973), les deux problèmes sont les suivants :
Démontrer que si $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ et si $\sin A + \sin B + \sin C = 0$ alors $\cos(A+B) + \cos(B+C) + \cos(C+A) = 0$.
Trouver la valeur minimum de la fonction $x \to |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n|$ où les a_i sont des nombres différents.
Dans l'article de CIOSEK M. (1976), les deux problèmes proposés sont les suivants :
Etant donnée une pyramide triangulaire ABCD dont les côtés AD, BD, CD sont égaux. Sur le plan ABC, on choisit trois points A_1 B_1 C_1 non colinéaires. Les droites DA_1 DB_1 DC_1 coupent la sphère circonscrite à la pyramide triangulaire respectivement aux points A_2 B_2 C_2 tous différents du point D. Démontrer que les point A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2 sont sur une sphère.
Soient a, b, c les mesures des côtés d'un triangle et α, β, γ les mesures des angles respectivement opposés à ces côtés.
Démontrer que

$$\frac{\pi}{3} < \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2} .$$

PAGE 57 -2

C'est le cas du 4ème CONGRES INTERNATIONAL SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, C.I.E.M., en 1980, et du 5ème colloque du groupe international "PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION", P.M.E., en 1981. La COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ETUDE ET L'AMELIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, CIEAM, y a consacré entièrement sa XXVIIIème rencontre en 1976. En 1982, les 21 et 22 Mai, un colloque Inter-IREM se déroulera à Lyon et portera sur "l'enseignement par les problèmes". En Mars 1982, un colloque de didactique des mathématiques qui se tiendra au Maroc sera consacré à la "pédagogie des problèmes mathématiques dans l'enseignement secondaire".

PAGE 57 -3

BALACHEFF N. (1980, 1981) étudie le problème combinatoire suivant : Combien y-a-t-il de rectangles dans cette figure ? (cf. figure 287).

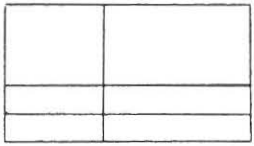


Figure 287

PAGE 58 -1

COMITI C. et Coll. (1980) présentent les problèmes qu'elles utilisent à la page 218. BESSOT A., RICHARD F. (1980) présentent les problèmes qu'elles utilisent à la page 392.

PAGE 59 -1

Les problèmes que nous utilisons se rapprochent beaucoup plus de l'heuristique telle que la définit PLUVINAGE F. (1977) dans son chapitre 1. Du même coup, ils sont assez éloignés de ce qu'il appelle les automatismes.

PAGE 59 -2

En ce qui concerne l'"habillage", on peut consulter FAYOL M., MAURY S. (1981 b).

PAGE 61 -1

KILPATRICK J. (1981) regrette que la profession soit coupée de la recherche, en éducation :

"in no profession other than education doesn't find such a sharp differenciation between the community of research and the community of practitionners".

"but we still need to reconceptualize our approaches so that mathematics teachers can become full partners in the research entreprise".

- Ce point de vue d'un chercheur américain rejoint notre souci de fonctionner en didactique sur la base d'une équipe d'enseignants, sans lesquels les découvertes sont trop laborieuses.

On peut se rendre compte de la richesse de la profession absolument indispensable pour la recherche, en consultant un travail de recherche pédagogique tel que celui de BERTE A. (1980).

PAGE 65 -1

Dans son mémoire de Maîtrise, MOREL-MORIN C. (1981) présente une problématique simple et claire au sujet de l'image mentale associée à l'ensemble des nombres réels chez des élèves de seconde.

PAGE 73 -1

Les neuf enseignants sont :

AUDIBERT Gérard,	Maître-Assistant à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc ;
AUGE André,	Professeur de Mathématiques au Collège de CASTRIES, Hérault ;
BELLARD Nicole,	Professeur de Mathématiques au Collège de CELLENEUVE, Hérault ;
BRUNET Robert,	Professeur de Mathématiques au Lycée Technique Mermoz, Montpellier ;
CHAUVET Bernard,	Professeur de Mathématiques au Lycée Montaury, NIMES ;
CHEVALIER Arlette,	Professeur de Mathématiques au Collège de VERGEZE, Gard ;
CONEJERO M.Thérèse,	Professeur de Mathématiques au Collège Jeu de Mail, Montpellier ;
GROS Claude,	Professeur de Mathématiques au Collège Mas de Tesse, Montpellier ;
LEENHARDT Nicolas,	Professeur de Mathématiques au Collège Les Escholiers de la Mosson, Montpellier.

PAGE 76 -1

D'une manière générale, il est impossible d'obtenir une homogénéité parfaite entre les interventions des expérimentateurs. L'attitude de chacun vis-à-vis du magnétophone, au tout début de nos expériences en est un exemple. Le type de question posé met encore plus en évidence cette hétérogénéité. Mais cet inconvénient important s'accompagne aussi d'avantages indéniables. D'une part, certaines attitudes originales déclenchent une réflexion fructueuse, augmentant les capacités créatrices du groupe. D'autre part, il n'est pas évident que la différence d'attitude entre 2 interviews réalisés consécutivement par le même expérimentateur soit moins importante que la différence d'attitude entre 2 expérimentateurs.

PAGE 78 -1

Nous avons numéroté l'ensemble des protocoles de cette première expérience de la manière suivante. Chaque élève est désigné par un numéro de 5 ou 6 chiffres et chaque page des protocoles par un numéro de 6 ou 7 chiffres. Le premier chiffre désigne la classe, les quatre suivants donnent l'âge; c'est ainsi que le numéro 6-11;07-21 désigne une page de protocole d'un élève de sixième ayant 11 ans et 7 mois.

Si nous avons deux élèves, dans une même classe, ayant le même âge, c'est le 6ème chiffre qui permet deles distinguer, et dans le cas nous avons un 7ème et dernier chiffre pour indiquer la page du protocole. C'est ainsi que nous avons deux élèves de sixième ayant 11 ans et 7 mois; nous trouvons donc le protocole 6-11;07-1 et le protocole 6-11;07-2, et de ce fait, d'une part les pages 6-11;07-10 / 6-11;07-11 / 6-11;07-12 / 6-11;07-13 / 6-11;07-14 et d'autre part, les pages 6-11;07-20 / 6-11;07-21 / 6-11;07-22 / 6-11;07-23 / 6-11;07-24 / 6-11;07-25 / 6-11;07-26.

Si pour une classe donnée et un âge donné, nous n'avons qu'un seul élève, alors chaque page du protocole de cet élève est désigné par un numéro comportant seulement 6 chiffres, le dernier chiffre changeant à chaque page.

En définitive, la répartition des protocoles est la suivante :

6-11;02-1	5-11;05	4-12;10-1	3-13;06	2-16;00
6-11;02-2	5-11;10	4-12;10-2	3-13;07	2-16;07-1
6-11;05-1	5-12;02-1	4-12;10-3	3-14;00	2-16;07-2
6-11;05-2	5-12;02-2	4-13;03	3-14;02	2-16;09
6-11;06	5-12;03	4-13;07	3-14;04	1-17;03
6-11;07-1	5-12;04	4-13;11	3-14;06-1	1-18;00
6-11;07-2	5-12;05	4-14;00-1	3-14;06-2	1-18;04
6-11;11	5-12;06-1	4-14;00-2	3-14;07	1-19;00
6-12;03	5-12;06-2		3-15;06	
	5-12;08		3-15;09	
	5-13;03		3-16;04	
	5-13;05			
	5-13;10			
	5-14;08			

PAGE 78 -2

Très souvent, l'élève qui cherche notre problème est amené à prendre deux cercles et à regarder quelle est la position du rectangle qui lui donne le maximum de points d'intersection. Suivant la position relative des deux cercles, il peut ou il ne peut pas obtenir un maximum égal à 18. Nous nous proposons donc de répondre à la question suivante :
Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur les rayons et la distance des centres des cercles pour qu'il existe un rectangle tel que les deux cercles et le rectangle aient 18 points d'intersection.

Le rôle joué par les cercles est le même. De plus, nous sommes en géométrie euclidienne, c'est-à-dire que le nombre de points d'intersection est un invariant dans une similitude. Donc, on peut prendre comme rayon du premier cercle, un rayon égal à 1, comme rayon du deuxième cercle, un rayon $r \leqslant 1$. Nous appelons d la distance des centres des deux cercles. Nous allons énoncer simplement des résultats qui répondent, dans leur ensemble, très largement, à la question posée.
Si $d > 1$, il n'existe pas de rectangle tel que les deux cercles et le rectangle aient 18 points d'intersection. Par contre, dans ce cas, il existe des rectangles tels que les deux cercles et le rectangle aient

14 ou 12 points d'intersection suivant que les deux cercles se coupent ou ne se coupent pas (voir les figures 9 et 288).

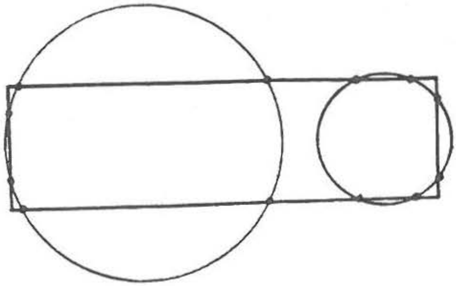


Figure 288

Si $\frac{1}{5} < d < 1$, alors il existe un rectangle, tel que les deux cercles et le rectangle aient 18 points d'intersection, si et seulement si :

$$\frac{4}{5} < \frac{d + \sqrt{2 - d^2}}{2} < r \leqslant 1.$$

Si $0 < d \leqslant \frac{1}{5}$, alors il existe un rectangle, tel que les deux cercles et le rectangle aient 18 points d'intersection si et seulement si :

$$\frac{4}{5} \leqslant 1 - d < r$$

Ces deux dernières propositions peuvent être illustrées au moyen de la partie hachurée de la figure 289.

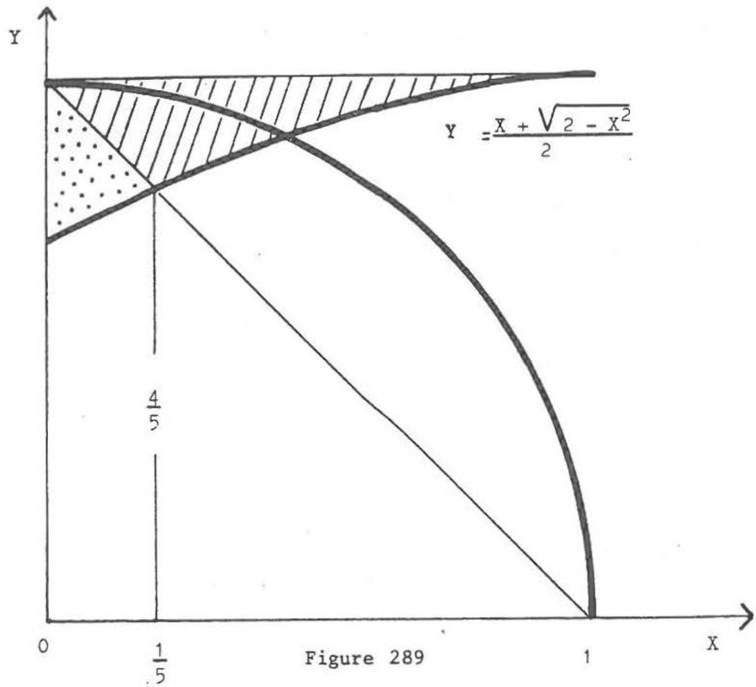


Figure 289

Dans cette figure, nous avons représenté un quart du premier cercle de rayon 1, centré à l'origine des axes OXY. Nous avons aussi représenté une partie de l'ellipse définie par l'équation

$$Y = \frac{X + \sqrt{2 - X^2}}{2}$$

Les droites d'équation $Y + X = 1$ et $Y = 1$, sont représentées en partie.

Un cercle centré sur la demi-droite OX au point d'abscisse x_o, et de rayon r, qui donne les 18 points comme le précise nos deux propositions, est un cercle dont le sommet (x_o, r) se trouve dans la partie hachurée de notre figure 289.

On se sert de la même figure 289 pour illustrer les trois propositions suivantes :

Si $0 \leq d < \frac{1}{5}$ et si $1 - d < r < \frac{d + \sqrt{2 - d^2}}{2}$

alors il existe un rectangle qui coupe les deux cercles en 16 points; mais un des deux cercles est à l'intérieur de l'autre. Cette proposition est illustrée par le "triangle" recouvert de petits points dans la figure 289.

Si $0 \leqslant d \leqslant 1$ et si $r < \frac{d + \sqrt{2 - d^2}}{2}$, alors il n'existe pas de rectangle qui coupe les deux cercles en 16 points. Il n'existe donc pas de rectangle tel que les deux cercles et le rectangle aient 18 points d'intersection.

Si $0 < d < 1$ et s'il existe un rectangle tel que les deux cercles et le rectangle aient 18 points d'intersection, alors $r > \frac{4}{5}$.

Nous n'insisterons pas sur les cas limites qui introduisent des points multiples.

On peut montrer aussi que, lorsque la ligne des centres des cercles est parallèle à un des côtés du rectangle, nous sommes dans une situation plus favorable pour construire la solution que lorsque cette ligne des centres est inclinée par rapport aux côtés du rectangle; ce que nous énoncerons au moyen de la proposition suivante.

S'il existe un rectangle qui coupe deux cercles donnés en 16 points, alors il existe un autre rectangle dont un côté est parallèle à la ligne des centres des deux cercles et qui coupe ces deux cercles en 16 points.

Pour terminer, nous illustrons par un dessin particulier la condition nécessaire et suffisante, portant sur le centre d'un cercle, pour qu'il existe un tel cercle coupant un rectangle donné en huit points. La région convenant à ce centre est limitée dans le cas particulier illustré par la figure 290 par 8 morceaux de paraboles entourant le centre du rectangle.

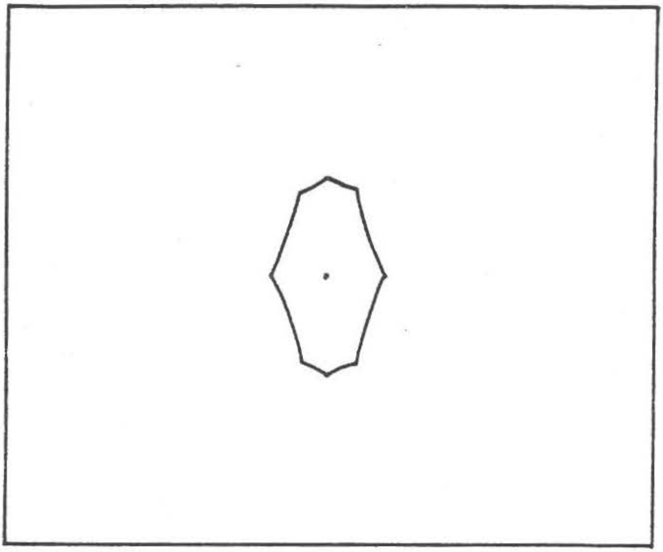


Figure 290

PAGE 98 -1

De nombreux chercheurs s'intéressent actuellement aux interactions et communications entre enfants d'un même niveau scolaire. C'est le cas notamment de SCHUBAUER-LEONI M.L., PERRET-CLERMONT A.N. (1980), FAYOL M., MAURY S. (1981 a, b), BALACHEFF N. (1979, 1980, 1981).

PAGE 109 -1

Une constatation analogue est faite par DUPUIS C. et PLUVINAGE F. (1981). Ils déclarent en effet dans leurs conclusions (page 201) :
"Le fait de devoir construire un intermédiaire est une barrière infranchissable pour la plupart des élèves".
Nous retrouvons là les difficultés de la différenciation.
Ils déclarent aussi :
"Cette enquête souligne après d'autres que la somme de deux petites difficultés peut être une très grande difficulté" (page 201).

Nous retrouvons alors les difficultés dues à l'intégration. Pour plus de détails sur ces questions soulevées, on peut consulter DUPUIS C. et PLUVINAGE F. (1980) qui fournissent des explications plus détaillées à la page 24.

PAGE 111 -1

Les quatre notions sont définies par BALACHEFF N. (1981) page 7 ou par BALACHEFF N. (1980) page 1. Nous donnons au mot "démonstration" le même sens que celui proposé par BALACHEFF N. C'est le sens donné couramment en mathématique. Nous adoptons dans notre texte pour le mot preuve un sens moins précis que celui adopté par BALACHEFF N.' car notre travail n'étant pas centré, comme le sien, sur la notion de preuve, notre expérimentation sur la question est insuffisante et nous oblige à une plus grande prudence. Mais la discussion que nous avons entrepris avec BALACHEFF N. est pour nous d'un grand intérêt. On trouve aussi chez LAKATOS I. (1976) une approche de la notion de preuve. On doit toutefois remarquer que cette approche, épistémologique et philosophique, n'est pas une approche expérimentale.

PAGE 133 -1

Nous avons étudié l'influence des positions relatives des divers éléments de la figure sur le nombre de points d'intersections dans la note qui se trouve aux pages 498, 499, 500 et 501.

PAGE 142 -1

On peut remarquer que la conclusion de KAR qui peut se résumer par la phrase "Il existe un cas où le nombre de points d'intersection est 16" se déduit de la construction particulière qu'elle vient d'obtenir (figure 45 de la page 142), car l'existence se déduit de la mise en évidence d'un cas. Mais nous considérons que sa démarche reste expérimentale car elle s'appuie sur une hypothèse préalable suivie d'une réalisation devant l'amener à infirmer ou confirmer son hypothèse. Ce qui distingue la démarche de KAR de l'exemple de démarche expérimentale que nous proposons à la page 149, c'est que chez KAR il y a déduction, dans notre exemple la décision est prise par induction. Nous distinguons en fait quatre notions : déduction, induction, démarche déductive, démarche expérimentale. La démarche expérimentale, pour nous, peut faire intervenir déduction et induction.

PAGE 152 -1

Nous conseillons au lecteur de décâlquer sur une feuille transparente le triangle de la figure 50, afin de l'utiliset pour examiner les différentes figures (il y a plus de 100 figures) de la partie B.

PAGE 154 -1

Le numérotage donné à la page 506 indique l'âge et la classe de chacun des élèves ayant participé à l'expérimentation portant sur le problème SIM.

PAGE 156 -1

Ce deuxième problème est beaucoup plus difficile et n'a été étudié que par nos élèves du second cycle et par GIL (protocole 3-14;01). Ce problème sert, surtout, à occuper les élèves qui terminent rapidement le problème SIM. Il nous donne aussi quelques informations complémentaires. Il ne nous permet pas une analyse globale au même titre que le problème SIM, car il ne répond pas aux exigences de la problématique. Notamment, il ne satisfait pas les points 4, 5, 9 et 10 de la page 59.

Nous représentons sur la figure 291 ci-dessous deux solutions : les solutions 1 et 1'. Nous représentons aussi un triangle 2 semblable au triangle proposé qui n'est pas solution car le triangle 2 est strictement plus petit que le triangle 1.

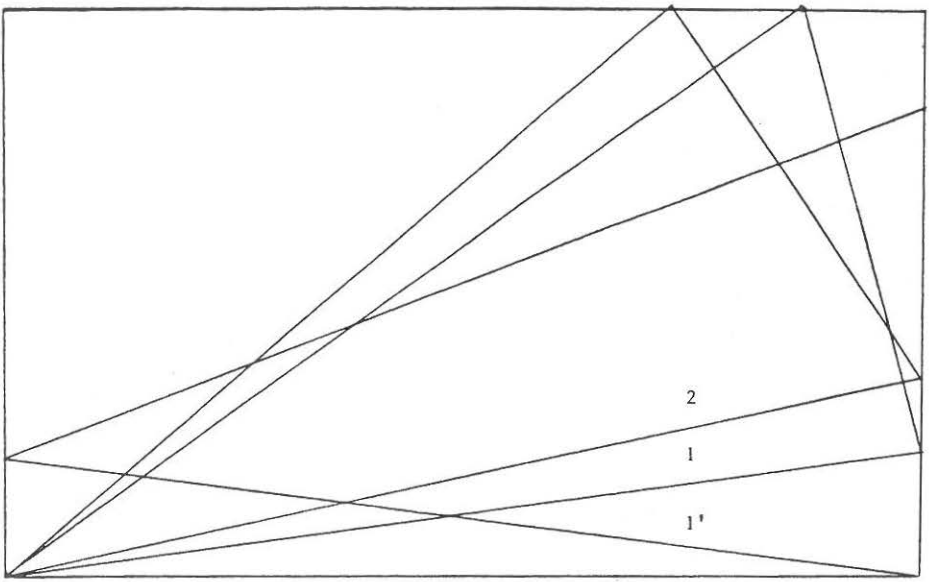


Figure 291

Nous acceptons une erreur d'un millimètre, mais bien entendu nos résultats peuvent être traités sans approximation sur de simples données numériques.

Signalons encore que le problème consistant à chercher le plus grand triangle semblable à un triangle donné contenu dans un rectangle donné, est résolu après un nombre fini de calculs ne dépendant pas du triangle et du rectangle donnés; l'algorithme de résolution est donc programmable.

PAGE 156 -2

Le numérotage des protocoles se fait selon les mêmes modalités que pour les protocoles du problème CRI (cf. la note de la page 497). La répartition de l'ensemble des protocoles est la suivante :

6-10;10	4-13;01	3-13;10	1-16;06-1
6-11;02-1	4-13;02-1	3-13;11	1-16;06-2
6-11;02-2	4-13;02-2	3-14;00-1	1-16;09
6-11;04	4-13;03	3-14;00-2	1-16;10-1
6-11;06	4-13;04-1	3-14;01	1-16;10-2
6-11;07	4-13;04-2	3-14;03-1	1-16;10-3
6-11;11-1	4-13;06	3-14;03-2	1-16;11
6-11;11-2	4-13;07	3-14;04	1-17;00
6-12;11	4-13;09	3-14;08	1-17;09
5-11;05	4-14;00	3-14;10	0-16;06
5-11;06	4-14;01-1	3-14;11	0-16;11
5-12;01	4-14;01-2	3-15;00	0-17;05
5-12;04	4-14;01-3	3-15;06	0-18;00-1
5-12;06	4-14;02	2-15;01	0-18;00-2
5-12;09-1	4-14;05	2-15;02	0-18;07-1
5-12;09-2	4-14;06	2-15;03	0-18;07-2
5-12;09-3	4-15;08	2-15;06	0-19;00
5-12;10		2-15;09	0-20;01
5-13;00		2-15;10	
5-13;03		2-16;00-1	
5-13;05		2-16;00-2	
5-13;08		2-16;01	
5-14;01		2-16;02	

PAGE 157 -1

Les protocoles que nous avons comptés comme ayant aboutit à la solution sont les suivants :

5-12;06	5-12;09-1	5-13;05			
4-13;04-2	4-13;06	4-14;00	4-14;01-2	4-14;02	4-14;06
3-13;10	3-14;00-1	3-14;01	3-14;03-2	3-14;08	3-14;11
3-15;00	3-15;06				
2-15;01	2-15;02	2-15;03	2-15;09	2-15;10	2-16;00-1
2-16;00-2	2-16;01	2-16;02			
1-16;06-1	1-16;09	1-16;10-2	1-16;10-3	1-17;00	1-17;09
0-16;06	0-16;11	0-17;05	0-18;00-2	0-19;00	

PAGE 163 -1

Rappelons qu'une application ponctuelle bijective qui conserve l'alignement est une application affine. Pour une démonstration de ce résultat, on peut utiliser le corrolaire 1, page 89, de FRENKEL J. (1973).

PAGE 167 -1

MAR, dont le protocole numéroté 3-15;00, se trouve dans la partie F, est un exemple d'élève émettant des doutes momentanés quant à la nécessité de la conservation des angles.

PAGE 168 -1

Puisqu'au total nous avons 81 élèves, 3 élèves n'ont pas été classés. Deux d'entre eux ne l'ont pas été car une trop importante intervention de l'expérimentateur ne nous permet pas de savoir quelle est véritablement l'attitude de l'élève au sujet de la conservation des angles. Nous rendons compte du travail de ces élèves dans les protocoles 5-12;01 et 4-14;00. Le dernier correspond au protocole 4-14;02 insuffisamment explicite au sujet de la conservation des angles.

PAGE 169 -1

Les élèves correspondant aux protocoles 0-16;11 et 0-18;00-2 n'utilisent pas la procédure (1) dans le problème SIM. Nous les avons comptés comme utilisant cette procédure car c'est effectivement leur cas lorsqu'ils sont amenés à résoudre le deuxième problème faisant intervenir le triangle de dimensions 4 cm, 8 cm et 8,5 cm.

PAGE 170 -1

Nous donnons ci-après le tableau 292, qui précise élève par élève la valeur de vérité de chacune de nos cinq affirmations. Les numéros {1} {2} {3} {4} {5} correspondent aux affirmations dans l'ordre où nous les avons énoncés page 170 et que nous rappelons ici :

{1} l'élève ne fait aucune mesure ...

{2} l'élève mesure au double décimètre ...

{3} l'élève construit ... en utilisant le double-décimètre

{4} l'élève mesure ... au rapporteur

{5} l'élève construit au rapporteur ...

	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
6-10;10		■			
6-11;02-1	■				
6-11;02-2		■			
6-11;04		■	■		
6-11;06		■			
6-11;07		■	■		
6-11;11-1	■				
6-11;11-2	■	■			
6-12;11	■				
5-11;05		■	■	■	■
5-11;06		■	■		
5-12;01		■	■	■	■
5-12;04		■	■	■	■
5-12;06		■	■	■	■
5-12;09-1		■	■	■	■
5-12;09-2		■	■		
5-12;09-3		■	■	■	■
5-12;10		■	■	■	■
5-13;00	■	■	■		
5-13;03		■			
5-13;05	■	■			
5-13;08		■	■		
5-14;01		■	■	■	■
4-13;01		■	■		
4-13;02-1		■	■	■	■
4-13;02-2		■	■		
4-13;03		■	■	■	■
4-13;04-1		■	■		
4-13;04-2		■	■	■	■
4-13;06		■	■	■	■
4-13;07		■	■	■	■
4-13;09		■	■		
4-14;00		■	■	■	■
4-14;01-1		■	■		
4-14;01-2	■				
4-14;01-3		■	■	■	■
4-14;02		■	■		
4-14;05		■	■		
4-14;06		■	■		
4-15;08		■	■		

	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
3-13;10		■	■	■	■
3-13;11		■	■		
3-14;00-1		■	■	■	■
3-14;00-2		■	■	■	■
3-14;01		■	■	■	■
3-14;03-1		■	■		
3-14;03-2		■	■		
3-14;04		■	■		
3-14;08		■	■	■	■
3-14;10		■	■	■	■
3-14;11		■	■	■	■
3-15;00		■	■	■	■
3-15;06		■	■	■	■
2-15;01		■		■	■
2-15;02				■	■
2-15;03		■	■	■	■
2-15;06		■	■	■	■
2-15;09		■	■	■	■
2-15;10		■	■	■	■
2-16;00-1		■	■	■	■
2-16;00-2		■	■	■	■
2-16;01				■	■
2-16;02		■	■	■	■
1-16;06-1		■		■	■
1-16;06-2		■	■	■	■
1-16;09				■	■
1-16;10-1				■	■
1-16;10-2		■	■	■	■
1-16;10-3		■		■	■
1-16;11				■	■
1-17;00		■	■	■	■
1-17;09		■	■	■	■
0-16;11		■	■		
0-16;06		■	■	■	■
0-17;05		■	■	■	■
0-18;00-1		■		■	
0-18;00-2		■	■	■	■
0-18;07-1				■	■
0-18;07-2		■	■	■	
0-19;00		■	■	■	■
0-20;01		■	■	■	■

Tableau 292

PAGE 171 -1

Il semble bien que, pour notre classe de 6ème, la variable "période" comme l'appelle COMITI C. (1980) joue un rôle essentiel. Remarquons de plus que parmi nos élèves de 6ème, il n'y a pas de redoublants.

PAGE 171 -2

Dans le tableau 293 ci-dessous, nous avons donné classe par classe le nombre et le pourcentage approximatif d'élèves utilisant la procédure (1).

Procédure (1) \ Classes	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Term.
Nombre	0	6	7	8	10	8	6
% approximatif	0	45	45	60	100	90	65

Tableau 293

En terminale, nous trouvons dans les protocoles 0-18;07-2 et 0-20;01 des procédures de vérification (procédure (5)) mais qui sont faites au rapporteur. Si nous en tenons compte, nous pouvons dire qu'en terminale, 90% utilisent le rapporteur; ce qui donne une meilleurs cohérence au second cycle.

PAGE 176 -1

Cette note de plusieurs pages a pour objet de compléter, d'un point de vue mathématique, l'étude des *pseudo-proportions*.

Appelons $\mathcal{S}$ le groupe des similitudes directes de rapport strictement positif. Appelons $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications a_h définies à la page 175. $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ est un ensemble d'opérateurs sur $\textcircled{H}$ (cf. BOURBAKI (1958) page 37 et suivantes). Les parties stables de $\textcircled{H}$ pour la loi définie par $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ forment une partition de $\textcircled{H}$. Chaque partie stable, autre que celle constituée par tous les triangles équilatéraux, est engendrée par un triangle aplati

- $T_{\lambda,0}$ dont les trois côtés sont : $\frac{\lambda}{1+\lambda}$, $\frac{1}{1+\lambda}$, 1 avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$;

On considère plus particulièrement dans la partie stable associée à λ la famille $\mathcal{F}_\lambda$ des triangles qui ont tous 1 comme mesure du grand côté, soit l'ensemble des triangles $T_{\lambda,h}$ dont les trois côtés mesurent :

$$\frac{\frac{\lambda}{1+\lambda}+h}{1+h}, \quad \frac{\frac{1}{1+\lambda}+h}{1+h}, \quad 1 \quad ; \text{ avec } h \geqslant 0.$$

Etant donné un nombre $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, appelons U,V et $W_{\lambda,h}$ les sommets d'un triangle $T_{\lambda,h}$ de la famille $\mathcal{F}_\lambda$; UV est le grand côté, $VW_{\lambda,h}$ est le côté moyen et $UW_{\lambda,h}$ est le petit côté d'un triangle $T_{\lambda,h}$. Si nous fixons λ , le lieu de $W_{\lambda,h}$, quand h varie de 0 à $+\infty$, est une partie du lieu des points dont le rapport des distances à deux cercles fixes est constant; ces cercles ont des rayons égaux à 1 et sont centrés en U et V. Nous représentons sur la figure 294 les deux arcs de cercles centrés en U et V et de rayons unités permettant de définir le lieu. Nous y représentons aussi le triangle $T_{\frac{1}{4},\frac{2}{5}}$ de la famille $\mathcal{F}_{1/4}$, obtenu pour $h = \frac{2}{5}$,

c'est-à-dire le triangle U, V, $W_{\frac{1}{4},\frac{2}{5}}$. Nous représentons enfin le lieu

de $W_{\frac{1}{4},h}$ quand h varie de 0 à $+\infty$, en remarquant que $W_{\frac{1}{4},h}$ parcourt ce

lieu de $W_{\frac{1}{4},0}$ jusqu'à Z, où Z est le sommet du triangle équilatéral UVZ

vers lequel tend $W_{\frac{1}{4},h}$ quand h tend vers $+\infty$.

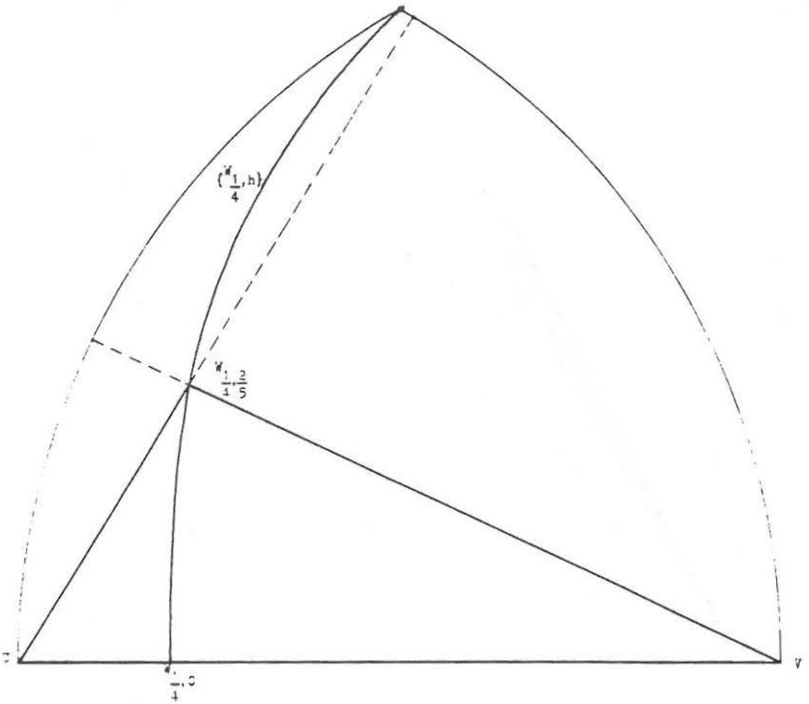


Figure 294

Nous représentons sur la figure 295 seize points du lieu correspondant à $\lambda = \frac{1}{4}$, ainsi que les seize triangles correspondants de la famille $\mathcal{F}_{1/4}$, dont un triangle aplati.

Le triangle équilatéral ne fait, bien entendu, pas partie de cette famille $\mathcal{F}_{1/4}$.

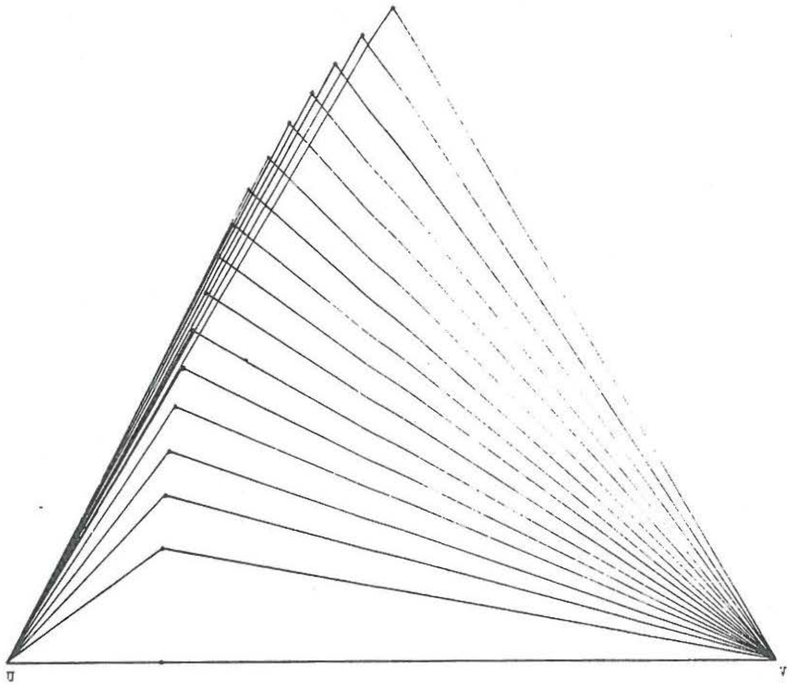


Figure 295

Pour obtenir n'importe quel lieu $\{W_{\lambda,h}\}_h$ on peut utiliser le quadrillage curviligne constitué par des arcs de cercles centrés respectivement en U et V; ce quadrillage permet d'obtenir très rapidement le rapport

$$\frac{1 - VW_{\lambda,h}}{1 - UW_{\lambda,h}} \quad ;$$

ce quadrillage constitue notre figure 296. C'est au moyen de ce quadrillage que nous avons tracé les différents lieux de la figure 297.

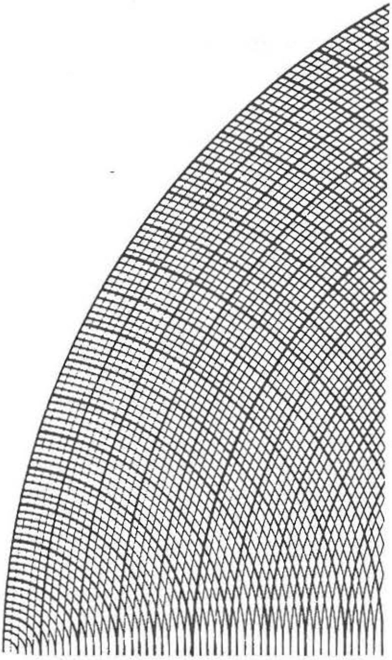


Figure 296

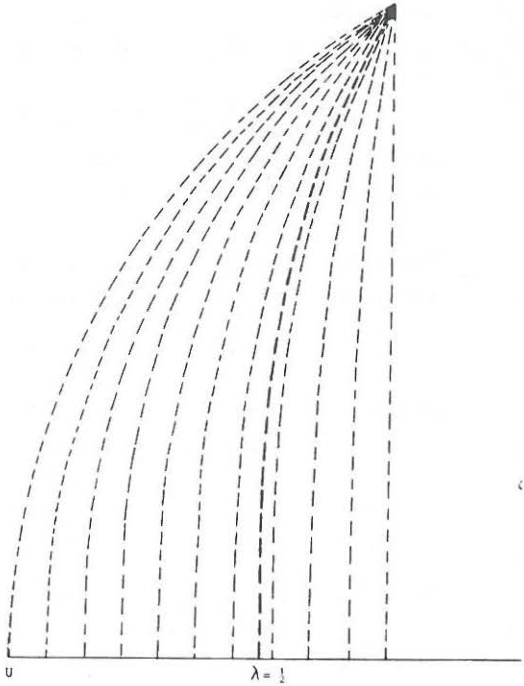


Figure 297

Remarquons que les lieux $\{W_{\lambda,h}\}_h$ sont des courbes algébriques du quatrième degré (cf. LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J.M. (1975), page 303).

A un triangle dont les sommets sont U, V et $W_{\lambda,h}$, nous associons les trois mesures d'angles

$$\widehat{P}_{\lambda,h} = \widehat{UVW}_{\lambda,h} \; ; \; \widehat{M}_{\lambda,h} = \widehat{VUW}_{\lambda,h} \; ; \; \widehat{G}_{\lambda,h} = \widehat{UW_{\lambda,h}V} \; ;$$

Ces trois angles sont opposés respectivement au petit, au moyen et au grand côté de notre triangle.

Pour chaque nombre $0 < \lambda < 1$, la fonction

$h \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \hat{P}_{\lambda,h}$ est une fonction strictement croissante,

la fonction

$h \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \hat{G}_{\lambda,h}$ est une fonction strictement décroissante,

et la fonction

$h \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \hat{M}_{\lambda,h}$ est ou bien une fonction croissante puis décroissante,

ou bien une fonction strictement croissante. Ce résultat peut être obtenu par un simple calcul de dérivées.

Considérons maintenant dans la partie stable associée à λ donné, l'ensemble des triangles $T'_{\lambda,h}$ dont les côtés mesurent respectivement

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} + h \quad , \quad \frac{1}{1+\lambda} + h \quad , \quad 1 + h \quad ; \text{ avec } h \geqslant 0 \; .$$

La hauteur $H_{\lambda,h}$ relative au grand côté de $T'_{\lambda,h}$ est égale à

$$H_{\lambda,h} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{3}{2}h + 1\right)\left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{1+\lambda}\right)\left(\frac{1}{2}h + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\frac{1}{2}h}}{1 + h}$$

Ceci d'après des formules classiques, faisant intervenir le demi-périmètre du triangle, qu'on trouvera par exemple dans le livre de BERGER M. (1977 b) à la page 158.

Les fonction $h \in R_+ \longrightarrow H_{\lambda,h}$ sont encadrées par les deux fonctions suivantes :

$$h \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{(3h+2)h\left(1 - \frac{1}{(1+h)^2}\right)} \quad ,$$

$$\text{et} \quad h \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{(3h+2)h}$$

que nous représentons graphiquement sur la figure 298 ci-après.

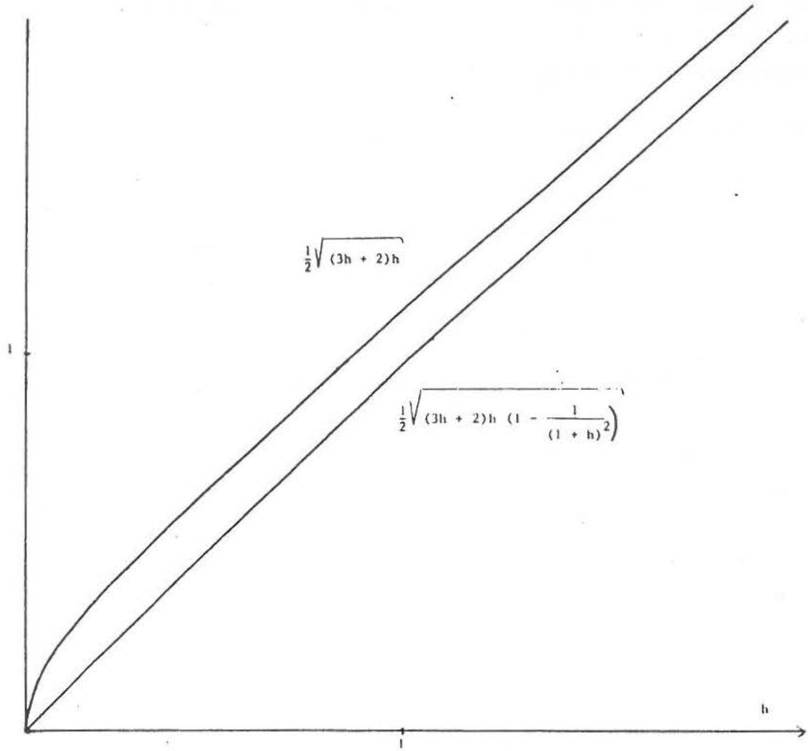


Figure 298

L'étude générale des fonctions $h \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow H_{\lambda,h}$ permet de comparer l'accroissement correspondant à la hauteur $H_{\lambda,h}$, et de voir que pour les triangles dont les formes sont les plus utilisées la différence entre les deux accroissements est très faible.

Nous donnons dans le tableau 299 ci-dessous trois exemples d'accroissement. Sur la figure 300, nous avons tracé les trois couples de triangles correspondant à ces exemples, en prenant comme unité 5 cm.

λ	1	1	1	1	1	1
h	0,3	1,5	0,02	0,05	0,1	0,7
petit côté	0,8	2	0,52	0,55	0,6	1,2
côté moyen	0,8	2	0,52	0,55	0,6	1,2
grand côté	1,3	2,5	1,02	1,05	1,1	1,7
H : hauteur corres. au grand côté	0,46	1,56	0,10	0,163	0,239	0,847
accroissement de h	1,2		0,03		0,600	
accroissement de H	1,10		0,062		0,608	

Tableau 299

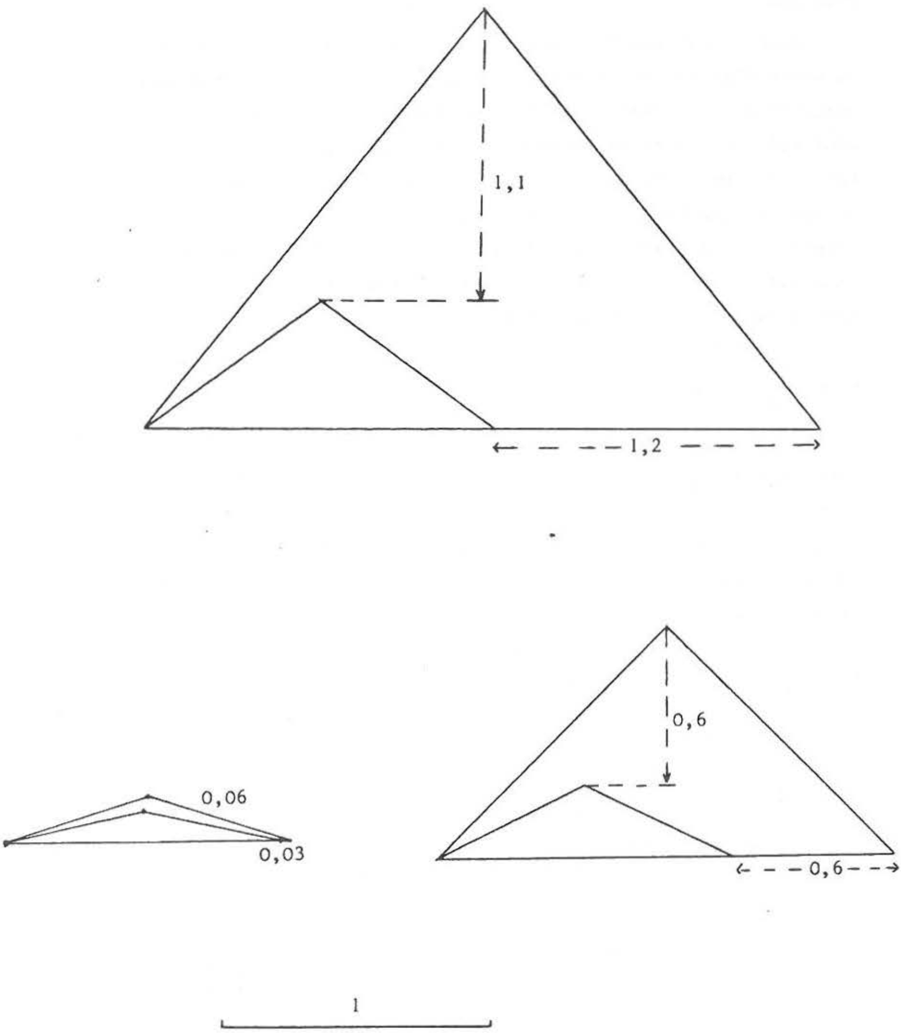


Figure 300

PAGE 183 -1

Dans le tableau 301 présenté à la page suivante, nous indiquons, au moyen d'un rectangle noir, pour chaque élève, les comportements utilisés par cet élève. Les 15 comportements, liés aux proportions, sont pris en compte séparément. Si le comportement n'est pas tout à fait net, nous plaçons un rectangle moitié noir, moitié blanc. Dans ce cas, en général, cela signifie que nous hésitons entre deux comportements. Le cas particulier du protocole 1-16;06-2, dans lequel nous trouvons la pseudo-proportionnalité utilisée pour le rectangle, a été schématisé par un rectangle blanc.

PAGE 185 -1

L'élève de première qui utilise la pseudo-proportionnalité correspond au protocole 1-16;06-2. On ne peut plus attribuer à cet élève l'un des cinq comportements Ps_1, Ps_2, Ps_3, Ps_4, Ps_5. Nous l'avons, toutefois, classé en Ps_1 car on peut reconnaître, chez lui, la conservation des différences des côtés d'un rectangle. En effet, pour construire R'' semblable à R', il calcule la différence entre la longueur L' et la largeur l' de R', puis il ajoute à la largeur l'' de R'' cette différence L'-l' pour obtenir la longueur L'' de R'', selon la formule

$$L'' = l'' + (L'-l') .$$

PAGE 188 -1

On pourrait ajouter, à ces deux élèves, un troisième élève, dont le protocole 4-13;02-1 laisse apparaître, en fin de recherche, un net indice de conservation des proportions.

COMPORTEMENT / PROTOCOLES	D_o	D_1	D_2	D_3	D_4	Ps_1	Ps_2	Ps_3	Ps_4	Ps_5	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
6-10;10															
6-11;02-1															
6-11;02-2	■														
6-11;04			■			■									
6-11;06															
6-11;07	■	■													
6-11;11-1															
6-11;11-2															
6-12;11															
5-11;05															
5-11;06		■							■						
5-12;01		■	■												
5-12;04						■				■					
5-12;06	■	■													
5-12;09-1			■		■							■			
5-12;09-2			■		■				■						
5-12;09-3			■												
5-12;10		■							■						
5-13;00			■		■		■								
5-13;03															
5-13;05															
5-13;08			■	■	■				■						
5-14;01															
4-13;01															
4-13;02-1		■	■	■											
4-13;02-2	◧		■		◧				■						
4-13;03															
4-13;04-1			■			■	◧		◧		■				
4-13;04-2		■	■		■				■						
4-13;06			■	■											
4-13;07		■	■												
4-13;09			■												
4-14;00			■		■										
4-14;01-1							■			■					
4-14;01-2															
4-14;01-3		■													
4-14;02			■									■			
4-14;05			■	■		■	◧		■						
4-14;06		■			■						■				
4-15;08			■				■		■						
3-13;10												■			
3-13;11			■				◧		■						
3-14;00-1		■				◧		◧		■	◧		◧		
3-14;00-2		■	■		■										
3-14;01			■									■			
3-14;03-1						■									
3-14;03-2			■		■	■						■			
3-14;04		■	■												
3-14;08												■			
3-14;10															
3-14;11			■									■			
3-15;00							■					■			
3-15;06		■	■												
2-15;01															
2-15;02														■	
2-15;03															
2-15;06			■									■			
2-15;09												■			
2-15;10													■		
2-16;00-1			■												
2-16;00-2												■		■	
2-16;01															
2-16;02															■
1-16;06-1															
1-16;06-2						□									■
1-16;09															
1-16;10-1															
1-16;10-2		◧	■	■							■	■			
1-16;10-3															
1-16;11															
1-17;00		◧	■	■							■	■			
1-17;09													◧	◧	
0-16;06															
0-16;11												◧		◧	
0-17;05												◧		◧	
0-18;00-1															
0-18;00-2		◧	■								■	◧			
0-18;07-1															
0-18;07-2			■				■				■		■		
0-19;00			■	◧	◧						■				
0-20;01											■	■	■		

Tableau 301

PAGE 188 -2

DUPUIS C. et PLUVINAGE F. (1981) constatent en examinant "la nature des erreurs commises par les élèves interrogés" que "un tableau comme

21	9
16	x

a provoqué fréquemment la réponse x = 4 par traitement additif au lieu de multiplicatif" (page 201).

BROUSSEAU G. (1981), dans la situation des problèmes proposés à des élèves de l'école élémentaire portant l'agrandissement du puzzle (pages 69, 70, 71, 72 et page 56), constate que "presque tous les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 centimètres à toutes les dimensions". Nous sommes en présence de la "prégnance du modèle additif" que nous appelons pseudo-proportion dans notre texte. Les deux séances sur le puzzle où est proposée l'étude des applications linéaires aboutissent . Les calculs permettent enfin le succès dûment constaté par la construction effective. Dans une séance suivante portant sur la mosaïque (cf. pages 57 et 71), "le modèle linéaire est adopté d'emblée mais on aurait tort de supposer qu'il est définitivement installé car, dans une activité ultérieure ...", nous voyons réapparaître les pseudo-proportions. Il semble, pour le moins, que les pseudo-proportions perturbent et de façon peu claire, l'acquisition des applications linéaires. BROUSSEAU G. dit encore, à propos de ce même puzzle, page 56 : "ce que les enfants construisent "empiriquement" est un ensemble de quelques couples et n'a pas de nom".

NOETLING G. (1980a, 1980b) s'intéresse principalement aux stades de développement du concept de rapport. Lors de son étude des stratégies de résolution, il met en évidence les erreurs dues à une confusion entre les opérations additives et multiplicatives. Ce que nous appelons la pseudo-proportionnalité apparaît très nettement chez Christiane 12;3 et Nicole 13;0 pour l'item 21 (cf. pages 241 et 233 pour Christiane et pages 243 et 233 pour Nicole). On peut expliquer de la même manière l'item 12 de Nicole 11;0. C'est au stade IIIA, qui débute vers 12 ans(cf. table 5) que la pseudo-proportion prend toute son importance pour NOETLING G. (cf. page 346) pour disparaître, semble-t-il, au stade IIIB qui débute entre

15 et 16 ans. Ce qui correspond parfaitement à nos résultats sur la place des pseudo-proportions dans l'acquisition de la similitude (cf. tableaux 66 et 68). N'oublions pas, toutefois, que nos classes de second cycle sont qualifiées de "très bonnes" (cf. notre paragraphe X-3).

Selon HART K. (1981) "les recherches des concepts in Secondary Mathematics and Sciences" au Chelsea College de l'University de Londres ont révellé qu'un tiers des 3000 élèves des classes secondaires examinées répondent aux quatre questions les plus difficiles par l'emploi de la "stratégie d'addition". Nos résultats correspondent aux constatations de HART K. Un travail plus poussé sur les contradictions que succitent ces stratégies d'addition, notamment grâce à des manipulations de type géométrique semble-t-il ("he was given a strip of card ...") a été entrepris. A première vue, ce travail pourrait être confronté de façon fructueuse avec notre analyse dialectique (cf. paragraphe XIV 7-d).
PIAGET J. (1947) dans sa remarquable étude sur la similitude avait déjà nettement mis en évidence une conservation des différences pour le rectangle (cf. par exemple, GER (9;8), pages 421 et 422) ou un accroissement égal pour le triangle (cf. par exemple, GUI (10;4), page 395).

PAGE 196 -1

Dans le tableau 302 présenté à la page suivante, nous avons compté toutes les feuilles de nos élèves de 5ème, 4ème, 3ème, Seconde et Terminale, qui présentent un triangle ayant un côté vertical ou horizontal.
A chaque feuille d'élève correspond une case; chaque ligne correspond à un protocole et chaque colonne à un numéro d'ordre de la feuille.
Si, sur une feuille d'élève où se trouve le rectangle donné R, l'élève a tracé ou ébauché un dessin qui propose principalement et nettement un triangle ayant un côté vertical ou horizontal, nous plaçons dans notre tableau à la case correspondante, un petit rectangle noir. Si, dans ce cas, c'est l'horizontale qui intervient, nous plaçons le petit rectangle noir horizontalement; si c'est la verticale, nous plaçons le petit rectangle noir vecticalement. Si, sur une feuille où se trouve le rectangle R, l'élève a tracé ou ébauché un dessin dans lequel tout

FEUILLE N° / PROTOCOLES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6-10;10															
6-11;02-1															
6-11;02-2															
6-11;04															
6-11;06															
6-11;07															
6-11;11-1															
6-11;11-2															
6-12;11															
5-11;05		▬	▬	▬	A	A									
5-11;06	○	○	○	○	▬	▬	○	▬	○	▬					
5-12;01	○	○	○	○	○	○	▬	A							
5-12;04		▬	▬	▬											
5-12;06		▬	▬	○	○										
5-12;09-1		○	C												
5-12;09-2	○	○	○	○	○	○	○	▮	▬						
5-12;09-3		▬	+	▬	▬	▬									
5-12;10		▬	▬	▬											
5-13;00	▬	▬	▮	○	○	○	○	○	▬	○	○	○	○	○	
5-13;03	○	○	○	○	○	○	○								
5-13;05		▮	▬	○	○	○									
5-13;08	○	○	○	○	○	○	○								
5-14;01	○	○	○	○	○	○	○	○	○						
4-13;01		○	▬	▬	○										
4-13;02-1		▬	▬	▬	▬	C									
4-13;02-2	▬	▬	▬	○											
4-13;03	▬	▬	▮	▬	▬	▬	▬	▬							
4-13;04-1	▬	▬	▬	▬	▬	○	○								
4-13;04-2		○	○	○	○										
4-13;06		▬	▬	○	○	C	○								
4-13;07		▮	▮	▮	○	▬									
4-13;09		▬	C												
4-14;00		○	○	○	○										
4-14;01-1		▬	▬	▬											
4-14;01-2		○	▮	▬	▬	▮	▬	▬	○						
4-14;01-3	▬	A	▬	○	A										
4-14;02		▬	○	○	○										
4-14;05	▮	▬	+	▬	○										
4-14;06	○	○	▬	○	○										
4-15;08		▬	▬	▮	▮	▮	▮	▮							
3-13;10		○	○	○	○										
3-13;11		▬	▬	▬	A										
3-14;00-1	○	○	○	○	▮	▬	○	○	○	○					
3-14;00-2		▬	+	▬	○	A									
3-14;01		▬	○												
3-14;03-1	▬	▬	○	▬	▬	▬									
3-14;03-2	▮	▬	▬	▬	○	○	○								
3-14;04		▬	▬	▬	▬										
3-14;08		▬	○	○											
3-14;10					▬	○	○	○	○	▬					
3-14;11	▮	○	○	○	▬	○	○	○							
3-15;00		▮	▬	▬	▬	○									
3-15;06		▬	▬	▬	○										
2-15;01		+	▬	▬	○	▮									
2-15;02	○	○													
2-15;03	▬	○	○												
2-15;06		▬	▬	▬	▬	▮									
2-15;09		○													
2-15;10	▬	▬	○												
2-16;00-1			○	○	▬	○	○	○							
2-16;00-2		○													
2-16;01		▬	○												
2-16;02		○													
1-16;06-1	○	○													
1-16;06-2		▬	▬												
1-16;09	▬	▬	▬	▬	○										
1-16;10-1		○	○												
1-16;10-2			▬	C											
1-16;10-3			○	▬	○										
1-16;11		▬													
1-17;00	▬	▬	▮	○											
1-17;09		○													
0-16;06	⊖														
0-16;11		C	○	○	○										
0-17;05	C	C	▬	○											
0-18;00-1	○														
0-18;00-2			▬	A	▬	▬	○								
0-18;07-1		○	○												
0-18;07-2		▬	○	▬	○	○	○	○	▬						
0-19;00		○	▬	C	○										
0-20;01		○	▮	▮	▬	▬									

Tableau 302

triangle ébauché ou dessiné a ses côtés obliques (c'est-à-dire ni parallèles à la longueur ni parallèles à la largeur de R), nous plaçons dans notre tableau à la case correspondante un petit cercle. Si nous n'arrivons pas à nous déterminer sur l'existence ou non d'un triangle ayant un côté vertical ou horizontal, nous plaçons dans la case correspondante la lettre A qui rappelle que tout choix est ambigü. Si, sur sa feuille, l'élève n'a réalisé que des calculs ou des formules algébriques alors nous plaçons dans la case correspondante la lettre C. Les cases pour lesquelles il n'y a aucune indication, correspondent à des feuilles sur lesquelles se trouvent le triangle T, de telles feuilles sont toujours en tête de liste.
La feuille N° 1 du protocole 0-16;06 comporte à la fois les deux sortes de triangles d'où l'usage du cercle superposé au rectangle noir.
Dans certaines cases, nous trouvons un rectangle noir horizontal superposé à un rectangle noir vertical, pour indiquer que nous avons un ou plusieurs côtés verticaux, et un ou plusieurs côtés horizontaux.

PAGE 198 -1

Les élèves qui proposent comme solution un triangle ayant un côté horizontal, correspondent aux protocoles suivants :

5-12;04	5-12;10			
4-13;01	4-13;02-2	4-13;03	4-13;04-1	4-13;09
	4-14;01-1	4-14;01-2		
2-15;01	2-15;06	2-15;10	2-16;00-1	
1-16;10-2	1-16;11			
0-18;00-2	0-18;07-2:	0,19;00		

PAGE 245 -1

Pour retrouver l'expression "presque sûre" en probabilité, on peut se référer à METIVIER M. (1972), page 57.

Dans le protocole 3-14;00-1 de MAP qui fait partie des protocoles de la partie F, on trouve une C.L.p.s. au cours du processus élémentaire 3.1 , si on introduit des probabilités géométriques de dimension 2.

PAGE 247 -1

Consulter la note qui est présentée de la page 509 à la page 517 et plus particulièrement les résultats de la page 514.

PAGE 274 -1

4 + 20 n'est pas égal à 23. En effet, un des quatre protocoles, le protocole 3-15;00 de MAR, fait aussi partie des 20 précédents.

PAGE 276 -1

Les protocoles pour lesquels la pseudo-proportion apparaît après l'usage du double portent les numéros :

5-11;06 ,	5-12;09-2 ,	5-12;10 ,	5-13;00 ,	5-13;08
4-13;02-2 ,	4-13;04-1 ,	4-13;04-2 ,	4-14;05 ,	4-15;08
3-14;00-1 ,	3-13;11 ,	0-18;07-2 .		

PAGE 276 -2

Les protocoles pour lesquels les pseudo-proportions ne sont pas accompagnées explicitement du verbe "ajouter" portent les numéros :

6-11;04 , 5-12;09-2 , 3-13;11 , 1-16;06-2 .

PAGE 281 -1

On peut se référer à l'étude faite en note de la page 509 à la page 517 et plus particulièrement à l'étude de la hauteur présentée aux pages 514, 515, 516, 517.

PAGE 290 -1

On peut trouver la définition du groupe diédral chez WEYL H. (1964), page 71.

Le problème PEN que nous avons proposé aux élèves prend une forme plus générale si on considère un mouvement de glissement plan sur plan défini par le fait que deux points donnés du plan mobile décrivent respectivement deux droites non parallèles du plan fixe. Cette étude est présentée par DELTHEIL R. et CAIRE D. (1951) sous le titre d'engrenage de la Hire (pages 16 et 17); elle montre qu'un point attaché au plan mobile décrit en général une ellipse. Les conditions particulières dans lesquelles nous nous sommes placés sont la conséquence de nos exigences vis-à-vis du problème posé (cf. introduction, page 59). Nous ne pouvons pas introduire d'ellipse dans nos problèmes. Par contre, nous pouvons présenter à tous nos élèves une solution fondée sur le mouvement de translation rectiligne. N'importe quel élève du secondaire comprend parfaitement lorsqu'on le lui explique, un processus de résolution de ce problème.

PAGE 291 -1

Deux enseignants absents lors des deux premières expérimentations, ont participé à l'expérimentation portant sur le problème PEN.
Michel FAYOL, actuellement professeur à l'Université de Dijon, était alors Maître-Assistant à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc.
Claude FABRE est professeur de Mathématiques au Lycée Mas de Tesse à Montpellier.

PAGE 291 -2

Le numérotage donné page 526 indique l'âge et la classe de chacun des élèves ayant participé à l'expérimentation portant sur le problème PEN.

PAGE 291 -3

Les feuilles semi-transparentes sont en "papier terfane", 64 grs .

PAGE 295 -1

Nous avons numéroté l'ensemble des protocoles de cette troisième expérience de la manière suivante. Chaque élève est désigné par un numéro de 5 chiffres. Le premier chiffre donne la classe et les quatre suivants indiquent l'âge. Pour obtenir une telle numérotation, nous avons dû rajeunir ou vieillir certains élèves d'un ou deux mois.

En définitive, la répartition des protocoles est donnée par le tableau 303 ci-après

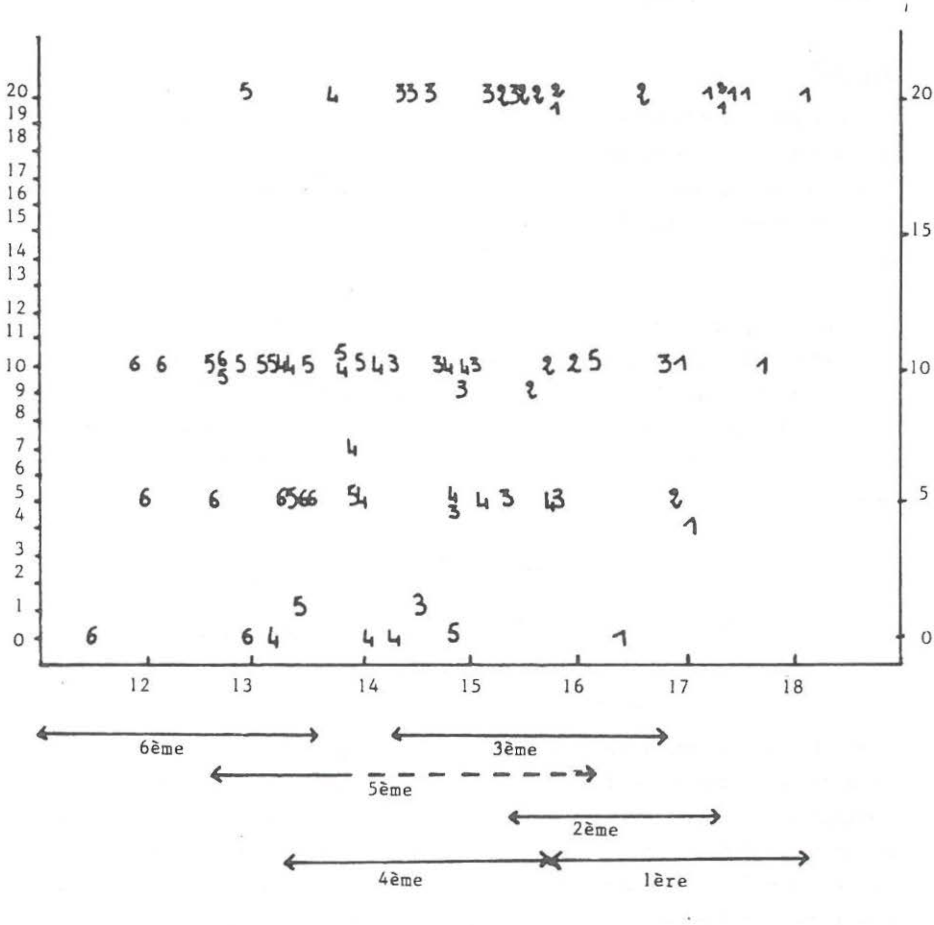
PAGE 295 -2

Dans le tableau 303 ci-après, nous donnons en face du numéro de chaque protocole, la réponse de l'élève.

6-11;06 : 0	4-13;04 : 0	3-14;05 : 10	2-15;06 : 20
6-11;11 : 10	4-13;05 : 10	3-14;06 : 20	2-15;08 : 20
6-12;00 : 5	4-13;06 : 10	3-14;07 : 20	2-15;09 : 9
6-12;02 : 10	4-13;10 : 20	3-14;08 : 1	2-15;10 : 20
6-12;08 : 5	4-13;11 : 10	3-14;09 : 20	2-15;11 : 10
6-12;09 : 10	4-14;00 : 7	3-14;10 : 10	2-16;00 : 20
6-13;00 : 0	4-14;01 : 5	3-15;00 : 5	2-16;02 : 10
6-13;04 : 5	4-14;02 : 0	3-15;01 : 9	2-16;10 : 20
6-13;06 : 5	4-14;03 : 10	3-15;02 : 10	2-17;01 : 5
6-13;07 : 5	4-14;05 : 0	3-15;04 : 20	2-17;07 : 15
5-12;08 : 10	4-14;11 : 10	3-15;06 : 5	1-16;00 : 20
5-12;09 : 10	4-15;00 : 5	3-15;07 : 20	1-16;07 : 0
5-12;11 : 10	4-15;01 : 10	3-16;00 : 5	1-17;02 : 10
5-13;00 : 20	4-15;03 : 5	3-17;00 : 10	1-17;03 : 4
5-13;02 : 10	4-15;04 : 2		1-17;05 : 20
5-13;03 : 10	4-15;11 : 5		1-17;06 : 20
5-13;05 : 5			1-17;07 : 20
5-13;06 : 1			1-17;09 : 20
5-13;07 : 10			1-18;00 : 10
5-13;11 : 10			1-18;04 : 20
5-14;01 : 5			
5-14;03 : 10			
5-15;00 : 0			
5-16;04 : 10			

Tableau 303

On peut représenter ces résultats sur le graphique 304 ci-dessous où l'âge est en abscisse et la réponse donnée par l'élève en ordonnée. Le point correspondant à un élève est représenté au moyen d'un chiffre désignant la classe de l'élève.



Graphique 304

PAGE 296 -1

Le troisième cas d'égalité nous dit qu'étant donné un triangle T dont les côtés ont pour mesure a, b, c alors tout autre triangle dont les côtés ont les mêmes mesures est isométrique (ou égal) à T.

On peut se référer à HILBERT D. (1899), page 28, ou encore à BERGER M. (1977 b), page 157.

PAGE 297 -1

Les difficultés de la coordination entre des questions, proches de problèmes combinatoires, se rapportant à une classification de figures et des questions se rapportant aux propriétés géométriques et aux transformations des figures apparaissent lors des deux problèmes suivants.

Dans le premier problème, la consigne proposée est :
"Vous allez chercher à dessiner tous les développements d'un cube".

C'est ainsi que pour découvrir tous les développements contenant 4 carrés alignés, comme sur la figure 305 ci-dessous, l'élève doit, d'une part, classer de toutes les manières possibles les deux derniers carrés ,

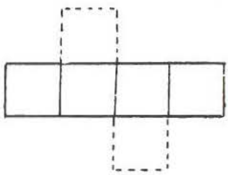


Figure 305

et d'autre part, identifier les figures isométriques. La coordination entre les deux activités s'avère très difficile. Cette coordination est ici d'autant plus difficile pour les élèves qu'en ce qui concerne la géométrie des figures, ils différencient mal les questions liées à l'image mentale du cube associée à son développement, des questions d'isométries associées à la figure plane constituée par ce développement. ROUMIEU C. (1978) a rédigé un compte-rendu de la totalité de cette expérimentation.

Nous avons analysé aussi la recherche, faite par les élèves, d'un deuxième problème présenté au moyen de la consigne suivante :
"Un carré est partagé en huit triangles comme ceci (figure 306),

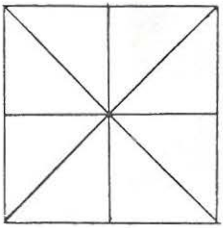


Figure 306

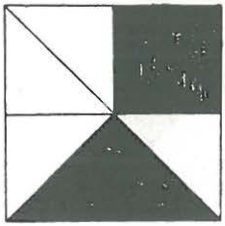


Figure 307

colorie, de la même couleur, quatre de ces triangles, tu obtiens un dessin, par exemple, le dessin de la figure 307.
Trouve le plus possible de dessins différents.
Attention ! Certains dessins seront considérés comme les mêmes, par exemple, les dessins des figures 308 et 309,

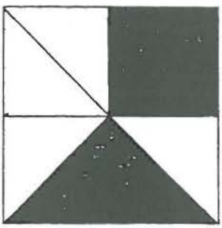


Figure 308

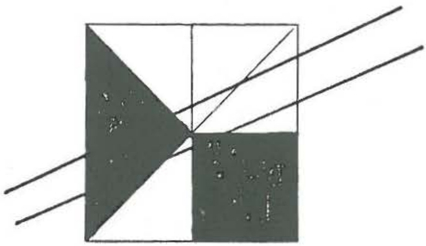


Figure 309

parce qu'en faisant glisser le premier sur le second, sans le retourner, on peut superposer exactement les parties colorées. Si les deux dessins sont les mêmes, tu barres l'un des deux. Mais, il est interdit de retourner les dessins, c'est la règle".

Nous avons constaté la confusion existant dans l'esprit des élèves qui considèrent que la figure 310 est la même que la figure 311.

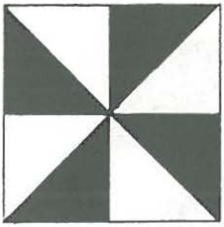


Figure 310

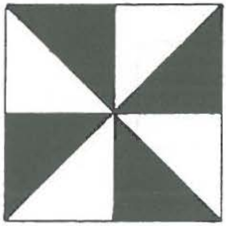


Figure 311

Ils confondent la rotation proprement dite avec la conservation de l'alternance, de type combinatoire, entre les quatre parties colorées et les quatre parties blanches de la figure.

PAGE 302 -1

Ces dix huit élèves correspondent aux protocoles suivants :

6-11;11	;	6-12;02	;	6-12;09	;	6-13;06	;		
5-12;09	;	5-12;11	;	5-13;05	;	5-13;11	;	5-14;01	;
4-14;11	;	3-14;06	;	3-14;08	;	3-15;02	;		
2-16;00	;	2-16;02	;	2-17;07	;	1-16;00	;	1-17;07	

PAGE 302 -2

Nous indiquons dans la liste ci-dessous, entre parenthèses, après le nom de chaque expérimentateur : le nombre de protocole dans lequel il est rendu compte d'un mouvement de translation rectiligne, suivi du nombre d'élèves observés par l'expérimentateur.
AUDIBERT G. (3,8) ; AUGE A. (1,6) ; BELLARD N. (1,6) ;
BRUNET R. (0,6) ; CHAUVET B. (3,8) ; CHEVALIER A. (2,8) ;
CONEJERO M.T. (1,8) ; FABRE C. (2,8) ; FAYOL M. (0,2) ;
GROS C. (1,8) ; LEENHARDT N. (4,8) .

PAGE 302 -3

Au sujet de la translation et du mouvement de translation on peut consulter l'I.R.E.M. de Montpellier (1977).

PAGE 306 -1

Le triangle dessiné T sur papier semi-transparent n'a été donné qu'à quatre de nos dix huit élèves du tableau 179. Ce sont les élèves correspondants aux protocoles : 6-12;02 6-12;09 5-13;11 et 3-14;08. On peut donc dire que seuls ces élèves ont subi une certaine incitation à utiliser le mouvement de translation. Le triangle T sur papier semi-transparent a été donné à 16 de nos 74 élèves. Puisque $\frac{1}{18}$ est peu différent de $\frac{16}{74}$, l'existence de la pratique du mouvement de translation est indépendante de cette incitation.

PAGE 306 -2

Nous relevons un indice de surprise dans les protocoles :
6-11;11 6-12;09 6-13;06 5-12;11 3-14;06 2-16;02

PAGE 306 -3

Ces 17 protocoles portent les numéros suivants :
6-12;00 <u>6-13;04</u> 6-13;06
5-13;00 5-13;02 5-13;06 5-14;03 5-16;04
4-13;11 <u>4-14;03</u> <u>4-14;05</u> 3-14;05 <u>3-14;09</u> 3-15;01
2-16;10 2-17;01 1-17;09
Le triangle T, sur feuille semi-transparente, n'a été donné qu'aux quatre élèves dont les protocoles sont soulignés.

PAGE 310 -1

Ce sont les protocoles 6-13;00 5-13;06 4-13;04 4-14;00 4-14;02 3-14;08 2-15;09 1-16;07.

PAGE 311 -1

Nos élèves se répartissent dans les cinq catégories de la manière suivante :
catégorie 1 : voir la note précédente.
catégorie 2 : 6-12;00 6-12;02 6-13;06 4-14;05 2-16;02 1-17;02 1-17;03

catégorie 3 :	6-11;06	6-11;11	6-13;04	5-12;08	5-12;09	5-12;11
	5-13;03	5-13;05	5-13;07	4-14;03	3-14;10	3-15;00
	3-15;02	3-17;00				
catégorie 4 :	6-12;08	6-12;09	6-13;07	5-14;01	5-15;00	5-16;04
	4-13;11	4-15;01	4-15;03	3-14;05	3-14;09	3-15;04
	1-18;00					
catégorie 5 :	5-13;00	5-13;02	5-13;11	5-14;03	4-13;05	4-13;06
	4-13;10	4-14;01	4-14;11	4-15;00	4-15;04	4-15;11
	3-14;06	3-14;07	3-15;01	3-15;06	3-15;07	3-16;00
	2-15;06	2-15;08	2-15;10	2-15;11	2-16;00	2-16;10
	2-17;01	2-17;07	1-16;00	1-17;05	1-17;06	1-17;07
	1-17;09	1-18;04				

PAGE 321 -1

Ces élèves correspondent aux protocoles :

6-12;08 6-13;04 5-13;03 5-13;07 5-14;01 4-14;05 4-14;11 4-15;01
3-14;05 3-15;04 3-15;07 3-16;00 2-15;06 2-15;08 2-15;09 2-15;11
2-16;02 2-17;07 1-17;02

On peut y rattacher aussi, en adoptant quelques nuances, les protocoles :
5-12;09 5-15;00 4-14;03 4-15;00 1-17;03

PAGE 354 -1

Le tableau 223 est repris ici sous forme détaillée (tableau 312). Nous indiquons pour chaque catégorie ou sous-catégorie le numéro des protocoles.

SYMETRIE TOTALEMENT ABSENTE		
6-12;02 5-12;11 5-15;00	4-15;03 1-17;03 1-18;00	4-15;04 2-15;11 1-17;09
3-14;08 3-15;02 3-14;07	5-12;09 2-15;09 2-16;02 4-14;03 2-15;06 5-13;03 5-13;07 4-13;06 4-15;01 3-14;10 1-17;02 4-13;05 4-13;10 3-15;04 3-15;07 2-15;08 2-17;07	6-11;11 5-12;08 5-13;02 3-15;01 5-13;00 5-13;11 5-16;04 3-17;00 3-14;06 1-17;05 1-17;06 3-14;09 2-15;10 2-16;00 2-16;10 1-17;07 1-18;04
		4-14;11
	1-16;00	

Tableau 312

PAGE 359 -1

Les 11 protocoles qui n'abordent pas la construction du triangle de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm comme un sous problème, sont les protocoles :
5-13;03 4-13;05 4-13;06 4-13;11 4-14;02 4-15;04 3-15;06
2-15;08 1-16;07 1-17;02 1-17;05 .
L'expérimentateur ne demande pas le dessin de T à ces 11 élèves. Certains d'entre eux trouvent la solution (2-15;08 et 1-17;05), d'autres donnent 10 comme réponse (5-13;03 4-13;06 4-13;11 4-13;05 1-17;02).

PAGE 374 -1

On peut se référer à HILBERT D. (1899), page 28 ou à HADAMARD (1901), page 25, ou encore à BERGER M. (1977 b), page 157. Seuls HILBERT D. et HADAMARD utilisent l'expression traditionnelle de "3ème cas".

PAGE 375 -1

Ces cinq protocoles sont :

5-12;08 (RAU) 2-15;10 2-16;02 1-17;06 et 1-18;04 (BAR).

PAGE 377 -1

Ces 12 protocoles sont :

6-11;06 / 5-13;11 / 5-14;03 / 4-13;04 / 4-13;05 / 4-15;01 / 4-15;04 / 3-14;10 / 3-15;06 / 2-15;06 / 2-16;10 / 2-17;01 .

PAGE 379 -1

Le tableau 313, ci-dessous, donne une classification détaillée des différentes procédures. Les numéros des protocoles correspondants sont cités.

1ère colonne : tâtonnement uniquement et de façon nette (cf. paragraphe XVIII-2)

2ème colonne : tâtonnement uniquement et de façon moins nette (cf. paragraphe XVIII-2)

3ème colonne : tâtonnement et deux double-décimètres ou 1 double-décimètre, 1 compas (cf. paragraphe XVIII-3b)

4ème colonne : 1 compas et 1 double-décimètre (cf. paragraphe XVIII-3b)

5ème colonne : Au compas (cf. paragraphe XVIII-3a)

6ème colonne : difficile de se prononcer

7ème colonne : le sous-problème de la construction du triangle n'est pas abordé (cf. paragraphe XVIII-1).

Seuls les protocoles 5-13;07 et 2-16;00 ne répondent pas strictement à la classification qui a été choisie pour eux.

Tâtonnement net	Tâtonnement moins net	Tâtonnement et instruments	Instruments seuls	Compas	?	$\bar{T}$
6-11;06 6-12;09	6-12;02 6-13;04 6-13;06	6-11;11 6-12;08	6-12;00	6-13;00	6-13;07	
	5-12;11	5-12;02		5-12;08 5-12;09 5-13;05 5-13;06 5-13;07 5-13;11 5-14;01 5-14;03 5-15;00 5-16;04	5-13;00	5-13;03
4-13;04 4-14;00 4-14;01 4-14;03 4-14;05 4-15;00 4-15;01				4-13;10 4-14;11 4-15;11	4-15;03	4-13;05 4-13;06 4-13;11 4-14;02 4-15;04
3-14;08 3-15;01 3-16;00	3-15;07 3-17;00		3-15;02 3-15;04	3-14;05 3-14;06 3-14;07 3-14;09 3-14;10 3-15;00		3-15;06
2-15;09 2-17;07	2-15;11 2-16;00 2-17;01	2-16;02		2-15;10 2-16;10	2-15;06	2-15;08
1-17;07 1-17;09 1-18;04	1-16;00 1-17;03			1-17;06 1-17;08		1-16;07 1-17;02 1-17;05

Tableau 313

PAGE 390 -1

La méthode utilisée par TOF, fondée sur des LLC successives, donne un triangle solution avec une approximation inférieure au millimètre, si on la renouvelle 5 fois, comme le montre la figure 314 ci-dessous.

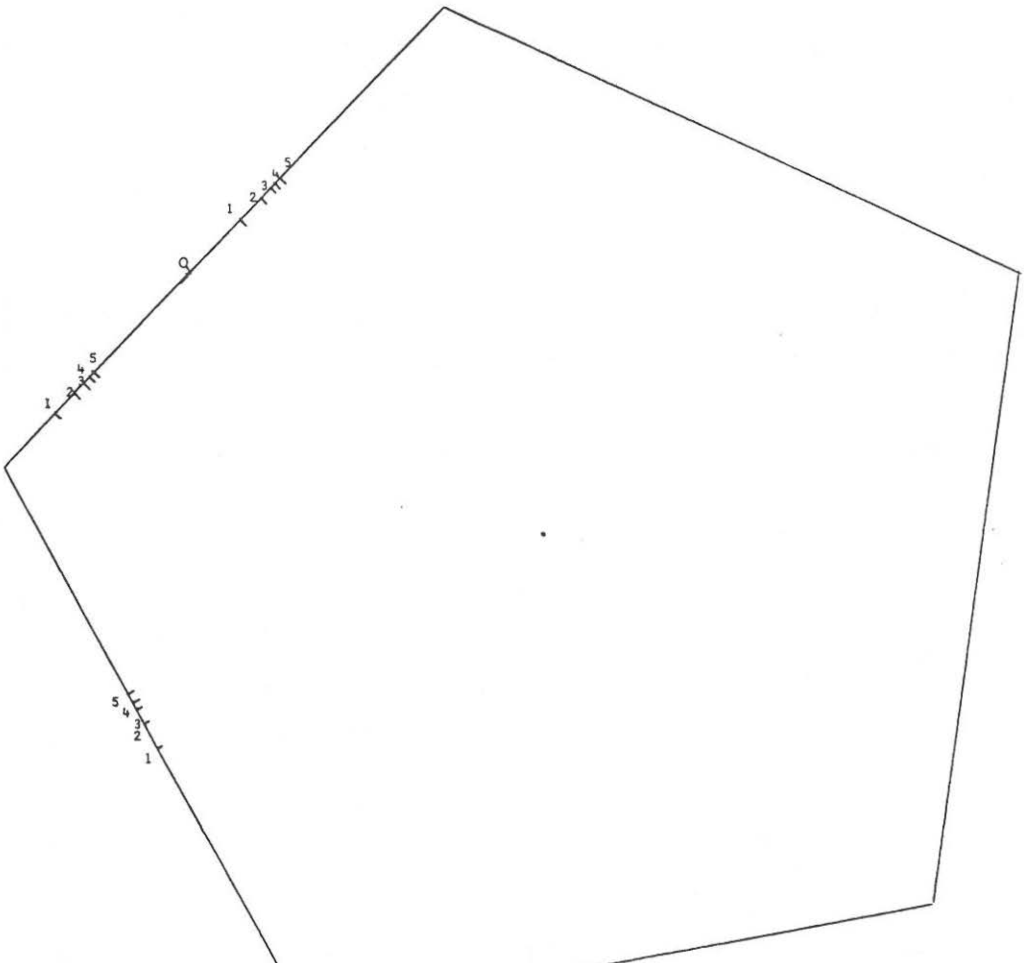


Figure 314

Il y a donc un cheminement de pensée allant assez facilement des C.O. ou des L.L.C., aux méthodes d'approximations successives.

Le même phénomène mathématique apparaît avec la construction du triangle.

Nous avons en effet, le théorème suivant :

Soient a, b, c les dimensions d'un triangle, soit AB un segment tel que $AB = c$.

Soit un point C_1 pris au hasard à une distance de A telle que $AC_1 = b$.

Soit C_2 tel que C_2 appartienne à la demi-droite BC_1 et $C_2B = a$.

Puis C_3 tel que C_3 appartienne à la demi-droite AC_2 et $C_3A = b$

Puis C_4 tel que C_4 appartienne à la demi-droite BC_3 et $C_4B = a$ etc ...

(cf. figure 315)

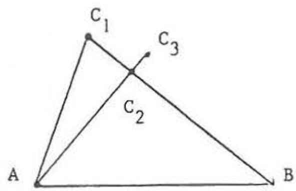


Figure 315

Alors la suite des points $\{C_n\}$ converge vers le troisième sommet du triangle ABC tel que $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Ce théorème est le "théorème en acte" de ATH (3-14;08) dont le travail est relaté à la page 359.

PAGE 393 -1

La croissance se déduit de la relation $MP = 61 + 60 \cos\alpha$, avec un angle α qui décroît de 72° à 0°.

PAGE 417 -1

Les élèves admettent la proposition A correspondant aux protocoles :

6-12;02	6-12;09	5-13;00	5-13;02	5-14;01	5-14;03	
4-13;05	4-13;10	4-13;11	3-14;05	3-14;06	3-14;07	
3-14;09	3-15;04	3-15;07	2-15;06	2-15;08	2-15;10	
2-15;11	2-16;00	2-16;02	2-16;10	2-17;07		
1-16;00	1-17;05	1-17;06	1-17;07	1-17;09	1-18;00	1-18;04

Les numéros soulignés dans la liste précédente correspondent aux élèves admettant la proposition B. Les trois élèves admettent la proposition C correspondant aux protocoles : 1-16;07 1-17;09 1-18;04.
Seul le protocole 1-16;07 ne respecte pas notre hiérarchie, puisque, dans ce protocole, C apparaît sans que A et B y soient explicités. Cet élève commence sa recherche par un quart d'heure de raisonnements déductifs qui lui donnent, entre autre, C. Puis, il essaie de trouver un triangle solution, mais il a échoué dans sa construction pratique. On peut estimer que l'insuffisance du développement pratique de sa recherche qui lui a interdit l'accès à A et B. L'attitude de cet élève ne fait que renforcer nos hypothèses.

PAGE 423 -1

Si nous discutons les résultats que nous avons obtenus concernant la notion de preuve à la lumière des travaux de BALACHEFF N. (1980, 1981), nous devons tout d'abord constater que la compréhension des activités de preuve n'est pas notre principal objectif comme c'est le cas pour BALACHEFF N. De plus, comme nous n'observons pas le travail d'un groupe d'élèves, nous ne distinguons pas l'explication et la preuve (cf. notre chapitre VII, page 75). Nous avons fixé notre choix sur des problèmes de maximum parce qu'ils développement une grande activité de la part de l'élève. BALACHEFF N. (1980) constate que la tâche "trouver tous les rectangles dans la figure" se transforme en "trouver le plus possible de rectangles dans la figure", nous faisons une constatation analogue avec notre problème PEN. Nous devons alors nous demander si l'attrait exercé sur les élèves par les problèmes de maximum est général.

Les élèves de BALACHEFF N. (1981) évoluent vers "l'énonciation d'une procédure d'énumération". Dans nos expériences, la preuve apparaît comme un résumé du processus de découverte de la solution. Ces deux faits paraissent assez convergents.

PAGE 449 -1

Nous ne résistons pas à l'envie de donner deux exemples illustrant notre dernier propos, tirés du chapitre XII de PIAGET J. et INHELDER B. (1947).
Nous avons retrouvé de façon très claire avec CAT, dont le protocole 5-13;00 se trouve dans la partie F de notre texte, le conflit entre conservation des pentes et mesure des côtés qui est déjà annoncé par PIAGET J. et INHELDER B. lorsqu'ils parlent à l'occasion de la découverte de l'égalité des angles de "la longueur des côtés qui trompe sans cesse les petits" (page 379).
Nous avons déjà en puissance toute l'analyse dialectique de notre chapitre XIV-7 dans la phrase suivante (page 396) : "Dans le cas des autres rapports, il y a contradiction entre l'idée d'ajouter des parties égales de chaque côté (ou même d'ajouter un peu plus du côté le plus court par compensation comme chez GUI) et l'observation du parallélisme des bases, qui demeure toujours le seul critère fixe à ce niveau".

PAGE 450 -1

Dans le problème PEN, intervient la conservation des mesures de longueur et d'angles. Dans le problème SIM, intervient la conservation des angles. La conservation des proportions apparaît, dans ce même problème, sous deux formes. C'est la conservation d'un rapport qui intervient chez nos élèves les plus âgés (cf. paragraphe XII-6d). Chez nos élèves les plus jeunes, la conservation est en fait la conservation d'une procédure. Cette procédure consiste à multiplier la mesure d'un côté du triangle par un nombre k et cette procédure est répétée pour chaque côté, elle est donc bien conservée.

- PAGE 460 -1

Les six contraintes d'équilibre , dont les quatre premières correspondent à des positions d'équilibre, sont présentées dans les paragraphes suivants :

Paragraphes VIII 1-2-3-4 pour la "figure symétrique" ,
Paragraphes XIII 7 et 8 pour la "conservation des pentes" ,
Paragraphes XIII 1-2-3-4-5 pour l'"horizontale et la verticale" ,
Paragraphe XIX-1 pour le "triangle dans l'angle du pentagone" ,
Paragraphe XIX-2 pour le "non-chevauchement des figures" ,
Paragraphe VIII-5 et Paragraphe XIX-2 pour les "éléments remarquables" .

Les chapitres qui se rapportent à ces questions sont les chapitres VIII, XIII et XIX.

PAGE 460 -2

Ajoutons que ces contraintes d'équilibre prennent certainement naissance très tôt dans la pensée de l'enfant. C'est ainsi que MAURY S. (1981 c) est obligée d'en tenir compte dans ses expériences pédagogiques à l'école élémentaire (cf. entre autre, page 28).

PAGE 463 -1

LEONARD F. (1979 a) définit son phénomène de clôture par trois caractéristiques :

1/ Arrêt

2/ A un état d'équilibre partiel

3/ Par suite de la présence d'une organisation cognitive extérieure au processus et particulièrement stable elle-même.

Nous retrouvons très nettement avec la position d'équilibre l'arrêt, que nous appelons blocage momentané ou définitif. La présence d'une organisation cognitive correspond, chez nous, à cette contrainte que veut respecter l'élève, à cette problématique qui lui est propre. Le fait qu'elle soit extérieure au processus correspond au fait que cette contrainte n'est pas impliquée par l'énoncé. Mais nous préférons nuancer cette assertion car, d'une part, cette implication est nettement du domaine de la logique de l'expérimentateur et, d'autre part, cette contrainte est liée aux notions en formation chez l'enfant et ces notions sont fortement corrélées au problème. Une dernière question reste en suspens : est-ce que l'arrêt du processus sur lequel insiste LEONARD F. (1979, 1979 a, 1979 b) est spécifique aux adultes ? Nous n'avons pas, en effet, constaté chez nos élèves de blocages définitifs et généralisés. Les chapitres VIII-4, XIII-3et4, XIX et, en particulier, les tableaux 29, 78, 79, 248, 249, 258, 260, le montrent clairement.

PAGE 464 -1

Cette affirmation se trouve dans PIAGET J. (1974 b), à la page 166.

PAGE 466 -1

Les deux phrases de PIAGET J. (1974 b) précédemment citées se trouvent respectivement aux pages 158 et 159.

PAGE 469 -1

Nous avons d'ailleurs remarqué que cette prise de conscience peut intervenir à des niveaux différents. Elle intervient au niveau de l'organisation consciente de la pratique. C'est ainsi que l'élève peut pratiquer le retournement sans s'en rendre compte (cf. paragraphe XVII-2, page 310). Puis, elle intervient au niveau de la conceptualisation. C'est ainsi que manifestement CLA (protocole 4-14;11) ne se rend pas compte que retournement et symétrie-technique correspondent au même concept de symétrie, dont il ne prend pas conscience (cf. paragraphe XVII-4a).

PAGE 475 -1

Nous n'avons pas présenté, faute de temps, l'analyse de trois sujets associés à nos problèmes.

Le premier concerne les intersections de cercles, de cercle et de droite, et la tangente à un cercle; il se rapporte au problème CRI.
Le deuxième concerne l'orientation; il peut être traité grâce aux problèmes SIM et PEN.
Le troisième associé au problème PEN, concerne la coordination de la symétrie, de la rotation et de la classification des triangles solution T en fonction du côté de T porté par un côté du pentagone.

PAGE 476 -1

Voici un texte rédigé à l'issue d'uneréunion de synthèse, au cours de laquelle les membres du groupe ont essayé d'analyser le bénéfice qu'ils ont retiré de leur travail de recherche à l'I.R.E.M. de Montpellier.

L'observation individuelle des élèves dans une situation de recherche de problème de géométrie nous a permis de mieux connaître, entre autres :

- le vocabulaire utilisé, souvent différent du vocabulaire enseigné;
- les concepts, tantôt maîtrisés et devenus outils de recherche, tantôt étudiés mais non utilisés,
- les processus de recherche mis en oeuvre, souvent caractérisés par
  . le recours à l'expérimentation (dessins, mesures, ...),
  . la prise en compte progressive des éléments de l'hypothèse,
  . un cheminement par des corrections locales successives, compensation, réductions de contradictions, ...
- les blocages survenant en cours de recherche sur
  . des situations équilibrées,
  . des formes particulièrement prégnantes ...

blocages qui peuvent être surmontés par l'élève sans intervention extérieure dans certaines conditions (temps, attention portée ...),

- la place et le rôle très réduits des démonstrations formelles,
- les variations et les constantes dans les démarches selon les âges et les classes,
- les ressources parfois surprenantes de certains élèves.

Cette connaissance nouvelle des élèves et notre travail en équipe se sont traduits en classe par :

- la recherche d'un langage toujours mieux adapté,
- une méfiance à l'égard des concepts supposés connus, intuitifs, immédiats, ...
- le soin apporté au choix des exercices, à la présentation d'énoncés formulés de façon claire et ayant une solution non ambigüe,
- le souci de placer les enfants dans les conditions qui rendent possible une recherche effective :
  . temps de recherche suffisant,
  . liberté dans la méthode,
  . droit au tâtonnement,
  . droit à l'erreur.
- une utilisation plus consciente et plus mesurée de nos interventions au cours d'une recherche,
- un jugement plus nuancé et plus prudent de la "valeur" des élèves.

Le travail dans ce groupe pendant plusieurs années, qui a marqué profondement notre enseignement, est difficilement communicable, mais le rôle important qu'il a joué dans notre propre formation, nous amène à souhaiter que chaque enseignant ait la possibilité de vivre une telle expérience.

- CHAPITRE XXV -

BIBLIOGRAPHIE

ACADEMIE DES SCIENCES 1978 - Programmes de 4ème et 3ème - Texte de l'Académie des Sciences - *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* N° 313 - Avril 1978, pages 398 à 405

A.P.M.E.P. 1972 - L'association des Professeurs de Mathématiques lance un cri d'alarme - *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* N° 286 - Décembre 1972, pages 1053 à 1054

A.P.M.E.P. 1981 a - Journées APMEP - *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* N° 328 - Avril 1981, pages 339 à 348

A.P.M.E.P. 1981 b - Journées APMEP - *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* N° 329 - Juin 1981, pages 499 à 502

A.P.M.E.P. 1981 c - Second cycle, classe de première scientifique, programme de mathématiques - Commentaires du programme de première scientifique - *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* N° 331 - Décembre 1981, pages 881 à 892.

A.P.M.E.P. 1982 - Journées Nationales de l'APMEP : journées d'AMIENS 1981 , *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* N° 332 - Février 1982, pages 81 à 118.

ARTIN E. 1957 - *Géométrie Algebra* NEW-YORK - Interscience Publishers - traduction française : *Algèbre géométrique* - PARIS, GAUTHIER-VILLARS 1962

AUDIBERT G. 1970 - Abus de langage - *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* N° 275-276, pages 426 à 429

AUDIBERT G., BANTEGNIE A., BERTRAND N., GELY B., HIGOUNET L., JANVIER M., et et VACHE Y. 1975 - *Heuristique*, publication IREM - USTL, place E. Bataillon 34060 MONTPELLIER

AUDIBERT G. 1977 - *Une leçon du CAPES de mathématiques : classification des isométries du plan affine euclidien* - publication IREM - USTL, place E. Bataillon - MONTPELLIER

AUDIBERT G. 1978 - Travail en équipe de professeurs de différentes disciplines scientifiques et techniques - *Actes de la XXXème rencontre de la C.I.E.A.E.M.* - Institut des Sciences de l'Education et Faculté des Sciences de l'Université de SANTIAGO de COMPOSTELA - Espagne

AUDIBERT G. 1980 - *Processus de recherche de problèmes de géométrie chez l'élève de l'enseignement secondaire* - IREM - USTL, place E. Bataillon - MONTPELLIER

AUDIBERT G. 1981 - Processus de recherche d'un problème portant sur la similitude chez l'élève de l'enseignement secondaire (Analyse de deux protocoles). *Séminaires de Recherche Pédagogique en Mathématiques N° 19. Laboratoire* IMAG BP 53X - 38041 GRENOBLE CEDEX - France, pages 1 à 24

BALACHEFF N. 1979 - Quelques aspects du sens donné à l'explication en mathématiques par des élèves de 10-11 ans - *Séminaire de recherche pédagogique en Mathématiques N° 7. Laboratoire* IMAG - BP 53X - 38041 GRENOBLE CEDEX - France

BALACHEFF N. 1980 - *Elaboration d'explications par des élèves de 6ème à propos d'un problème combinatoire. Rapport de recherche N° 224 - Laboratoire* IMAG - BP 53X - 38041 GRENOBLE CEDEX - France

BALACHEFF N. 1981 - *Etude de l'élaboration d'explications par des élèves de 3ème à propos d'un problème combinatoire. Rapport de recherche N° 224. Laboratoire* IMAG - BP53X - GRENOBLE CEDEX France

BERGER M. 1977 a - *Géométrie 1/ action de groupes, espaces affines et projectifs* - CEDIC/FERNAND NATHAN - PARIS

BERGER M. 1977 b - *Géométrie 2/ Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères* - CEDIC/FERNAND NATHAN - PARIS

BERGER M. 1977 c - *Géométrie 5/ La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères* - CEDIC/FERNAND NATHAN - PARIS

BERGER M. 1978 a - *Géométrie 3/ Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes* - CEDIC/FERNAND NATHAN - PARIS

BERGER M. 1978 b - *Géométrie 4/ Formes quadratiques, quadratiques et coniques* CEDIC/FERNAND NATHAN - PARIS

BERTE A. 1980 - *Observation dans les classes.* Thèse de 3ème cycle de Didactique de l'Université de Paris VII soutenue à NIAMEY (Niger), publiée par l'IREM de NIAMEY

BESSOT A., RICHARD F. 1980 - Une étude sur le fonctionnement du schéma arbre par la commande de variables de situations. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 1.3, pages 387 à 422

BLANC-GARIN J. 1974 - Recherches récentes sur les images mentales : leur rôle dans les processus de traitement perceptif et cognitif - *Année Psychologique* 74, pages 533 à 564

B.O.E.N. 1968 a - Arrêté du 29/07/68 : Programme de mathématiques du cycle d'observation - *B.O.E.N.* N° 38 du 31/10/68, pages 2875 à 2878.

B.O.E.N. 1968 b - Arrêté du 28/02/69 : Instructions relatives au programme de mathématiques du cycle d'observation (Arrêté du 29/07/68) *B.O.E.N.* N° 10 du 06/03/69, pages 935 à 948.

B.O.E.N. 1969 - Arrêté du 3 Juillet 1969 : Modification de l'arrêté du 26 Juillet 1968 relatif aux programmes de mathématiques des classes de Seconde A, C et T et terminale A (option 1, 2 et 5) - *B.O.E.N.* N° 30 du 24 Juillet 1969, pages 2560 à 2566.

B.O.E.N. 1970 a - Arrêté du 19 Mars 1970. Horaires et programmes de mathématiques de la classe de première du second cycle long conduisant au baccalauréat - *B.O.E.N.* N° 17 du 23 Juillet 1970, pages 1401 à 1414.

B.O.E.N. 1970 b - Arrêté du 27 Juillet 1970 : Programme de technologie de la classe de troisième - *B.O.E.N.* N° 31 du 30 Juillet 1970, pages 2292 à 2294.

B.O.E.N. 1971 a - Arrêté du 22 Juillet 1971 : Programmes de mathématiques pour les classes de quatrième et troisième - *B.O.E.N.* N° 30 du 29 Juillet 1971, pages 1872 à 1878.

B.O.E.N. 1971 b - Arrêté du 22 Novembre 1971 : Commentaires pour les programmes de mathématiques de quatrième et troisième - *B.O.E.N.* N° 45 du 2 Décembre 1971, pages 2868 à 2917.

B.O.E.N. 1971 c - Arrêté du 14 Mai 1971 : Programme de mathématiques pour les classes de terminales A B C D E - *B.O.E.N.* N° 25 du 24 Juin 1971, pages 1588 à 1616.

B.O.E.N. 1971 d - Arrêté du 26 Juillet 1971 : Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de terminales A B C D E - *B.O.E.N.* N° 30 du 29 Juillet 1971, pages 1879 à 1932.

B.O.E.N. 1971 e - Instructions N° 71-17 du 14 Janvier 1971 : Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de première (arrêté du 19 Mars 1970) - *B.O.E.N.* N° 4 du 28 Janvier 1971, pages 258 à 294.

B.O.E.N. 1973 - Circulaire N° 73-087 du 19 Février 1973 : Circulaire relative à l'enseignement des mathématiques dans les classes de quatrième et troisième - *B.O.E.N.* N° 8 du 22 Février 1973, pages 625 à 634.

B.O.E.N. 1977 a - Arrêté du 17 Mars 1977 : Programmes de mathématiques des classes de sixième et cinquième des collèges - *B.O.E.N.* N° 22 bis du 9 Juin 1977, pages 764 à 765.

B.O.E.N. 1977 b - Circulaire N° 77-157 du 29 Avril 1977 : Enseignement des mathématiques dans les collèges - *B.O.E.N.* N° 22 bis du 9 Juin 1977, pages 1568 à 1573.

B.O.E.N. 1978 - Arrêté du 16 Novembre 1978 : Programme de mathématiques des classes de quatrième et de troisième des collèges - *B.O.E.N.* N° spécial 1 du 14 Décembre 1978, pages 75 à 78.

B.O.E.N. 1981 - Décret du 26 Janvier 1981 : Programme de mathématiques de la classe de seconde - *B.O.E.N.* N°1 spécial du 5 Mars 1981, pages 59 à 68.

BOURBAKI N. 1958 - *Algèbre, chapitre 1, structures algébriques*, Paris, HERMANN

BOUVIER A. 1981 - *Peut-on enseigner les mathématiques ?* Publication: IREM de LYON

BROUSSEAU G. 1981 - Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques* - Vol. 2.1, pages 37 à 128.

Bulletin INTER-IREM 1975 - Compte-rendu du colloque organisé par l'IREM de STRASBOURG à ALBE sur l'heuristique - *Bulletin Inter-IREM* - N° spécial, Mars 1975, édité par l'IREM de LYON.

CARON PARGUE J. 1979 - *Etude sur les représentations du cube chez des enfants de 3 à 11 ans. La représentation et le codage des propriétés spatiales* - Thèse de 3ème cycle, Université de PARIS V.

CARON-PARGUE J. 1981 - Quelques aspects de la manipulation - Manipulation matérielle et manipulation symbolique - *Recherches en didactique des mathématiques* - Vol. 2.1, pages 5 à 35.

CIOSEK M. 1976 - On strategies for solving mathematical problems. *Compte-rendus de la XXVIIIème rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M.* Responsables de l'édition : Willy et Jacqueline VANHAMME, rue Firmin Martin 2-B-1160 BRUXELLES/Belgique

COMITI C., BESSOT A., PARISELLE C. 1980 - Analyse des comportements d'élèves du cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipollent à un ensemble donné. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 1.2, pages 171 à 224

DELTHEIL R., CAIRE D. 1950 - *Géométrie (transformations coniques) classe de mathématiques* J.B. Baillière et Fils Editeurs - Paris

DELTHEIL R., CAIRE D. 1951 - *Compléments de géométrie, classes de préparation aux grandes écoles, concours de l'enseignement* - J.B. Baillière et Fils éditeurs - PARIS

DENIS M. 1979 - *Les images mentales* - PUF, Paris

DIEUDONNE J. 1964 - *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* - Paris, Hermann, 3ème édition 1976

DOUADY R. 1980 - Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire, enfants de 6 à 11 ans. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 1.1, pages 77 à 111

DUPUIS C., PLUVINAGE F. 1980 - *La proportionnalité et son utilisation*, édité par l'Institut de Recherche Mathématique avancée - Université Louis Pasteur 10, rue Général Zimmer, 67084 STRASBOURG CEDEX .

DUPUIS C., PLUVINAGE F. 1981 - La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en didactique des mathématiques* 2.2, pages 165 à 212

EQUIPE O.P.C. et son animateur national PEROL C. 1979 - *Recherche Inter-IREM 1973-78 en géométrie de 4ème, 3ème dite "OPC" réflexion, critique, et évaluation* - N° 34 Paris A.P.M.E.P.

FAYOL M. 1981 - *La résolution de problème* - manuscrit

FAYOL M., MAURY S. 1981 a - *Etude expérimentale d'un jeu de stratégie. Evolution chez l'enfant du cycle élémentaire (CP- CE2- CM2)*. Publication de l'IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

FAYOL M., MAURY S. 1981 b - *Résolution de problèmes de combinatoire chez des enfants du cycle élémentaire (CM1 et CM2). Influence de "l'habillage" et du travail en groupe*. Publication de l'IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

FRENKEL J. 1973 - *Géométrie pour l'élève-professeur* - Paris, Hermann

GARCIA R. 1980 - Dialectique, psychogénèse et histoire des sciences. Dans PIAGET J. *Les formes élémentaires de la dialectique*, Paris, Gallimard, pages 229 à 449

GLEASER G. 1976 a - *Heuristique générale* - DEA de Didactique - Strasbourg - Université Louis Pasteur

GLEASER G. 1976 b - *Cours de 3ème cycle de didactique* - Strasbourg - Université Louis Pasteur

GRAS R. 1979 - *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques* - Doctorat es-Sciences soutenu le 3 Octobre 1979 à l'Université de RENNES

GRECO P. 1964 - I V H R Etude génétique d'un système de représentations imagées concernant un groupe de transformations spatiales. Dans VINH BANG, GRECO P., GRIZE J.B., HATWELL Y., PIAGET J., SEAGRIM G.N., VURPILLOT E. *Epistémologie de l'espace* - Paris - PUF, pages 203 à 255

GRIZE J.B. 1964 - Remarques sur la structure de la géométrie élémentaire dans VINH BANG, GRECO P., GRIZE J.B., HATWELL Y., PIAGET J., SEAGRIM G.N., VURPILLOT E. *Epistémologie de l'espace* - PARIS, PUF, pages 41 à 92

GRIZE J.B. 1967 - Logique. Dans Encyclopédie de la Pléïade sous la direction de J. PIAGET - *logique et connaissance scientifique* - Gallimard, Paris

GUILLAUME P. 1947 - *La psychologie de la forme* - Paris, Flammarion - Nouvelle édition 1979

GUILLERAULT M., LABORDE C. 1980 - Une activité de communication en géométrie. *Séminaire de recherche pédagogique en mathématique N° 17 - Laboratoire IMAG* BP 53X, 38041 GRENOBLE CEDEX

GUILLERAULT M., LABORDE C. 1981 - Une situation de communication en géométrie. *Actes du 5ème colloque du groupe international PME* - Vol. 1, laboratoire IMAG, BP 53X, 38041 GRENOBLE CEDEX, France, pages 290 à 295

HADAMARD J. 1898 - *Leçons de géométrie élémentaire, géométrie plane* - Armand COLIN, PARIS . 9ème édition 1925.

HADAMARD J. 1901 - *Leçons de géométrie élémentaire, géométrie dans l'espace* - Armand COLIN - PARIS . 8ème édition 1949.

HALBWACHS F. 1971 - Causalité linéaire et causalité circulaire. Dans BUNGE M., HALBWACHS F., KUHN TH.S., PIAGET J., ROSENFELS L. *Les théories de la causalité* - PUF, Paris, pages 39 à 111

HART K. 1981 - Strategies and enors in secondary mathematics. The addition stratigy in ratio. *Actes du 5ème colloque du groupe international P.M.E., vol. 1.* Laboratoire IMAG, BP 53X, 38041 GRENOBLE CEDEX, France, pages 199 à 202

HATWELL Y. 1964 - Rôles des éléments figuratifs dans le genése des opérations spatiales. Dans VINH BANG et Coll. *l'épistémologie de l'espace*, Paris, PUF, pages 173 à 201

HILBERT D. 1899 - *Grundlagen der geometrie* - traduction française. *Les fondements de la géométrie*, Paris, DUNOD 1971

HILBERT D., COHN-VOSSENT 1952 - *Geometry and the imagination* - Chelsea Publishing Company - NEW YORK

INHELDER B., SINCLAIR H., BOVET M. 1974 - *Apprentissage et structures de la connaissance* - Paris, PUF

IREM de CLERMONT-FERRAND 1981 - *Journées sur l'enseignement de la géométrie de l'espace* - Publication IREM de clermont-Ferrand, BP 45, 63170 AUBIERE

IREM de MONTPELLIER 1973 a - *Trigonométrie (BEP 1ère année)* 1973-74 - Publication IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

IREM de MONTPELLIER 1973 b - *Angles (classe de 3ème)* 1973-74 - Publication IREM USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

IREM de MONTPELLIER 1976 - *Angles et trigonométrie -1ère ABCDE* - Publication IREM USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

IREM de MONTPELLIER 1977 - *Translation et mouvement de translation : Ka* Publication IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

IREM de MONTPELLIER 1979 - *Géométrie en quatrième* - Publication IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

IREM de MONTPELLIER 1980 - *Classe de troisième, cahiers de mathématiques - les angles* - Publication IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

IREM de MONTPELLIER 1981 - *Géométrie seconde* - Publication IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

IREM de STRASBOURG 1973 a - *Le livre du problème, fascicule 1 - Pédagogie de l'exercice et du problème* - Paris, Lyon, CEDIC

IREM de STRASBOURG 1973 b - *Le livre du problème, fascicule 2 - Exercices élémentaires de géométrie affine* - Paris, Lyon - CEDIC

IREM de STRASBOURG 1973 c - *Le livre du problème, fascicule 3 - A propos d'un thème mathématique* : la parité, Paris, Lyon, CEDIC

IREM de STRASBOURG 1974 - *Le livre du problème, fascicule 4 - La convexité* - Paris, Lyon - CEDIC

IREM de STRASBOURG 1975 - *Le livre du problème, fascicule 5 - Calcul barycentrique* - Paris, Lyon - CEDIC

KILPATRICK J. 1981 - Research on mathematical learning and thinking in the United States. *Actes du 5ème colloque du groupe internationale PME* Vol. 2, Laboratoire IMAG BP 53X, 38041 GRENOBLE CEDEX, France, pages 18 à 29

KLEIN F. 1981 - Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. Programme publié à l'occasion de la rentrée à la faculté de philosophie et au sénat de l'Université d'ERLANGEN en 1872. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure 1891* - Pages 87, 102 et 172, 210 - nouvelle édition : *le programme d'Erlangen* - Paris, GAUTHIER-VILLARS

KOHLER W. 1927 - *L'intelligence des singes supérieurs* - PARIS ALCAN - Nouvelle édition l'Intelligence des singes supérieurs - PUF CEPL - PARIS 1973

KOHLER W. 1929 - *Gestalt Psychology* New York - Liveright - Traduction française : *Psychologie de la forme* - Paris - GALLIMARD 1964

KRYGOVSKA A.Z., CIOSEK M. 1973 - Quelques remarques sur le comportement des élèves concernant les problèmes de mathématiques - *Educational studies in mathematics* - 5, pages 39 à 48

KRYGOVSKA A.Z. 1976 - Le problème des problèmes. *Compte-rendus de la XXVIIIème rencontre organisée par la CIEAEM* - responsables de l'édition : Willy et Jacqueline VANHAMME, rue Firmin Martin, 2-B-1160 - BRUXELLES, Belgique, pages 24 à 31

LAKATOS I. 1976 - *Proofs and refutations* - CAMBRIDGE - Cambridge University Press - 2ème édition 1979

LELONG-FERRAND J. et ARNAUDIES J.M. 1975 - *Cours de mathématiques, tome 3 : géométrie et cinématique* - Dunod Paris/Bruxelles/Montréal

LEONARD F. 1978 - Obstacles cognitifs dans les processus de résolution de problèmes - *Archives de Psychologie* XLVI, 178, pages 115 à 131

LEONARD F. 1979 a - Equilibration et clôture dans un processus de résolution de problème - *Bulletin de Psychologie* , N° spécial sur l'intelligence

LEONARD F. 1979 b - "Décalages" et interruptions du processus d'équilibration chez l'adulte - *Cahiers de psychologie* - 22, pages 75 à 84.

MAURY S. 1981 c - *Expérience pédagogique à l'école élémentaire - 3ème fascicule - Miroir et symétrie - cours élémentaire 2ème année* - édité par l'IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

METIVIER M. 1972 - *Notions fondamentales de la théorie des probabilités* - Paris, DUNOD

MOREL-MORIN C. 1981 - *Les images mentales en mathématiques* - édité par l'Université Paul Valéry, UER de Psychologie - MONTPELLIER

NEWELL A., SIMON H.A. 1972 - *Human Problem Solving* - Prentice Hall International, Inc. London

NOELTING G. 1980 a - The development of proportional reasoning and the ratio concept (the orange juice experiment). Part I : the determination of stages, *Educational studies in mathematics II*, 217 - 253

NOELTING G. 1980 b - The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II ; Problem solving structure at successive stages ; Problem solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring - *Educational studies in mathematics II*, 331 - 363

PAEZ SANCHEZ L. 1980 - *La représentation graphique de l'espace chez l'enfant et chez l'adulte peu scolarisé*. Thèse de 3ème cycle - Université de PARIS VII - Publication IREM de PARIS-SUD.

PIAGET J., INHELDER B. 1941 - *Le développement des quantités physiques chez l'enfant* - 3ème édition , NEUCHATEL - DELACHAUX & NIESTLE

PIAGET J., SZEMINSKA A. 1941 - *Genèse du nombre chez l'enfant* - NEUCHATEL - DELACHAUX & NIESTLE - 4ème édition 1967

PIAGET J., INHELDER B. 1947 - *La représentation de l'espace chez l'enfant* - PARIS - PUF, 3ème édition 1977

PIAGET J., INHELDER B., SZEMINSKA A. 1948 - *La géométrie spontanée de l'enfant* - PARIS - PUF, 2ème édition 1973

PIAGET J., INHELDER B. 1959- *Genèse des structures logiques élémentaires* - NEUCHATEL - DELACHAUX & NIESTLE - 2ème édition 1967

PIAGET J. 1964 - Les travaux de l'année 1960-1961 et le VI symposium (19-24 Juin 1961) du centre international d'épistémologie génétique. Dans VINH BANG, GRECO P., GRIZE J.B., HATWELL Y., PIAGET J., SEAGRIM G.N., VURPILLOT E. *Epistémologie de l'espace* - PARIS - PUF, pages 1 à 40

PIAGET J., INHELDER B. - 1966 - *l'image mentale chez l'enfant* - PARIS - PUF

PIAGET J., GRIZE J.B., SEZMINSKA A., VINH BANG 1968 - *Epistémologie et psychologie de la fonction* - PARIS - PUF

PIAGET J., GARCIA R. 1971 - *Les explications causales* -PARIS - PUF

PIAGET J. et Collaborateurs 1974 a - *Recherches sur les contradictions. Les différentes formes de contradictions* - PARIS - PUF

PIAGET J. et Collaborateurs 1974 b - *Recherches sur les contradictions. Les relations entre affirmations et négations* - PARIS - PUF

PIAGET J. 1974 c - *La prise de conscience* - PARIS - PUF

PIAGET J. 1975 - *L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement* - PARIS - PUF

PIAGET J. et collaborateurs 1977 b - *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. L'abstraction de l'ordre et des relations spatiales* - PARIS - PUF

PIAGET J., HENRIQUES G. 1978 - *Recherches sur la généralisation* - PARIS - PUF

PIAGET J. 1980 - *Recherches sur les correspondances* - PARIS - PUF

PLUVINAGE F. 1977 - *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques.* Doctorat es-Sciences soutenu le 14 Septembre 1977 à l'Université Louis Pasteur de STRASBOURG

POLYA G. 1945 - *How to solve it.* Princeton - NEW YORK USA - Princeton University Press - Traduction française : *Comment poser et résouare un problème* - PARIS - DUNOD 1965

POLYA G. 1954 - *Mathematics and plausible reasoning* - Princeton - Princeton University press - Traduction française : *Les mathématiques et le raisonnement"plausible"* - PARIS - GAUTHIER-VILLARS 1958

POLYA G. 1962 - *Mathematical discovery* 1962, vol. 1, 1964, vol. 2 - NEW YORK John WILEY and sons Inc. Traduction française : *La découverte des mathématiques* - PARIS - DUNOD 1967

RADEMACHER H., TOEPLITZ O. 1967 - *Plaisir des mathématiques* - PARIS - DUNOD

RICCO G., ROUCHIER A. 1981 - Mesure du volume : difficultés et enseignement dans les premières années de l'enseignement secondaire. *Actes du 5ème colloque du groupe international PME - Vol. 1* - Laboratoire IMAG, BP 53X, 38041 GRENOBLE CEDEX, pages 114 à 119

ROGALSKI J. 1979 - Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications : les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes - *Bulletin de l'APMEP* N° 320 , pages 563 à 586

ROGALSKI J. 1981 - Acquisition de la notion de dimension des mesures spatiales de longueur et de surface. *Actes du 5ème colloque du groupe international PME*. Vol. 2, laboratoire IMAG, BP 53X, GRENOBLE CEDEX, pages 120 à 125

ROSCH E. 1976 - Classifications d'objets du monde réel : origines et représentations dans la cognition - *Bulletin de psychologie* - Numéro spécial - pages 242 à 249

ROUCHIER A. et Coll. 1980 - Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs - *Recherche en didactique des mathématiques* 1.2, pages 225 à 276

ROUMIEU C. 1978 - *Quelques observations d'élèves à propos du développement du cube* - Publication IREM, USTL, place E. Bataillon MONTPELLIER

SCHUBAUER Léoni M.L., PERRET-CLERMONT A.N. 1980 - Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre des problèmes additifs - *Recherches en didactique des mathématiques* - Vol. 1.3, pages 297 à 350

SIERPINSKI W. 1970 - *250 problems of elementary number theory* - WARSZANA - Panstwore Wydawnictwo Naukowe - Traduction française : *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres* - PARIS - HACHETTE 1972

STEINHAUS H. 1959 - *PANSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE* - WARSZAWA PWN - Editions scientifiques de Pologne - Traduction française : *Cent problèmes élémentaires de mathématiques résolus* - PARIS - GAUTHIER-VILLARS 1965

STEINHAUS H. 1960 - *Mathematical SNAPSHOTS* - New York - Oxford University Press Inc. Traduction française : *Mathématiques en instantanés* - PARIS - FLAMMARION 1964

THOM R. 1972 - Les mathématiques modernes. Une erreur pédagogique et philosophique - *L'âge de la science* - Vol. III N° 3, PARIS

VERGNAUD G., RICCO G., ROUCHIER A., MARTHE P., METREGISTE R. 1978 - Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des "structures multiplicatives" élémentaires ? un sondage *Bulletin de l'APMEP* N° 313, Avril 1978, pages 331 à 357

VERGNAUD G., RICCO G., ROUCHIER A., MARTHE P., METREGISTE R. et GIACOBBE J. - 1979 Mars - *Acquisition des "structures multiplicatives" Rapport de fin de recherche* - Publié par l'IREM, Université d' ORLEANS et le Centre d'étude des processus cognitifs et du langage RO n°2.

VERGNAUD G. 1981 - Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques - *Recherches en didactiques des mathématiques* - Vol. 2.2, pages 215 à 231

VERMERSCH P. 1976 - Opérations élémentaires et planification de l'action. Un exemple : réemploi des acquis professionnels dans une tâche de dessin technique par des adultes migrants du bâtiment - *Bulletin de psychologie* - Tome XXXIII N° 344, pages 389 à 398

VERMESCH P., SEJOURNANT S., GUIHARD L. 1978 - *Utilisation du document photographique en géographie. Recherche sur les difficultés rencontrées par les élèves. Problèmes méthodologiques. Rapport de mi-parcours* - Centre national de télé-enseignement - VANVES

VERMERSCH P. 1979 a - Peut-on utiliser les données de la psychologie génétique pour analyser le fonctionnement cognitif des adultes ? Théorie opératoire de l'intelligence et registres de fonctionnement - *Cahiers de psychologie* - 22 pages 59 à 74.

VIENNOT L. 1979 - *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire* - PARIS - HERMANN

VINH BANG, LUNZER E. 1965 - *Conservations spatiales* - PARIS - PUF

WEILL-FASSINA A. 1979 - Présentation spatiale des données de travail et traitement des informations : points de vue et hypothèses - *Psychologie française* - Tome 24 - N° 3 et 4, pages 205 à 227

WEYL H. 1952 - *Symetry* - Princeton University Press - traduction française : *Symétrie et mathématique moderne* - PARIS - FLAMMARION 1964

- CHAPITRE XXVI -

INDEX

Le premier index est intitulé :

Index des noms de personnes et de collectifs

Le deuxième index est intitulé :

Index terminologique

Dans l'index terminologique, nous signalons les principales notions relatives à nos résultats, et des pages où elles jouent un rôle important. Les expressions correspondant à ces notions sont situées, la plupart du temps, dans un titre ou une phrase soulignée par nous (cette phrase est en italique dans le texte).

Nous mettons en italique, dans le deuxième index, les notions qui ont pris un sens spécifique dans notre travail. Nous soulignons, pour chacune de ces notions spécifiques, une page qui l'explique.

INDEX DES NOMS DE PERSONNES ET DE COLLECTIFS

oooOOooo

INDEX TERMINOLOGIQUE

oooOOOooo

PARTIE F

PROTOCOLES

- CHAPITRE XXVII -

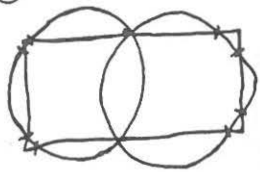
PROTOCOLES DU PROBLEME CRI

Dans les trois chapitres XXVII, XXVIII et XXIX, nous présentons respectivement des protocoles des problèmes CRI, SIM et PEN.
Les cinq protocoles du problème CRI sont ceux de :
KAR (6-11;07-2), FEN (5-11;05), JOS (4-14;00-1), MIC (3-14;07) et
LOU (1-18;00).
Les treize protocoles du problème SIM sont ceux de :
COR (6-11;07), GAL (5-11;06), ERI (5-12;04), CAT (5-13;00)
LEG (4-13;02-1), CHA (4-13;03), JIS (4-15;08), MAP (3-14;00-1)
GIL (3-14;01), EDW (3-14;11), MAR (3-15;00), RIM (2-15;09), CIT (1-16;11-1).
Les dix protocoles du problème PEN sont ceux de :
RIA (6-12;02), THI (5-13;05), LIN (5-13;11), CAN (4-13;04), CLA (4-14;11)
SYL (4-15;04), KAY (3-15;02), PYV (3-16;00), LIV (2-15;06), BRA (1-17;09).

Dans les protocoles, les pages numérotées 0 (ou 0^1, 0^2, 0^3...) reproduisent le plus fidèlement possible toutes les réalisations des élèves. Les dessins sont la plupart du temps à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Au cours de la rédaction proprement dite du compte-rendu, ces dessins interviennent à nouveau; mais ils sont complétés par des indications dues à l'expérimentateur, devant permettre une meilleure explication des procédures suivies par l'élève.

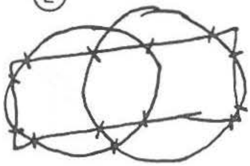
PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - KAR 6-11;07-20[1]

1



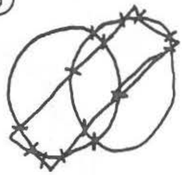
10

2



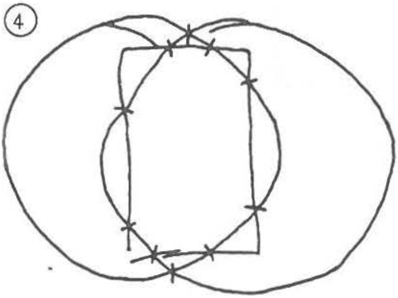
14

3



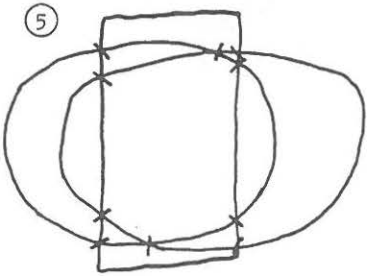
14

4



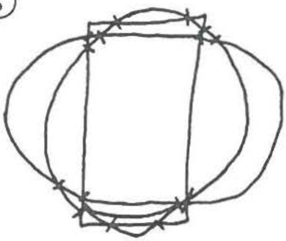
10

5



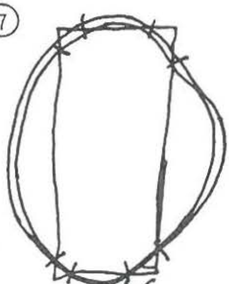
10

6



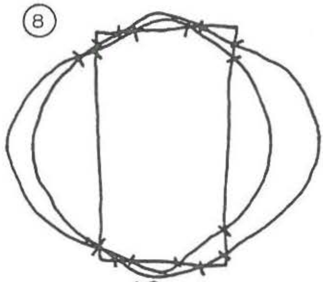
16

7



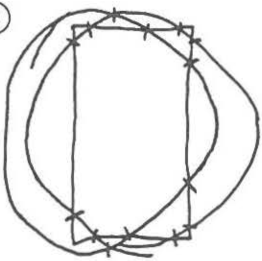
16

8



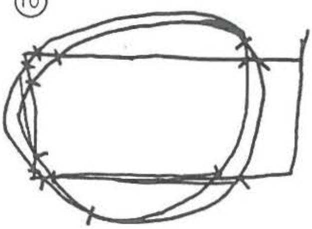
16

9



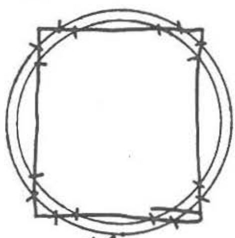
14

10



14

11

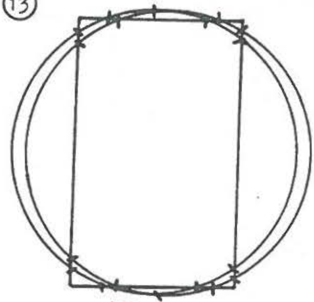


16

12

18

13



18

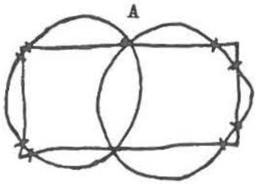
PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - KAR 6-11;07-21

Avant de commencer à dessiner, Kar pose la question suivante :

"C'est important de faire des dessins exacts ... ou bien pour aller plus vite ... ?"

EXP - C'est à toi de décider, rien n'est obligatoire.

1



10

KAR se met immédiatement à dessiner. Elle réalise à la quatrième minute le dessin 1 ; elle trace tout d'abord le rectangle puis les deux cercles.

KAR - J'ai 10 points ... je vais recommencer..

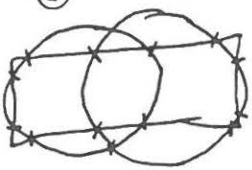
EXP - Que vas-tu faire ?

KAR - Je vais essayer de faire mieux !

EXP - As-tu une idée ?

KAR - Oui, au lieu que ça se rencontre là (elle désigne le point A de la figure 1), je vais faire le rectangle plus petit.

2



14

Elle réalise la figure 2 à la septième minute. Pour cela, elle trace d'abord les deux cercles ; puis les deux longueurs du rectangle ; mais elle hésite avant de tracer les deux largeurs ; elle achève enfin sa figure. Elle compte les points de proche en proche en les cochant.

KAR - Là, j'en ai 14.

De même qu'elle avait écrit 10 à côté de son premier dessin, là elle écrit 14.

3

14

KAR - Je vais encore essayer d'améliorer.

Elle réalise le dessin 3 à la neuvième minute. Pour cela, elle trace d'abord les deux cercles, puis le rectangle en position oblique. Ensuite, elle compte les points d'intersection.

KAR - Là, j'en ai 14 aussi. Vous pourriez me dire combien il y en a au maximum ?

EXP - On te demande précisément de le chercher ... qu'en penses-tu ?

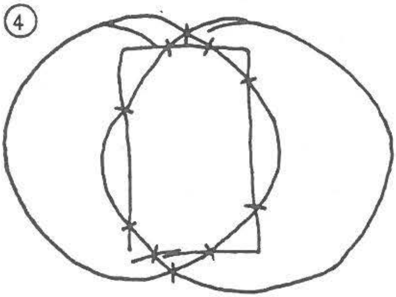
KAR - Je pense qu'il doit y en avoir davantage, mais je ne suis pas savante.

KAR commence à tracer un rectangle.

EXP - As-tu une idée ?

KAR - Non pas pour l'instant, je vais voir en dessinant ...

4



10

Pour réaliser sa figure 4 à la douzième minute, KAR a dessiné en premier lieu le rectangle, puis les cercles. Sa figure 4 est plus grande que les figures précédentes.

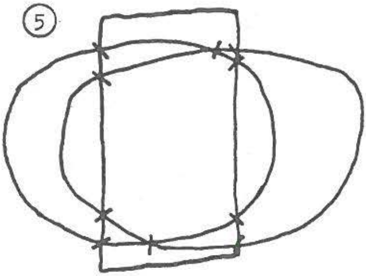
KAR - Là, j'en ai que 10.

EXP - Sais-tu pourquoi ?

KAR - Non ... ah si ! il aurait fallu que le rectangle sorte ...

Elle explique d'un geste que les largeurs du rectangle auraient dû se trouver à l'extérieur des 2 cercles pour qu'il y ait plus de points.

5



10

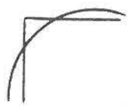
Elle réalise le dessin 5 à la quatorzième minute.

KAR - Ah, j'en ai que 10 aussi.

EXP - Sais-tu pourquoi ?

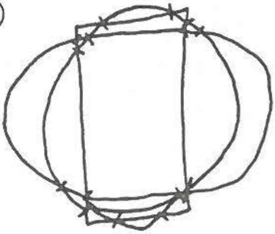
KAR observe la figure 1 .

KAR - Oui, là j'étais passée comme ça et ça faisait 2 points.



Elle explique d'un geste que le cercle coupant le coin du rectangle, cela lui donnait 2 points d'intersection, ce qui n'est pas le cas de la figure 5 .

6



16

Elle réalise alors à la dix-huitième minute la figure 6 .
Elle trace tout d'abord un rectangle ; puis un cercle qui coupe ce rectangle en 8 points, mais elle ne compte pas ces 8 points. Elle hésite assez longuement avant de tracer le 2ème cercle.

EXP - Que voudrais-tu faire ?

KAR - Je voudrais en avoir autant avec celui-là.

Elle cherche à obtenir un deuxième cercle qui donne le même nombre de points d'intersection avec le rectangle que le premier cercle. Elle ne prononce pas le nombre 8. Elle trace alors son 2ème cercle (qui coupe le rectangle en 4 points et le 1° cercle en 4 points).

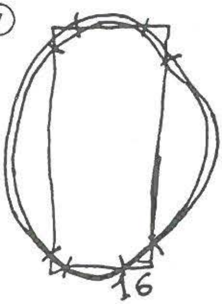
KAR - Ah là, j'en ai 16.

Elle paraît heureuse de son résultat.

Elle se remet aussitôt au travail, en disant :

" je vais essayer encore".

7



KAR réalise son dessin 7 à la vingtième minute. Pour cela, elle trace tout d'abord le rectangle, puis un premier cercle qui coupe son rectangle en 8 points.

EXP - Que comptes-tu faire ?

KAR - Je vais voir si c'est possible de faire 2 cercles à peu près ensembles.

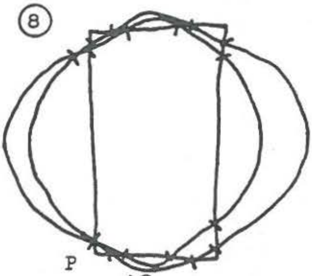
Elle trace alors un 2ème cercle, presque concentrique et très proche du précédent.

KAR - J'en ai 16 aussi.

Elle a compté ses points deux par deux.
Elle observe cette dernière figure.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - KAR 6-11;07-24

8



16

KAR - Ah, j'ai une idée, je vais essayer de croiser les ronds.

Elle réalise alors la figure 8 à la vingt-troisième minute. KAR coche les intersections et les compte. Elle est déçue :

"Là, j'en ai 15", dit-elle.

EXP - Sais-tu pourquoi ?

KAR - Oui, là (elle montre le point P de la figure 8), je croise sur le rectangle ; sinon j'aurais 16 points.

Elle corrige alors le nombre écrit sur sa feuille en transformant 15 en 16.

EXP - Espérais-tu en avoir davantage ?

KAR - Oui.

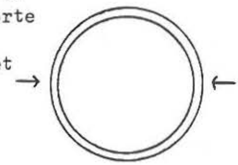
EXP - Sais-tu pourquoi ça n'a pas marché ?

KAR - Je ne sais pas exactement.

KAR observe attentivement les figures 6 puis 7 .

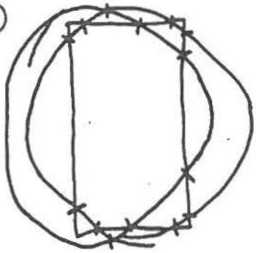
KAR - Ca y est ! j'ai une idée ! je vais faire pareil que là, mais en croisant les cercles là.

Elle indique qu'elle veut reprendre la figure 7 mais en la traçant de telle sorte que les cercles se croisent à gauche et à droite.



Elle réalise la figure 9 à la vingt-huitième minute.

9



14

Elle trace d'abord le rectangle puis dessine le cercle le plus à droite sur la figure 9; elle obtient, sans hésitation, 8 points mais elle n'a toujours pas dit qu'il y avait ainsi 8 points.
Elle trace ensuite le cercle le plus à gauche sur la figure 9 .
Elle compte les points.

KAR - Là, j'en ai moins, j'en ai 14. Eh oui, le 2ème rond ne passe pas par les 2 angles du rectangle alors j'en ai 4 en moins ....

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - KAR 6-11;07-25

EXP - Combien penses-tu donc que tu pourrais en obtenir ?

Elle réfléchit ... puis dit :

"Peut-être 18 ? Mais j'ai encore une idée".

Elle réalise alors la figure (10) , à la trentième minute.

Elle commence par tracer les 2 cercles puis le rectangle, les cercles ne coupent pas la largeur de droite.
Elle coche les points d'intersection et les compte un à un.

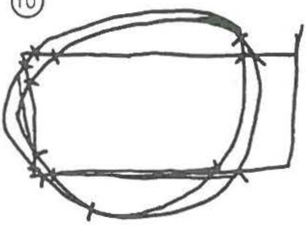
KAR - J'en ai 14 aussi.

EXP - Sais-tu pourquoi ?

KAR - Oui, je suis de nouveau passée par là.

Elle montre la partie de la figure, située à droite, où les cercles ne coupent pas une largeur du rectangle.

(10)



14

EXP - Tu peux prendre du matériel (règle, compas, équerre ...) si tu le désires.

KAR - Je veux bien ... Je vais déjà essayer de faire ça (elle désigne la figure (7)) parce que, si ça se trouve, même ça, ça ne marche pas.

Elle réalise la figure (11) à la trente-troisième minute.
Pour cela, elle trace deux cercles concentriques, à l'aide du compas, puis construit, à main levée, un rectangle.

KAR - Le rectangle je le fais pas parfaitement bien, hum ! c'est un rectangle plutôt carré ...

Elle hésite.

EXP - Ca te paraît gênant ?

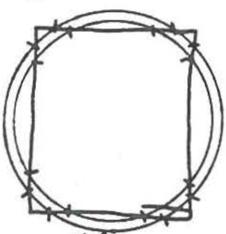
KAR - Ben ... un peu ! Je vais essayer de le faire rectangle.

Elle modifie un peu le tracé de ce rectangle, puis mesure.

EXP - As-tu compté tes points ?

KAR - Oui c'est 16 ; enfin, j'ai pas compté, mais c'est comme cette figure (elle désigne

(11)



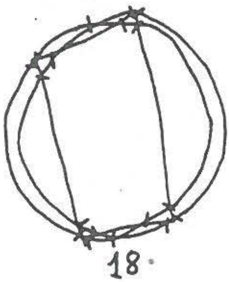
16

la figure 7) ... enfin je peux compter ...

Elle coche les points, puis les compte.

KAR - Oui ... c'est bien 16

12



Elle réalise ensuite, à la trente-sixième minute, la figure 12 .
Pour cela, elle trace d'abord les deux cercles, à main levée, puis le rectangle toujours à main levée.

KAR - Ah ! Je crois avoir trouvé une nouvelle façon ... et j'en ai 18.

Elle paraît ravie !

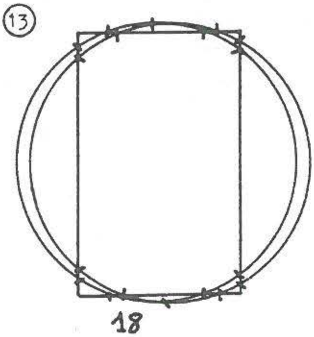
Elle prend une nouvelle feuille de papier pour dessiner.

EXP - Que vas-tu faire ?

KAR - Je ne sais pas ... Je vais essayer de recopier ... de le faire plus au propre et en plus grand.

Elle réalise, alors à la quarante-et-unième minute son dessin 13 qui est le dernier dessin.

13



Pour cela, elle trace les deux cercles au compas, puis prend l'équerre.

KAR - Je vais faire aussi un rectangle propre. Maintenant je compte, je vais les marquer en rouge pour bien les voir. Ca y est, j'en ai 18, très bien !

EXP - Penses-tu avoir répondu à la question : le plus grand nombre possible ?

KAR - J'ai pas dû en trouver le plus grand nombre.
Je vais encore chercher.

Elle observe les figures 13 et 11 .

KAR - C'est drôle, là c'est presque un carré

(elle désigne la figure 11) et là, c'est vraiment un rectangle (elle désigne la figure 13).
J'aurais pas cru y arriver aussi bien !

KAR - Bon, alors, je vais chercher à faire mieux.

Elle observe tous les dessins depuis le début.

KAR - Pour l'instant je ne vois pas ce qu'on pourrait faire de mieux ...

Elle observe toujours ...

KAR - Je ne vois toujours pas ... !

EXP - Penses-tu donc que 18 est le maximum ?

KAR - Je ne pense pas enfin ... je ne sais pas ... mais ... je n'ai pas un esprit savant.
C'est-à-dire ... pour faire mieux, il faudrait que les ronds se croisent, mais c'est pas possible ... mais ça, c'est moi qui le dis !
C'est sûrement possible de faire mieux.

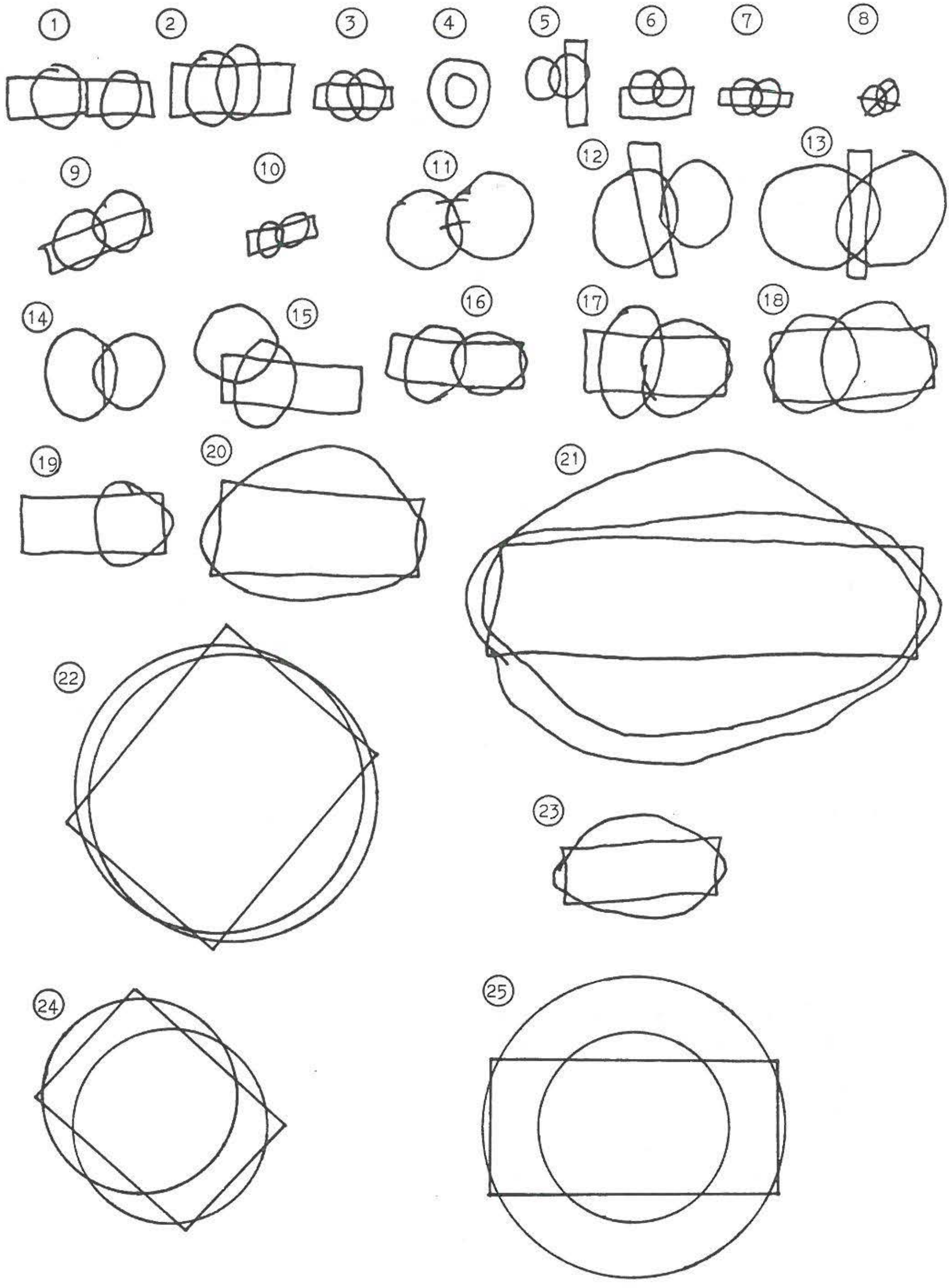
Elle observe encore ses dessins.

KAR - Je vois toujours pas ce qu'on pourrait faire de mieux. Peut-être bien que 18 c'est le plus possible mais ... je n'en suis pas sûre.

La séance se termine alors à la quarante-septième minute.

Les figures dessinées dans ce protocole sont la reproduction la plus fidèle possible des figures réalisées par l'élève ; elles ont été décalquées.
Tous les dessins de l'élève sont faits à la main à l'exception du dessin 11 où les cercles sont tracés au moyen d'un compas et du dessin 13 qui est réalisé avec le compas et l'équerre.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - FEN 5-11;05-0[1]

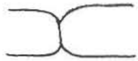


PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - FEN 5-11;05-1

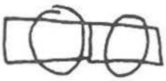
FEN se pose tout de suite une question.

FEN - Est-ce qu'on peut en avoir 2 qui longent ?

Il se demande si on peut avoir deux arcs de courbe confondus.



1



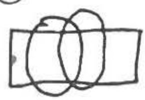
FEN réalise à la première minute le dessin 1. Dans ce dessin, il considère 2 cercles, et 2 rectangles qui ont une largeur commune.

FEN - Là il y a une infinité de points.

L'expérimentateur élude la question en lui faisant relire l'énoncé.

EXP - ... 1 rectangle ...

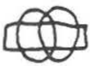
2



L'élève réalise son dessin 2, à la deuxième minute. Il trace d'abord le rectangle puis les 2 cercles.

FEN - Dix.

3



Il réalise son dessin 3 à la troisième minute. Pour changer, il commence par tracer les 2 cercles.

FEN - Dix ... je vais encore regarder.

Il veut "superposer les deux cercles" ; mais l'expérimentateur lui fait remarquer qu'à ce moment là on ne voit plus qu'un seul cercle.

FEN - Je ne pense pas qu'il y en ait d'autres. Dix, c'est ça la réponse.

Il aboutit à cette conclusion à la sixième minute.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - FEN 5-11;05-2

Il va alors étudier le cas de deux cercles dont "l'un est plus grand que l'autre". FEN réalise à la septième minute sa figure (4) .
Mais il observe que si l'un des cercles est plus grand et l'autre à l'intérieur "ça en fera deux en moins" c'est-à-dire qu'il perd deux points d'intersection.
FEN a envie de s'arrêter.
L'expérimentateur attend silencieusement.

(4)

Pour expliquer qu'il a atteind le maximum avec 10, FEN propose le dessin suivant. Il réalise (5) à la huitième minute. Dans ce dessin, il donne une nouvelle position au rectangle par rapport aux cercles.

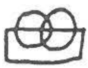
FEN - Le rectangle est dessus un seul cercle.

Il n'obtient que 6 points.

(5)

Dans le dessin (6) , à la neuvième minute, le rectangle a encore une autre position ; il obtient encore 6 points.

(6)



Il réalise le dessin (7) à la dixième minute ; comme dans les deux dessins précédents, il trace d'abord les deux cercles, puis le rectangle.

EXP - Là tu as vu toutes les positions possibles ?

FEN - Il faut essayer pour voir si on en trouve d'autres.

(7)

Son dessin (8) est barré sitôt commencé.

(8)

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - FEN 5-11;05-3

(9)

Son dessin (9) est réalisé à la onzième minute.
Il provient d'un nouveau déplacement du rectangle.

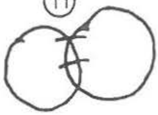
---

(10)

Il réalise sa figure (10) à la douzième minute ; là encore comme dans sa figure (9) il trace d'abord les 2 cercles puis ensuite le rectangle.

---

(11)



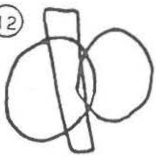
Il réalise le dessin (11) à la treizième minute afin de donner l'explication suivante.

FEN - Que le trait passe en haut ou plus bas, ça donne le même nombre de points d'intersection, donc c'est le même que l'autre.

Il veut dire que le dessin (10) est équivalent au dessin (9) .
Pour chacun des dessins (7)(9)(10) FEN a trouvé 10 points d'intersection.

---

(12)



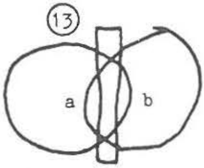
Il réalise le dessin (12) à la quatorzième minute, en traçant les 2 cercles puis le rectangle. Il trouve moins de points.

FEN - ... moins, il y en a 8.

Il réfléchit

---

(13)



FEN réalise sa figure (13) à la dix-septième minute ; il a tracé 2 cercles puis le rectangle. Il compte 10 points.

FEN - J'ai essayé de faire deux traits qui passent par l'intersection.

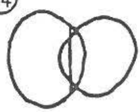
Il veut dire par là qu'il a voulu tracer un rectangle dont les longueurs coupent les 2 arcs de cercles a et b ; il avait ainsi

---

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - FEN 5-11;05-4

pour objectif de prendre un rectangle lui donnant plus de points d'intersection que celui de la figure 12 .

14

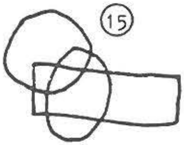


La figure 14 qu'il réalise à la dix-huitième minute, lui sert à montrer les 4 points d'intersection entre les 2 cercles et un côté du rectangle.

FEN - C'est pareil.

Il veut dire qu'il obtient 4 points comme dans les dessins 6 7 9 10 .

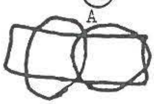
15



Il réalise le dessin 15 à la vingtième minute ; dans ce dessin, il commence par tracer le rectangle puis les cercles ;

FEN - Huit.

16



Il réalise la figure 16 à la vingt et unième minute.

FEN - Je commence toujours par un rectangle puis un cercle.

Il semble bien que le cercle qui est à droite dans la figure 16 provienne d'un déplacement du cercle le plus à gauche de la figure 15 .

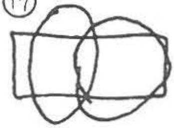
FEN - On dirait qu'elle touche là.

Il veut recommencer la figure car la longueur supérieure de son rectangle passe par le point d'intersection des deux cercles, désigné par la lettre A sur la figure 16 .

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - FEN 5-11;05-5

---

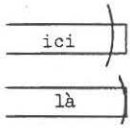
(17)



FEN - Il ne faut pas que ça touche.

Il réalise la figure (17) à la vingt-deuxième minute. Il a d'abord tracé le rectangle puis les 2 cercles. Il compte 12 points d'intersection. Il explique alors ce qu'il a voulu faire.

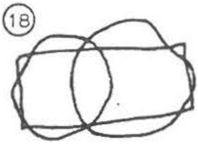
FEN - Le rond au lieu de couper le rectangle ici, il le coupe là, ce qui en fait deux de plus.



Dans la figure (17) le cercle de droite coupe la largeur du rectangle située à droite.

---

(18)

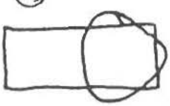


FEN - Je vais essayer d'en faire 2.

Il veut dire qu'il va essayer de tracer 2 cercles coupant chacun de son côté, une largeur.
Il réalise alors la figure (18) ; il a d'abord tracé le rectangle puis les 2 cercles.
Il compte 14.

---

(19)



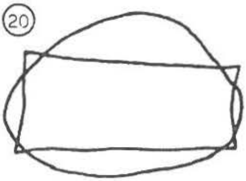
Il commence alors un nouveau dessin : figure (19) .
Il trace dans cette figure un rectangle et un cercle.

FEN - C'est pas comme ça.

Il passe tout de suite au dessin suivant.

---

(20)



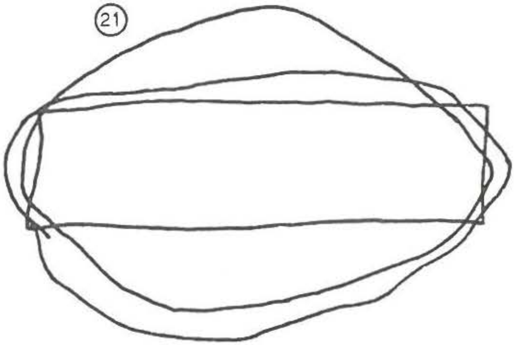
Il réalise le dessin (20) en s'expliquant, à la vingt-sixième minute.

FEN - On fait un rectangle et on dessine un rond qui coupe pareil les deux côtés. Si on fait un autre cercle qu'on peut mettre pareil, ça en fait plus.

PROBLEME CR.I - Octobre-Novembre 1979 - FEN 5-11;05-6

Il va faire son prochain dessin de dimensions plus grandes car il trouve que "c'est pas assez grand".

21



Il réalise alors son dessin 21 à la vingt-septième minute.

EXP - Est-ce que tu es sûr de ça ?

FEN - Là c'est pas très net.

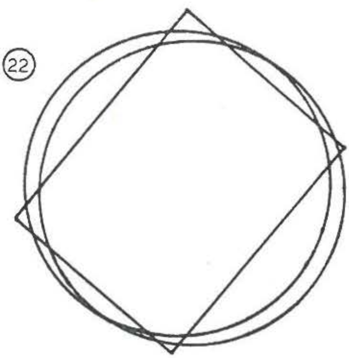
EXP - Alors comment tu vas le faire net ?

FEN - Il faudrait faire des ronds plus ronds que ça.

EXP - Comment fais-tu pour faire les ronds plus ronds ?

FEN - Il faudrait un compas.
J'en ai un.

22



Il réalise alors son dessin 22 à la vingt-neuvième minute. Il utilise pour le tracer le compas et la règle, alors que jusque là toutes ses figures étaient dessinées à main levée.

FEN - Je vais prendre une règle aussi pour le rectangle.

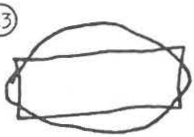
Le dessin de FEN est 2 fois plus grand que celui qui est reproduit ci-contre.
Il obtient un très large dessin avec 18 points bien nets. Il a utilisé très adroitement son compas.

EXP - ... Et maintenant ?

FEN - On continue.

FEN - Au lieu de faire comme tout à l'heure, je mets le rectangle et je poserai le rond dessus.

23



Il réalise alors le dessin 23 à la trente-et-unième minute.

FEN - Là ça en fait 8 déjà ; je vais essayer de faire plus.

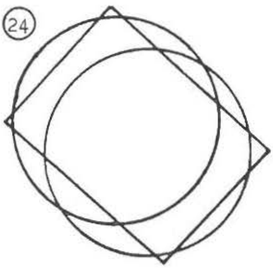
EXP - Qu'est-ce que tu en penses ?

FEN - Je crois pas que ... car dans chaque angle, ça peut toucher que deux points comme il y a 4 angles, ça fait 8 points on peut pas plus.
On peut pas faire plus que ça.
Pour arriver à en faire plus, il faut ... l'autre rond le mettre pareil aussi ... et il faut arriver à lui faire faire une intersection qui la fasse plus ... mais 2 ronds y a que 2 points d'intersection. Pour moi c'est 18. Mais si c'est comme tout à l'heure ...

Sa dernière phrase montre qu'il se souvient de la sixième minute où il pensait à tord, avoir fini.

FEN - J'arrête pas.

24



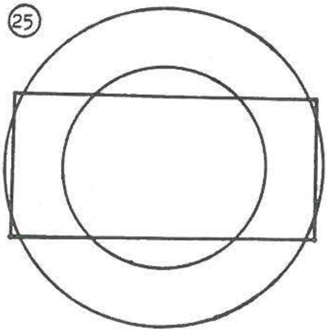
Il réalise alors la figure 24 à la trente-quatrième minute. Il utilise le compas et la règle. Le dessin de FEN est deux fois plus grand que celui qui est reproduit ci-contre.

FEN - Ca ne passe pas.

Il se rend compte que les cercles ne passent pas par les 2 largeurs. Pour lui, 24 n'est pas une figure intéressante.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - FEN 5-11;05-8

25



Il réalise 25 à la trente-sixième minute. Le dessin de FEN est 3 fois plus grand que celui qui est reproduit ci-contre. Il a donc tracé une très large figure à la règle et au compas.
Il manipule très adroitement le compas en jouant sur le déplacement du centre et la variation du rayon, notamment pour tracer en premier lieu le grand cercle après avoir tracé le rectangle.

FEN - J'ai voulu faire un rond plus petit que l'autre.

EXP - Qu'est-ce que tu en penses ?

FEN - On peut pas en trouver plus.

Et il répète les explications qu'il a déjà fournies à la suite de la réalisation de la figure 23 à la trente-et-unième minute.

FEN - Je suis sûr qu'on ne peut pas en trouver plus de 18.

Il s'arrête à la quarante-et-unième minute.
A la suite des explications de FEN, l'expérimentateur lui pose la question suivante :

EXP - Et si ça faisait comme ça dans le coin du rectangle ?

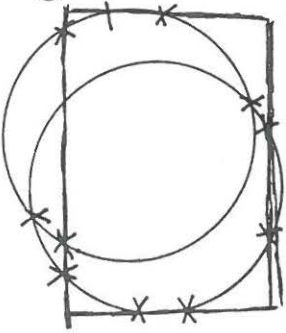
FEN - Mais peut-être de l'autre côté (dans un autre coin) ça ferait pas.

Pour terminer l'heure, l'expérimentateur pose à FEN un autre problème....

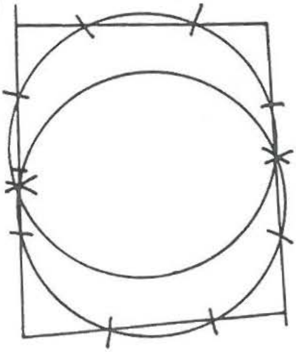
Tous les dessins, à l'exception de 22 , 24 et 25 sont la reproduction la plus fidèle possible des figures réalisées par l'élève ; ils ont été décalqués. Ces 22 dessins ont été faits à la main.
Les dessins 22 et 24 réalisés au compas et à la règle par l'élève sont 2 fois plus grands que ceux que nous avons reproduits dans ce protocole.
Le dessin 25 réalisé au compas et à la règle par l'élève est 3 fois plus grand que celui que nous avons reproduit dans ce protocole.

PROBLEME CRI . - Octobre-Novembre 1979 - JOS 4-14;00-0[1]

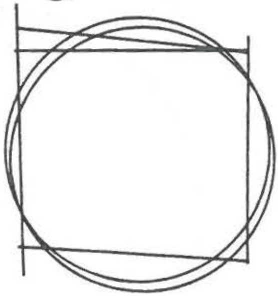
1



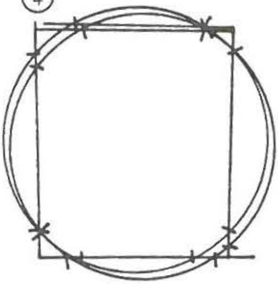
2



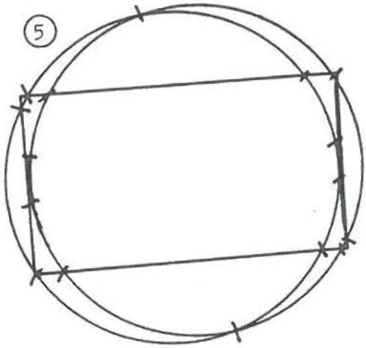
3



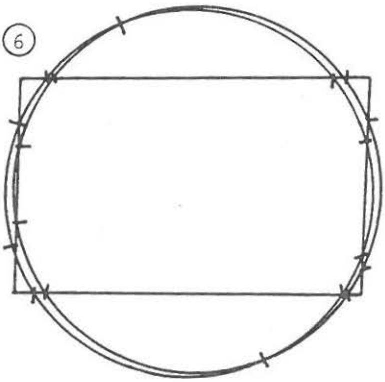
4



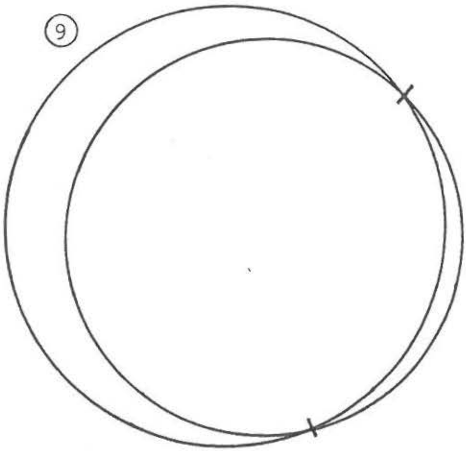
5



6



9

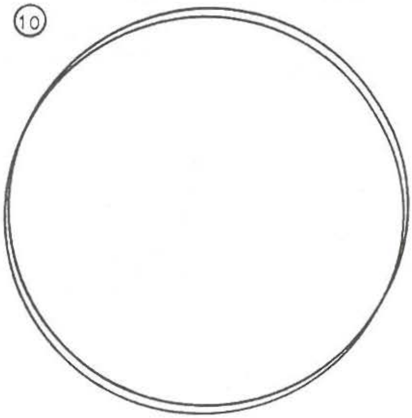


7

8

----

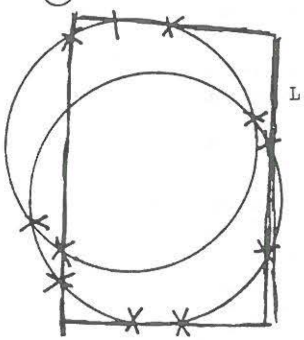
(10)



(11)

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - JOS 4-14;00-1

1



Pour réaliser son dessin 1 , JOS trace tout d'abord un cercle.

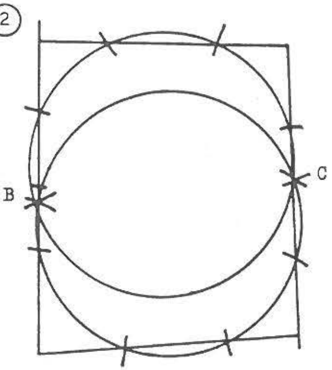
JOS - Je vais tracer l'autre cercle.
Je trace un rectangle n'importe comment ?

A JOS qui lui demande si elle peut tracer n'importe quel rectangle, l'expérimentateur répond affirmativement et lui rappelle l'énoncé du problème.
JOS compte les points. Elle en trouve 12.
Elle a une difficulté avec le contact entre le cercle supérieur et la largeur supérieure du rectangle, en A ; elle se demande si elle a obtenu là une infinité de points, ou bien deux points.

JOS - Mais si je pousse par là, ça me fera
un point de plus ; donc 13.

Elle a observé que le cercle supérieur ne touche pas la longueur L du rectangle située à droite.

2



Elle se propose donc de déplacer ce cercle vers la droite de façon à obtenir un point de plus.
Elle réalise alors à la cinquième minute la figure 2 . Elle commence par tracer les deux cercles, puis place le rectangle ; et ceci conformément à son anticipation.
Elle manifeste un certain intérêt devant les points multiples B et C, qu'elle compte comme des points doubles, ce qu'elle symbolise au moyen d'une croix (×) au lieu du trait utilisé pour les autres points d'intersection.
On peut remarquer que C est un point triple.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - JOS 4-14;00-2

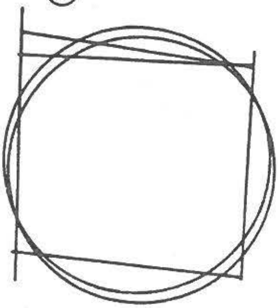
JOS - Il peut y en avoir plus en changeant les positions des deux cercles, mais comme on ne peut pas les dessiner toutes ...

Elle passe à la réalisation de (3) à la neuvième minute. Elle commence par tracer deux cercles très voisins.
L'expérimentateur lui demande pourquoi elle trace deux cercles très voisins.

JOS - Parce que si les deux cercles sont rapprochés, une droite qui coupera l'un coupera l'autre.

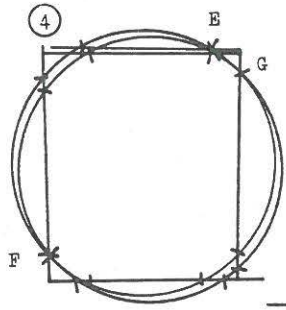
Elle avait donc prévu de tracer deux cercles très voisins et ce, pour une raison dont elle a parfaitement conscience.
Son dessin achevé, elle ne compte pas les points mais passe au dessin suivant.

(3)



---

(4)



Elle réalise la figure (4) à la treizième minute. Elle compte les points. Elle annonce 15 points. Les points triples E et F ont été comptés 3 fois, ce qu'elle a indiqué sur sa figure.
Pourtant son décompte aurait dû lui donner 17 points au lieu de 15 ; et même 18 si elle avait analysé correctement le point G.

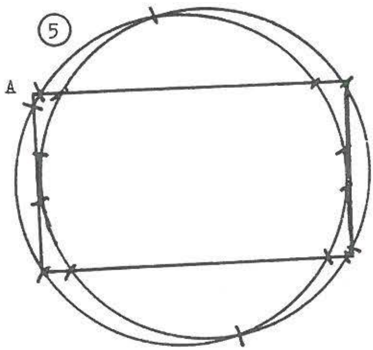
A la dix-septième minute elle réalise la figure (5) . Alors que jusque là elle avait tracé les deux cercles, puis le rectangle, elle dessine (5) en traçant d'abord le rectangle puis les deux cercles.
JOS compte 16 points.

JOS - Mais dans le coin on peut en trouver un autre.

Elle observe donc qu'aux sommets du rectangle, où elle ne compte qu'un point d'intersection, elle peut en fait obtenir un deuxième point d'intersection, comme elle l'a d'ailleurs noté au sommet A.

JOS - Peut-être avec le cercle un troisième point avec l'autre cercle ...

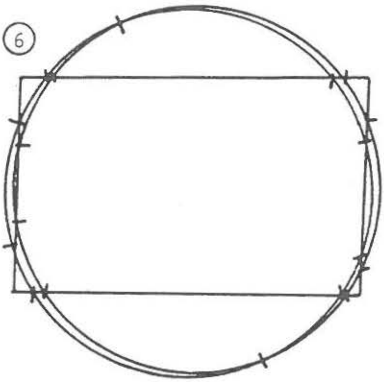
(5)



PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - JOS 4-14;00-3

Elle veut dire qu'elle peut, peut-être, obtenir 3 points d'intersection entre deux cercles ; ce qui bien entendu augmenterait le nombre de points d'intersection cherchés.

6



JOS - Je commence par le rectangle, car par le cercle on pourra pas bien tracer.

Elle déclare qu'elle veut tracer d'abord le rectangle plus les deux cercles.
Elle réalise la figure 6 à la vingt-deuxième minute.
Sur cette figure, elle compte très distinctement 18 points ; elle coche chacun de ces points d'un trait.

7

8

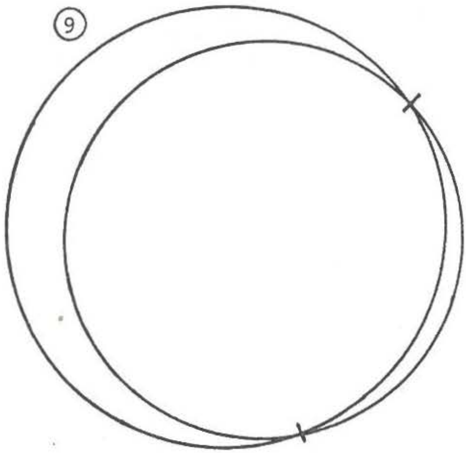
EXP - Peut-il y en avoir d'autres ?

JOS se demande toujours en combien de points peuvent se couper deux cercles. C'est pour répondre à cette question qu'elle réalise à la vingt-septième minute les dessins 7 et 8 .
Alors un raisonnement jaillit :

JOS - Ce que je sais, un cercle coupe un côté du rectangle en deux points ; donc un cercle fera 8 points et deux cercles 16 points.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - JOS 4-14;00-4

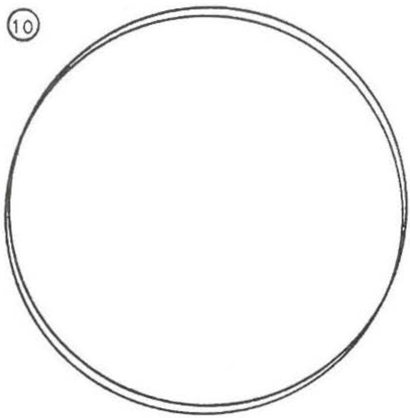
9



JOS - Je vais chercher en combien de points se coupent deux cercles.

Elle réalise alors successivement les figures 9 10 11 , pour essayer de répondre à la question qu'elle se pose. Vers la quarantième minute, comme la séance se termine, l'expérimentateur finit par dire à JOS qu'il y a au maximum deux points d'intersection entre deux cercles. Cela lui permet d'affirmer que 18 est le maximum cherché.

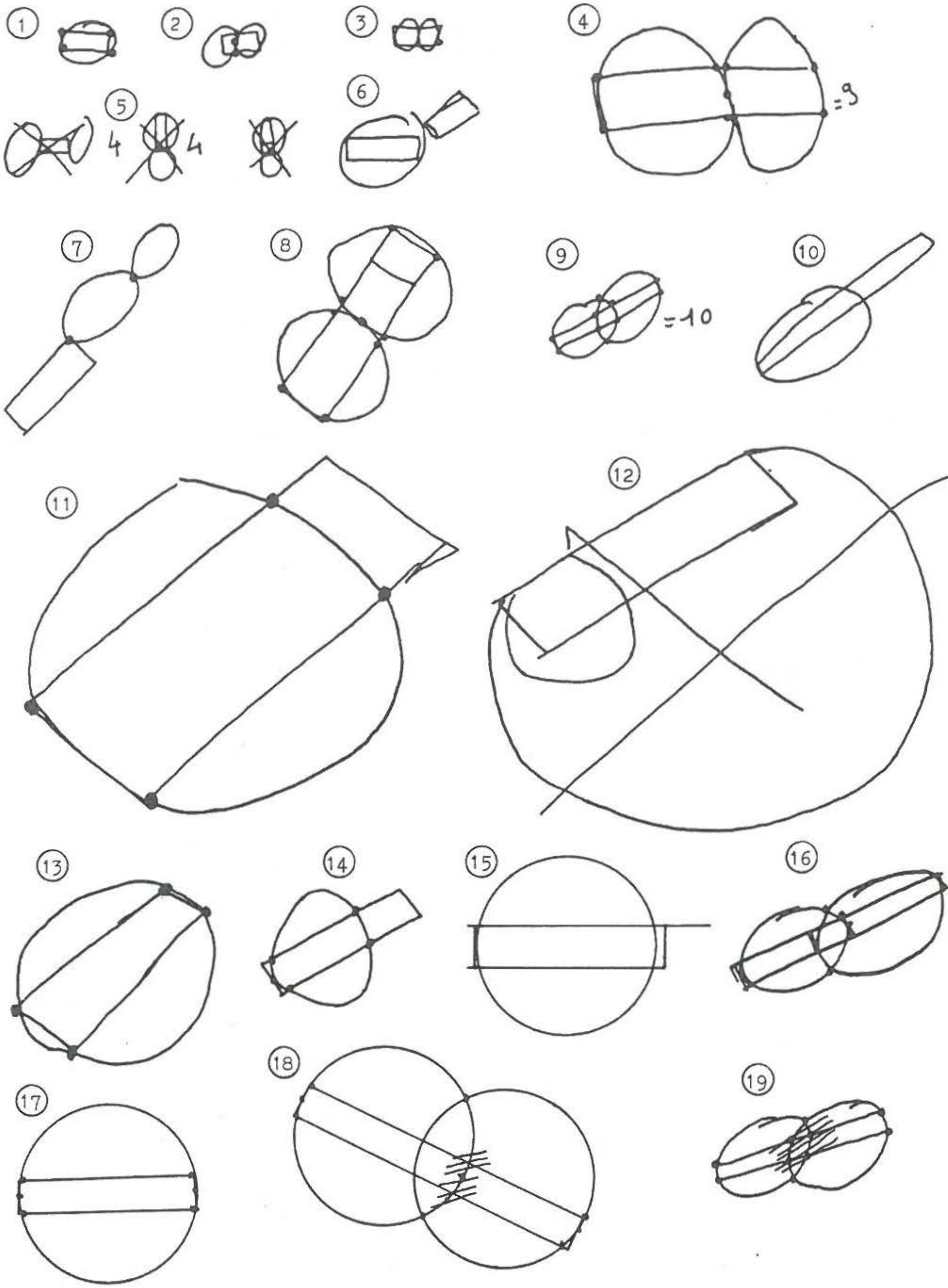
10



11

Les figures dessinées dans ce protocole sont la reproduction la plus fidèle possible des figures réalisées par l'élève ; toutes les figures ont été décalquées.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - MIC 3-14;07-0[1]



PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - MIC 3-14;07-1

L'élève commence par écrire sur sa feuille, sans dessiner, le texte suivant :

"2 ronds
1 rectangle
le périmètre du premier rond = x
le périmètre du second rond = y
le contour du rectangle = t
$x \times y = w$

w étant le nombre maximal de points d'intersection des 2 ronds dans différentes situations possibles".

MIC demande des explications sur l'énoncé du problème.
L'expérimentateur rappelle quel est le but du problème.
Ces demandes d'explication sur l'énoncé seront formulées plusieurs fois durant la séance.
L'élève continue à réfléchir puis écrit :

"$2 \pi R \longrightarrow$ formule du périmètre"

MIC demande si un certain rayon ou une mesure est donné pour les ronds.
L'expérimentateur répète l'énoncé.
A la cinquième minute, MIC réalise son dessin 1 .

1 

EXP - A quoi penses-tu ?

MIC - Quand je place deux ronds il y a 2 points d'intersection. Si je m'amuse à mettre deux ronds sur un même, tous les points du rond seront points d'intersection.

Et il écrit d'ailleurs sur sa feuille à côté de la figure 1 .

"2 ronds sur 1 seul et le rectangle ayant ses 4 coins sur le rond = le périmètre du rond".

MIC - ... appliquer la formule connaissant le rayon qui donne le périmètre.

L'expérimentateur lui propose de supposer que les cercles ne sont pas confondus.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - MIC 3-14;07-2

2 

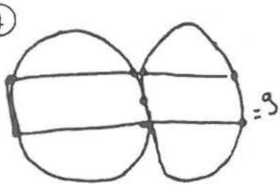
MIC réalise son dessin (2) à la onzième minute en traçant deux cercles puis le rectangle. Il ne compte pas les points. Il demande à nouveau des explications sur l'énoncé.

---

3 

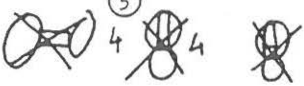
MIC réalise son dessin (3) tout de suite après.

---

4 

MIC réalise son dessin (4) à la douzième minute.
C'est le premier dessin où l'élève fait un décompte précis des points. Il trouve 9 points d'intersection.

---

5 

A la quinzième minute, MIC réalise les dessins (5) .
Il barre ensuite ses dessins.

A la dix-huitième minute, MIC écrit sur sa feuille :

"2 ronds séparés
2 ronds se croisent =
1 $\leqslant$ nombre d'intersection $\leqslant$ 2".

Il veut dire que le nombre de points d'intersection de 2 cercles distincts sécants est 1 ou 2. Il écrit ensuite sur sa feuille que, toujours dans le cas de "2 ronds séparés" :

"1 rectangle se croisant avec un rond
1 $\leqslant$ nombre d'intersection $\leqslant$ 4"

MIC - J'applique les 4 côtés du rectangle sur le périmètre du rond.

Il veut dire qu'il place les sommets du rectangle sur le cercle.

MIC - Ca fait maximum 4.

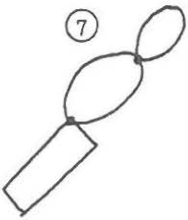
PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - MIC 3-14;07-3

6

Pour avoir le plus petit, on fait comme ça.

Il réalise alors son dessin 6 à la vingtième minute. Ce dessin sert à expliquer que si le rectangle a ses sommets sur le cercle, il obtient 4 points d'intersection qui sont pour lui le nombre maximum de points d'intersection qu'on peut obtenir en considérant l'intersection d'un cercle et d'un rectangle. Le deuxième rectangle R qu'il a tracé montre qu'un cercle et un rectangle peuvent avoir 1 seul point commun, ce qui est pour lui le minimum de points d'intersection qu'on peut obtenir en considérant l'intersection d'un cercle et d'un rectangle.

7

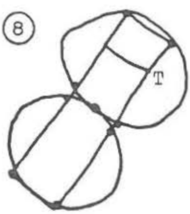


A la vingt-et-unième minute, il écrit :

"1 rectangle se croisant avec 2 ronds déjà croisés
$2 \leqslant$ nombre d'intersections".

Il accompagne ce texte du dessin 7 , qu'il réalise à la vingt-et-unième minute.

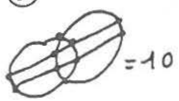
8



Il réalise 8 à la vingt-troisième minute, en traçant d'abord les deux cercles puis le rectangle. Dans un premier temps, son rectangle s'arrête à la largeur T. Puis, ayant déplacé cette largeur, il obtient 9 points.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - MIC 3-14;07-4

9



Il réalise son dessin 9 à la vingt-cinquième minute. Pour réaliser ce dessin, il trace d'abord les deux cercles, puis le rectangle.
MIC annonce que sa réponse est 10 ; il écrit et encadre ce résultat.
L'expérimentateur lui demande s'il est sûr de sa réponse.

MIC - Oui, Si je reviens à tous mes raisonnements ...

Il explique que deux cercles se coupent en deux points (au maximum) ; qu'un rectangle et un cercle se ooupent en 4 points au maximum ; et ensuite :

MIC - Je prends un deuxième rectangle et un deuxième cercle, donc j'allonge le rectangle précédent, ça fait 4 de plus.

EXP - Dans ton dessin 9 , tu as dix points, mais est-ce vraiment le maximum ?

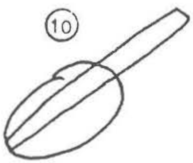
MIC - Oui, je pense ; avec mon raisonnement dans le cas de deux ronds séparés.

L'expérimentateur insiste encore, puis attend.

A la trente-deuxième minute, l'expérimentateur demande encore une fois à l'élève si dans le cas d'un rectangle et d'un cercle, il est sûr d'avoir un maximum égal à 4.
Pour répondre à cette question, MIC réalise la figure 10 , à la trente-troisième minute et répond :

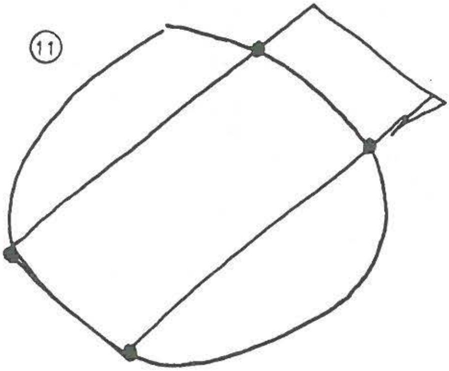
MIC - Oui, je pense.

10



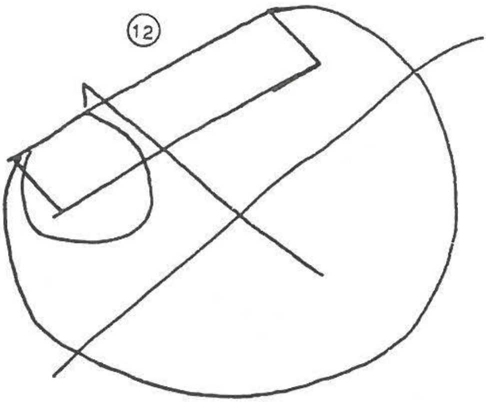
PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - MIC 3-14;07-5

(11)



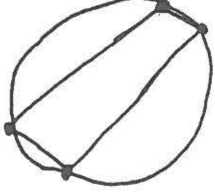
MIC réalise le dessin (11) aussitôt après. C'est l'expérimentateur qui lui a demandé un dessin plus gros.

(12)



Il réalise le dessin (12) à la trente-quatrième minute. Il a, semble-t-il, essayé de rendre confondus un arc de cercle et un côté du rectangle. Mais ce dessin est tout de suite barré.

(13)

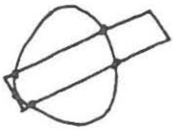


Il réalise le dessin (13) à la trente-quatrième minute.

On peut alors considérer qu'à la trente-quatrième minute, MIC estime sa recherche terminée. L'expérimentateur décide alors de relancer le problème en faisant une intervention importante ; pour cela, il va donner à partir de la figure (13) une idée à MIC :

EXP - Si tu déplaces un tout petit peu le cercle, est-ce que tu ne vas pas en avoir un peu plus, des points ?

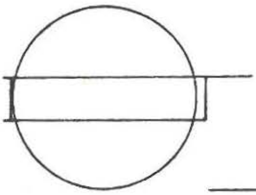
(14)



MIC réalise alors son dessin (14) , à la trente-cinquième minute. Il décompte 5 points.

---

(15)

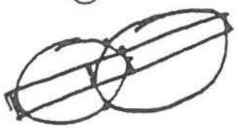


Il décide alors d'utiliser le compas pour contrôler son dessin (14) qui a été fait à main levée. Il réalise alors la figure (15) à la trente-sixième minute. Il déclare :

MIC - Il n'y en a pas que 4.

---

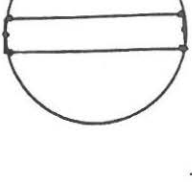
(16)



Il réalise la figure (16) à la trente-septième minute. Pour réaliser cette figure, il dessine tout d'abord un cercle, puis un rectangle, et ensuite un autre cercle, puis un autre rectangle ; enfin, il transforme les deux rectangles en un seul.

---

(17)

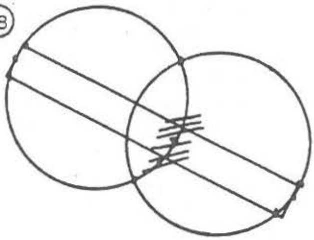


Il réalise la figure (17) à la trente-neuvième minute. La figure est faite à la règle et au compas, ainsi que les figures (15) et (18) .
Toutes les autres figures sont dessinées à main levée.
Il compte, sur le dessin (17) , six points d'intersection entre son rectangle et son cercle.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 1979 - MIC 3-14;07-7

---

(18)



MIC réalise la figure (18) à la quarantième minute. Il ne compte que 8 points, malgré les 12 évidents. Son décompte repose sur le raisonnement suivant :

Il prend un cercle et un rectangle ; puis un deuxième cercle et un deuxième rectangle ; il "enlève les points du milieu" ; ce qu'il explique sur la figure (19) réalisée à la quarante-deuxième minute en barrant "les points du milieu" ; il estime qu'il est obligé de barrer ces points lorsqu'il transforme ses deux rectangles en un seul. Il ne lui reste donc que 8 points ; sa réponse au problème est 8.
MIC ajoute que, lorsque plus haut, il n'avait que 4 points d'intersection entre un cercle et un rectangle, sa solution aurait dû être de 6 et non de 10.
Sa réponse est donc : $\boxed{8}$ et il encadre ce résultat ; la séance se termine à la quarante-cinquième minute.

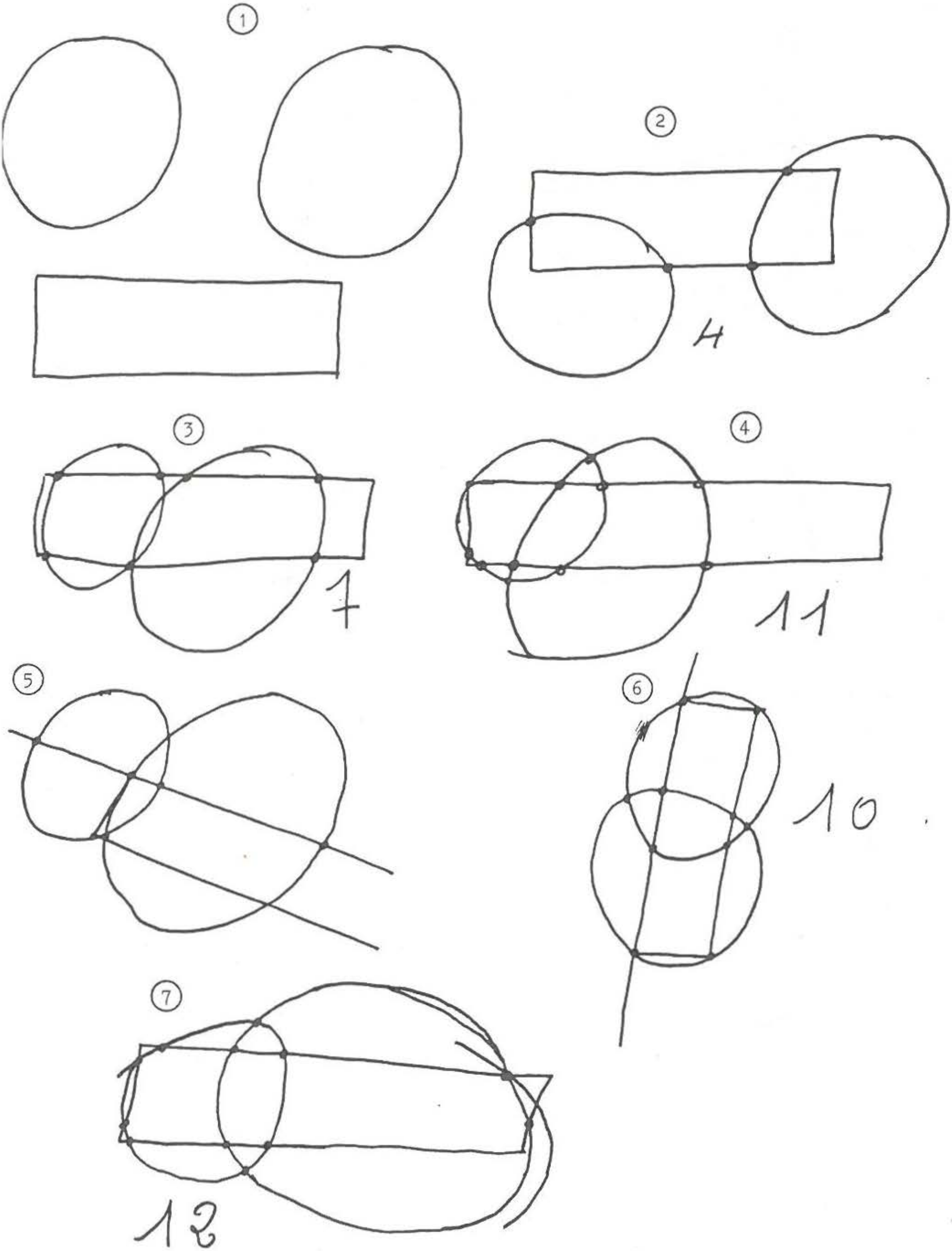
(19)

Dans une conversation après la sonnerie de fin de classe, MIC déclare à l'expérimentateur :

MIC - Il y aurait des mesures de cercles et de rectangles, j'aurais appliqué des formules et j'aurais préféré. J'aime bien les appliquer.

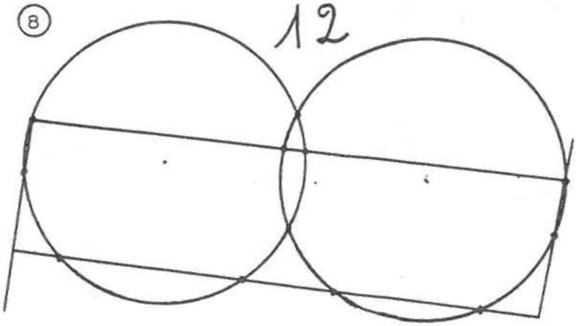
Les figures dessinées dans ce protocole sont la reproduction la plus fidèle possible des figures réalisées par l'élève ; toutes les figures ont été décalquées.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 79 - LOU 1-18;00-10[1]

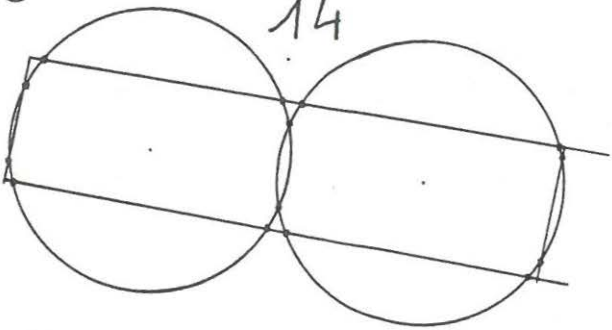


PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 79 - LOU 1-18;00-10^2

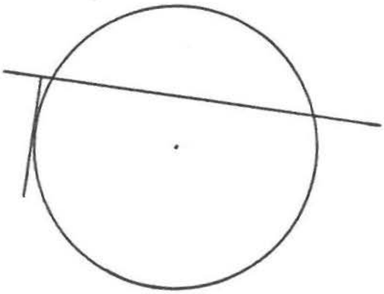
(8) 12



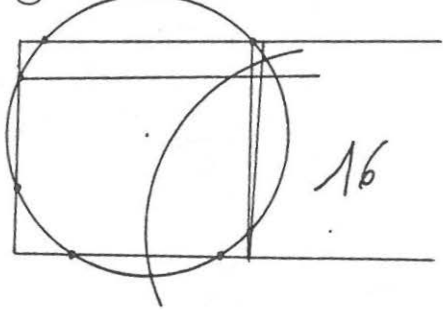
(9) 14



(10)



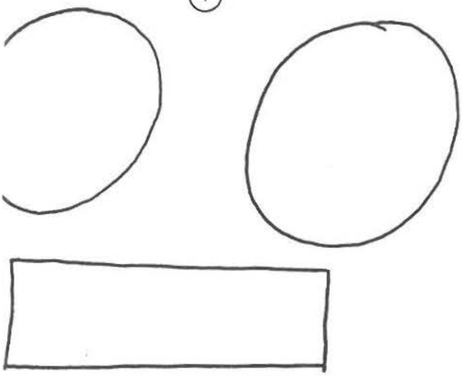
(11)



16

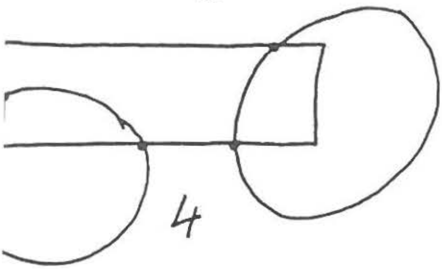
PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 79 - LOU 1-18;00-11

1



Très rapidement, l'élève réalise la figure 1 . Pour cela il trace, à main levée, deux cercles disjoints ; puis il trace, un peu plus bas, un rectangle.
Il utilise ce rectangle pour réaliser la figure suivante.

2



A la deuxième minute, il réalise 2 .
Pour cela il trace deux cercles sur le rectangle.

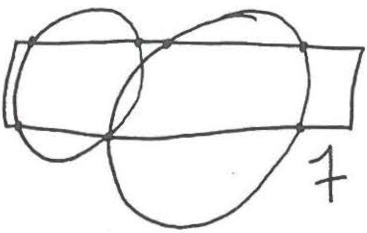
Expérimentateur - Que fais-tu ?

LOU - Je lis l'énoncé et je pose l'hypothèse pour voir.

Il semble travailler vraiment au hasard.
Il note le nombre de points d'intersection : 4. Il paraît déçu par ce résultat.

LOU - Je continue de chercher pour améliorer le nombre de points.

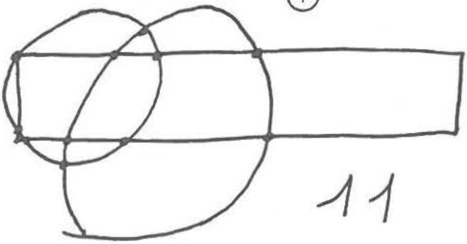
3



A la cinquième minute, il réalise 3. Pour cela il trace, tout d'abord, un rectangle, puis deux cercles sécants. Il compte 7 points d'intersection. Il a beaucoup de mal à compter les points qui sont au nombre de huit.

PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 79 - LOU 1-18;00-12

4



A la huitième minute, il réalise 4. Pour cela il place tout d'abord le rectangle, puis les deux cercles sécants.

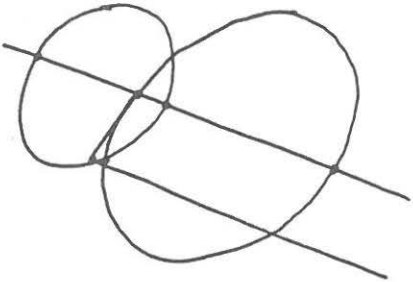
LOU - Les cercles ont deux points d'intersection.

EXP - Peuvent-ils en avoir plus ?

LOU - Non.

Il compte 11 points d'intersection.

5

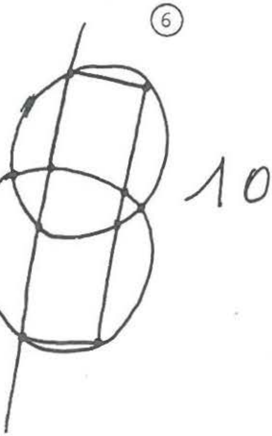


A la dixième minute, il réalise 5. Pour cela il trace, tout d'abord, les deux cercles sécants. Il place ensuite un côté du rectangle.

LOU - Un côté ça fait quatre points.

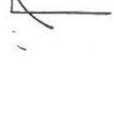
Il construit le rectangle peu à peu. Mais il abandonne avant d'avoir achevé sa construction.

6

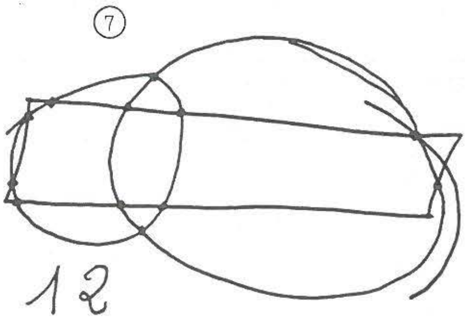


A la quatorzième minute, il réalise 6. Dans cette réalisation, il change la position du rectangle et des deux cercles par rapport à la verticale : les deux cercles sont maintenant l'un au-dessus de l'autre. Il obtient 10 points. Il pense qu'il en a perdu 1 car il en avait 11 en 4, et il n'en a plus que 10.
Il compare ligne à ligne les deux dessins. 4 et 6 , pour voir où il a perdu ce point.

LOU - La droite doit passer comme ça, pour avoir deux points dans l'angle.



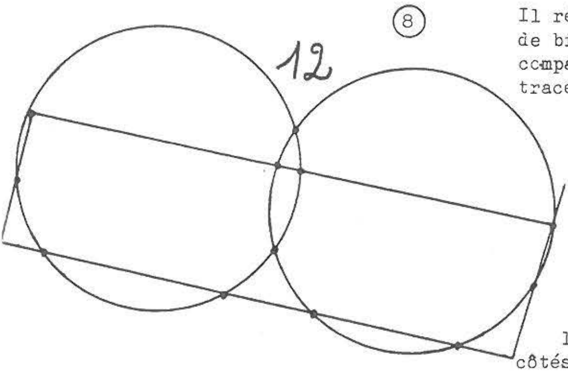
PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 79 - LOU 1-18;00-13



A la vingtième minute, il réalise (7). Il a beaucoup de peine à réaliser les cercles à la main. Il obtient 12 points. Il constate qu'il obtient six points pour un cercle et quatre seulement pour l'autre.

LOU - Un coin est perdu ... ne sont pas égaux.

Il constate qu'un des quatre coins du rectangle n'est pas coupé par un cercle, et que cela vient du fait que les cercles ne sont pas tracés avec toute la régularité voulue.



Il réalise la figure (8) . Dans un soucis de bien faire les cercles, il utilise le compas. Ses quatre dernières figures seront tracées à la règle et au compas, alors que les sept premières ont été tracées à main levée.

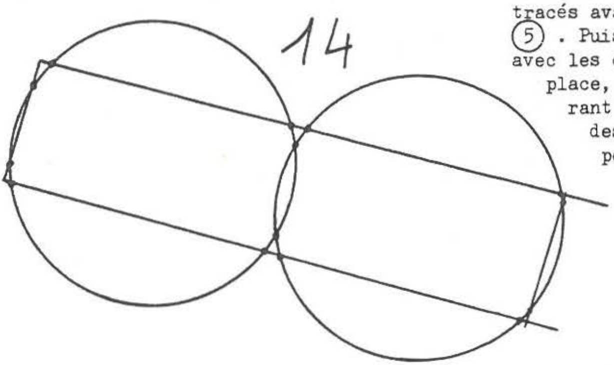
De nouveau, il retrouve 12 points d'intersection.

LOU - Faire les grands côtés du rectangle est facile ; quatre points sur chacun ; mais pour les autres, non.

Il trouve qu'il est facile de tracer les grands côtés du rectangle ; ces côtés lui donnent quatre points. Pour les petits côtés, il a des difficultés. Il n'arrive pas à faire passer les cercles où il veut. Les coins ne sont pas coupés comme il le souhaite.

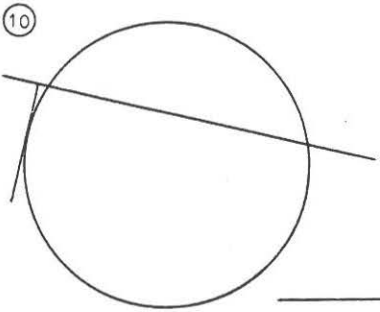
PROBLEME CRI - Octobre-Novembre 79 - LOU 1-18;00-14

9



A la trentième minute, il réalise 9. Pour cela il trace tout d'abord les deux cercles. Les deux cercles sont d'ailleurs tracés avant le rectangle depuis la figure 5 . Puis il trace les deux grands côtés, avec les quatre points d'intersection. Il place, enfin, les petits côtés en comparant sa réalisation actuelle avec le dessin 7 . Il arrive ainsi à 14 points.

10

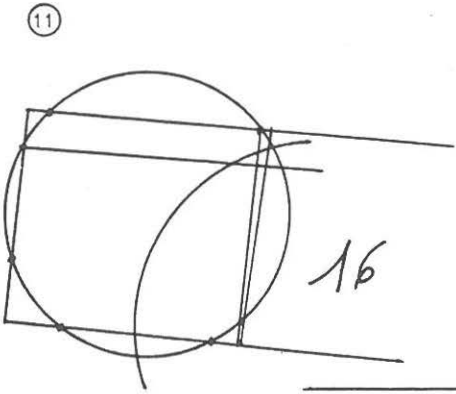


A la trente-huitième minute, il déclare :

LOU - Je vais prendre un cercle et le rectangle et je cherche le maximum de points.

Il réalise alors la figure 10 . Il trace un cercle puis commence à tracer un rectangle. Ce dessin reste inachevé.

11

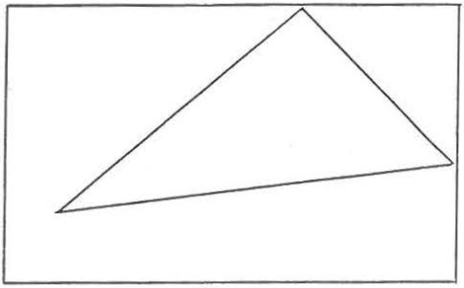


Il réalise, alors, 11 . Il prend de nouveau un cercle, puis un rectangle et cherche à placer un deuxième cercle. Il hésite beaucoup. Comme la séance s'achève, il ne peut terminer. Pourtant il est persuadé qu'il y a huit points d'intersection pour un cercle et un rectangle. Il marque 16 comme réponse à côté de cette dernière figure.

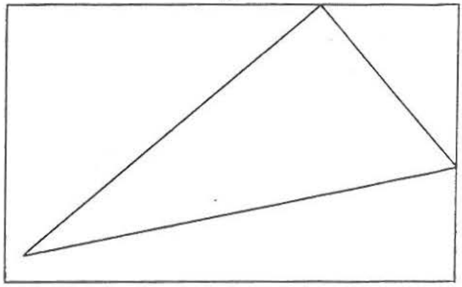
- CHAPITRE XXVIII -

PROTOCOLES DU PROBLEME SIM

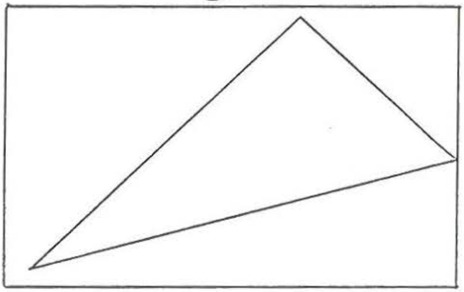
1



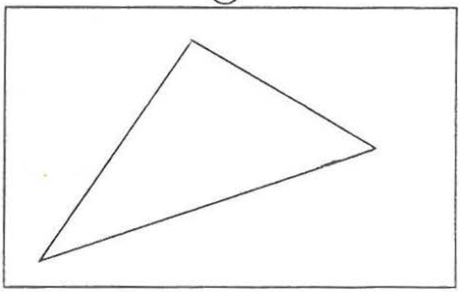
2



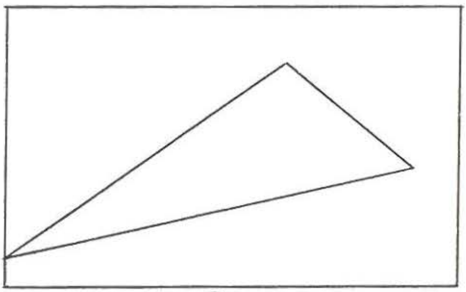
3



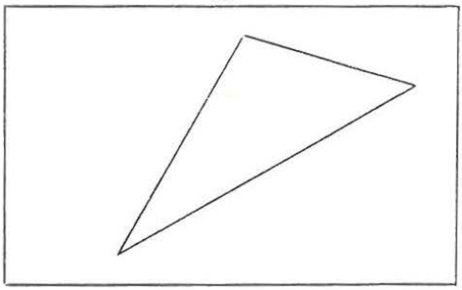
4



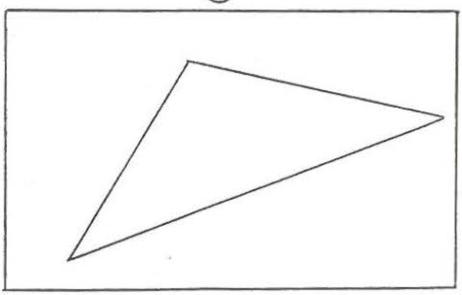
5



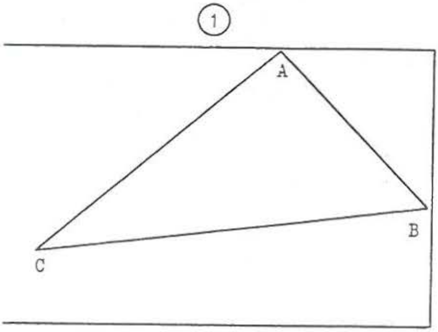
6



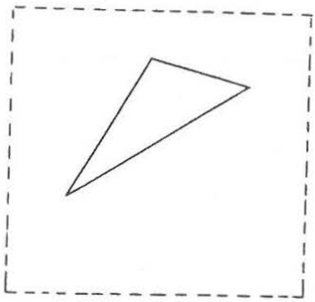
7



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - COR 6-11;07-1



COR mesure le petit côté du triangle donné T, trouve 4 cm ; elle réalise alors sa figure (1) . Pour cela elle dispose en biais un segment AB de 8 cm. Elle mesure alors le côté moyen de T, le double et place le segment AC de 12 cm sur sa feuille. Elle dispose AB et AC en examinant, au coup d'oeil, les positions des côtés correspondants de T. Durant toute sa recherche, les bords des feuilles sur lesquelles se trouvent le rectangle R et le triangle T sont deux à deux parallèles.
Lorsqu'elle réalise (1) , le triangle T a la position indiquée ci-contre.



Elle trace ensuite le segment BC. Elle observe.

COR - Ca ne va pas.

EXP - Pourquoi ?

COR - Il me semble que le premier est plus penché que l'autre.

Elle trouve que le côté moyen du triangle T est plus incliné par rapport à l'horizontale que le côté AC qu'elle vient de tracer.

EXP - Alors ?

COR - Peut-être que là, il y a un angle droit et là non.

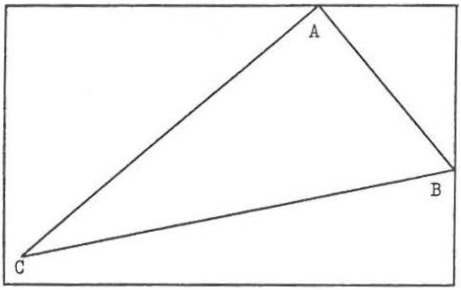
Elle se demande si le grand angle $\hat{g}$ de T et l'angle $\hat{A}$ de son triangle en (1) ne sont pas différents, $\hat{g}$ étant un angle droit et $\hat{A}$ n'étant pas un angle droit.

COR - Mais j'aurais pu le faire un peu plus grand, comme cela le deuxième trait aurait été un peu plus penché comme l'autre.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - COR 6-11;07-2

COR pense qu'en allongeant le segment AC, du côté de C, elle aurait pu obtenir ainsi un segment BC plus incliné, puisque B restant fixe, C se serait trouvé un peu plus bas ; BC aurait donc eu une inclinaison correspondant mieux à celle du grand côté de T. C'est le côté BC qu'elle appelle le deuxième trait.

2



A la cinquième minute, COR réalise la figure 2. Elle commente cette réalisation.

COR - Celui-là, je l'ai fait un peu plus grand que l'autre.

EXP - Comment ?

COR - J'ai pas multiplié, j'ai simplement fait un peu plus long que l'autre.

Elle procède donc de la manière suivante. COR trace tout d'abord le petit côté AB de 8 cm, donc double du petit côté de T. Elle trace ensuite AC, sans chercher à le doubler comme en 1, mais en lui donnant une longueur supérieure à celle qu'il avait en 1. Elle trace enfin le côté BC.

EXP - Est-ce le même ?

COR - Non, le 3ème côté est plus, ... est pas, est ..., je ne sais pas comment dire.

EXP - Penché ?

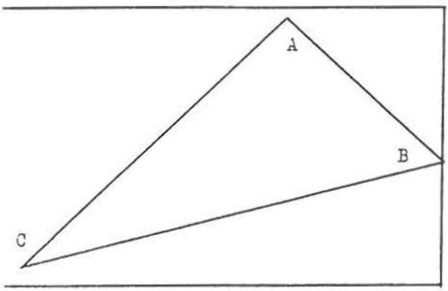
COR - Oui, c'est exactement ça, il est plus penché.

En observant sa figure 2 et en la comparant au triangle T, elle constate que le grand côté de T est plus incliné que BC, par rapport à l'horizontale.

A la dixième minute, elle dispose soigneusement la feuille modèle sur laquelle se trouve T à côté de la feuille R sur laquelle elle dessine ; les deux feuilles sont toujours à bords, deux à deux parallèles,

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - COR 6-11;07-3

3



comme nous l'avons indiqué en 1 .
Elle réalise la figure 3. Pour cela elle construit le petit côté AB de 8 cm ; elle dessine ensuite le côté AC, en essayant au coup d'oeil de le tracer parallèle au côté moyen de T. Elle ne se préoccupe pas de la longueur de AC.
Elle observe.

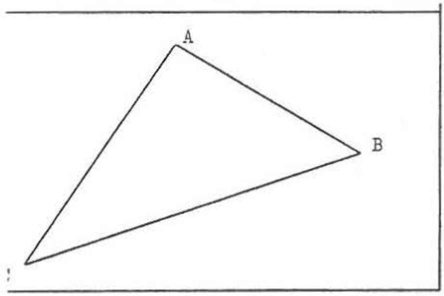
COR - Non, il n'est pas assez toujours penché. Il n'est pas assez penché vers le sol.

Elle ne fait aucun cas du petit côté AB, mais constate un manque d'inclinaison de AC.
Elle trace BC.

COR - Peut-être que celui-là, le grand !

Là encore elle observe que le grand côté BC n'est certainement pas assez penché.

4



A la vingtième minute, elle réalise 4.
Elle trace à nouveau un petit côté AB double du petit côté de T. Elle trace ensuite un côté moyen AC volontairement plus incliné par rapport à l'horizontale qu'il ne l'avait été jusque là. Tout le tracé est fait au coup d'oeil. Elle achève son triangle en joignant B et C.

EXP - Est-ce le même ?

COR - Oui.

EXP - En es-tu sûre ?

COR - Non.

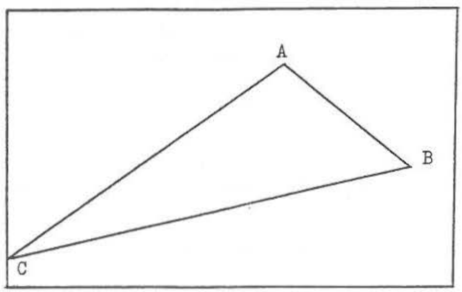
EXP - Pourquoi ?

COR - Ce trait est presque plus long que celui-là et là c'est pas vrai ; j'aurais dû le faire plus court.

Elle constate que AB est presque aussi long que BC alors que le petit côté de T est nettement plus petit que le grand côté de T ; elle estime qu'elle aurait dû tracer un segment AB plus court.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - COR 6-11;07-4

5



A la trente-cinquième minute elle réalise la figure 5 . Pour cela elle trace un segment AB de 6 cm qui sera le petit côté de son nouveau triangle ; elle a ainsi voulu raccourcir AB.
Elle trace ensuite AC et BC.

EXP - Est-ce le même ?

COR - Oui.

EXP - En es-tu sûre ?

COR - Oui.

EXP - A quoi le vois-tu ?

COR ne répond pas.

EXP - Si je te disais : ce n'est pas le même, comment m'expliquerais-tu que j'ai tort ?

COR - Par transparence.

Elle cherche en posant le triangle donné T sur la figure 5 . L'expérimentateur lui demande ce qu'elle entend par transparence.
Elle superpose alors le grand angle $\hat{g}$ de T à l'angle $\hat{A}$.

COR - Là, il y a la même ouverture.

Elle constate que les deux angles $\hat{g}$ et $\hat{A}$ se superposent.

EXP - Cela suffit-il à me convaincre ?

Elle compare alors par transparence le petit angle $\hat{C}$ de son triangle ABC et le petit angle $\hat{p}$ du triangle donné T.
Elle sourit !

COR - C'est pas le même là, il n'y a pas la même ouverture.

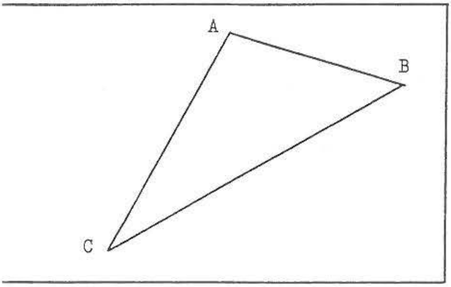
Elle a constaté par transparence que $\hat{C} \neq \hat{p}$.

EXP - Alors ?

COR - Il faudrait que je mette ma feuille dessous comme si je décalquais.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - COR 6-11;07-5

6



A la quarantième minute elle décide donc de décalquer. Elle réalise sa figure 6 . Pour cela elle décalque tout d'abord l'angle $\widehat{A}$, c'est à dire un couple de deux demi-droites d'origine A.
Puis elle trace le troisième côté BC en respectant un certain parallélisme entre le grand côté de T et le côté BC.

EXP - Mais là tu n'as pas décalqué ?

L'expérimentateur lui fait observer, d'un air interrogatif, que le côté BC n'a pas été décalqué à partir du grand côté du triangle T.

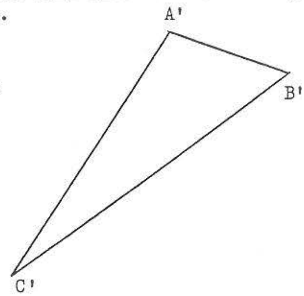
COR - Non, j'ai agrandi.

L'élève explique que, pour pouvoir agrandir son triangle ABC par rapport à T, elle ne peut pas décalquer le côté moyen de T, mais qu'elle est obligée d'allonger ce côté moyen de T et de prendre AC.

COR - Sur la photo, il doit être plus grand que l'autre.

L'élève explique encore que dans le triangle T, c'est ce qu'elle appelle la photo, le côté moyen est plus grand que le petit côté ; elle a donc décidé d'agrandir dans son dessin le côté moyen AC.

L'expérimentateur fait alors un dessin représenté ci-contre.
Il s'agit d'un triangle A'B'C' avec un rapport $\frac{A'C'}{A'B'}$ nettement supérieur à $\frac{M}{P}$, le rapport des moyen et petit côtés de T.
Le grand angle de T est égal à $\widehat{A'}$. Il pose alors la question suivante :



- Est-ce le même ?

L'expérimentateur demande de comparer A'B'C' et T.

L'élève compare par transparence A'B'C' et T et répond.

COR - Non.

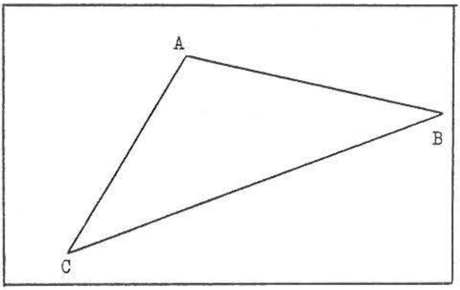
EXP - Pourtant j'ai fait pareil que toi !

COR - Oui mais le petit il est pas assez prolongé.

EXP - Comment le prolonger un peu plus ?

COR - Je vais essayer.

7



A la cinquantième minute elle réalise la figure 7.
Elle trace tout d'abord un segment AB de 10 cm qui doit être le petit côté du triangle cherché. Puis entièrement au jugé et sans grande précision, elle trace AC, qui doit être le côté moyen du triangle cherché. Elle achève son triangle en joignant B et C.

EXP - Alors ?

COR - Ca va toujours pas.

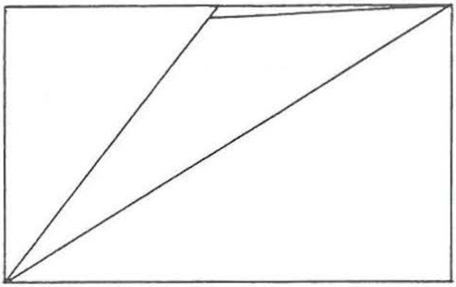
Elle compare par transparence le triangle T et le triangle ABC obtenu en 7.

COR - Il est encore trop penché, il faudrait peut-être garder la même longueur là et pousser un peu par là.

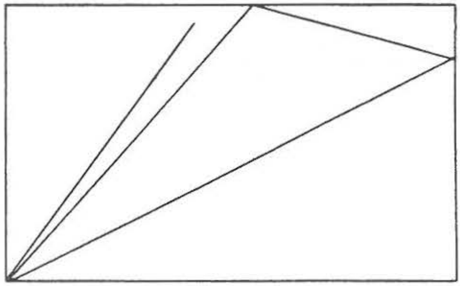
Elle constate que le grand côté de T est plus penché que CB. Pour modifier cette situation elle envisage, tout en gardant le même côté AB, d'allonger le côté AC de telle sorte que, le point C étant plus bas, l'inclinaison de BC s'accentue.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-0[1]

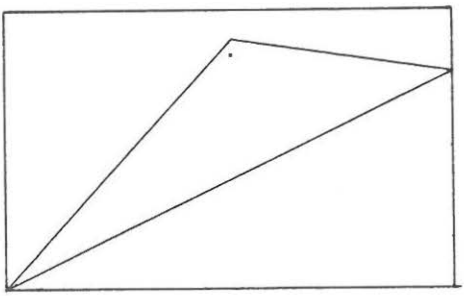
1



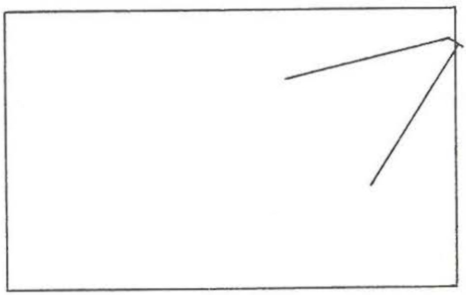
2



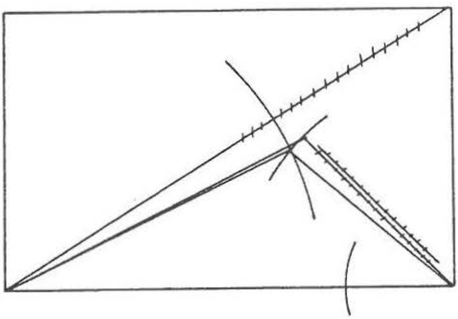
3



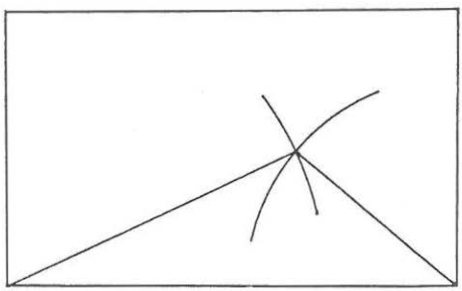
4



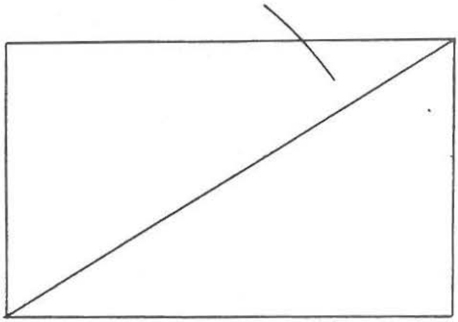
5



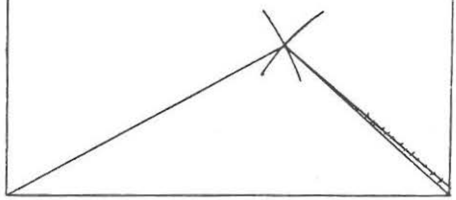
6



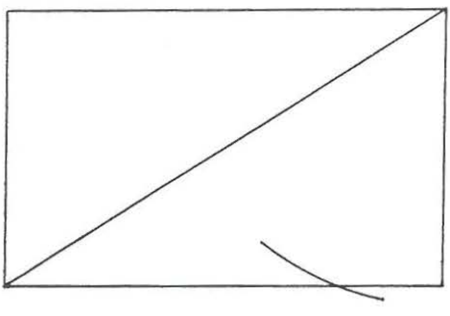
(7)



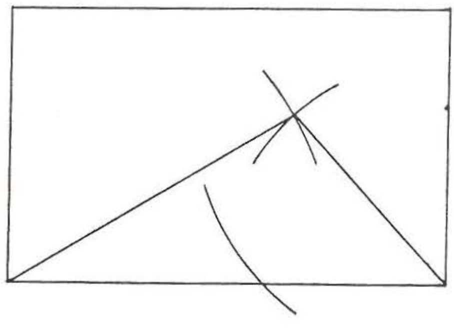
(8)



(9)

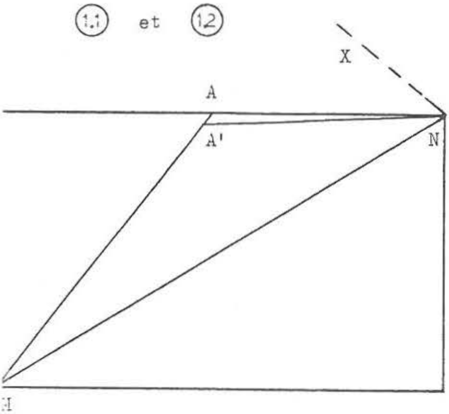


(10)



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-1

(1.1) et (1.2)



Pour réaliser sa première figure (1.1), l'élève prend sa règle et trace la diagonale MN du rectangle donné R. Elle s'explique.

GAL - Cette droite (le grand côté du triangle proposé T) étant la plus grande, je prends la plus grande là (MN).

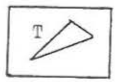
Il ne fait aucun doute pour elle que le plus grand segment contenu dans le rectangle est la diagonale. Elle pose une question.

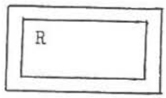
GAL - Est-ce qu'on peut se servir des traits du haut ?

Elle désigne par "traits du haut" les longueurs du rectangle R.

EXP - Tu fais comme tu veux.

Elle place les deux feuilles comportant T et R de telle sorte qu'elles aient des bords parallèles. Elle pose sur R sa règle parallèlement au côté moyen de T. Puis elle trace le segment MA. Elle a essayé :





GAL - De faire la plus grande droite.

Mais elle ne veut pas se servir de la longueur du rectangle comme troisième côté ; elle ne choisit donc pas AN et s'en explique :

GAL - Ca faisait un angle droit.

Ce qui signifie, pour elle, que le petit côté qu'elle veut tracer, ne doit pas être horizontal car il ne l'est pas dans T.
Elle trace donc NA'.
Mais elle n'est pas satisfaite.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-2

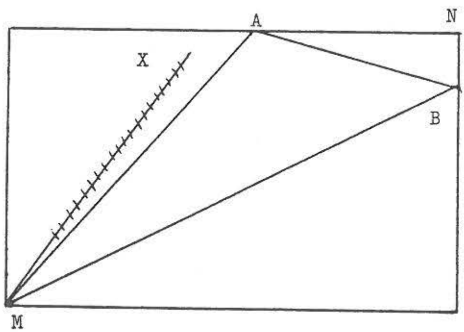
Elle veut que le petit côté du triangle cherché soit porté par une demi-droite NX que nous représentons par des pointillés sur la figure précédente. Mais puisqu'elle a "fait cette droite là", le triangle sort du rectangle, ce qui n'est pas possible. Elle estime qu'ayant choisi MN, donc le point N, elle ne peut plus trouver un petit côté, issu de N et ayant une direction convenable.

Elle envisage donc de modifier son tracé.

GAL - Cette diagonale ici un peu plus bas.

Elle veut remplacer la diagonale MN par un segment MB, B étant sur la largeur de R situé à droite, un peu en dessous de N ; ce qui lui permettrait de redresser son petit côté.
Elle réalise la figure (21) . Elle dessine le triangle MBA, après avoir tracé un côté MX qu'elle a barré parce qu'il ne lui convenait pas.
Son triangle MBA et le triangle T sont posés sur la table, l'un au dessus de l'autre, les feuilles sur lesquelles ils se trouvent, ayant des bords parallèles. MBA et T sont à peu près homothétiques.
On peut remarquer que l'angle que fait le petit côté avec l'horizontale est conservé à moins de 2° près ; tandis que les grands angles des deux triangles T et MBA diffèrent de plus de 10°.
L'élève regarde longuement et compare au coup d'oeil les triangles T et MBA, placés dans les positions indiquées.
Maintenant, elle veut mesurer les côtés AB et AM.

(21)



GAL - Pour voir combien il y a de différence.

Elle trouve que ça ne va pas et elle explique pourquoi.

GAL - Là, il y a quatre (petit côté de T) et là, il y a un peu plus que 8 (AB), ça fait qu'il y a à peu près le double ; tandis que là, il y a 6 (côté moyen de T) et là, ça fait 18 (MA). Alors c'est pas tout à fait le vrai.

En fait, MA = 14 cm.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-3

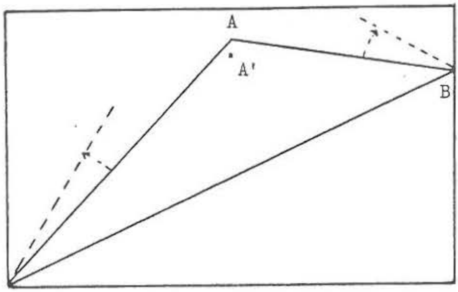
Elle ajoute :

GAL - Je vais essayer de faire le même là (AB) et l'autre (MA) plus petit.

31

A la huitième minute, elle passe à une nouvelle réalisation : 31 . Elle trace tout d'abord le segment MB. Elle est gênée car elle se demande si :

GAL - En faisant 8 (pour AB) ..., il faudrait que je fasse 12 (pour MA) ?



Elle marque alors un point A' à "8" centimètres de B. En fait A'B = 8,6 cm. Puis elle rectifie, et estime que ce point A' est à 12 cm de M et à 8,5 cm de B.
Elle choisit alors un deuxième point A qui lui se trouve :

GAL - à 8,5 (de B) et à 12,5 (de M).

Elle examine, au coup d'oeil, son triangle ABM.

GAL - C'est pas assez comme ça.

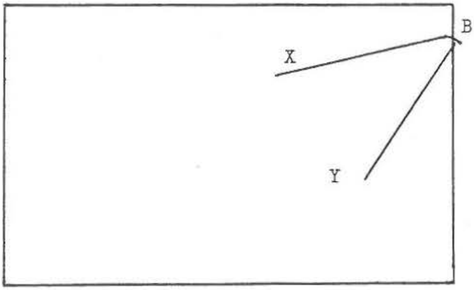
Elle indique, de la main, que les demi-droites BA et MA doivent s'écarter un peu plus de MB ; ce que nous indiquons par des pointillés sur la figure précédente. Les angles $\hat{B}$ et $\hat{M}$ de son triangle MBA sont plus petits que les angles correspondants de T.

Mais, alors, elle ajoute :

GAL - Si je le monte, ça va plus faire la mesure !

Et elle reste perplexe.

41



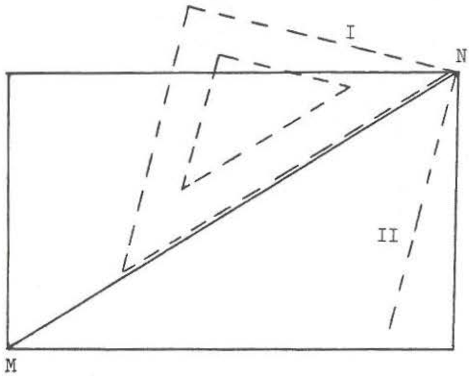
Elle envisage alors la réalisation 41
Elle part d'une autre idée.

GAL - Peut-être qu'en le faisant avec l'équerre, ça me fera ça.

Elle pense utiliser l'équerre isocèle qui est à sa disposition pour reproduire l'angle moyen de T qui mesure un peu plus de 47°. Elle place un sommet de l'équerre en un point B, choisi sur la largeur du rectangle situé à droite. Elle reproduit l'angle de 45° de l'équerre et trace ainsi XBY.
Puis elle abandonne ce dessin pour passer à la réalisation suivante.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-4

(51) et (52)



A la dix-huitième minute elle commence sa réalisation (51) . Elle trace la diagonale MN. Puis, après avoir contrôlé rapidement que l'angle de 45° donné par l'équerre est le même que l'angle moyen de T, elle place l'équerre au dessus de MN dans la position I indiquée par la figure (51)

GAL - ... ne peut pas sortir.

Cette situation ne lui convient pas car le triangle doit être dans le rectangle R.

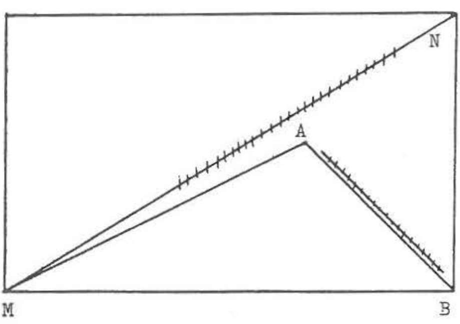
Elle change donc la position de son équerre, en disant :

GAL - Je peux en faire un comme ça.

Sa réalisation (52) consiste à placer son équerre dans la position II, sous la diagonale. Nous avons schématisé cette position sur la figure précédente.
Puis elle abandonne cette position, à cause du triangle T qui ne lui semble pas correspondre au triangle qu'elle envisage à partir de II.
Elle barre la diagonale MN, comme nous l'indiquons sur (53) et passe à une autre construction.

---

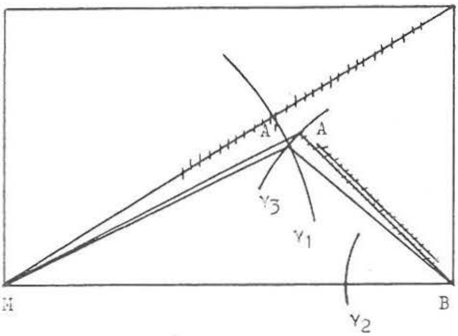
(53)



Elle réalise (53) . Pour cela elle trace le segment AB, grâce aux 45° de l'équerre. Mais elle s'y reprend à deux fois. Son premier segment est barré et c'est ensuite AB qui est tracé. Elle prend une longueur AB égale à "8" ; en fait AB = 7,9 cm.
Elle joint, ensuite, MA en constatant que MA a pour longueur "12,5", alors qu'elle avait "6" pour le côté correspondant de T.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-5

54



Elle dit alors :

GAL - Si je fais avec le compas ...

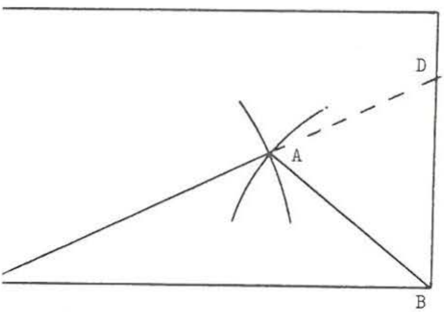
Et elle explique comment elle compte procéder pour réaliser 54 , et réalise 54 . Pour cela elle trace un arc de cercle γ_1 centré en M et de rayon 12 cm. Elle trace, ensuite, un arc de cercle γ_2 centré en B et de rayon 4 cm. Mais elle constate que ces deux arcs de cercle ne se rencontrent pas. Elle est un peu déçue. Presque aussitôt elle réagit.

GAL - Ah ! mais il faut que je fasse 8 pas 4 ; je fais 8 pas 4.

Elle obtient alors un arc de cercle γ_3 centré en B de rayon 8 cm qui coupe γ_1 précédent en A'. Ayant obtenu le triangle MA'B, elle barre le triangle MBA.

---

61 et 62



Puis, à la dix-neuvième minute elle déclare :

GAL - Je vais le refaire au propre.

Elle réalise alors la figure 61 sur une autre feuille. Sur cette figure, elle trace au compas le triangle MBA, avec AB = 8 cm et MA = 12 cm, MB étant égal à la longueur du rectangle (17 cm).

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-6

L'expérimentateur pose une question.

EXP - As-tu répondu au problème posé ?

Elle relit l'énoncé et semble trouver une contradiction entre "le même" et "le plus grand". L'expérimentateur lui explique qu'on veut que ce soit le même, comme un enfant ressemble à ses parents, qui sont plus grands. Elle semble bien comprendre cette idée mais elle remarque que si elle cherche à faire le plus grand possible, ça ne sera pas le même. Puis elle affirme au sujet du triangle MAB de sa réalisation 61 :

GAL - C'est le même, mais ce n'est pas le plus grand ; je peux faire le double et demi.

A la vingt-troisième minute, elle émet la proposition suivante :

GAL - Je vais voir combien je peux en ajouter sur chaque branche.

Elle réalise alors 62 . Elle mesure le prolongement AD du segment MA, D étant sur la largeur du rectangle. Elle obtient AD = 6,5 cm. Elle n'a pas tracé AD. Elle a un projet.

GAL - Essayer d'ajouter 6,5 cm.

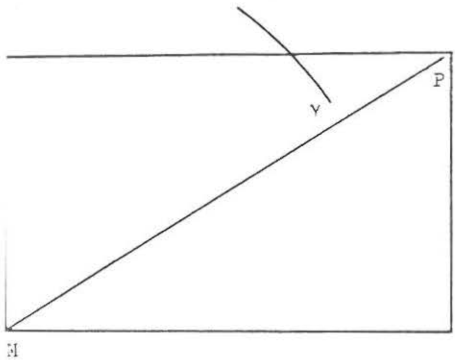
Elle ajoute 6,5 cm au grand côté ce qui lui donne 23,5 cm (17 + 6,5).
Mais elle estime alors qu'elle ne peut pas pousser plus loin sa construction car la plus grande longueur, c'est à dire la diagonale, ne mesure que 19,8 cm.

En conséquence de quoi elle modifie sa démarche.

GAL - ... ajouter moins.
... 3,5 cm partout.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-7

7.1



Elle réalise alors la figure 7.1 . Pour cela elle trace un segment MP = 19,5 car

16 + 3,5 = 19,5.

Puis, au moyen du compas, elle trace l'arc γ d'un cercle de rayon :

12 + 3,5 = 15,5.

Mais elle fait une constatation.

GAL - Ca marche pas.

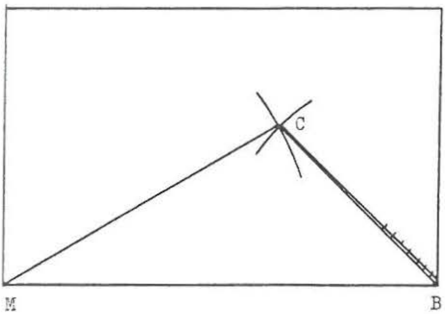
En effet, le petit côté doit avoir une longueur de "11,5" (2 × 4 + 3,5 = 11,5).

GAL - Je ne peux pas le faire. Je n'ai pas assez de place. Ca va déborder là-dedans.

Elle estime que son troisième sommet va se retrouver à l'extérieur du rectangle.

A la vingt-neuvième minute, elle mesure la longueur de son rectangle R et trouve 16,7 cm. Elle déclare qu'elle va "faire 16,70 et ajouter 0,70 partout", soit "8,70" et "12,70".

8.1



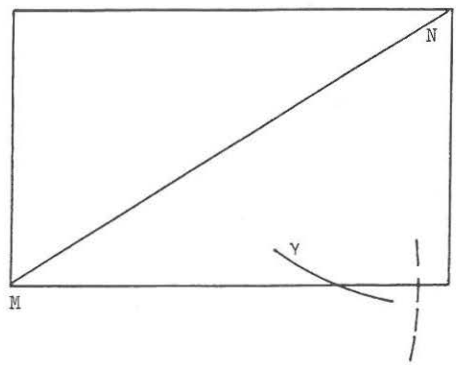
Elle réalise alors la figure 8.1 . Pour cela elle utilise le compas. Mais le compas étant un peu trop rigide, elle a du mal à régler son écartement et commet donc des erreurs dans l'établissement des longueurs. En fait, son triangle MBC, sur la figure 8.1 , est tel que :

MC = 12 cm et BC = 8,5 cm.

Elle barre un premier segment BC qu'elle a mal tracé.
Elle relit encore une fois l'énoncé.
Elle se demande comment faire un triangle plus grand.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-8

91

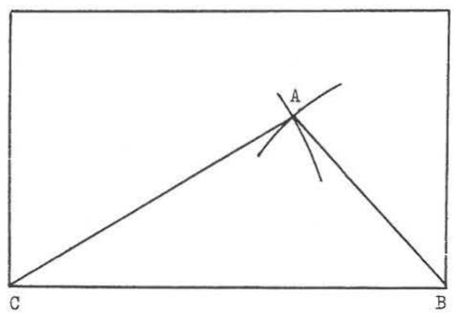


A la trente-deuxième minute, elle explique sur sa réalisation 91 que, si elle trace la "grande diagonale" MN, elle ne peut pas placer son triangle au-dessus de la diagonale. Mais elle peut le placer au-dessous de la diagonale "peut-être".
Elle essaie alors de réaliser ce triangle. Elle mesure MN = 19,5 cm. Elle ajoute donc "3,5", et obtient ainsi 11,5 et 15,5.
Elle trace l'arc γ d'un cercle de centre N et de rayon 11,5 cm, approximativement. En fait ce rayon mesure 11,2 cm.
Mais, à ce moment, elle s'aperçoit que le cercle de centre M et de rayon 15,5 cm coupe l'arc précédent à l'extérieur du rectangle.

GAL - Ca marche pas.
Alors je vais garder celui-là (81).

L'échec de sa réalisation 91, l'amène à considérer 81 comme sa réponse.

101



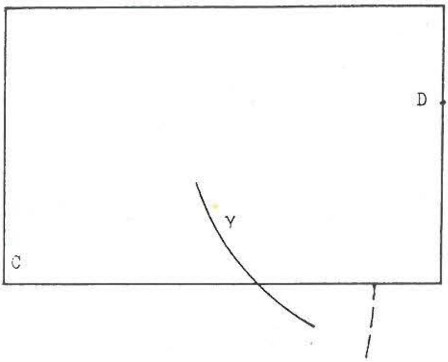
A la trente-septième minute, elle décide de refaire son dessin 81, ce qui donne la réalisation 101.
Elle construit, donc, au compas, un triangle BAC avec :

CB = 16,7 cm
AC = 12,7 cm (en fait 12,5 cm)
BA = 8,7 cm (en fait 8,4 cm).

Pour les mêmes raisons que précédemment, elle ajoute 0,70 aux doubles des côtés de T. Elle pense avoir là une réponse intéressante. Mais elle trouve que "le rectangle, il est grand" et le triangle "ça fait petit". Elle cherche donc "un autre moyen pour faire plus grand".

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GAL 5-11;06-9

102



Elle se propose alors de prendre un grand côté dont la longueur est de 18 cm, c'est à dire : 16 + 2.
Elle réalise alors la figure 102 . Elle choisit un point D sur la largeur du rectangle située à droite tel que CD = 18 cm.

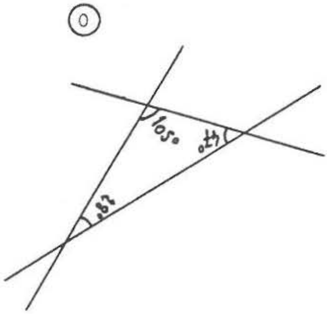
GAL - Je prends ensuite 14, puis 10.
Ca fait toujours trop loin.

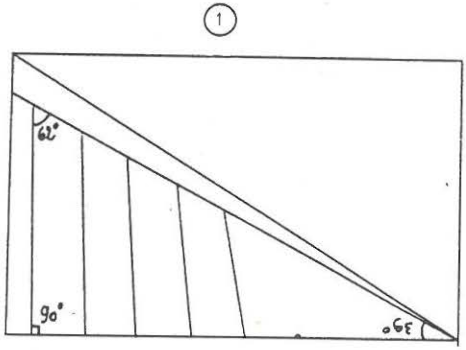
En effet, elle trace un premier arc γ du cercle de centre D et de rayon 10 cm.
Avant de tracer l'arc du cercle centré en C et de rayon 14 cm, elle se rend compte que ces deux arcs se coupent hors du rectangle : "trop loin".
Sa réponse est donc donnée par 101 .
Elle réfléchit ...
A la quarante-quatrième minute, elle mesure la hauteur du triangle donné T, et trouve 3 cm. Elle mesure la hauteur du triangle ABC de 101 et trouve 6 cm.

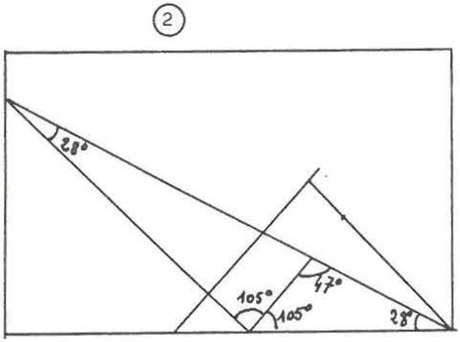
GAL - J'avais ajouté 70 alors c'est pas ça ... si, c'est ça ...

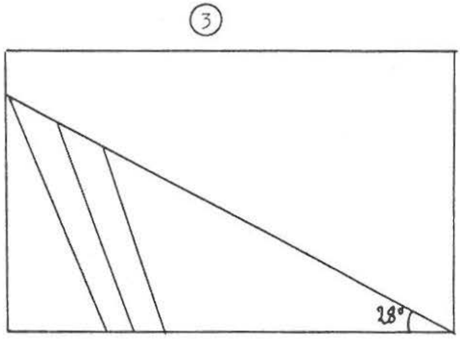
Elle aurait voulu trouver 6,70 cm ... mais la séance s'achève.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - ERI 5-12;04-0[1]









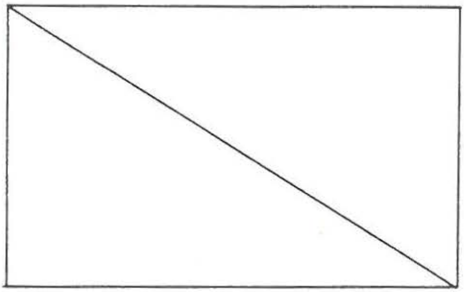
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - ERI 5-12;04-1

Dès le début ERI déclare :

- Au maximum le plus grand côté peut faire la diagonale, ce qui est le plus grand. Je commence par tracer la diagonale.

Il décide donc de prendre la diagonale du rectangle proposé comme grand côté du triangle cherché.
Il réalise, à la première minute, son dessin (1.1) en traçant cette diagonale.
Puis ERI mesure la longueur du grand côté du triangle donné T, trouve 8,1 cm ; il mesure la diagonale, trouve 20 cm.
Il calcule ensuite la différence
20 - 8,1 = 11,9 cm.
Il mesure, enfin, les autres côtés du triangle et ajoute la différence qu'il vient de trouver à ces côtés.
Il commence par ajouter 11,9 au côté moyen qui mesure, pour lui, 6,1 cm :
6,1 + 11,9 = 6 + 12 = 18 cm.

(1.1)



ERI - Ca fera à l'échelle.

A la deuxième minute, il conclut :

- On peut déjà pas le faire parce que les 18 cm ne rentrent pas dans le cadre, donc il n'ira pas aussi grand.

Il veut dire que le côté moyen du triangle cherché qui, selon lui, mesure 18 cm, étant plus grand que la longueur du rectangle (17 cm), ne pourra pas être placé dans le rectangle.

ERI veut, maintenant, placer sur la diagonale le côté moyen du triangle, en respectant la méthode qui consiste à conserver les différences. Pour cela, il prend 15,1 cm sur la diagonale et calcule la différence
15,1 - 6,1 = 9 cm.
Il ajoute, alors, 9 cm à 8,1 et à 4 qui sont les mesures des grands et petits côtés du triangle proposé.
Durant tout ce temps, ERI ne trace rien sur la figure ; il place simplement sa règle graduée sur le rectangle.

ERI - Ca ne marche pas.

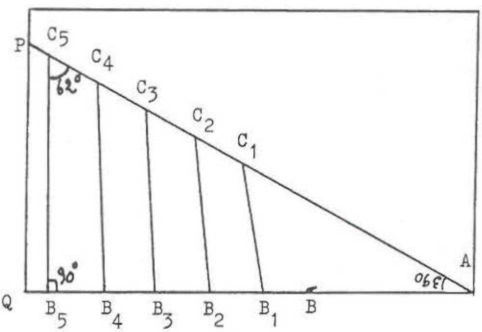
Il recommence en prenant non plus 15,1 cm, mais 12 cm.
Il estime toujours la situation au moyen de sa règle graduée.
En définitive, il abandonne.

Un peu plus tard, ERI questionne.

ERI - Il faut le faire à l'échelle ?

EXP - Il faut faire le même en plus grand.

12



A la cinquième minute, ERI réalise la figure 12 . Il décalque tout d'abord le petit angle du triangle proposé dans le coin inférieur droit A du rectangle, en plaçant un côté de cet angle, celui correspondant au côté moyen du triangle, sur la longueur inférieure du rectangle.

ERI - J'ajoute deux centimètres aux côtés pour avoir la plus grande figure qui rentre.

Il construit ainsi l'angle $\widehat{QAP}$, puis, marque sur la longueur inférieure AQ, à environ 6,1 cm du coin inférieur droit A, un point B ; il construit ensuite un premier triangle AB_1C_1 avec AB_1 = 8 cm et AC_1 = 10 cm, ces deux côtés étant respectivement portés par les deux côtés de l'angle $\widehat{QAP}$.
Il construit successivement les triangles AB_2C_2, AB_3C_3, AB_4C_4, AB_5C_5, obtenus en allongeant chaque fois le grand côté et le côté moyen de 2 cm.
Il a construit ainsi 5 triangles et se déclare satisfait par le plus grand.
A la dixième minute, l'expérimentateur lui demande :

- Peux-tu vérifier que c'est le même en plus grand ?

ERI - Il me faudrait un rapporteur.

ERI utilise alors correctement le rapporteur fourni par l'expérimentateur pour mesurer les angles du triangle AB_5C_5. Il note ces mesures sur la figure 12 .
Il conclut que sa figure est fausse car elle comporte un angle droit.

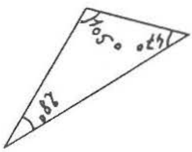
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - ERI 5-12;04-3

A la quinzième minute, il décide de mesurer les trois angles du triangle donné.
Il éprouve quelques difficultés techniques dans l'utilisation du rapporteur ; il mesure notamment l'angle supplémentaire au lieu de l'angle voulu.
Il calcule la somme des angles du triangle proposé.

ERI - C'est dans un triangle que la somme des angles fait 180° ?

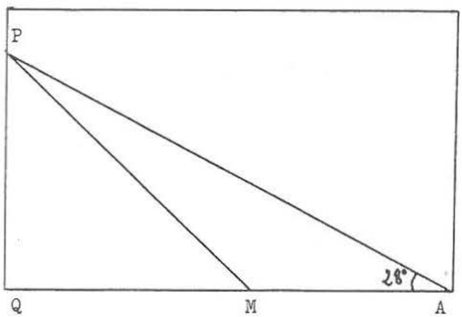
Il reprend ses mesures, se trompe à nouveau, remesure.
Il parvient enfin à une mesure correcte des angles du triangle donné, et il note ces angles sur la feuille où se trouve le triangle ; on appelle (0.1) le dessin ci-contre représentant le triangle donné sur lequel se trouve indiquée la mesure des angles :
28° 47° 105°.

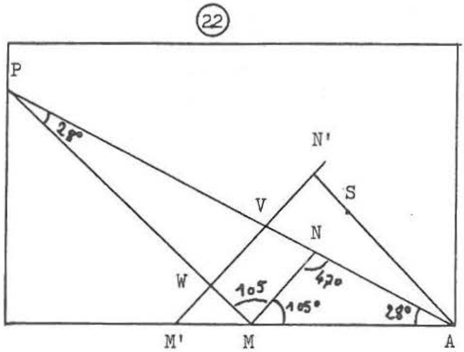
0.1



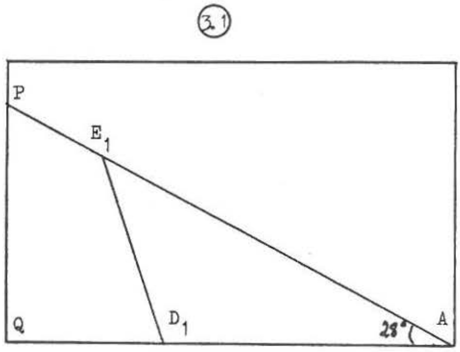
ERI, à la vingt-huitième minute, repart à nouveau dans son travail de recherche en essayant d'utiliser les angles. Il réalise alors sa figure (2.1). Pour cela il trace un angle $\widehat{PAQ}$ de 28°, en plaçant le sommet A au coin inférieur droit du rectangle et le côté AQ sur la longueur inférieure du rectangle. Il veut ensuite construire un angle de 47°, ayant P pour sommet. Il trace alors un segment PM et c'est l'angle $\widehat{MPQ}$ qui mesure 47°. ERI se perd dans les constructions d'angles.

2.1





ERI continue à dessiner sur la même feuille de papier, ce qui va lui donner la réalisation que nous appellerons (22) . Pour réaliser (22) il décalque tout d'abord le triangle donné dans le coin inférieur droit du rectangle ; il considère que ce triangle décalqué est le triangle AMN, où M est le point obtenu en (21) et N un point de AP situé à 6 cm de A. Ensuite il prolonge MN de 2 cm, ce qui lui donne le point S, et NA de 2 cm ce qui lui donne le point V. Il choisit encore un point W sur MP à 2 cm de M. Il trace alors le triangle M'N'A passant par les points S, V et W. Il a noté aussi sur sa figure (22) différents angles, 28° en A, 47° en N, 105° deux fois en M, 28° en P.
ERI a essayé de construire un triangle égal au triangle donné T, puis d'agrandir ce triangle en prolongeant les côtés de 2 cm.



A la trente-huitième minute ERI reprend les idées qui l'on conduit à la réalisation (12) . Il réalise alors sa figure (31) .
Pour cela il trace l'angle $\widehat{QAP}$ de 28°. Il calcule ensuite le plus grand côté du triangle qu'il veut tracer en ajoutant 7 cm aux 8 cm du grand côté de T.

$8 + 7 = 15$ cm.

Il estime que, puisque le côté moyen de T mesure 6 cm, c'est à dire 2 cm de moins que le grand côté, il va ajouter à ce côté moyen 2 cm de moins que ce qu'il a ajouté au grand côté, c'est à dire qu'il va ajouter $7 - 2 = 5$ cm.
Ce qui lui donne comme côté moyen :

$6 + 5 = 11$ cm.

Il construit alors le triangle AD_1E_1 avec $AE_1 = 15$ cm et $AD_1 = 11$ cm, en traçant le troisième côté D_1E_1.
Il vérifie que les angles de ce triangle sont bien ceux de T et trouve :

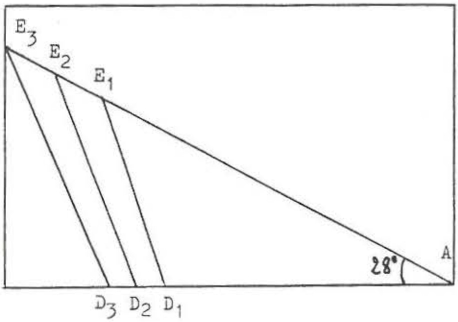
"une toute petite erreur".

A la quarante-septième minute, l'expérimentateur pose une question en désignant le triangle AD_1E_1.

EXP - Penses-tu que c'est le plus grand triangle possible ?

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - ERI 5-12;04-5

(32)



ERI ne répond pas mais il va agrandir son triangle AD_1E_1 en ajoutant 2 cm sur un côté et 1 cm sur l'autre ; c'est sa réalisation (32) . Il effectue deux fois cette opération et obtient successivement les triangles AD_2E_2, puis AD_3E_3 avec

$D_1D_2 = D_2D_3 = 1$ cm et

$E_1E_2 = E_2E_3 = 2$ cm,

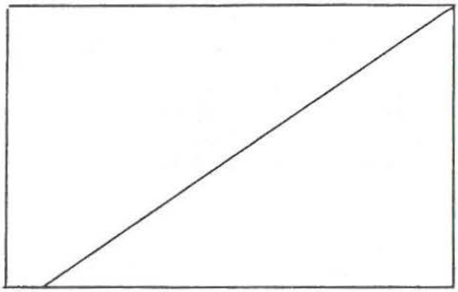
E_3 étant confondu avec le point P de (31) .

ERI estime avoir obtenu, avec AD_3E_3, le plus grand triangle,

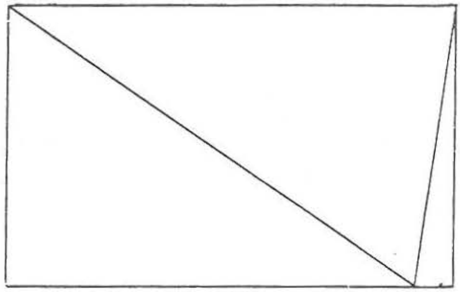
"malgré une petite erreur", dit-il.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-0[1]

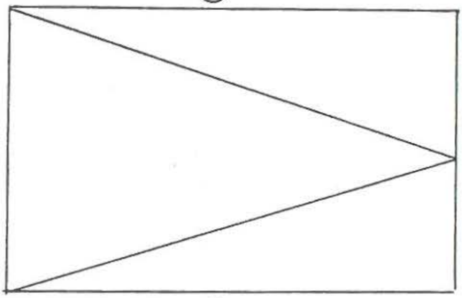
1



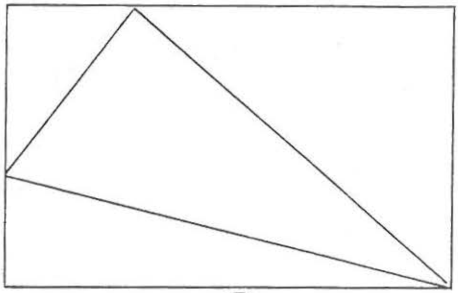
2



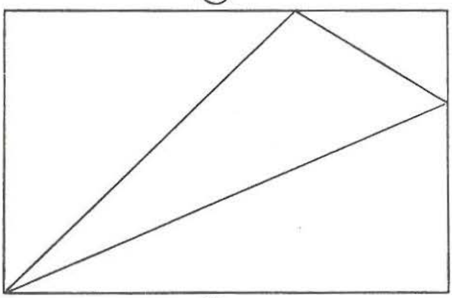
3



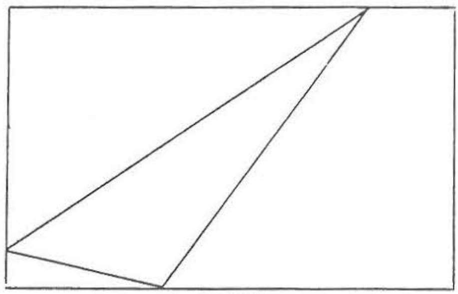
4



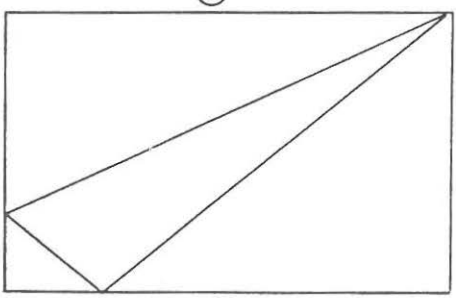
5



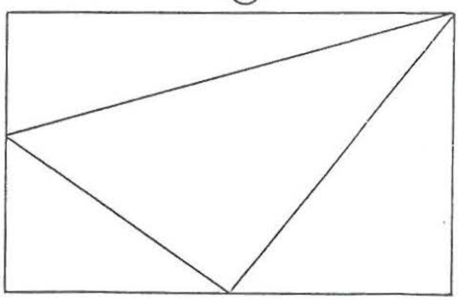
6



7

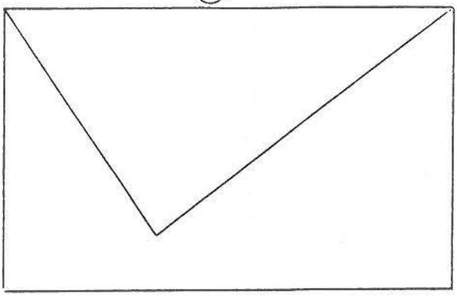


8

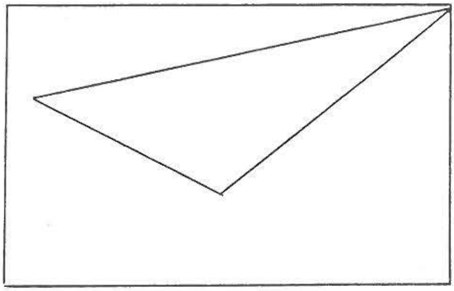


PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-0^2

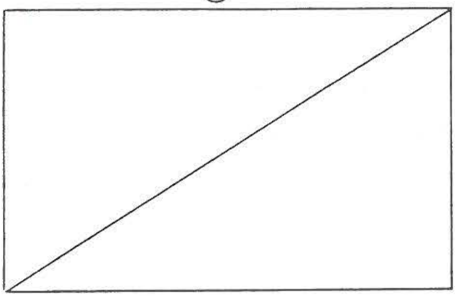
9



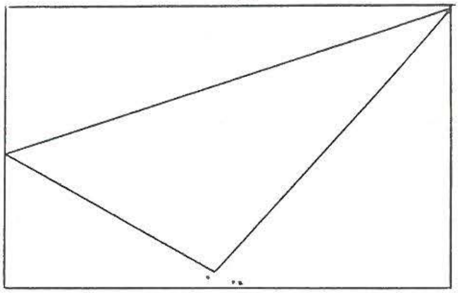
10



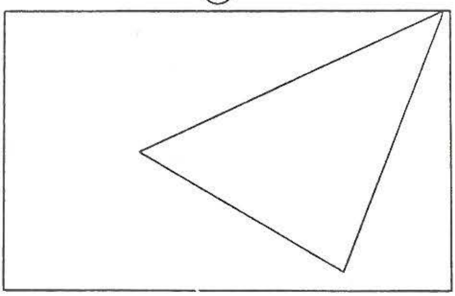
11



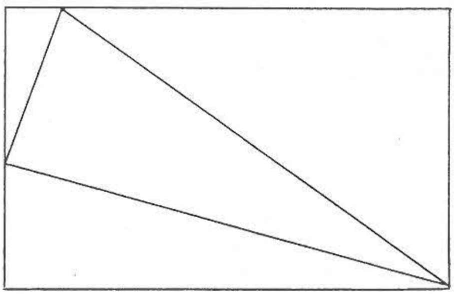
12



13

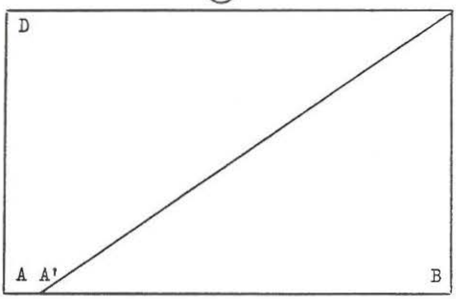


14



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-1

(1.1)



CAT - N'importe comment il faut qu'on le mette dedans ?

CAT demande si le triangle cherché doit être à l'intérieur du rectangle donné R.

Expérimentateur - Mais le plus grand possible.

L'expérimentateur lui rappelle donc l'énoncé en lui précisant qu'on cherche le plus grand triangle possible.

CAT - On peut faire toucher les deux traits ?

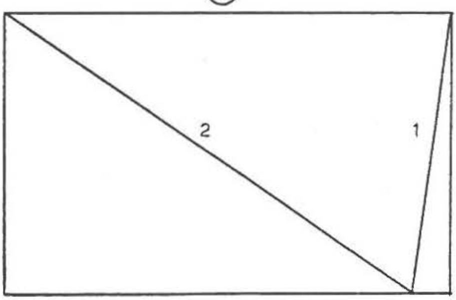
EXP - Oui.

CAT se demande, par cette phrase, si la longueur inférieure du rectangle et un côté du triangle dont elle anticipe la position, peuvent coïncider.
Elle réalise alors sa figure (1.1) . CAT trace le segment A'C à la règle et sans rien mesurer.

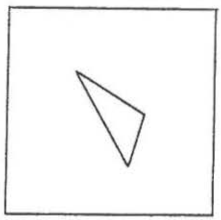
CAT - Si je fais dans les deux coins, ça en fait deux.

Elle veut dire par là qu'en joignant AC, elle obtient deux triangles ABC et ADC ; mais comme on ne lui demande qu'un triangle, elle choisit volontairement de tracer A'C au lieu de AC.
L'expérimentateur lui fait préciser l'énoncé du problème et insiste fortement sur "le même et le plus grand possible".

(2.1)



Le minutage est décompté à partir de maintenant.
Elle réalise alors sa figure (2.1) . Pour cela elle dessine très rapidement et dans l'ordre les côtés 1 puis 2, en observant la feuille sur laquelle est tracé le triangle donné T ; les bords de cette feuille étant parallèles à ceux de R dans la position indiquée ci-contre.



Elle n'effectue aucune mesure.

Elle observe longuement son dessin.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-2

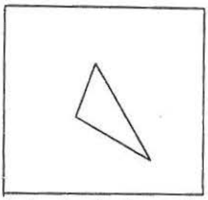
CAT - On peut faire plus grand ; c'est sûr, mais ...

EXP - Pourquoi c'est sûr ?

CAT - D'après moi, il peut y avoir plus grand ; en coupant la moitié, ça ferait deux triangles mais on en demande qu'un.

Elle développe donc l'idée qu'elle a eue précédemment : un triangle seul peut être nettement plus grand que le demi-rectangle, puisqu'il y a deux demi-rectangles obtenus en traçant la diagonale dans R.

Suit un long silence. L'expérimentateur lui rappelle l'énoncé du problème.
Elle regarde la feuille sur laquelle se trouve T ; elle la fait pivoter de telle sorte que le triangle T prenne la position ci-contre, les bords de la feuille restant parallèles à ceux de R.



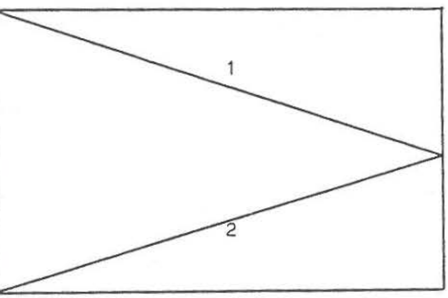
A la troisième minute CAT dit :

- J'ai une idée, mais ça sera pas pareil.

EXP - Qu'elle idée ?

CAT - Comme ça.

31



Elle réalise alors son dessin 31 .
Elle procède sans aucune mesure et trace d'abord 1 puis 2.

EXP - Est-ce que c'est le même ?

CAT - Non.

EXP - Pourquoi ?

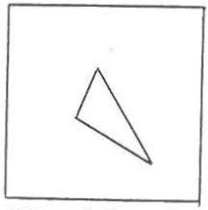
CAT - Là, il y a deux côtés qui sont pareils, là il n'y en a pas deux pareils.

Elle veut dire que dans son dessin 31 les côtés 1 et 2 ont même longueur, tandis que dans le triangle T tous les côtés sont différents.

EXP - Alors ? Donc tu n'as pas répondu à la question ?

CAT - Non.

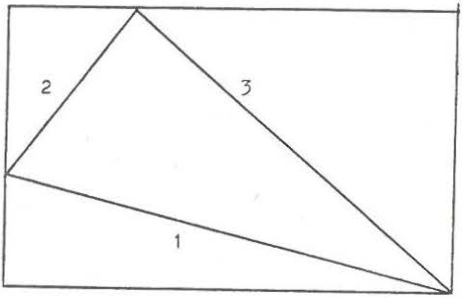
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-3



Elle regarde le triangle modèle T, toujours placé dans la position indiquée par le dessin ci-contre, les bords des feuilles de T et de R restant parallèles

Elle réalise alors la figure (4.1) . Pour cela elle dessine rapidement les trois segments 1, 2 et enfin 3, sans aucune mesure.

(4.1)



EXP - Tu peux m'expliquer ce que tu as fait ?

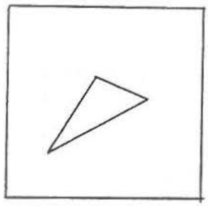
CAT - J'ai voulu essayer de faire dans le même sens.

EXP - Qu'est-ce que tu veux dire ?

CAT - Le côté où il y a le plus petit, j'ai fait le plus petit, le côté où il y a le plus long, j'ai fait le plus long ; enfin, j'ai voulu essayer de faire dans le même sens.

Pour CAT, quand elle déclare qu'elle trace un côté ayant le même sens que le côté correspondant de T, elle veut dire qu'elle conserve la direction.

Elle rapproche la feuille sur laquelle se trouve T, du rectangle ; elle la place à gauche de R, puis au-dessus de R, enfin au-dessous de R.
CAT tourne de 90° sa feuille T ; elle lui donne donc la position indiquée par la figure ci-contre. Elle se procure alors une nouvelle feuille sur laquelle se trouve le rectangle R. Nous en sommes à la sixième minute.



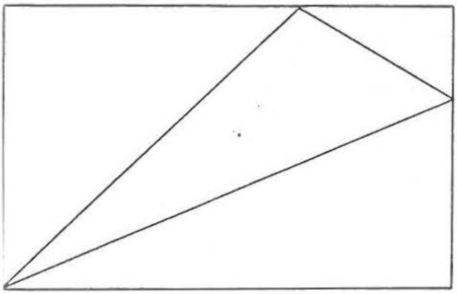
EXP - Qu'est-ce que tu veux faire ?

CAT - Ca aussi dans le même sens mais c'est qu'il y a quatre sens ; la feuille peut se mettre des quatre côtés.

Elle pense qu'il y a quatre positions pour T car les bords de la feuille T devant rester parallèles aux bords de R, la feuille

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-4

5



T ne peut prendre que 4 positions ; elle en conclut qu'elle peut tracer 4 triangles différents dans R.

Elle réalise alors la figure 5 dessinée ci-contre. Elle observe les dessins 4 et 5 qu'elle compare et dit :

- On dirait le contraire.

EXP - Es-tu sûre que c'est le même ?

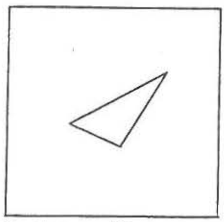
CAT - Dans l'autre sens.

Suit un silence.

EXP - Es-tu sûre que c'est le même et le plus grand possible ?

CAT - Non.

EXP - Pourquoi ?



Elle tourne encore la feuille sur laquelle se trouve T de 90°, pour lui donner la 4ème position indiquée par le dessin ci-contre. Elle regarde son dessin 5 .

Suit un silence.

CAT - Il y a plusieurs sens mais ...

Nouveau silence.

CAT - J'ai une autre idée : partir un peu plus bas et ça fera plus large de là.

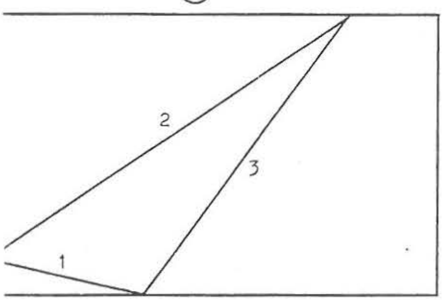
Elle veut, semble-t-il, agrandir le petit côté du triangle cherché en lui donnant une position plus horizontale.
Elle commence alors à réaliser sa figure 6.1 .

CAT - Ca fera plus grand.

Elle achève cette figure.

CAT - Non, c'est pas plus grand que les autres.

6.1



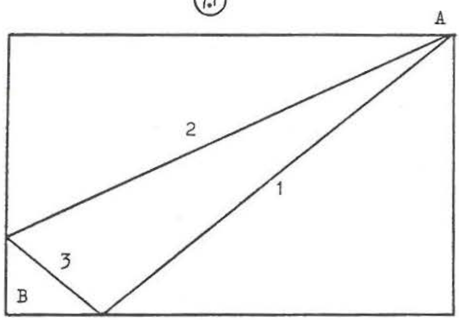
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-5

A la douzième minute CAT déclare :

- J'ai une autre idée. Ca m'étonnerait que ça soit plus grand, mais là, partir du coin et pas aller dans l'autre.

Elle veut placer le petit sommet de son triangle en A, ce qu'elle indique en disant "partir du coin", mais alors elle ne choisira pas la diagonale AB comme côté du triangle cherché, ce côté n'aboutira donc pas en B ce qu'elle indique en disant " pas aller dans l'autre (coin)". Elle réalise alors sa figure 7.1 . Elle dessine successivement les côtés 1, 2 et 3. Puis observe.

7.1



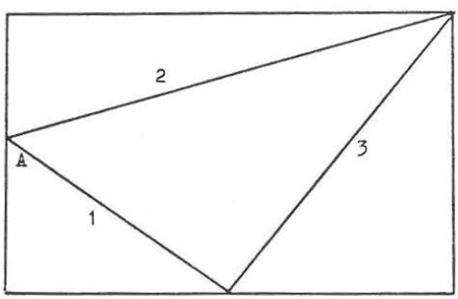
CAT - Il aurait fallu que ça soit plus large de là, pour que ça soit plus grand.

C'est le petit côté 3 du triangle qu'elle vient de réaliser qu'elle désigne par "là". Elle aurait voulu que 3 soit plus grand, pour que, semble-t-il, le triangle tracé soit lui même plus grand.

CAT - Je vais essayer.

Elle réalise alors à la quatorzième minute sa figure 8.1 . Pour cela elle trace successivement les côtés 1, 2 et 3 du triangle ci-contre.

8.1



CAT - D'après moi, il est déjà plus grand que les autres.

EXP - Est-ce que c'est le même que l'autre ? Est-ce que c'est la même forme ?

CAT - Non, pas tout à fait. Il aurait fallu que celui-là soit plus long que les autres (elle rapproche le modèle T de son dessin 8.1 dont elle montre le côté 2), qu'il y ait pas tant d'écart et qu'il soit plus bas celui-là (elle montre 1).

Pour elle la ressemblance s'accentue si elle rallonge le grand côté et si elle place le point A un peu plus bas.

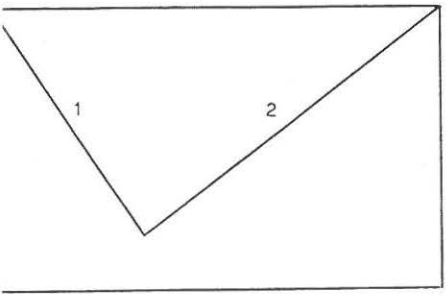
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-6

A la seizième minute elle observe longuement le triangle T.

CAT - Je vais essayer autre chose en grand dans ce sens.

Elle place alors le grand côté du triangle T horizontal, c'est à dire parallèle à la longueur du rectangle R.
Elle réalise alors la figure 91 , en traçant les côtés 1 puis 2.

91



CAT - Ils se ressemblent plus qu'avant.

Elle veut dire que de tous les triangles qu'elle a tracés, c'est le 9 qui ressemble le plus à T.

EXP - Est-ce qu'ils ont la même forme ?

CAT - Non, mais je trouve qu'ils se ressemblent plus que les autres.

EXP - Ca serait pas possible d'en être plus sûr ? De faire la même forme mais en plus grand ?

CAT - Oui, en mesurant.

Suit un silence à la dix-huitième minute.

CAT - On multiplie tous les côtés par trois.

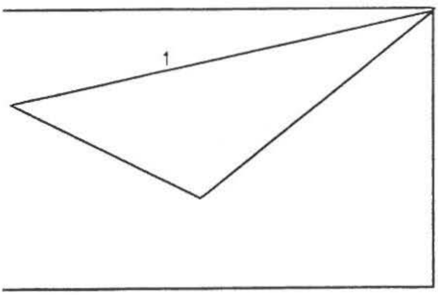
CAT - Je vais essayer.

A la dix-neuvième minute, elle mesure le grand côté de T, trouve 8,1 cm ; arrondit à 8 cm. Puis elle mesure les autres côtés de T. Elle multiplie par deux chacune des dimensions trouvées, et passe à la réalisation de sa figure 101 .
Pour cela elle dessine d'abord le côté 1 mesurant 16 cm et place les deux autres côtés en tâtonnant pour respecter leurs dimensions : 8 et 12 cm.
Elle déclare, alors, à la vingt-et-unième minute :

- Je trouve que c'est le même multiplié par 2.

Le triangle qu'elle vient d'obtenir en 101 est le double du triangle proposé T.

101



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-7

A la vingt-et-unième minute l'expérimentateur lui demande :

- Est-ce que c'est le plus grand possible ?

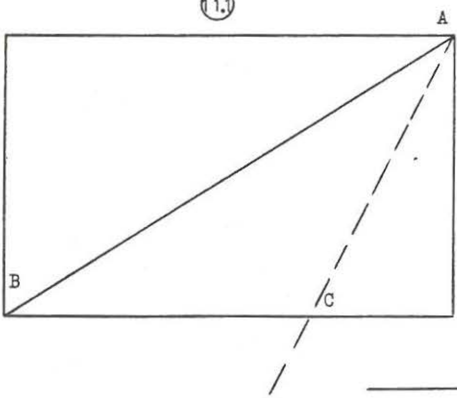
CAT - Non, on pourrait multiplier par 3 mais le rectangle ne serait pas assez grand.

Elle observe et réfléchit en silence jusqu'à la vingt-troisième minute.

CAT - Je ne sais pas comment on pourrait faire plus grand.
J'ai une autre idée. On multiplie par 2 comme j'ai fait là et la longueur de ça divisé par 2 en plus. Là ça faisait 8, je multiplie par 2, ça fait 16 et la moitié de 8, ça fait 20, mais c'est pas dit que ça y rentrera aussi.

Elle se propose donc de doubler le côté et d'y ajouter encore la moitié du même côté. A la vingt-sixième minute, elle complète son calcul précédent en prenant deux fois six, ce qui fait 12, plus 3, ce qui fait 15. Elle réalise alors son dessin 11.1 . Pour cela elle trace la diagonale AB ; elle essaye de placer ensuite un côté AC ayant la direction indiquée par les pointillés ci-contre, avec de plus AC = 15, mais elle constate alors que ce n'est pas possible.

11.1



CAT - J'ai une autre idée mais peut-être que ça ne marchera pas à tous. Comme là, j'avais pris, multiplié par 2 plus la moitié, ça faisait 4, mais encore le partager et là ça tombera juste parce qu'on aura des demis en plus.

Elle veut donc maintenant doubler le côté et y ajouter encore le quart du même côté. Elle n'est pas sûre de pouvoir pratiquer une telle construction pour tous les côtés.

EXP - C'est gênant les demis ?

CAT - Pas tellement ; je vais essayer aussi.

Elle fait ses calculs et trouve :
$18 = 2.8 + \frac{1}{4}\,8$ pour le grand côté. Mais ensuite elle se trompe dans ses comptes car elle trouve 10 (au lieu de 9) pour le petit côté, et 15 (au lieu de 13,5) pour le côté moyen.

CAT - Ca n'ira pas non plus, ça dépassera du rectangle.

EXP - Tu me redis comment tu as trouvé 18.

Elle s'explique, mais se trompe en ajoutant la moitié au lieu du quart de 2 × 8, elle trouve donc 20. Puis elle se rend compte de son erreur et revient à 18. Mais elle ne fait pas de vérification pour les deux autres côtés qui lui ont donné 10 et 15.

EXP - Tu avais employé la même méthode pour les autres côtés ?

CAT - Oui.

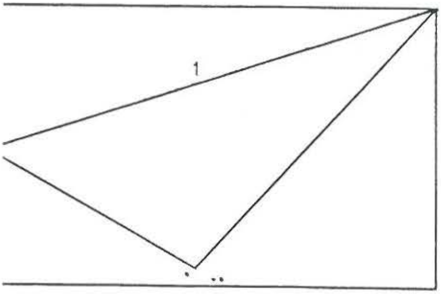
EXP - Exactement la même ?

CAT - Je vais recalculer car je crois que je me suis trompée.

Elle recompte et trouve alors 13,5 cm et 9 cm pour les deux plus petits côtés de son triangle.

CAT - D'après moi, ça y rentrera.

121



Elle réalise alors sa figure 121 . Pour cela elle place le côté 1 dont la longueur est approximativement de 18 cm (en fait ce côté mesure 17,6 cm). Puis elle place en tâtonnant les deux autres côtés qui mesurent respectivement 13,5 et 9 cm, à 1 ou 2 mm près.

EXP - Es-tu obligée de faire des essais pour le placer ?

L'expérimentateur lui demande si elle est obligée de tâtonner pour placer les deux derniers côtés.

CAT - Voilà, j'y suis.

L'élève estime qu'elle a terminé son dessin.

CAT - Je ne pense pas qu'on peut faire plus grand parce que comme j'avais essayé tout à l'heure, ça dépassait.

Elle estime qu'elle a obtenu le plus grand triangle car dans sa réalisation (10) , elle avait un coefficient de $2 + \frac{1}{2}$, plus grand que $2 + \frac{1}{4}$, mais qui lui donnait un triangle ne rentrant pas, selon elle, dans le rectangle.
Après un silence.

CAT - Dans tous les cas on ne peut pas le faire plus grand.

Elle parle encore des différentes façons de positionner T, donc de positionner le triangle cherché.

EXP - Pourquoi ?

CAT - C'est toujours un rectangle ; qu'on le retourne, on peut pas le faire plus grand.

Nouveau silence à la trentième minute.

A la trente-et-unième minute,

CAT - Ou alors pas multiplier le côté et ajouter un certain nombre, mettons 5 cm.

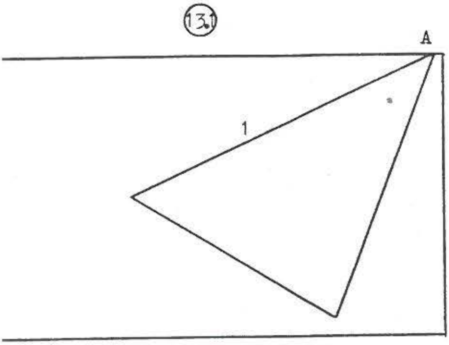
Elle entreprend des calculs : 8 et 5, 13. Elle place sa règle sur le rectangle à partir de A.

CAT - On peut faire plus grand.

Elle veut donc tracer un côté dont une extrémité est en A.

Néammoins, elle poursuit ses calculs : 5 et 4, 9 ; 6 et 5, 11.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CAT 5-13;00-10



Elle réalise alors sa figure 131 .

CAT - Il est petit, celui-là.

Elle parle du triangle qu'elle vient de tracer.

EXP - Est-ce que c'est le même ? Est-ce qu'il a la même forme ?

CAT - Non, le côté (1) il devrait être plus grand. Il n'est pas assez grand que celui-là.

Elle pense que le grand côté du triangle qu'elle vient d'obtenir n'est pas assez grand, vu ce qu'est le grand côté dans le triangle donné T (qui est désigné par son expression : "celui-là").

CAT - Il vaut mieux faire des traits sans les mesurer.

EXP - Pourquoi ?

CAT - En les mesurant on est obligé d'ajouter pareil à chaque côté.

EXP - Pourquoi ?

CAT - Comme ça on voit de combien on a agrandi les traits.

EXP - Qu'est-ce qui serait le mieux ?

CAT - De ne pas mesurer ... de mesurer seulement un côté et les deux autres de les faire plus petits, un plus grand et sans les mesurer.

EXP - Si tu mesures pas, tu fais quoi ?

CAT - Comme là, je prends ce côté et multiplié par 2 et là j'essaie de faire plus petit et là plus grand.

EXP - Mais il y a des tas de façons de faire plus petit, plus grand. Comment tu choisis ?

Après un silence.

EXP - Tu fais au hazard ?

CAT - Il faut quand même regarder celui qui est plus grand.

EXP - Tu penses que les premiers que tu as dessinés sont mieux que les derniers ?

CAT - Oui.

Après un silence.

CAT - J'essaie d'imaginer le plus grand. Il vaut mieux voir sur le papier, pas mesurer ; pas au pif, mais faire comme on le voit sur le modèle. D'après moi ils sont plus justes sans les mesurer.

EXP - Qu'est-ce que ça veut dire, faire comment on voit sur le modèle ?

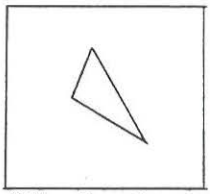
CAT - Ben, dans le même sens.

EXP - Qu'est-ce que ça veut dire ?

CAT - Ne pas faire les trois côtés de la même longueur.

EXP - Tu n'as pas de mot mathématique pour expliquer "dans le même sens" ?

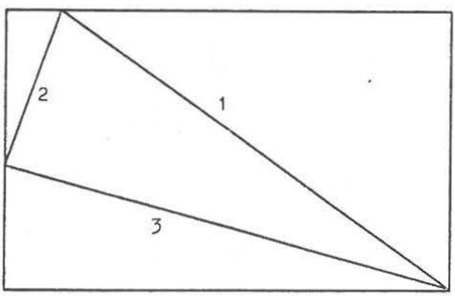
Après un silence, à la quarante-deuxième minute, elle place le triangle modèle T devant elle dans la position indiquée par le dessin ci-contre.



CAT - Je vais essayer du sens, comme il est là devant.

Elle réalise alors son dessin (141) , en traçant les côtés à la règle, sans aucune mesure.

(141)



CAT - Forcément celui-là (elle désigne son triangle (141) il est bon, parce qu'il est dans le même sens que celui-là (elle désigne T) celui-là (elle désigne le côté 2) c'est le côté plus petit comme là (elle désigne le petit côté de T).

EXP - Mais est-ce que c'est exactement la même forme ?

CAT - Non.

EXP - Donc tu ne réponds pas à la question ?

Silence.

CAT - Pour faire le même, il faut mesurer comme on avait fait tout à l'heure.

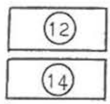
Nous en sommes à la quarante-troisième minute.

EXP - Lequel préfères-tu ?

CAT - Celui-là (14). Celui qui me paraît le plus grand, c'est ceux qui ne sont pas mesurés.

EXP - Je te propose de regarder ton dessin 12 et celui-là (14).

Elle les place l'un au-dessus de l'autre selon le schéma ci-contre et déclare à la quarante-cinquième minute :



- On ne peut pas dire lequel est le plus grand. Celui-là (12) est plus large et celui-là (14) est plus long.

EXP - Qu'est-ce que tu en penses ?

Silence à la quarante-septième minute.

CAT - Avant, j'avais idée qu'on pouvait faire plus grand, mais maintenant !

L'expérimentateur lui montre le dessin 1, et ajoute :

- Est-ce que c'est le même ?

- Non.

- Pourquoi ?

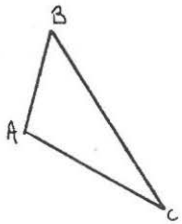
Silence, puis la réponse de l'élève :

- C'est plutôt à regarder.
Pour vraiment faire le même, d'après moi, il n'y a pas plus grand que ceux-là.

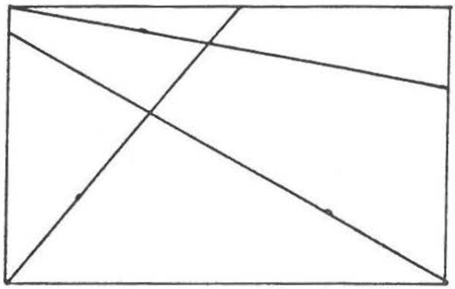
Elle désigne ainsi les dessins 12 et 14.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - LEG 4-13;02-10[1]

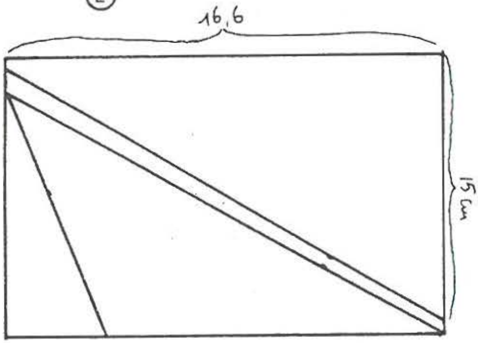
0



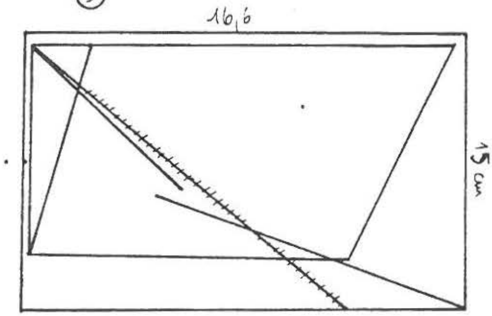
1



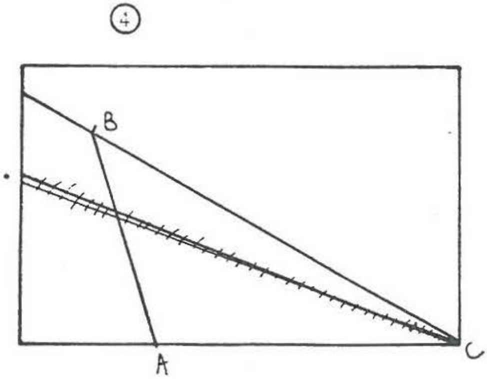
2



3



4



BROUILLON

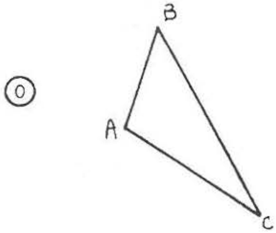
~~A = 105°~~
~~B = 45°~~
~~C = 30°~~

~~C = 30°~~
~~B = 40°~~
~~A = 100°~~

A = 105°
B = 45°
C = 30°

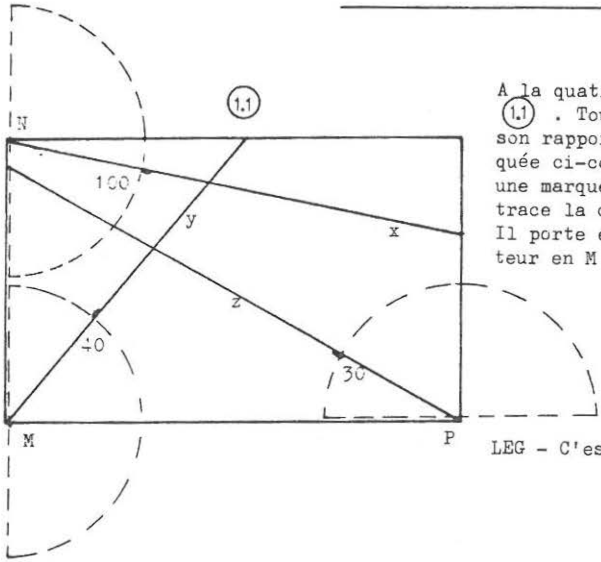
BC = 8 cm
BA = 4 cm
AC = 6 cm

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - LEG 4-13;02-11



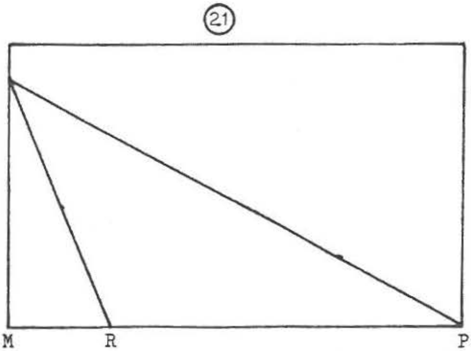
LEG mesure au moyen du rapporteur les angles du triangle T proposé. Il a beaucoup de difficultés pour utiliser son rapporteur.
Il désigne par A, B et C les trois sommets du triangle T ; c'est sa réalisation (0) .
Les résultats de ses mesures sont :

$\hat{A}$ = 100° (au lieu de 105°)
$\hat{B}$ = 40° (au lieu de 47° environ)
$\hat{C}$ = 30° (au lieu de 28° environ).



A la quatrième minute il réalise la figure (1.1) . Tout d'abord il place le centre de son rapporteur en N dans la position indiquée ci-contre par les pointillés ; il fait une marque en face de la graduation 100 et trace la demi-droite Nx.
Il porte ensuite le centre de son rapporteur en M ; il marque la graduation 40 et trace la demi-droite My.
Enfin LEG place son rapporteur en P, marque la graduation 30 et trace Pz.
Il reste très perplexe devant ces trois droites.

LEG - C'est faux, je me suis embarqué ...

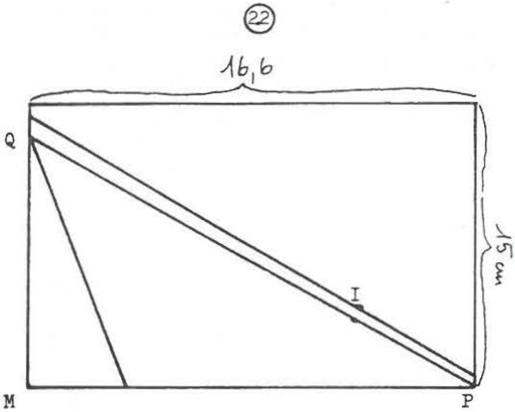


A la onzième minute, il réalise la figure (21) . Pour cela LEG trace une première droite PQ qui fait un angle de 30° avec PM ; ce qu'il a mesuré correctement avec le rapporteur. Puis, toujours en utilisant le rapporteur, il trace QR de telle sorte que $\widehat{PQR}$ = 40°. Il a toujours quelques difficultés avec le rapporteur.
LEG dit qu'il a choisi Q parce que c'est "le point le plus loin".
Il compare au coup d'oeil le triangle T et le triangle QRP qu'il vient d'obtenir, en les mettant dans des positions homothétiques (homothétie positive).

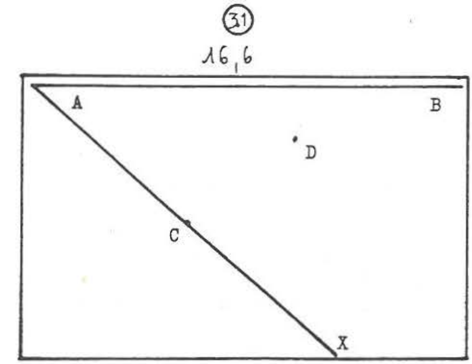
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier80 - LEG 4-13;02-12

A la treizième minute LEG mesure à nouveau les angles de T et trouve
$\widehat{A} = 105°$ $\widehat{B} = 47°$ $\widehat{C} = 33°$ (voir 0), ce qu'il note sur son brouillon.
Il réalise alors la figure 22 . Pour cela il place le centre de son rapporteur en P et marque un point I tel que $\widehat{IPM} = 33°$; il trace ensuite une droite passant par I et à peu près parallèle à sa droite PQ. De plus il mesure la longueur et la largeur du rectangle et note sur sa figure ces deux longueurs :

16,6 et 15 cm (au lieu de 10,5 cm).



LEG note sur son brouillon les 3 longueurs
BC = 8 cm BA = 4 cm AC = 6 cm
(voir 0).
Maintenant, il déclare vouloir
"Multiplier tout par 2, comme je vois que ça colle ici".
Il commence à réaliser à la vingtième minute sa figure 31 . Pour cela il trace tout d'abord un segment AB = 16 cm ; car il sait que le grand côté du triangle T mesure "8 cm multiplié par 2, ça fait 16 et comme la longueur fait 16,6, ça rentre".
LEG mesure à nouveau les angles du triangle T et trouve :
$\widehat{A} = 100°$ $\widehat{B} = 40°$ $\widehat{C} = 30°$,
ce qu'il note sur son brouillon.
Il trace ensuite une demi-droite AX faisant un angle de 40° avec AB ; en réalité nous avons $\widehat{BAX} = 41°$.
Il choisit alors un point C sur cette demi-droite tel que AC = 8 cm, et il efface CX.
Il mesure à nouveau l'angle $\widehat{A}$ du triangle T et trouve $\widehat{A} = 105°$. Il marque alors un point D tel que, pour lui, l'angle $\widehat{ACD} = 105°$; en fait D est tel que $\widehat{ACD} = 101°$.



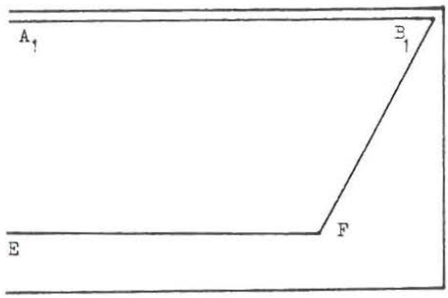
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - LEG 4-13;02-13

LEG, à la vingt-quatrième minute, mesure à nouveau longuement les angles de T. Il explique à l'expérimentateur qu'il est gêné parce qu'il

"n'arrive pas à trouver chaque fois le même résultat".

Ses dernières mesures qu'il note sur son brouillon lui donnent :
$\widehat{A} = 105°$ $\widehat{B} = 45°$ $\widehat{C} = 30°$.

32

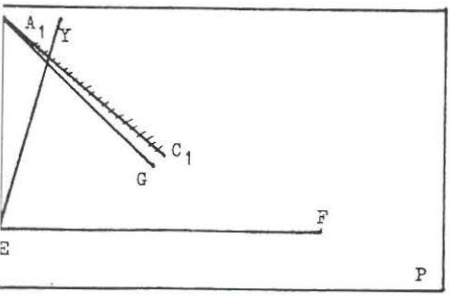


A la vingt-huitième minute, il réalise la figure 32 . Pour cela il trace le segment $A_1E = 8$ cm et il explique que c'est parce que le petit côté du triangle T vaut 4 cm et que $2 \times 4 = 8$ qu'il trace ce segment. LEG trace enfin le segment EF = 12 cm et dit : "c'est pareil".
Il pense alors que

"le triangle doit être compris là dedans"

c'est à dire que le triangle cherché doit se trouver dans le trapèze B_1A_1EF qu'il vient de tracer.

33

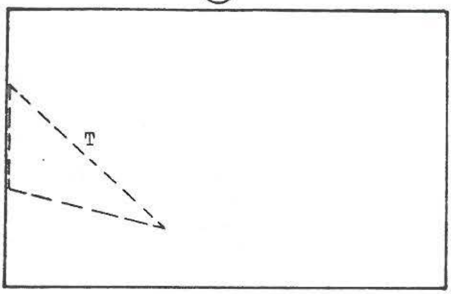


Il réalise ensuite, toujours dans le même rectangle une troisième figure 33 . Il commence par effacer le segment A_1C_1 tracé en 31 , et construit un segment A_1G tel que l'angle $\widehat{EA_1G} = 45°$ et tel que $A_1G = 8$ cm.
Il trace ensuite une demi-droite EY telle que, pour lui, l'angle $\widehat{FEY} = 105°$.
Il a en fait tracé un angle $\widehat{FEY}$ égal à $180° - 105°$. Nous retrouvons là encore une mauvaise utilisation du rapporteur. LEG ne sait plus très bien où il en est et va changer complètement de méthode.

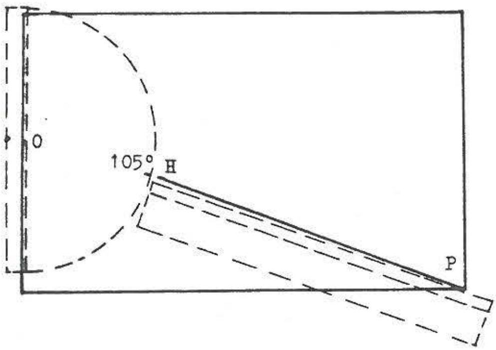
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - LEG 4-13;02-14

A la trente-sizième minute, LEG réfléchit à la question posée en superposant le triangle T à la feuille sur laquelle se trouve le rectangle et en regardant par transparence comme l'indique le dessin (34) ci-contre.

3.4



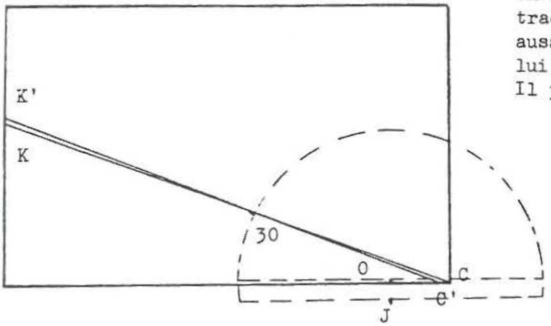
35



A la trente-huitième minute, il procède à une nouvelle réalisation (35) . Il place le centre O de son rapporteur sur la largeur du rectangle qui se trouve à gauche ; il repère la graduation 105 sur le rapporteur ; il place ensuite le bord de sa règle dans le prolongement du rayon qui va de O à la graduation 105, ce prolongement étant très approximatif. Puis il translate le tout le long de la largeur jusqu'à ce que le bord de la règle arrive au coin inférieur droit. Après avoir fixé la position de la règle, il trace le segment PH.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - LEG 4-13;02-15

4.1



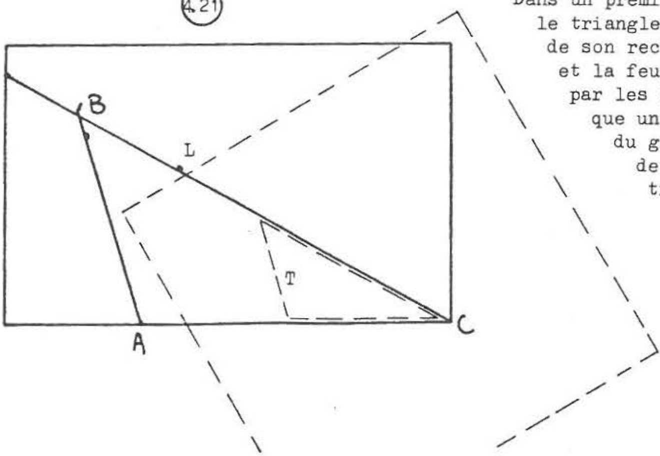
A la quarantième minute, il recommence l'opération précédente (réalisation 35) sur une autre feuille ; c'est sa figure 4.1 . Selon cette même méthode utilisant un rapporteur prolongé par une règle, il trace une première droite C'K' qu'il barre aussitôt, puis une droite CK qui semble lui convenir.

Il place alors son rapporteur sur le bord inférieur du rectangle. Il cherche la position qu'il doit donner au centre O de ce rapporteur pour que la graduation 30 du rapporteur coïncide avec les droites CK. Il marque alors un point J pour indiquer à quel niveau se trouve O.

Mais en définitive LEG déclare :

- J'ai des idées, mais j'arrive pas bien à m'en servir.

4.21

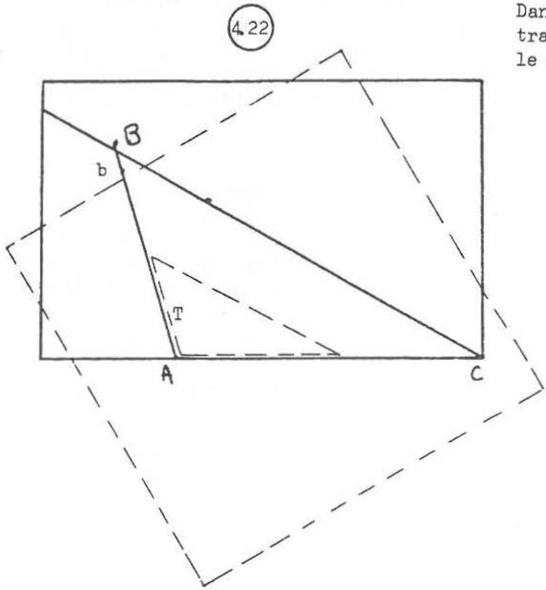


LEG, à la quarante-cinquième minute passe à une nouvelle technique. Il efface CK et C'K'. Il va maintenant utiliser le triangle T comme un calque ce qui le conduira dans sa dernière réalisation, notée 42 , à un triangle ABC à peu près double du triangle T proposé.

Dans un premier temps (voir 421), il pose le triangle T dans le coin inférieur droit de son rectangle. Nous représentons **T** et la feuille sur laquelle est tracé T par les pointillés ci-contre. Il marque un point L dans le prolongement du grand côté de T, à la limite de la feuille sur laquelle se trouve le triangle T. Puis il trace la droite CL.

Il choisit alors sur cette droite un point B tel que CB = 16 cm.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - LEG 4-13;02-16



Dans un deuxième temps (voir 4.22) il translate son triangle T en faisant glisser le côté moyen de ce triangle sur la longueur inférieure du rectangle jusqu'à ce que le point B soit dans le prolongement du petit côté de T. Il trace alors un petit segment bB, prolongeant le petit côté de T et dépassant la feuille sur laquelle se trouve T (T et la feuille sur laquelle est dessinée T sont représentés par des pointillés en 4.22). Puis LEG après avoir enlevé sa feuille T, prolonge le petit segment bB jusqu'à la longueur inférieure du rectangle, ce qui lui donne le point A. Il a ainsi obtenu un triangle CBA qui est à peu près le double de T.

A la quarante-neuvième minute il pense à un triangle triple.

LEG - On peut trouver plus grand ...
trois ça serait trop gros ...
$3 \times 8 = 24$ et 24 y a pas la longueur.

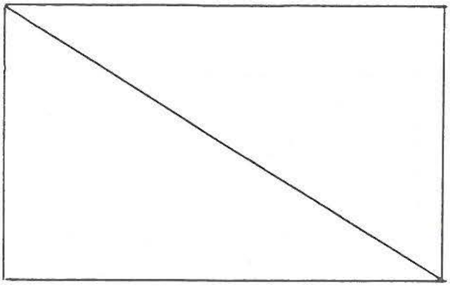
Il a remarqué que "19" est la longueur de la diagonale.

Alors il va essayer avec "2,5 ... ça fait 20 cm ... c'est trop long". En effet, la diagonale mesure 19,7 cm.

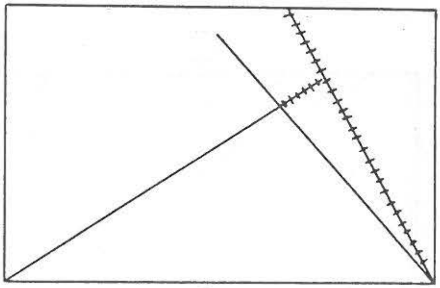
A la cinquante-deuxième minute il parle de "2,4".

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CHA 4-13;03-0[1]

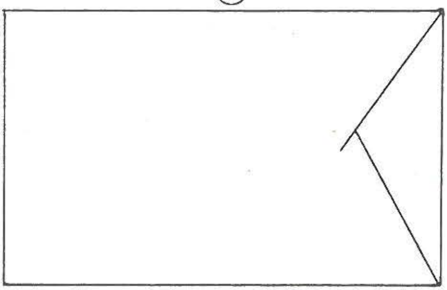
1



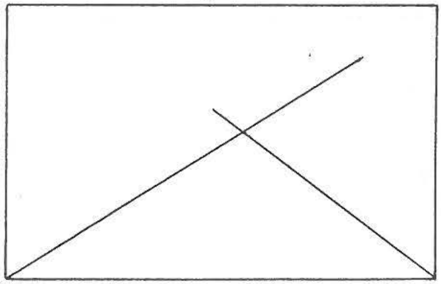
2



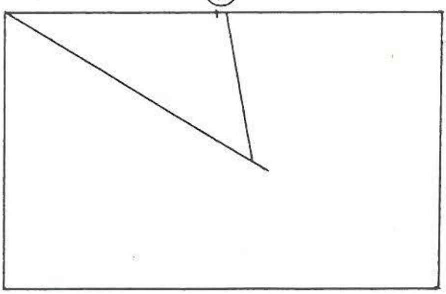
3



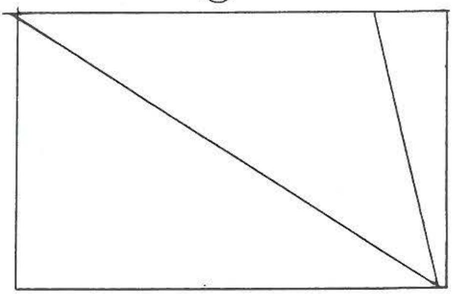
4



5

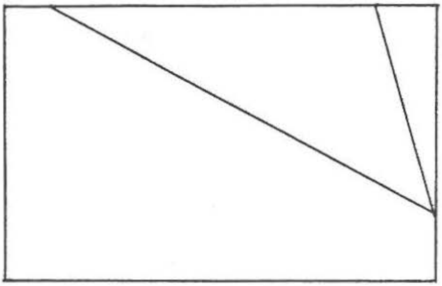


6

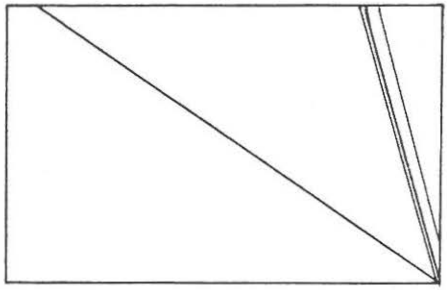


PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CHA 4-13;03-0^2

7

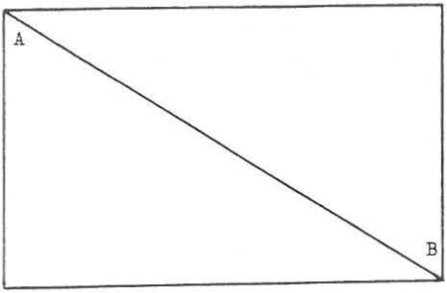


8



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CHA 4-13;03-1

1.1



La réalisation 1.1 de CHA consiste à tracer une diagonale AB du rectangle R.

CHA - A chaque dessin on change de feuille ?

Expérimentateur - Oui, pourquoi ? Avez-vous fini ici ?

CHA - Oui, c'est pas le même !

Pour expliquer son affirmation, elle place le triangle donné T sur le demi-rectangle et vérifie, en superposant les angles de T et du demi-rectangle, que ces angles sont différents.

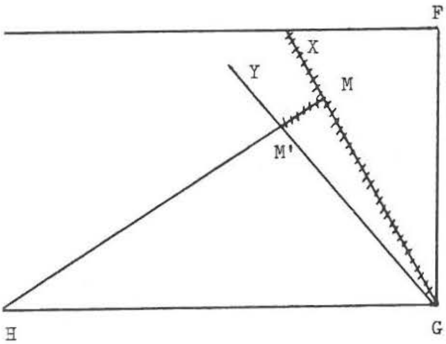
A la deuxième minute, l'élève pose une question.

CHA - On le fait à peu près, ou il faut que ce soit précis ?

EXP - Dans la mesure du possible, il vaut mieux faire un dessin précis.

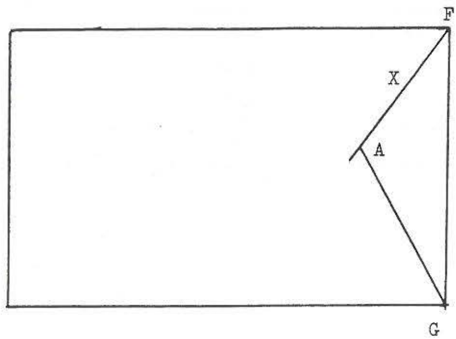
Elle essaie alors de mesurer l'angle moyen $\hat{m}$ du triangle T, en utilisant le rapporteur.
Elle pose le rapporteur sur cet angle moyen mais ne note aucune mesure.
Elle abandonne le rapporteur.
Elle réalise alors la figure 21 ; pour cela elle trace, au coup d'oeil, une demi-droite GX ; puis toujours au coup d'oeil, elle trace le segment HM.
Elle efface alors GM pour tracer, toujours au coup d'oeil, la demi-droite GY ; elle commence sa réalisation 22 .
Elle place alors le point M' à l'intersection de HM et de GY. Elle obtient ainsi le triangle HM'G.
Elle mesure le segment FG, puis la longueur du grand côté de T.
Elle mesure l'angle $\hat{H}$ du triangle HM'G et trouve 32°.
Elle mesure le petit angle $\hat{p}$ du triangle T ; elle utilise correctement le rapporteur et trouve 29°.
Elle observe le triangle T, mesure l'angle moyen $\hat{m}$ de ce triangle.
Elle est déçue car $\hat{m}$ et $\hat{H}$ n'ont pas la même mesure. Elle change de feuille.

21



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CHA 4-13;03-2

31



Sur sa nouvelle feuille, à la septième minute, elle réalise la figure 31 : pour cela elle trace la demi-droite FX qui fait avec la largeur du rectangle un angle égal à l'angle moyen $\hat{m}$ de T. On peut constater que $\widehat{GFX}$ = 36° au lieu des 47° de $\hat{m}$. Elle mesure le petit angle $\hat{p}$ de T et construit l'angle $\widehat{AGF} = \hat{p}$. CHA a ainsi obtenu le triangle AGF. Elle compare par transparence, en les superposant, le triangle T et le triangle AGF.

EXP - Est-ce le même ?

Elle mesure le grand angle $\hat{g}$ de T et l'angle $\hat{A}$ de son triangle.

CHA - Oui, il va, je crois.

On peut constater pourtant que $\hat{A} \neq \hat{g}$.

EXP - Est-ce le plus grand possible

CHA - Ah, non !

EXP - Essayez donc d'en faire un plus grand.

CHA - Facile à dire ....

Elle regarde alors sa figure 2.

CHA - C'est celui-là le plus grand.

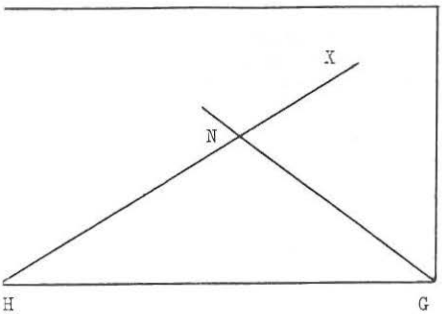
Elle trouve que le triangle HM'G de la figure 22 est plus grand que le triangle FAG de la figure 31 . Elle semble avoir oublié que le triangle FAG n'est pas correct.

EXP - Est-il correct ?

Elle ne répond pas à la demande de l'expérimentateur au sujet de HM'G.
Elle change de feuille.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CHA 4-13;03-3

41



A la douzième minute, elle réalise la figure 41 ; pour cela elle mesure à nouveau le petit angle $\hat{p}$ du triangle T.
Elle construit l'angle $\widehat{GHX}$ qu'elle veut égal à $\hat{p}$; elle commet une erreur de trois à quatre degrés. Elle mesure l'angle moyen $\hat{m}$ de T ; elle trace la demi-droite GN qu'elle veut telle que $\widehat{HGN} = \hat{m}$.
En fait, $\widehat{HGN} = 37°$ au lieu de 47°. Elle paraît très heureuse de son tracé.

CHA - Là, c'est celui-là.

EXP - Est-ce le même ?

CHA - Oui.

En fait, comme nous le constatons, ses mesures sont incorrectes et son coup d'oeil est peu précis. Le dialogue suivant a lieu à partir de la quinzième minute.

EXP - Est-ce le plus grand ?

CHA - Je crois.

EXP - On ne peut pas en faire un plus grand ?

CHA - Non.

EXP - Toutefois, il paraît rester une grande surface inutilisée.

CHA - Oui, mais avec les angles, on ne peut pas en faire de plus grand.

EXP - Faut-il vraiment que ce soit les mêmes angles ?

CHA - Et oui, si on veut que ce soit le même triangle ! A une plus grande échelle mais il faut que ce soit les mêmes angles.

EXP - Il n'y a donc pas d'autre solution ?

CHA - Non ... !
Enfin ... Je n'en suis pas sûre.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CHA 4-13;03-4

Elle considère à nouveau la figure 1 .

CHA - C'est celui-là le plus grand mais il ne va pas bien.

Pour elle c'est le demi-rectangle qui est le plus grand triangle, mais il ne convient pas. Ce qu'elle constate en mesurant les angles de ce demi-rectangle.

CHA - Non, ce n'est pas les bons angles. De toute manière sur le modèle il n'y a pas d'angle droit.

Elle constate de plus que T n'a pas d'angle droit.

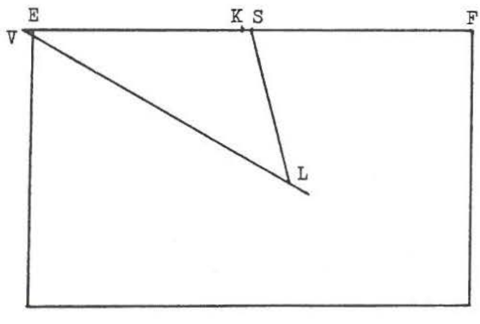
EXP - Donc on ne peut pas faire mieux ?

CHA - Plus petit oui, mais plus grand ...

A la vingt-et-unième minute, elle prend une nouvelle feuille et l'observe.

CHA - Ah ! ... peut-être !

51



Elle réalise alors la figure 51 .
Pour cela à partir du sommet E, elle mesure le long du côté EF du rectangle, un segment de 8 cm, mais elle ne note pas la deuxième extrémité K de ce segment. Elle mesure ensuite le grand angle ĝ du triangle T et trouve 106°.
CHA place alors le rapporteur en un point voisin de K, mais qu'elle choisit de façon aléatoire en essayant de se souvenir de la position de K. Une fois le rapporteur enlevé, elle ne sait plus où se trouve le point choisi.
Elle perd alors complètement ses moyens, ne sait plus utiliser le rapporteur, utilise le compas pour transporter des arcs déterminés par le rapporteur, comme on transporte des longueurs.
A la vingt-troisième minute, elle déclare :

Je ne sais plus ce que je fais.

Ses difficultés proviennent du fait que le point K n'a jamais été marqué sur la longueur EF.
Elle place à nouveau son rapporteur et marque le point L en face de la graduation 106 du rapporteur. Puis, après avoir très rapidement enlevé le rapporteur, elle marque de mémoire, le point S et trace le segment SL.

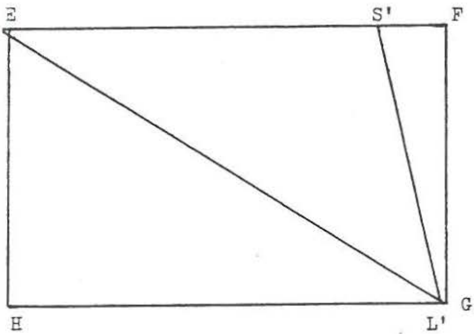
CHA mesure ensuite l'angle moyen $\hat{m} = 46°$ du triangle T et trace le segment LV tel que $\widehat{SLV} = 46°$.
On peut remarquer que pour chaque construction d'angle, CHA effectue la mesure, sur T, de l'angle dont elle a besoin ; elle n'a pas noté les angles de T une bonne fois pour toute.
Après avoir tracé le segment LV avec un point V très voisin de E, elle déclare :

- Ouf ! ... Ca tombe pas tout à fait dans l'angle ... Mais enfin ... presque !

EXP - Est-il plus grand que le précédent ?

CHA - Non, il est plus petit.

6.1



Elle réalise alors, à la vingt-sixième minute, la figure 6.1 .
Elle place son rapporteur sur la longueur EF de telle sorte que la graduation 105° soit approximativement alignée avec le centre du rapporteur et le sommet G du rectangle.
Elle trace alors S'L' de mémoire, après avoir enlevé le rapporteur.
Elle obtient, en fait , un angle $\widehat{ES'L'} = 102°$. Elle mesure encore une fois l'angle moyen $\hat{m}$ de T et construit alors l'angle $\widehat{S'L'V'}$ qu'elle veut égal à l'angle $\hat{m}$; en fait $\widehat{S'L'V'} = 45°$.

CHA - Il sort toujours !

Elle constate, à regret, que le troisième sommet V' de son triangle est à l'extérieur du rectangle.
Elle compare le triangle S'L'V' à celui obtenu à la figure 4, par superposition et transparence.

EXP - Est-il plus grand ?

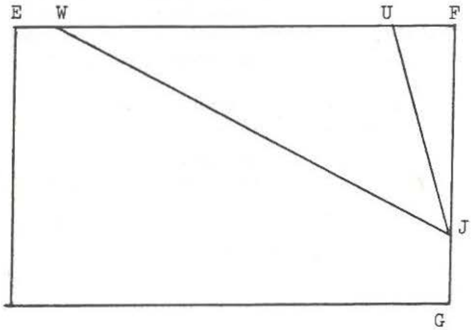
CHA - Oui.

EXP - Est-ce la meilleure solution ?
Ne pourrais-tu pas faire en sorte qu'il ne sorte pas ?

CHA - Peut-être que si.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CHA 4-13;03-6

7.1



A la trente-et-unième minute, elle réalise la figure 7.1 .
Elle mesure tout d'abord sur la figure 6 :

S'F = 2,6 cm.
V'E = 0,3 cm.

CHA - Donc différence 2,3.

Elle place alors sur la longueur EF un point U tel que UF = 2,3 cm.
Elle mesure le grand angle $\hat{g}$ de T et trouve 104° ; elle trace le segment UJ tel que $\widehat{EUJ}$ = 104°, à un ou deux degrés près.

CHA - Ca va sûrement être plus petit.

Elle mesure alors l'angle moyen $\hat{m}$ de T, trouve 48°. Elle trace le segment JW tel que $\widehat{UJW}$ = 48°.

CHA - Oui, celui-là est plus petit.

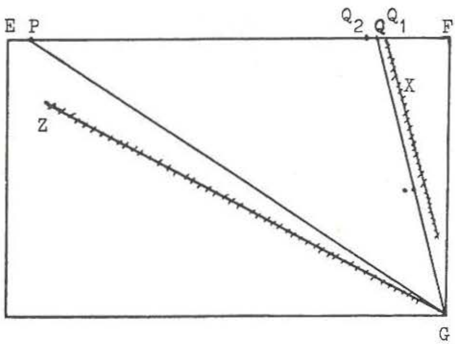
A la trente-sixième minute, CHA déclare :

- Il faudrait qu'il arrive juste là, mais ...

L'élève voudrait que le petit côté de son triangle passe par le sommet G de son rectangle.

CHA - On va essayer 2,4.

8.1



Elle réalise alors la figure 8.1 ; pour cela elle place Q_1 à 2,4 cm de F. Puis, elle trace une demi-droite Q_1X tel que : $\widehat{EQ_1X}$ = 104° ; mais comme Q_1X ne passe pas par G elle efface cette demi-droite ainsi que le point Q_1.

CHA - Peut-être plus loin.

Elle fait encore un autre essai avec Q_2 qui est maintenant trop loin.
Elle trouve enfin le point Q.

CHA - Ca y est juste ... Enfin !

Elle trace QG.
Elle mesure l'angle moyen $\hat{m}$ de T pour la nième fois et trouve $\hat{m}$ = 48°.
Elle mesure en G un angle de 48° et trace la demi-droite GZ tel que $\widehat{QGZ}$ = 48°.
Mais GZ va couper le côté EF bien en dehors du rectangle R.

CHA - Il y a quelque chose qui va pas ...

Elle efface GZ.
De nouveau elle mesure l'angle m̂ de T et trouve 47°.
Elle trace alors le segment GP qu'elle veut tel que $\widehat{QGP} = 47°$; en fait $\widehat{QGP} = 42°$.

CHA - Ca y est, il sort pas.

A la quarante-et-unième minute elle compare le triangle QGP qu'elle vient d'obtenir et le triangle S'L'V' qu'elle a obtenu en 61 .

CHA - Non, c'est pas le plus grand.
C'est celui-là (S'L'V') mais il sort.
Ca devrait être juste pourtant.

Elle vérifie encore une fois ses mesures d'angles et conclut.

CHA - C'est donc le plus grand qui ne sort pas.
Elle déclare donc que le triangle GQP est le plus grand triangle semblable à T et qui est contenu dans le rectangle R.

EXP - Quand deux triangles sont les mêmes mais qu'ils n'ont pas même taille ... ?
Qu'ont-ils donc ?

CHA - Ils ont les mêmes angles.

EXP - Ont-ils d'autres propriétés ?

CHA - Je ne sais pas ! Enfin ... si, ils ont les mêmes ... écarts.

A la quarante-quatrième minute, l'expérimentateur pose encore une question.

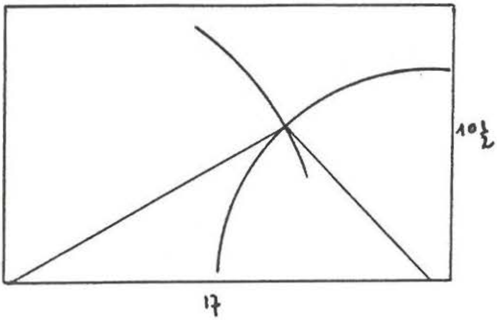
EXP - Et pour les longueurs des côtés ?

CHA - C'est les mêmes, pas à la même échelle, pas au même niveau de grandeur.
En faisant la soustraction, on ajoute à celui-là ...

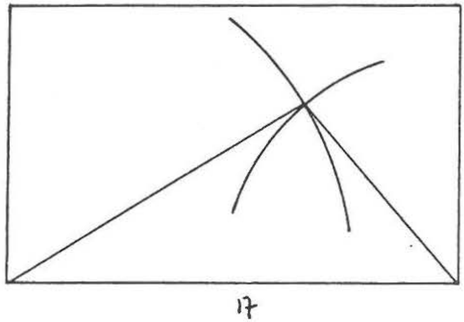
La séance s'achève à la quarante-septième minute.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - JIS 4-15;08-0[1]

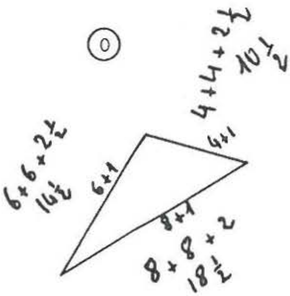
1



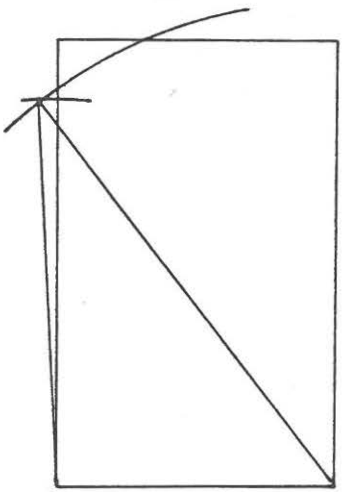
2



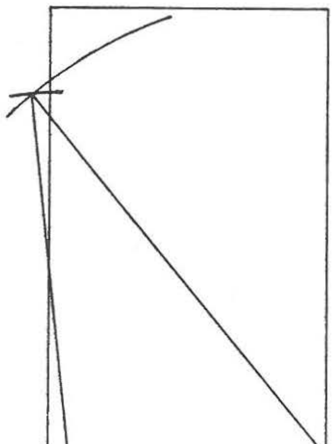
0



3

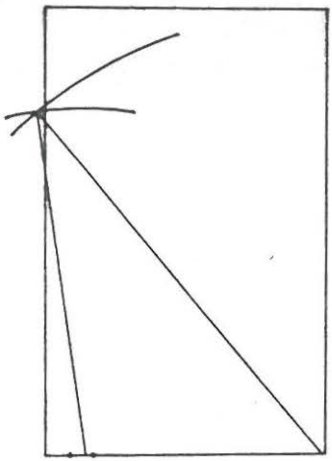


4

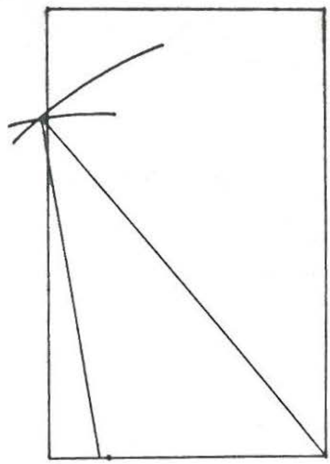


PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - JIS 4-15;08-0^2

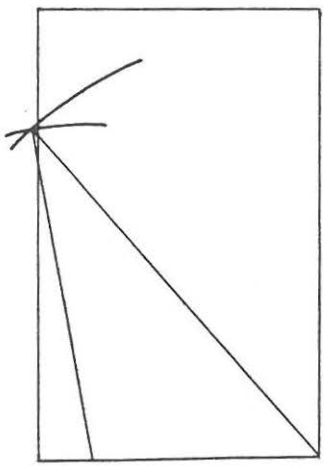
5



6

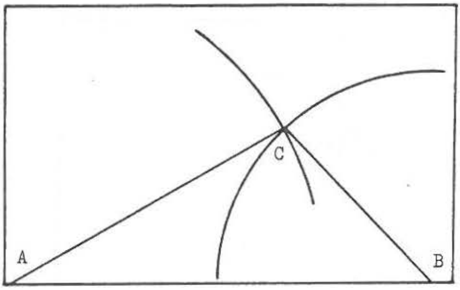


7



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - JIS 4-15;08-1

(1.1)



Avant de commencer sa recherche, JIS demande un double décimètre et une équerre.
Il effectue sa réalisation (1.1) . Pour cela il mesure les dimensions du triangle donné T. Il trouve 4 cm, 6 cm et 8 cm. Il mesure aussi la longueur et la largeur du rectangle et trouve 17 et $10\frac{1}{2}$.

JIS - Là, je vais essayer en doublant parce que là ça fait 17 et 8 et 8 ça fait 16.

Il envisage de doubler le grand côté du triangle et de le placer sur la longueur inférieure du rectangle.
Après un silence, à la cinquième minute, il déclare :

JIS - S'il y avait un angle droit ça tiendrait toute la moitié de la feuille.

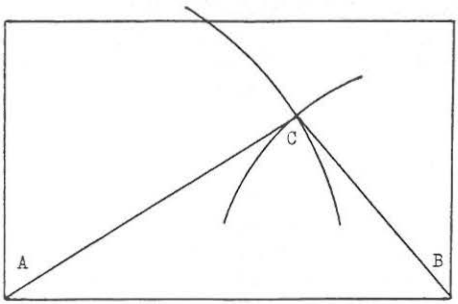
Il veut dire que si le triangle donné était un triangle rectangle, la solution serait obtenue en prenant la moitié du rectangle R.
L'élève demande un compas pour tracer avec précision un triangle double. Il place les points A et B, à 16 cm l'un de l'autre, puis marque, au compas, le point C tel que AC = 12 cm et BC = 8 cm.
Il est sûr que le triangle ABC est le même que le triangle donné T, mais il ne croit pas en obtenir un plus grand.

JIS - Car si j'ajoute encore 6, ça dépassera je peux n'en rajouter que 2.
Ah ! non, je ne peux en rajouter qu'un, sinon là ça dépasserait.
Je ne peux pas mieux faire.

Il envisage d'ajouter 8 cm (en parlant de 6 il commet un lapsus), aux 16 cm du grand côté du triangle qu'il vient d'obtenir.
Mais alors le triangle est vraiment trop grand. Deux centimètres, même, c'est encore trop, car la longueur du rectangle ne mesure que 17 cm, et pour lui, le grand côté du triangle doit être porté par cette longueur. C'est donc, 1 cm seulement qu'il peut ajouter au maximum.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - JIS 4-15;08-2

(2.1)



Il réalise sa figure (21) . Le grand côté AB du triangle est porté par une longueur du rectangle. Le sommet C est tracé au compas. Les côtés mesurent respectivement :

$AB = 2 . 8 + 1 = 17$ cm
$AC = 2 . 6 + 1 = 13$ cm
$BC = 2 . 4 + 1 = 9$ cm.

Ce tracé très précis est effectué au moyen du compas et du double décimètre.
Il observe son dessin.
Sept minutes se sont écoulées depuis le début de sa recherche.
Il réfléchit silencieusement.

JIS - Ah ! si je le mettais dans l'autre sens, la pointe irait en haut.

Il envisage de placer son rectangle verticalement, puis de mettre le petit côté du triangle sur la largeur inférieure du rectangle, ce qui situe le sommet du petit angle "en haut". Il réalise alors la figure (31) . Pour cela il entreprend tout d'abord une série de calculs. Comme il veut que le petit côté du triangle cherché soit la largeur AB, il décompose les $10\frac{1}{2}$ cm de AB :

$10 \frac{1}{2} = 4 + 4 + 2 \frac{1}{2}$

Il obtient pour les autres côtés :

$6 + 6 + 2 \frac{1}{2} = 14 \frac{1}{2}$
$8 + 8 + 2 \frac{1}{2} = 18 \frac{1}{2}$.

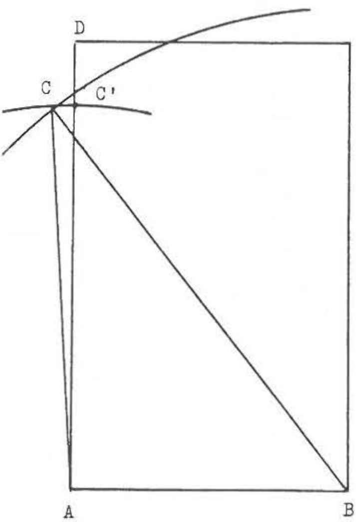
JIS - Mais ça va sortir.

Il utilise le triangle donné T comme un calque qu'il place sur le rectangle R. Il voit bien alors que le sommet du petit angle doit être à l'extérieur du rectangle. Il n'en continue pas moins sa procédure.

JIS - Je vais le faire pour voir de combien ça sort.

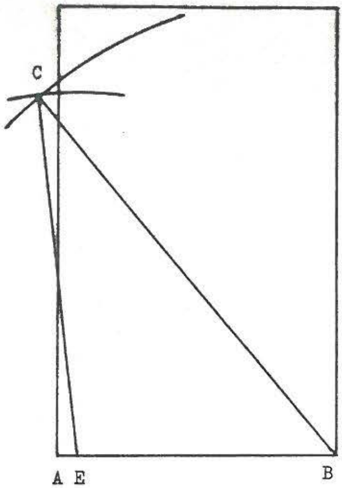
Il trace donc au compas le triangle ABC Ses mesures sont précises et ses dessins soignés.

(3.1)



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - JIS 4-15;08-3

4.1



Toujours avec soin et vigueur, il mesure la distance CC' de C au côté AD du rectangle. Il décide qu'il faut enlever "ça" (CC'). A la seizième minute, il réalise 4.1 . Comme dans sa précédente figure, CC' = 0,8 cm, il choisit un point E sur la largeur AB tel que AE = 0,8 cm. Il calcule donc la dimension des trois côtés du triangle chercher et trouve :

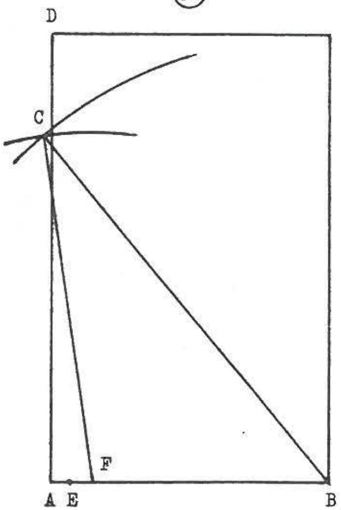
9,7 cm (10,5 - 0,8)
13,7 cm (14,5 - 0,8)
17,7 cm (18,5 - 0,8).

Il trace alors son triangle BEC.
C'est avec une réelle surprise que JIS constate que le sommet C est encore à l'extérieur du rectangle :

JIS - Je ne comprends pas.
Là, je suis un peu perdu.
Je pensais qu'il rentrerait vers la droite mais il est descendu vers le bas.

L'élève cherche depuis vingt-cinq minutes.

5.1



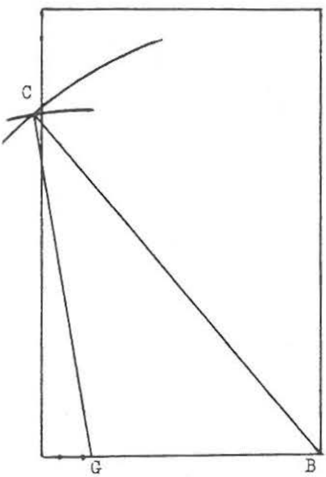
Tout le reste de la séance JIS va essayer, selon la méthode suivie ci-dessus, de faire rentrer cette pointe.
Il réalise la figure 5.1 . Pour cela il a pris un point F à 0,8 cm de E, puisque dans la figure 4.1 le point C est à 0,8 cm de la longueur AD du rectangle. Il construit alors un triangle dont les dimensions sont

8,9 cm (10,5 - 0,8 - 0,8)
12,9 cm (14,5 - 0,8 - 0,8)
16,9 cm (18,5 - 0,8 - 0,8).

La pointe ne rentre toujours pas.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - JIS 4-15;08-4

(6.1)

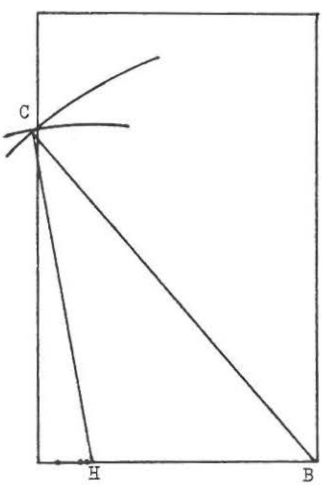


Il réalise (6.1) . Il s'agit toujours de la mêm
méthode. La figure (5.1) lui permet de mesurer la distance de C à la longueur AD. D'où les trois côtés de mesure :

8,6 cm (10,5 - 0,8 - 0,8 - 0,3)
12,6 cm (14,5 - 0,8 - 0,8 - 0,3)
16,6 cm (18,5 - 0,8 - 0,8 - 0,3).

Il trace le triangle GBC. Encore un échec.

(7.1)



(7.1) est sa dernière réalisation. Dans la figure (6.1) il a trouvé 0,3 cm comme distance de C à la longueur du rectangle d'où le triangle. Les trois côtés de son dernier triangle HBC mesurent, en principe :

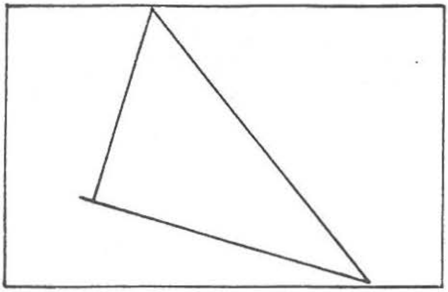
8,3 cm
12,3 cm
16,3 cm.

En fait, depuis la figure (3) se glissent, dans ses mesures et ses tracés, de légères erreurs qui le conduisent à dessiner des triangles avec comme dimensions :

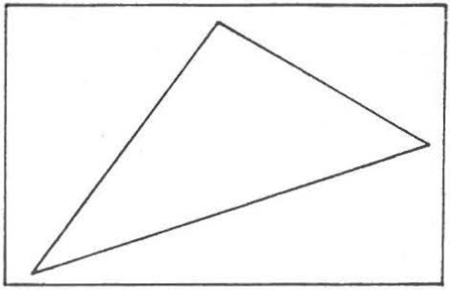
10,6 ;	14,6 ;	18,55	pour (3)
9,85 ;	13,75 ;	17,85	pour (4)
9,15 ;	13,35 ;	17,2	pour (5)
8,7 ;	13,1 ;	16,9	pour (6).

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAP 3-14;00-10[1]

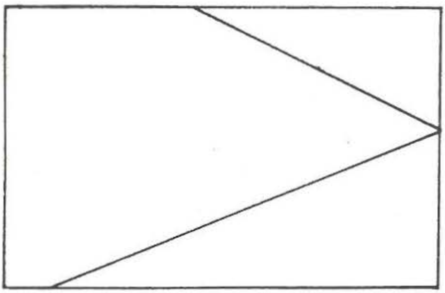
①



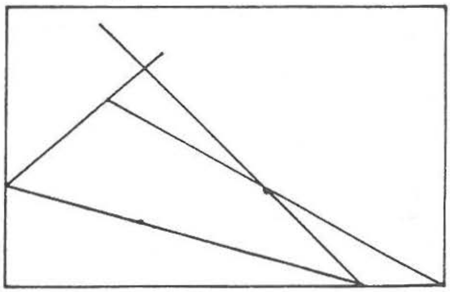
②



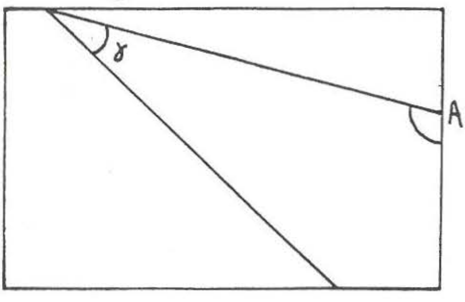
③



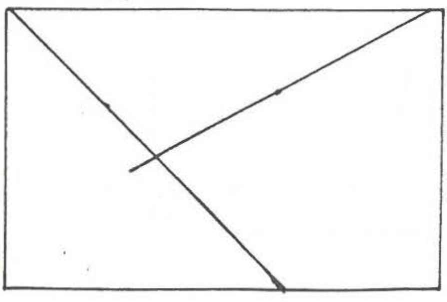
④



⑤

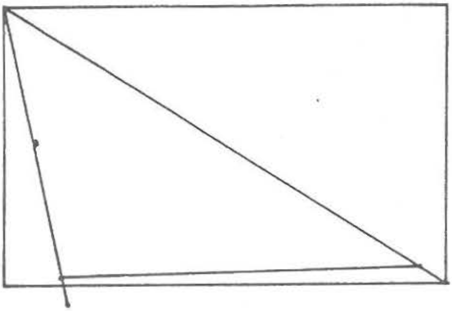


⑥

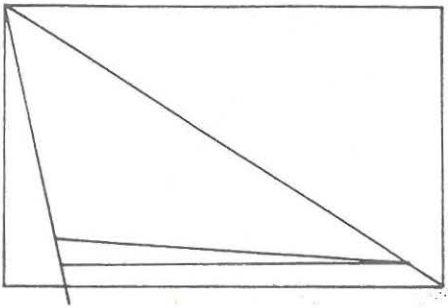


PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAP $3\text{-}14;00\text{-}10^2$

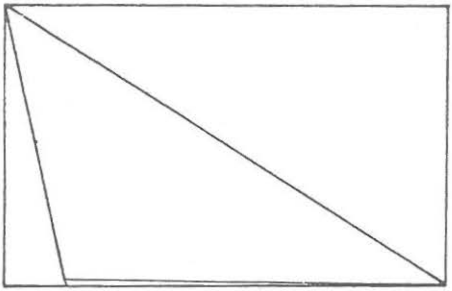
7



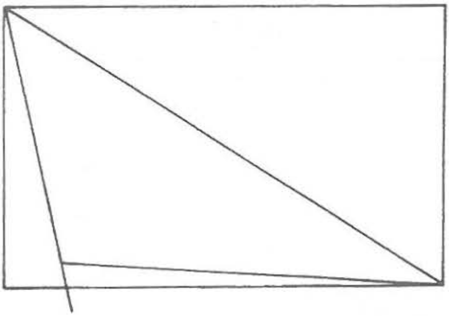
8



9

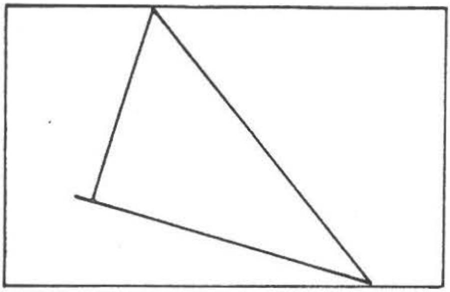


10



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAP 3-14;00-11

1

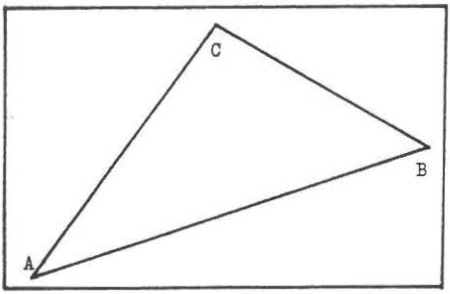


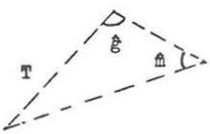
Dès la consigne donnée, l'élève dessine un triangle au coup d'oeil ; c'est la réalisation de la figure 1 . MAP examine sa figure en silence.
L'expérimentateur montre le triangle donné T et demande :

- Comment sais-tu que le triangle est le même que celui-ci, en plus grand ?

MAP - Je regarde a peu près la grandeur des angles.

2.1

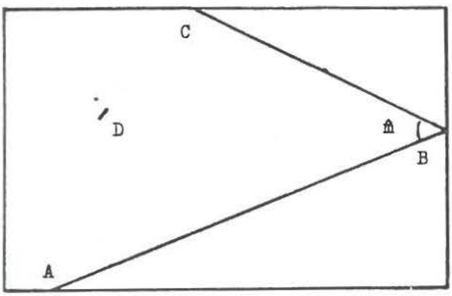




A la quatrième minute l'élève réalise sa figure 2.1 . Pour cela elle trace un segment AB sans justifier son choix. MAP a placé le triangle donné T de façon que la droite AB ait à peu près même direction que le grand côté du triangle T. Nous représentons T en pointillés sur la figure ci-contre. Les autres côtés sont tracés au coup d'oeil avec des directions voisines de celles des côtés de T.
L'élève se demande si l'angle en C est droit, en essayant de placer l'équerre sur cet angle.
MAP mesure l'angle moyen m̂ et le grand angle ĝ de son triangle T. Elle utilise le rapporteur d'une manière maladroite mais exacte. Elle n'annonce pas les nombres obtenus.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAP 3-14;00-12

(3.1)



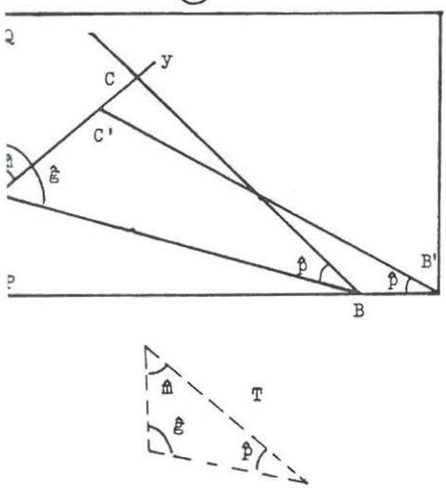
A la douzième minute MAP réalise la figure (3.1) . Elle prend donc une nouvelle feuille et trace un segment AB en plaçant les points A et B sur le bord du rectangle.
Elle construit ensuite à l'aide du rapporteur, en B un angle égal à l'angle moyen $\hat{m}$ de T ; elle obtient alors un point C.
Elle veut construire en C l'angle égal au grand angle $\hat{g}$ de T. Elle marque donc un point D tel que $\widehat{BCD}$ soit égal à $\hat{g}$; elle constate alors que le triangle sort du rectangle.

MAP - Je l'ai fait un peu trop grand.

MAP examine la figure (3.1) et dit :

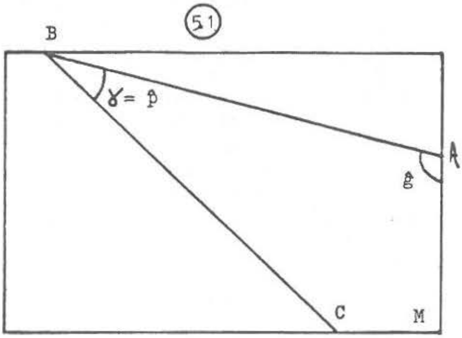
- Il faudrait commencer par l'angle et non par un côté.

(4.1)



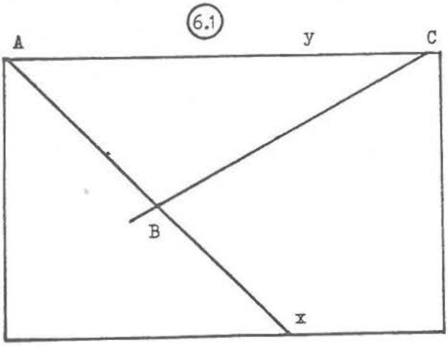
Elle réalise la figure (4.1) à la quinzième minute. Pour cela elle commence par prendre un point A sur une largeur du rectangle. Ce point n'est pas choisi avec précision.
MAP trace ensuite le segment AB tel que $\widehat{QAB} = \hat{g}$, B étant placé sur la longueur inférieure du rectangle.
Elle trace la demi-droite Ay telle que $\widehat{QAy} = \hat{m}$.
Il semble qu'ici l'élève ait perdu ses prévisions. Elle hésite longuement puis elle trace le segment BC tel que $\widehat{ABC} = \hat{p}$ où $\hat{p}$ est le petit angle du triangle donné T.
Elle vérifie avec le rapporteur que $\widehat{ACB} \neq \hat{g}$.
Elle trace enfin le segment B'C' tel que $\widehat{PB'C'} = \hat{p}$.
Tout au long de sa réalisation (4.1) MAP conserve, au triangle T, une position représentée dans la figure par le tracé en pointillé du triangle T. MAP abandonne cette figure et se procure une nouvelle feuille.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAP 3-14;00-13



A la vingtième minute MAP réalise sa figure (5.1) . Pour cela elle place maintenant son premier point A sur la largeur du rectangle situé à droite.
Le point B est ensuite placé sur la longueur supérieure du rectangle de telle sorte que $\widehat{MAB} = \hat{g}$.
Enfin, le point C est placé sur la longueur inférieure du rectangle de telle sorte que l'angle $\widehat{ABC}$ que l'élève appelle γ soit égal à $\hat{p}$: $\gamma = \hat{p}$.

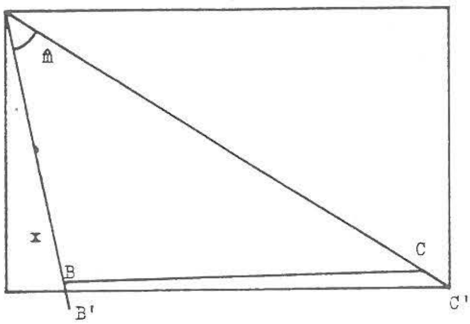
MAP - C'est encore trop grand.



A la vingt-deuxième minute, MAP réalise la figure (6.1) .
Pour cela, A étant pris en l'un des sommets du rectangle, elle construit la demi-droite Ax telle que $\widehat{yAx} = \hat{m}$.
Les angles sont évalués avec le rapporteur.
L'élève s'intéresse à la longueur des côtés du triangle donné T. Il mesure le grand et le petit côté de T avec le double décimètre et trouve 4 cm et 8 cm.
MAP double ces longueurs, puis place sur la figure (6.1) les points B et C tels que AB = 8 et AC = 16.
Elle mesure l'angle $\widehat{ABC}$. $\widehat{ABC}$ est un peu différent de $\hat{g}$, mais l'élève pense que l'erreur vient de l'imprécision de la construction.
L'élève s'arrête.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAP 3-14;00-14

(7.1)



Après un silence, l'observateur rappelle le problème posé et demande si la figure (6) en est la solution. L'élève pense que non. Il réalise alors, à la vingt-sixième minute la figure (7.1) .
Pour cela il trace la diagonale.

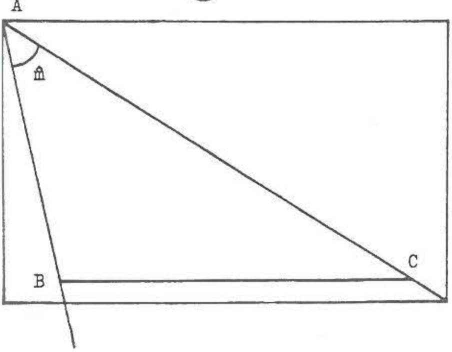
MAP - C'est le plus grand côté possible.

En utilisant le rapporteur l'élève trace la demi-droite Ax de telle sorte que $\widehat{C'Ax} = \hat{m}$.
Elle mesure la diagonale et trouve AC' = 19,4 cm.
Elle fait alors le raisonnement suivant : dans la figure (6) les côtés mesurent 16 cm et 8 cm ; pour avoir 19,4 cm il faut ajouter 3,4 cm à 16 cm ; il faut donc prendre pour l'autre côté 8 + 3,4 = 11,4 cm ; or avec AB' = 11,4 cm, le point B' est hors du rectangle.

MAP - Je vais enlever 1 cm à chaque côté.

Elle place alors les points B et C avec AB = 10,4 et AC = 18,4.
MAP achève de tracer son triangle ABC.
Elle mesure les angles pour vérifier, trouve 5 à 6 degrés de différence et reste perplexe.

(8.1)



A la trente-quatrième minute l'élève réalise la figure (8.1) .

MAP - Je vais prendre seulement 18 cm.

Elle place un point C sur la diagonale à 18 cm du point A.
Puis elle trace la demi-droite Ax de telle sorte que $\widehat{CAx} = \hat{m}$.

MAP - J'ai agrandi de 2 cm donc ça fait 10.

Se référant toujours au triangle double de la figure (6) , l'élève veut dire qu'elle ajoute 2 cm à 16 et qu'elle doit, de ce fait, ajouter 2 cm à 8 ce qui lui donne les 10 cm annoncés. Elle place donc le point B tel que AB = 10 cm.
Elle vérifie les angles du triangle obtenu :

MAP - C'est complètement faux !

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAP 3-14;00-15

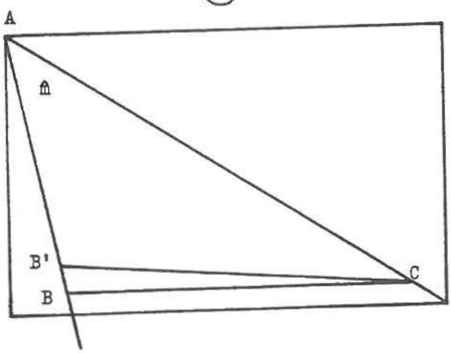
Un instant de réflexion puis une idée nouvelle vient ainsi s'exprimée :

- Ca y est ! je sais pourquoi ... là (elle montre B de 81) j'en rajoute trop. Il faut que j'en rajoute selon la proportion.

L'élève se corrige :

- Proportionnellement à la longueur.

8.2



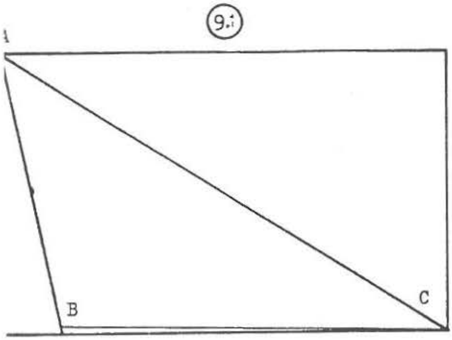
MAP - Là (elle montre toujours B de 81) il faut que je rajoute 1 cm puisque c'est la moitié.

Elle veut dire qu'ayant ajouté 2 cm à 16, il faut n'en ajouter qu'un à 8.
Elle construit alors le point B' tel que BB' = 1 cm. C'est sa réalisation 82 .
Le triangle AB'C obtenu est tel que AC = 18 cm et AB' = 9 cm.
L'angle $\widehat{AB'C}$ est vérifié ; il est jugé correct.

MAP précise d'ailleurs :

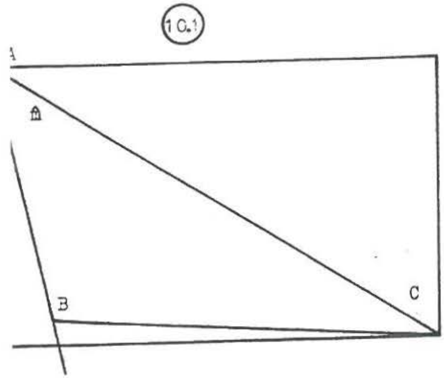
- Il est bon, mais il est petit.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAP 3-14;00-16



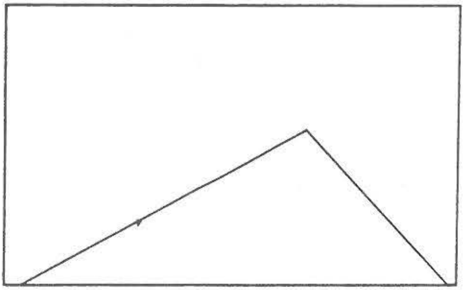
A la quarantième minute, MAP réalise la figure 9.1 .
Pour cela elle trace la diagonale AC et mesure AC = 19,5 cm.
Elle fait un raisonnement inspiré du cas précédent :
puisqu'elle ajoute 3,5 cm à 16 cm, elle ajoute, alors, 1 cm de moins à 8 cm ; ce qui lui donne le segment
AB = 8 cm + 2,5 cm = 10,5 cm.
MAP termine le tracé de sa figure.
La mesure des angles en B et C lui montre que la figure ne convient pas.

A la quarante-cinquième minute MAP reprend son raisonnement.
Elle précise que si elle ajoute 3,5 cm à 16 cm, il faut n'ajouter que 1,75 cm à 8 cm ; ce qui la conduit à construire
AB = 9,75 cm.
Elle réalise donc la figure 10.1 .
Pour cela elle construit le point B tel que $\widehat{CAB} = \hat{m}$ et AB = 9,75 cm.
Ce dessin est rapidement exécuté.
Elle est satisfaite par la réalisation des angles.
MAP affirme qu'elle est sûre d'avoir, à présent, la bonne réponse.

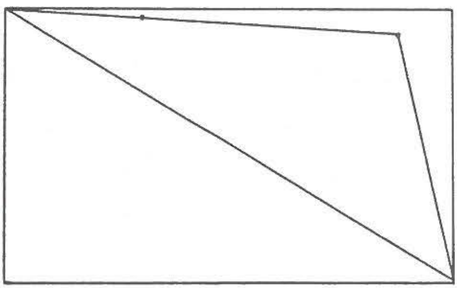


PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GIL 3-14;01-01

1



2



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GIL 3-14;01-1

L'expérimentateur relit l'énoncé du problème à l'élève.

GIL - Par exemple, si on multiplie un côté par trois, il faut multiplier les autres par trois ?

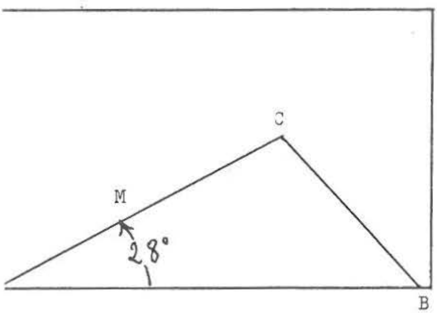
L'expérimentateur lui répond qu'il doit chercher son problème comme s'il était seul. L'élève mesure le grand côté du triangle proposé T, puis la longueur du rectangle proposé R.

GIL - Là, il y a huit centimètres (il s'agit du grand côté de T) et là il y a 17 (il s'agit de la longueur de R), je vais le mettre deux fois.

Puis, prenant en considération les deux autres côtés du triangle T, il dit :

GIL - Je multiplie ça aussi par deux ;
$6 \times 2 = 12$ et $4 \times 2 = 8$;
Ca doit rentrer, en principe.

1.1



Il réalise alors la figure 1.1 . Il choisit, d'abord, deux points A et B, à 16 cm l'un de l'autre et sur la longueur inférieure du rectangle R. Il mesure, ensuite, le petit angle du triangle T et trouve 28°. Il veut construire en A un angle de 28°. Pour cela il place correctement son rapporteur et marque le point M tel que $\widehat{MAB} = 28°$.
Il mesure alors le grand angle du triangle proposé T. Il trouve 105°. Il essaie de placer le troisième sommet du triangle cherché en utilisant cet angle de 105°. Il n'y arrive pas.
Il trace AM et porte 12 cm sur cette demi-droite AM, ce qui lui donne le point C. Enfin, il joint CB. Il a obtenu, ainsi, un triangle ABC double du triangle proposé T.
Il ajoute une remarque.

GIL - Il n'est pas le plus grand possible.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - GIL 3-14;01-2

En parlant du segment AB de (1.1) , il déclare :

GIL - Il faudrait que la base soit plus grande... je ne vois guère que la diagonale.

Il réalise alors la figure (2.1) . Il trace la diagonale PQ d'un rectangle donné R. Il trace en P, au moyen du rapporteur, un angle $\widehat{QPM}$ de 28°. Puis, sur la demi-droite PM, il place le point K tel que PK = 15 cm. En effet, il a remarqué que, la diagonale étant égale à 20 cm, elle est égale à 2,5 fois le plus grand côté de T ($8 \times 2,5 = 20$). Et un calcul :

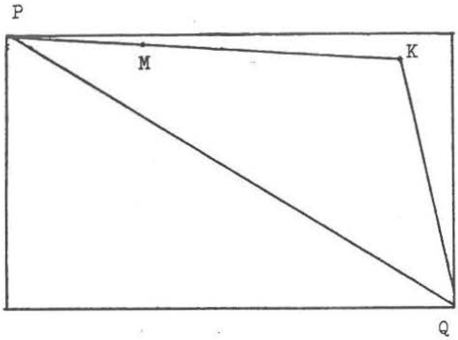
$6 \times 2,5 = 15$

lui a donné la mesure du côté moyen du triangle cherché.
Il obtient ainsi le triangle PQK.
Il compare, par superposition et transparence, son triangle PQK et le triangle donné T.
Il est satisfait et déclare :

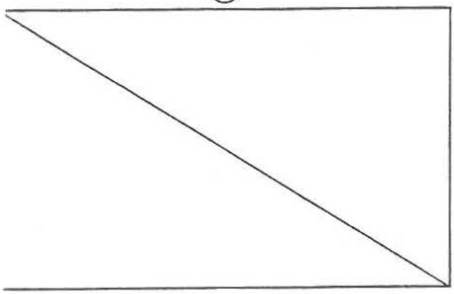
GIL - Je ne vois pas ce qu'on peut faire de plus.
La diagonale c'est la base la plus grande ; pour le faire le plus grand possible, il faut faire la base la plus grande ; on ne peut pas faire une base plus grande.

Il a résolu le problème au bout de dix minutes.

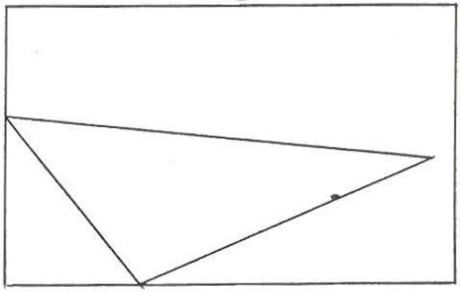
(2.1)



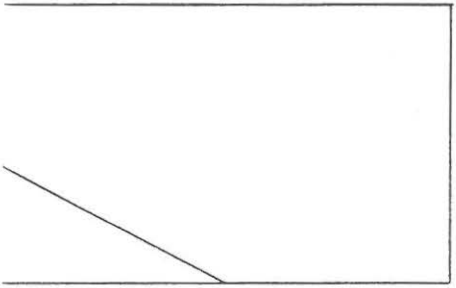
(1)



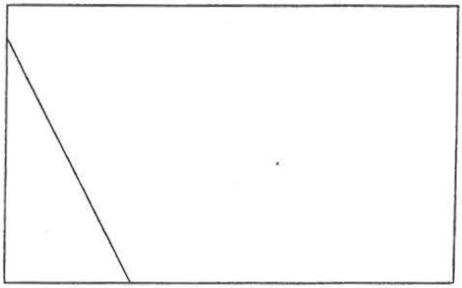
(2)



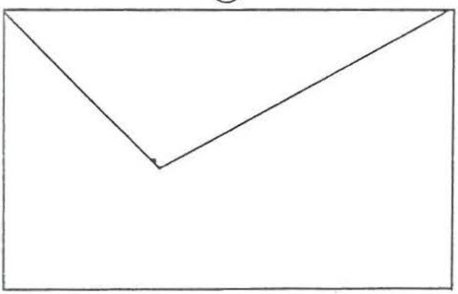
(3)



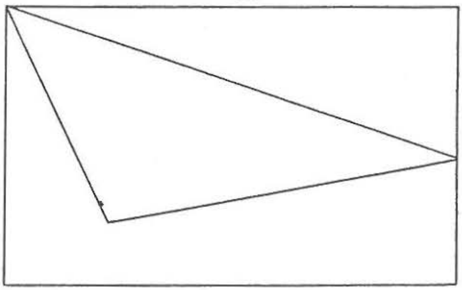
(4)



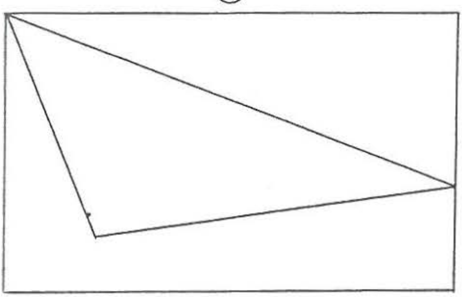
(5)



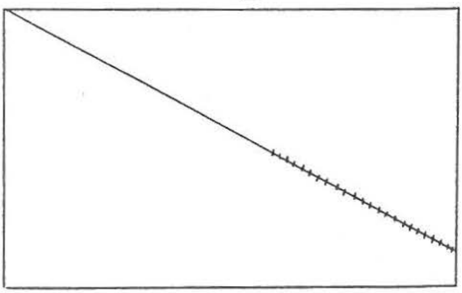
(6)



(7)



(8)



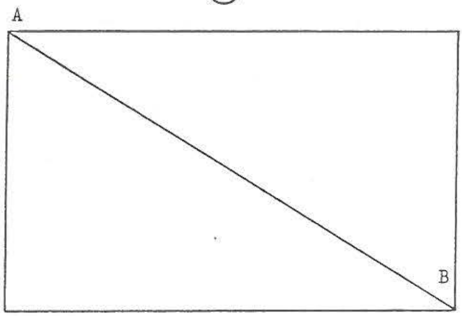
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - EDW 3-14;11-1

EDW - Je mesure le plus grand côté et j'essaye de le faire rentrer dans la plus grande longueur du rectangle, c'est à dire la diagonale.

L'élève mesure donc le grand côté du triangle donné T et décide de construire le triangle cherché en prenant la diagonale du rectangle R comme grand côté. Elle réalise alors sa figure (1.1) . Pour cela elle trace la diagonale AB.

EDW - Ah ! Il faut que les mesures soient en rapport.

(1.1)



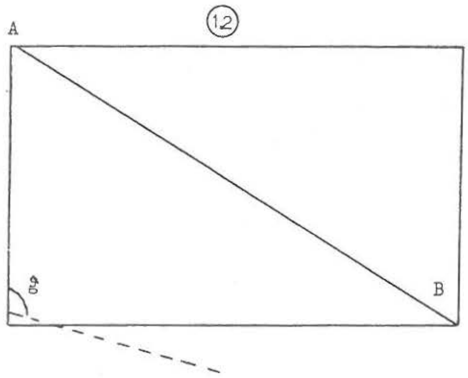
EDW - Je vais essayer de trouver l'échelle, mais je ne sais pas comment on fait. Je cherche par combien je multiplie 8 pour trouver 19 et quelques ; je mets 20.

A la troisième minute, EDW cherche l'échelle lui permettant de construire un triangle, répondant à la question, dont le grand côté mesure à peu près 20 cm, sachant que le grand côté de T mesure 8 cm. Elle trouve 2,5 comme échelle.
Elle mesure alors les deux autres côtés du triangle T, trouve 4 cm et 6 cm ; elle effectue les calculs :

$4 \times 2,5 = 10$

$6 \times 2,5 = 15.$

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - EDW 3-14;11-2



A la cinquième minute EDW réalise la figure (12). Pour cela elle demande l'équerre et le rapporteur ; elle mesure le grand angle ĝ du triangle donné T. Elle marque sur une largeur du rectangle R un point C tel que AC = 10 cm. Elle s'arrête et dit :

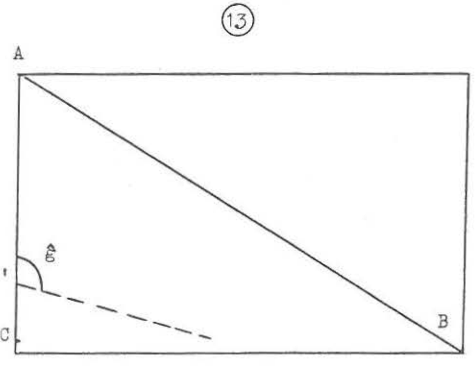
- Ca ne va pas car le troisième côté va à l'extérieur, donc c'est ce côté (AB) qui est trop grand.

Pour EDW, la diagonale représente le grand côté du triangle cherché et AC en représente le petit côté ; le côté moyen a donc la direction indiquée par les pointillés en (12) , il ne rentre donc pas dans R. Elle pense donc qu'en raccourcissant AB elle raccourcit du même coup AC et qu'alors le triangle cherché peut rester à l'intérieur de R.

Expérimentateur - Que vas-tu faire ?

Elle ne répond pas, mais calcule les doubles des côtés de T ; elle écrit :

$8 \longrightarrow 16$
$4 \longrightarrow 8$
$6 \longrightarrow 12$



Sans dessiner, elle réfléchit alors, à la huitième minute, à la figure (13) . Pour cela elle désigne du doigt le point C' situé à 8 cm du point A ; puis elle s'arrête avant de construire l'angle égal au grand angle ĝ de T car elle voit, comme l'indique la figure (13) ci-contre que le troisième côté de son triangle la conduit à l'extérieur de R.
Elle réfléchit.

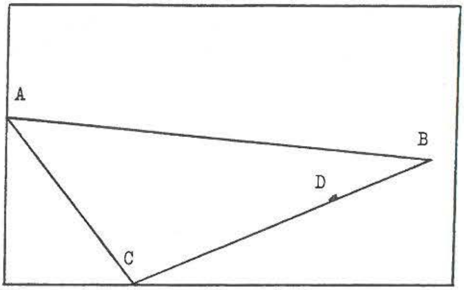
EXP - Que cherches-tu ?

EDW - C'est ce côté !

Elle estime que c'est le côté moyen du triangle qu'elle veut construire qui lui pose des problèmes ; en effet, en (12) , comme en (13) , il n'est jamais entièrement contenu dans R.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - EDW 3-14;11-3

21



A la douzième minute, elle réalise la figure 21 . Pour cela elle trace un segment $\overline{AC}$ tel que AC = 8 cm. Puis, au moyen du rapporteur, elle construit un angle $\widehat{ACD} = 105°$.
Elle trace enfin un segment CB porté par la droite CD et tel que CB = 12 cm.

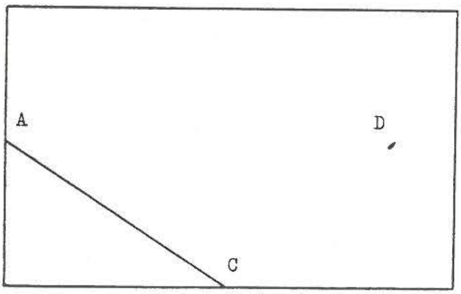
EDW - Ca devrait faire le triangle.
Ah, c'est pas le même !

EXP - Comment le vois-tu ?

Elle superpose alors le triangle T et le triangle qu'elle vient de construire et les compare par transparence.

EDW - Eh, si ... peut-être !

31



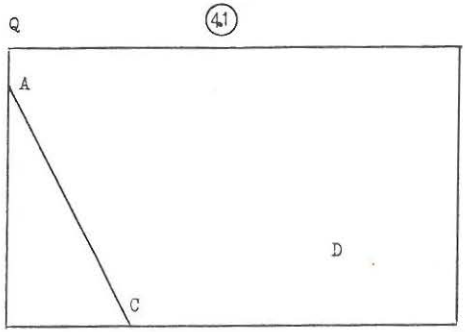
EDW - Je vais essayer de le faire plus grand.

Elle réalise alors à la dix-huitième minute la figure 31 . Pour cela elle trace un segment $\overline{AC}$ = 10 cm ; puis, à l'aide du rapporteur, marque un point D tel que $\widehat{ACD} = 105°$.
Elle précise qu'elle essaye de multiplier par 2,5.

EDW - Mais ça ne va pas, l'autre côté dépasse.

Elle veut dire que le côté moyen du triangle qu'elle veut construire, qui est porté par la droite CD, ne rentre pas dans R.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - EDW 3-14;11-4



EDW - Alors je vais essayer de remonter ça.

Elle veut placer son point A un peu plus haut sur la largeur du rectangle R.
Elle réalise, à la vingtième minute, sa figure 4.1 . Elle trace donc comme précédemment AC puis D.
De nouveau elle constate que ça ne va pas.

EDW - Je vais continuer.

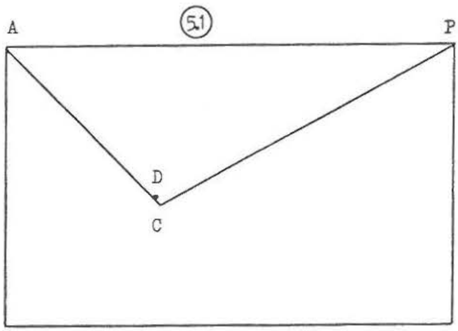
Elle essaie de placer le point A en différentes positions, jusqu'à ce que le point atteigne le sommet Q du rectangle.
Après ces essais qui ne donnent rien, elle efface.

L'expérimentateur pose une question à EDW, à la vingt-deuxième minute.

EXP - Qu'est-ce que tu vas faire ?

EDW - Je vais essayer d'agrandir la figure 2 .
8 x 2,2 = 17,6, c'est trop grand pour aller sur le côté du rectangle ;
8 x 2,1 = 16,8 et pour les autres 8,4 et 12,6 ;
Ca devrait être plus qu'à la figure 2 puisque le côté du rectangle est plus grand.

Elle veut essayer d'agrandir le triangle obtenu en 2.1 ; elle renonce à l'échelle 2,2 qui lui donne un grand côté plus grand que la longueur de R ; elle accepte 2,1 qui doit lui donner un triangle plus grand que 2 qui n'a été que doublé.
EDW réalise la figure 5.1 . Pour cela elle marque un point D tel que $\widehat{PAD} = \hat{m}$, l'angle moyen de T.
Elle trace ensuite le segment AC porté par la droite AD et tel que AC = 8,4 cm.
Elle achève enfin son triangle PAC.



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - EDW 3-14;11-5 .

EDW - On peut l'agrandir en faisant tourner AB.

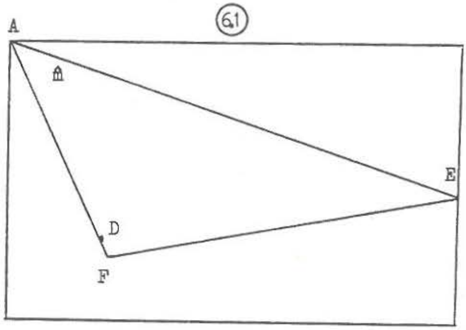
D'un geste de la main, elle indique qu'elle fait pivoter le triangle ABC de (5.1) autour du point A.
A la trente-cinquième minute, elle émet quelques doutes.

EDW - Mais je ne sais pas si les autres côtés pourront entrer.

EXP - Tu peux essayer.

Elle multiplie 8 par 2,2 et obtient 17,6 ; elle obtient de même 8,8 et 13,2 en multipliant 4 et 6 par 2,2.
Elle réalise alors la figure (6.1) . Pour cela elle construit le segment AE, les points A et E étant sur les côtés de R de telle sorte que AE = 17,6 cm.
Elle choisit le point D tel que $\widehat{EAD}$ soit égal à l'angle moyen $\hat{m}$ de T ; elle a de la difficulté pour construire cet angle.
Elle trace enfin le segment AF, porté par la droite AD, tel que AF = 8,8 cm.

(6.1)



EDW - C'est pas très juste ; je le trace quand même ?

EXP - Oui, si tu crois ...

Elle vérifie par transparence que le triangle AFE qu'elle vient de tracer, est plus grand que le triangle précédent.

EDW - Oui.

A la quarante-deuxième minute EDW déclare :

- J'essaye de le faire plus grand en le baissant.

Elle veut dire qu'en continuant à faire pivoter son triangle autour du point A de telle sorte que E et F descendent.

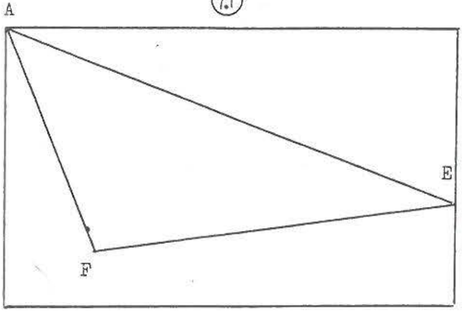
EDW - Il faudrait le faire toucher en bas.

Elle veut amener F sur la longueur inférieure de R.

Elle choisit alors comme échelle 2,25 et en multipliant la mesure des côtés de T par ce nombre, elle obtient :

18 9 et 13,5.

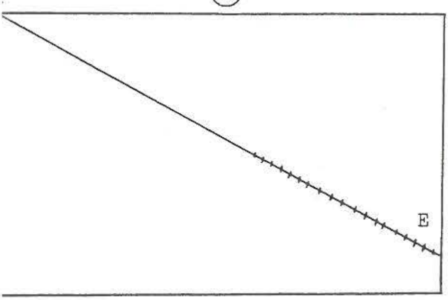
(7.1)



Elle construit alors sa figure (7.1) .
Elle procède comme précédemment ; elle prend AE = 18 cm, puis $\widehat{EAF} = \hat{m}$, puis AF = 9 cm.
Après avoir tracé le triangle, elle le compare à celui de la figure (6.1) .
Elle ajoute aussitôt :

- Mon problème c'est de le faire plus grand ; c'est possible puisqu'il me reste de la place.

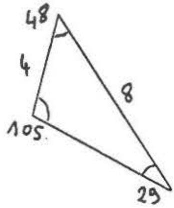
(8.1)



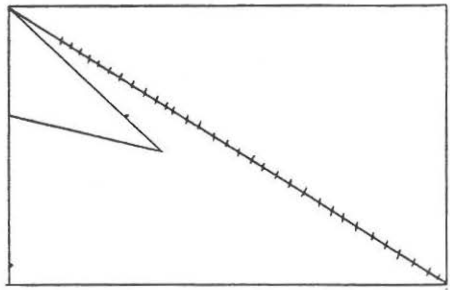
Elle réalise sa figure (8.1) . Pour cela elle trace AE = 19 ; puis divise 19 par 8. Mais aussitôt elle commence à effacer pour agrandir. Elle ne peut pas continuer son travail car la fin de l'heure est arrivée. Elle indique alors que c'est la diagonale qu'il faut choisir comme segment AE.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAR 3-15;00-0[1]

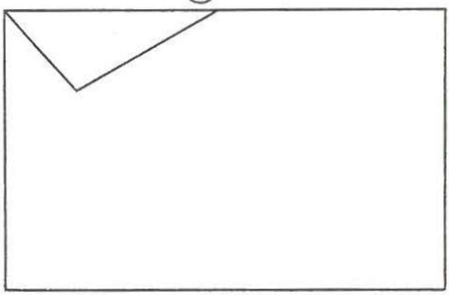
0



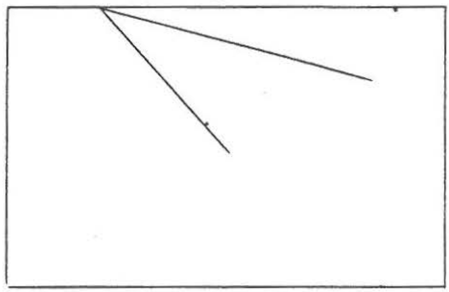
1



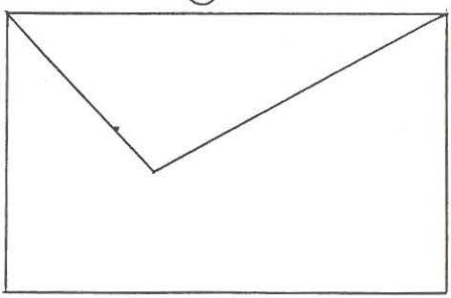
2



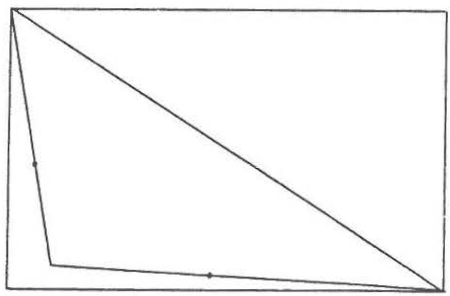
3



4



5



MAR - On n'a aucune mesure ?

Expérimentateur - Non, vous avez simplement le modèle.

MAR - On peut prendre des mesures ?

EXP - Bien entendu.

MAR - Comme ce côté est le plus grand, on va le placer en diagonale.

Elle désigne ainsi le plus grand côté du triangle donné T ; elle veut construire un triangle dont le plus grand côté est la diagonale du rectangle donné R.
Elle mesure le grand côté de T et trouve 8 cm. Elle mesure la diagonale et trouve 19,5 cm.

A la quatrième minute, sur son brouillon, elle effectue la division :

$$\begin{array}{r|l} 19,5 & 8\cancel{0} \\ \cline{2-2} 3\ 50 & 2,4375 \\ 300 & \\ 600 & \\ 400 & \\ 00 & \end{array}$$

Elle trouve donc : 2,4375.

MAR - Donc si je multiplie ce nombre par celui-là je trouverai la diagonale.

Elle veut dire que si elle multiplie 8 par 2,4375 elle trouve la longueur de la diagonale ; elle écrit sur son brouillon :

$8 \times 2,4375 = 19,5$

Elle mesure alors le petit côté du triangle donné T, trouve 4 cm ; MAR effectue sur son brouillon l'opération suivante :

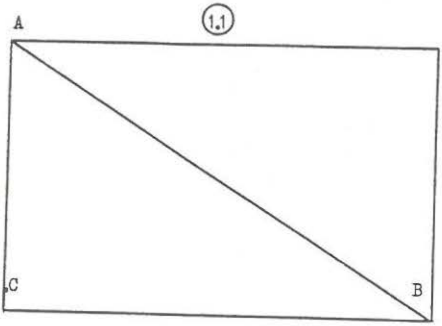
$4 \times 2,4375 = 9,75\cancel{00}$

Elle mesure encore le côté moyen de T et effectue l'opération :

$6 \times 2,4375 = 14,625\cancel{0}$

MAR - Après je vais essayer de placer le triangle qui a ces mesures dans le rectangle ; je ne sais pas si ça marche !

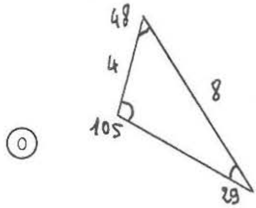
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAR 3-15;00-2



Elle passe alors, à la huitième minute, à la réalisation de sa figure 1.1 .
Pour cela elle trace la diagonale AB, puis sur la largeur du rectangle R situé à gauche, elle mesure 9,75 cm et marque un point C.
Elle mesure alors BC ; comme elle ne trouve pas les 14,625 cm qu'elle prévoyait elle dit :

- Non, ça ne marchera pas, il faut que je prenne l'écartement.

MAR indique par cette phrase qu'elle veut se servir des angles.



MAR prend le rapporteur et mesure le grand angle du triangle T. Elle a de la peine pour lire les graduations, mais place le rapporteur sans difficulté. Elle lit enfin 105°. Elle note sur son triangle T le résultat obtenu ; le triangle avec les indications qu'elle y porte constitue la figure 0 .
Elle mesure ensuite l'angle moyen et le petit angle de T, trouve respectivement 48° et 29° et reporte ces résultats sur la figure 0 . On trouve encore sur 0 les mesures du petit et du grand côté de T.

MAR efface la diagonale AB qu'elle avait tracée en 1.1 . L'expérimentateur lui en demande la raison.

MAR - Je croyais pouvoir placer le grand côté sur la diagonale, mais ça n'allait pas.

EXP - Pourquoi donc ?

MAR - Je ne sais pas, je n'y suis pas arrivée.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAR 3-15;00-3

A la quatorzième minute elle hésite.

MAR - Ce sont les angles qui m'embètent.

EXP - Pourquoi ?

MAR - Normalement si je fais le triangle plus grand ... ils seront plus grands ! ... ? ... Non ... Ce sera les mêmes ...!!

Elle a un ton vaguement interrogatif, et si en définitive elle pense que les angles resteront les mêmes, elle paraît peu fixée.

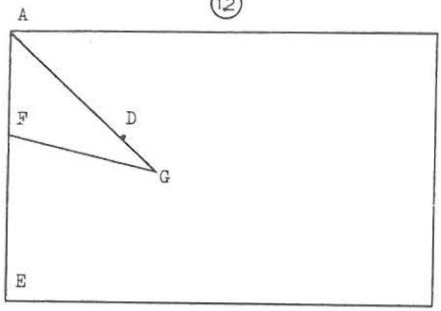
MAR - Je vais d'abord essayer de faire le même puis je verrai si je peux l'agrandir.

Elle veut donc contruire un triangle égal au triangle T qu'elle agrandira par la suite.
Elle réalise alors son dessin (1.2) . Pour cela elle mesure un angle de 48° et marque le point D correspondant à la graduation 48, donc tel que :

$\widehat{EAD} = 48°$

Elle marque ensuite sur la largeur AE du rectangle R situé à gauche, un point F tel que AF = 4 cm.
Puis MAR trace un segment AG porté par la droite AD et tel que AG = 8 cm.

(1.2)



A la vingtième minute MAR change de feuille.

MAR - Je vais le refaire en mettant le grand côté du triangle sur le grand côté du rectangle.

Elle veut construire un triangle, égal au triangle T, dont le grand côté se trouvera sur une longueur du rectangle R.
Elle réalise alors la figure (2.1) . Pour cela elle choisit un premier segment AM, sur la longueur supérieure du rectangle R et tel que AM = 8 cm.
Elle construit au rapporteur l'angle

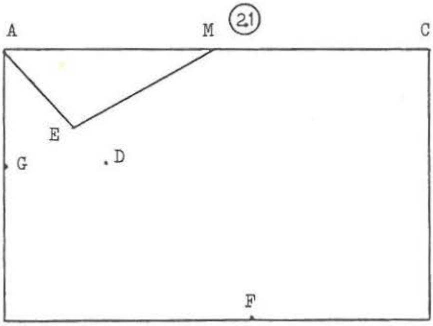
$\widehat{MAD} = 48°$

Elle trace le segment AE, porté par la droite AD et tel que

AE = 4 cm.

Elle joint enfin EM.

(2.1)



PRØBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAR 3-15;00-4

Appelons F le point d'intersection de la droite AD et de la longueur inférieure du rectangle.
MAR mesure la longueur de AF, sans tracer EF (cf figure 21).
Elle trouve : AF = 14 cm.
Elle effectue sur son brouillon la division :

$$\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline 20 & 3,5 \end{array}$$

Elle note encore sur ce même brouillon :

$4 \times 3,5 = 14$

Sur son brouillon, elle écrit encore :

$8 \times 3,5 = 28,0$

Elle hésite, puis :

MAR - Non.

Durant l'étape que nous venons de d'écrire, MAR cherche à tracer un triangle semblable à T dont les trois sommets sont sur le bord R ; pour cela elle imagine un agrandissement de AEM, elle imagine donc un prolongement du côté AE jusqu'au point F ; AF étant alors le petit côté de son nouveau triangle, $\frac{AF}{AE} = 3,5$ lui donne le rapport de proportionnalité entre le triangle imaginé et le triangle AEM ; elle calcule alors la longueur que doit avoir le plus grand côté du triangle imaginé ; elle trouve 28 cm ; elle rejette donc cette solution, car ce grand côté est trop grand pour le rectangle donné.

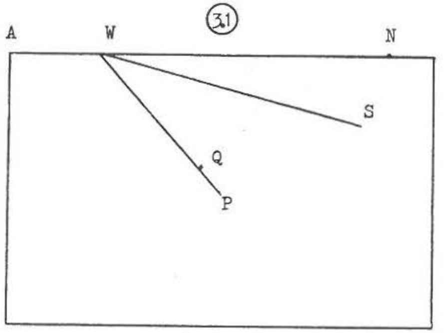
MAR - Je vais voir plutôt combien on peut ajouter.

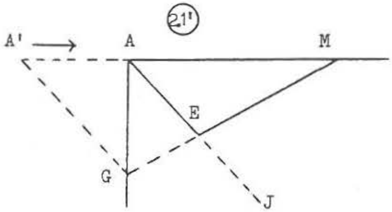
Puis elle écrit sur son brouillon :

$4 + 10 = 14$
$8 + 8,5 = 16,5$
$6 + 3,4 = 9,4$

Le premier membre de la première égalité représente la somme des deux segments AE et EF.
Le premier membre de la deuxième égalité représente la somme des deux segments AM et MC, où C est le coin supérieur droit de R représenté en 21 .
Le premier membre de la troisième égalité représente la somme des deux segments ME

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAR 3-15;00-5





et EG, où G est l'intersection de la droite ME et de la largeur de R située à gauche comme cela est indiqué en 21 .

MAR - Je conclus qu'on peut ajouter au moins 3,4 aux 3 côtés.

A la vingt-septième minute MAR prend une nouvelle feuille sur laquelle se trouve le rectangle R et réalise la figure 31 . Pour cela elle choisit un point W sur la longueur supérieure du rectangle tel que AW = 3,4 cm ; puis un point N sur cette longueur, tel que
WN = 11,4 cm.

EXP - Pourquoi as-tu placé ton premier point (W) ici ?

MAR - Parce que sinon ces deux côtés vont se croiser ... enfin... je sais pas.

Comment s'explique cette dernière phase ? MAR constate sur la figure 21 qu'un segment AJ de longueur 4 + 3,4, porté par AE et le segment GM se croisent en E, comme le montre notre figure 21' ci-contre.
Pour éviter cette situation, elle veut que AJ devienne A'G ; et pour que son triangle soit contenu dans le rectangle R, elle translate le tout, vers la droite, de 3,4 cm, qui est la longueur AW de 31 .
Mais en définitive elle n'est pas très sûre de son procédé qui a été simplement pensé, sans calcul ni dessin, à partir de l'observation de 21 .
Une fois choisi W et N (cf 31) elle construit l'angle $\widehat{NWQ}$ = 48°, en utilisant le rapporteur ; puis sur la droite WQ elle porte le segment WP = 7,4 cm.
Elle mesure PN.

MAR - Ah non, ça ne va pas.

Elle vérifie les mesures de $\widehat{PWN}$ et de WP.

EXP - Qu'y a-t-il ? Qu'est-ce qui vous gêne ?

MAR - Là, j'ai ajouté à tous les côtés 3,4 et là, ça ne fait pas la bonne mesure !

EXP - Qu'attendiez-vous ?

MAR - 9,4 et ils n'y sont pas !

Elle vient de constater que le segment PN ne mesure pas 9,4 = 6 + 3,4 comme elle le prévoyait.

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAR 3-15;00-6

Elle mesure alors l'angle $\widehat{WNP}$.

MAR - Bizarre !

Là encore elle ne trouve pas l'angle prévu de 29°.
Plaçant le centre de son rapporteur en P, elle mesure un angle $\widehat{WPS}$ de 105° ; S est le point qui se trouve à côté de la graduation 105 de son rapporteur (cf figure (31)).
Elle joint WS.
Elle mesure l'angle $\widehat{SWP}$.
Très troublée, elle hésite ...

EXP - Que se passe-t-il ?

MAR - Je n'arrive pas à faire le triangle que je veux.

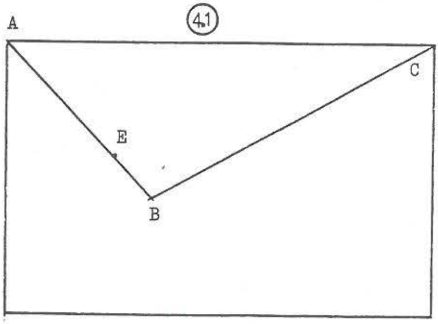
Elle reprend en main son dessin (2) , à la trente-cinquième minute et l'observe.

Elle revient alors à la notion de proportionnalité des côtés et divise 16,5 qui est la longueur de R, par 8 ; elle effectue la division sur son brouillon

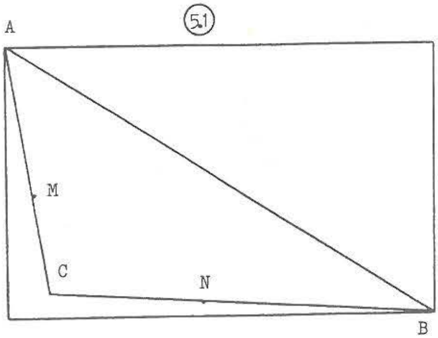
```
16,5 | 80
  500 | 2,0625
  200 |
   400|
    00|
```

Elle trouve donc 2,0625.
Elle multiplie alors 4 et 6 par 2,0625 et trouve respectivement 8,25 et 12,375.
MAR réalise alors à la trente-huitième minute la figure (41) dessinée ci-contre.
Pour cela elle construit au rapporteur l'angle $\widehat{CAE}$ = 48° ;
puis elle trace le segment AB = 8,25 porté par la droite AE.
Elle joint enfin BC.
Elle vérifie que $\widehat{ACB}$ = 29°, que $\widehat{BAC}$ = 48° et que $\widehat{ABC}$ = 105° ;
elle en conclut :

- Je pense que ça en est un, mais est-ce le plus grand ?



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - MAR 3-15;00-7



A la quarantième minute MAR prend une autre feuille sur laquelle se trouve le rectangle et elle réalise sa figure 51 .

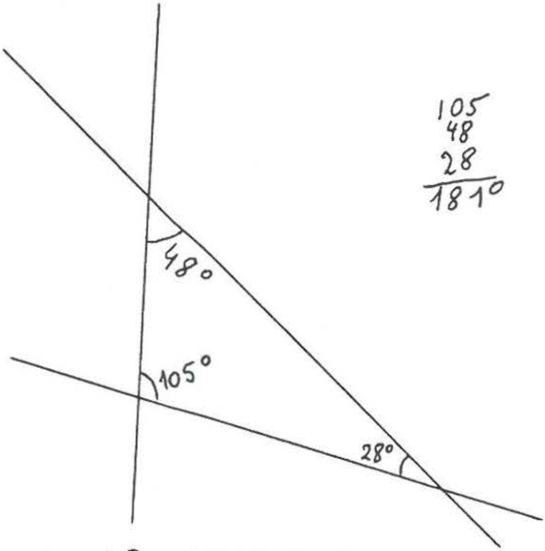
MAR - Je vais essayer de reprendre avec la diagonale.

Elle trace cette diagonale AB.
Elle construit l'angle $\widehat{BAM} = 48°$ au rapporteur.
Elle trace le segment AC = 9,75 cm porté par la droite AM.
Elle construit l'angle $\widehat{ACN} = 105°$.
Elle joint BC.
Elle mesure BC et ne trouve pas tout à fait les 14,625 cm attendus (cf. les calculs faits par MAR tout au début de sa recherche).

MAR - Ca tombe pas tout à fait juste ...

PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - RIM 2-15;09-0[1]

①

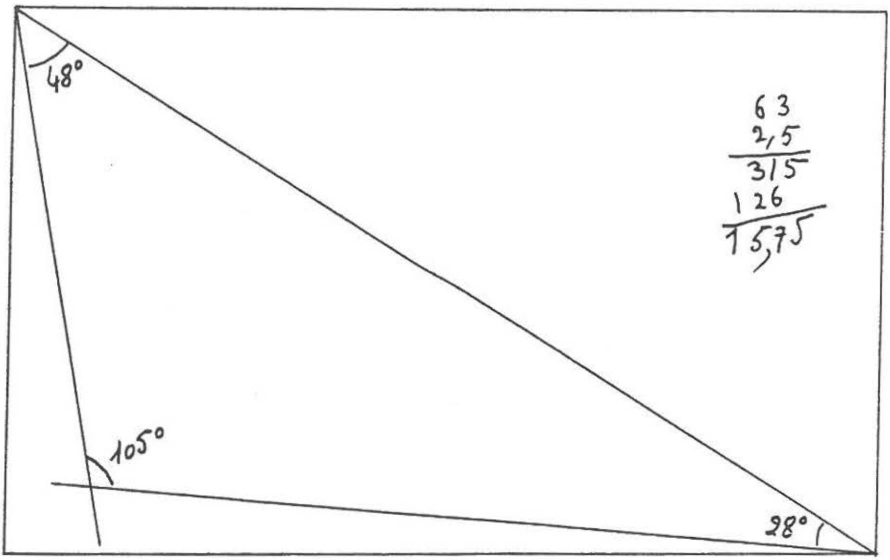


105
48
28
181°

②

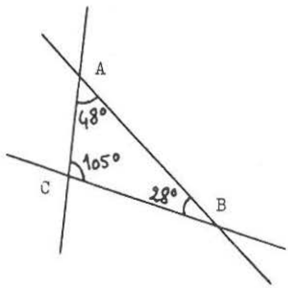
20 | 8
-40 | 2,5

15,3 | 6,3 2,5



PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - RIM 2-15;09-1

1.1



RIM place le triangle donné T sur une feuille où se trouve déjà dessiné le rectangle R. Avec la pointe d'un compas, en traversant les deux feuilles de papier, il marque les sommets du triangle. Cela lui donne sa première réalisation (1.1) que nous représentons ci-contre à l'échelle $\frac{1}{2}$. Il obtient ainsi le triangle ABC. Il trace les trois côtés AB, BC, et CA en les prolongeant légèrement. Et il en explique la raison.

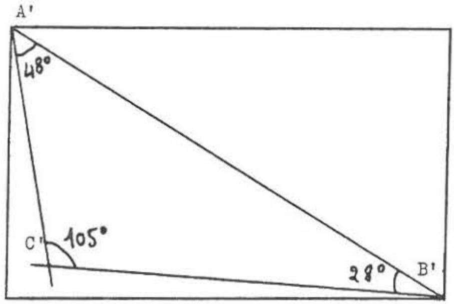
RIM - Je fais ça pour mesurer plus facilement les angles et avoir après la reproduction exacte du triangle.

Il mesure les trois angles du triangle ABC ; il trouve : $\hat{A} = 48°$ $\hat{B} = 28°$ $\hat{C} = 105°$. Il vérifie ensuite que la somme des angles est de 180°. Il additionne et trouve

$$28° + 48° + 105° = 181°.$$

Tenant compte d'une certaine approximation dans sa construction, il accepte ce résultat comme convenable.

2.1



L'élève réalise, à la cinquième minute, la figure (2.1) . Pour cela, il trace la diagonale A'B' du rectangle donné R. A cette occasion, il précise au sujet du triangle donné T :

RIM - S'il était rectangle, ça serait plus grand.

Il semble admettre que, dans le cas où le triangle donné aurait été un triangle rectangle, la solution aurait été constituée par la moitié du rectangle R.

RIM - Je mets celui-là sur la longueur et je regarde quel côté gênerait l'élargissement.

Dans cette dernière phrase, l'élève explique sa procédure. Il choisit la diagonale de R, qu'il appelle d'ailleurs "longueur", comme grand côté du triangle cherché. Il essaie ensuite de savoir s'il doit placer le triangle cherché au dessus ou au dessous de la diagonale.

Ayant fait son choix, il construit les angles $\widehat{A}'$ = 48° et $\widehat{B}'$ = 28°. Ces angles sont construits assez rapidement. Il confirme son choix, à la huitième minute.

RIM - C'est le plus grand car il a la plus grande hypothénuse.

Par "hypothénuse", il entend le grand côté du triangle. Il ajoute :

RIM - Je vais voir quand même.

Il retourne la feuille sur laquelle il vient de dessiner le triangle A'B'C'. Sur ce verso il trace le triangle A"B"C" superposé au précédent A'B'C', par transparence. Il place alors cette feuille sur une nouvelle feuille où est dessiné un rectangle R, et déplace A"B"C" dans R pour voir si dans une autre position de A"B"C" l'agrandissement est possible.
Après cette manipulation, il est convaincu que le triangle A"B"C" obtenu en 21 est le plus grand.
Mais il va tout de même vérifier qu'il y a bien proportionnalité.
Il divise la longueur de la diagonale par la longueur du grand côté de T :

20 : 8 = 2,5.

Puis ayant mesuré B'C' = 15,3 cm, il cherche à effectuer la division :

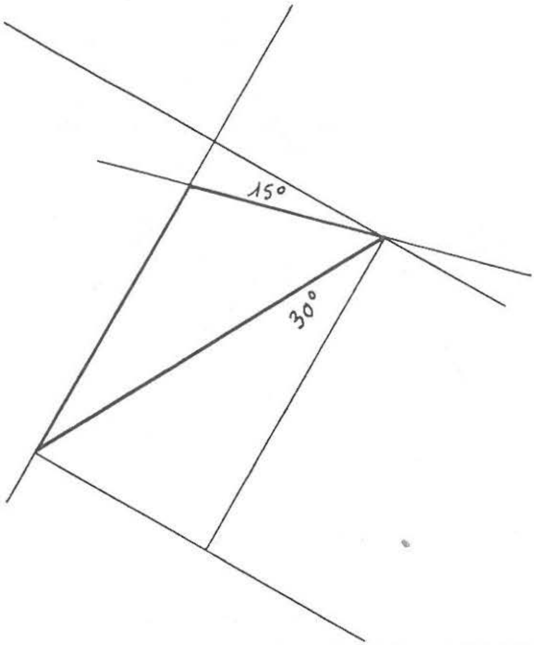
15,3 : 6,3 ;

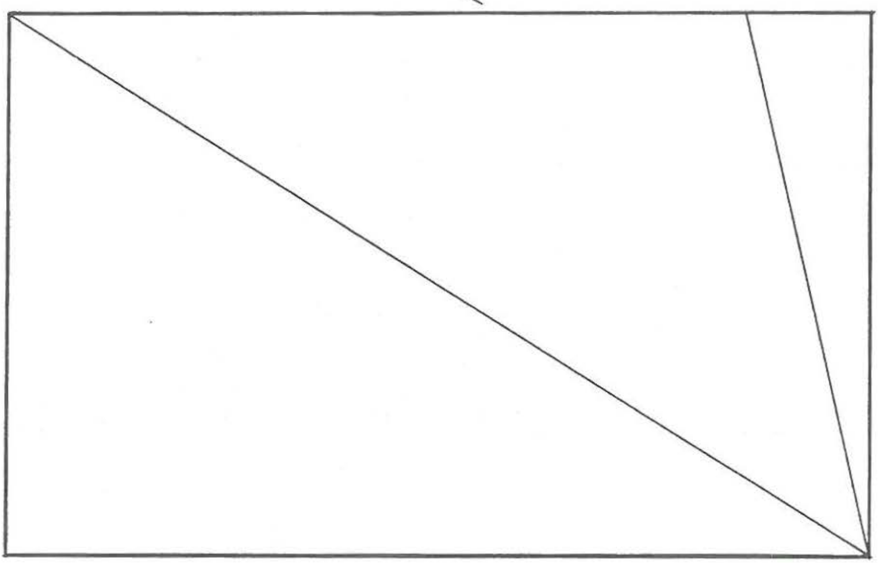
Mais il se contente de la multiplication :

6,3 × 2,5 = 15,75.

6,3 cm est la mesure du côté moyen de T. Ce résultat approximatif le satisfait.
Il ne fait pas de vérification portant sur le petit côté.
Sa recherche s'achève à la dix-septième minute.

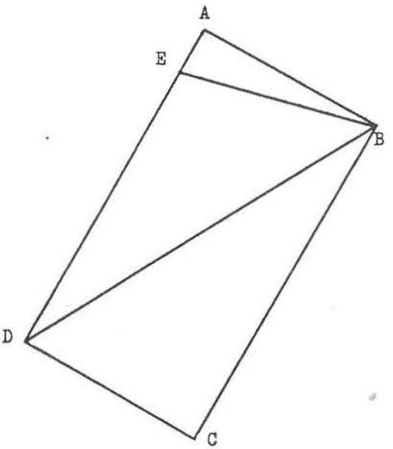
PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CIT 1-16;11-0[1]





PROBLEME SIM - Décembre 79-Janvier 80 - CIT 1-16;11-1

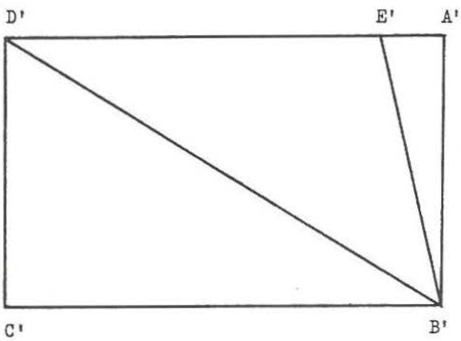
(1.1)



CIT - Je vais inscrire le triangle donné dans un rectangle. Le grand côté du triangle sera une diagonale.

L'élève utilise le triangle donné T. Il complète ce triangle selon la figure (1.1) ci-contre.
Les différents tracés sont effectués au moyen de la règle et de l'équerre.
Il trace aussi le rectangle ABCD circonscrit au triangle BDE.
Cette figure (1.1), ainsi que les figures (1) et (2) de la page précédente sont représentées grandeur nature. La figure (2.1) sera représentée à l'échelle $\frac{1}{2}$.
CIT mesure ensuite les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ et trouve $\hat{A} = 15°$, $\hat{B} = 30°$.
Le rapporteur est convenablement disposé mais l'élève a quelques difficultés avec la lecture des graduations.
Il déduit de ses résultats précédents :
$\hat{C} = 90° - (\hat{A} + \hat{B}) = 45°$.

(2.1)



Il réalise alors sa deuxième figure, représentée ci-contre à l'échelle $\frac{1}{2}$ avec le numéro (2.1). Pour cela il trace la diagonale B'D' du rectangle donné A'B'C'. Puis il construit l'angle $\widehat{D'B'E'}$ de 45°.

CIT - Voilà, c'est le plus grand.

A la septième minute, il présente le triangle B'D'E' comme étant le résultat cherché.

EXP - Pourquoi ?

CIT - Parce que la diagonale est la plus grande longueur du rectangle, et la hauteur sera aussi la plus grande.

Dans la deuxième partie de sa phrase, CIT veut dire que la hauteur sera d'autant plus grande que le côté sera plus grand.

EXP - Est-ce que c'est bien le même ?

CIT - Oui, puisque, comme sur le modèle, le petit côté fait avec le côté du rectangle un angle de 15°.

Pour cet élève, c'est parce que $\widehat{A'B'E'} = 15° = \widehat{ABE}$, qu'il peut en conclure que les deux triangles B'D'E' et BED sont semblables.

EXP - Pourrais-tu le vérifier ?

CIT - Ce n'est pas la peine puisque les deux côtés ont la même direction.

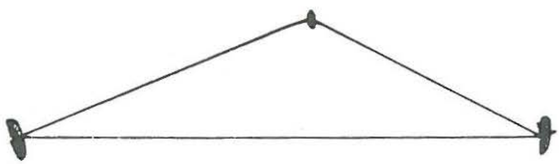
L'élève considère comme une condition suffisante de similitude le fait que les côtés B'E' et B'D' ont même direction, respectivement, que les côtés BE et BD. Devant la conviction très nette, affirmée à la dixième minute, l'expérimentateur clos la recherche sur ce problème et propose un autre problème.

- CHAPITRE XXIX -

PROTOCOLES DU PROBLEME PEN

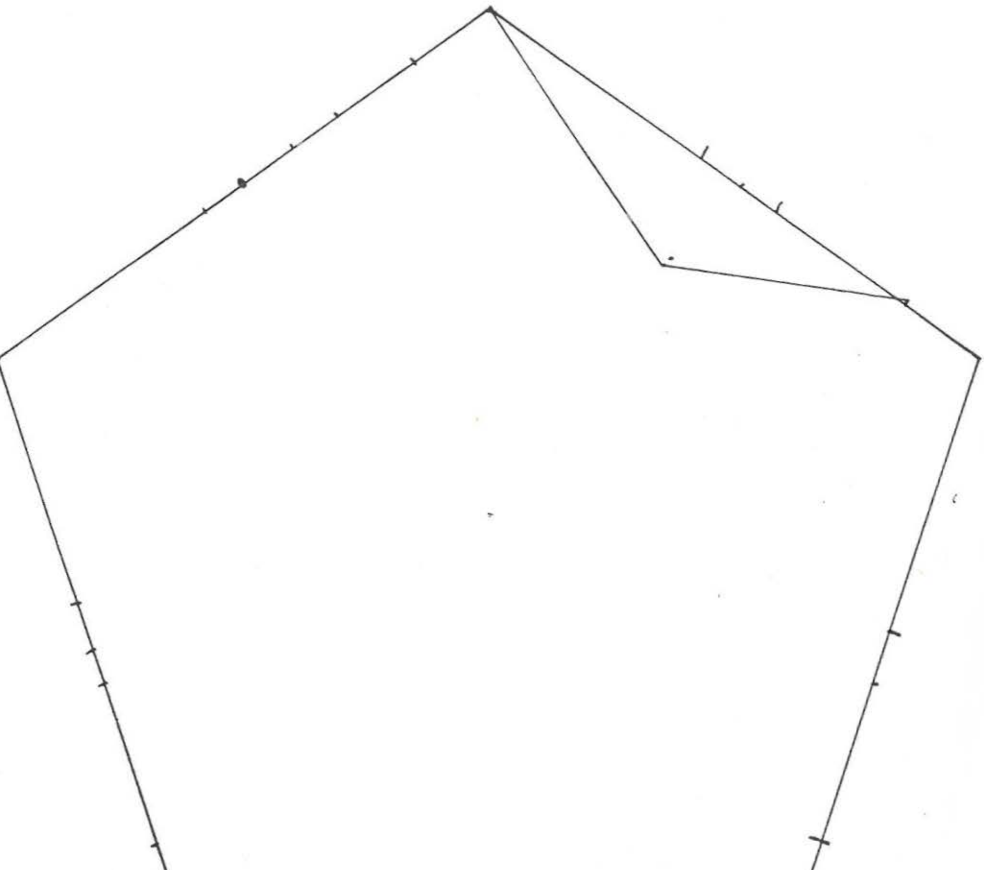
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-0[1]

01



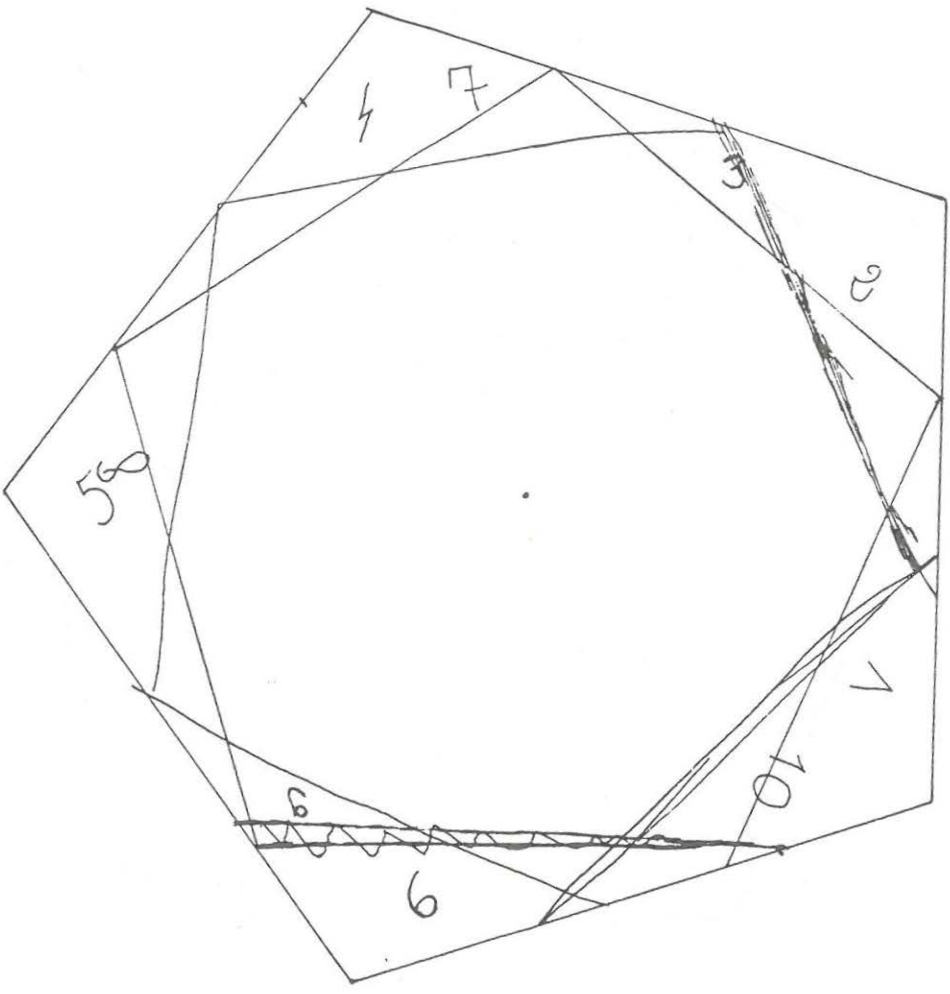
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-0^2

02



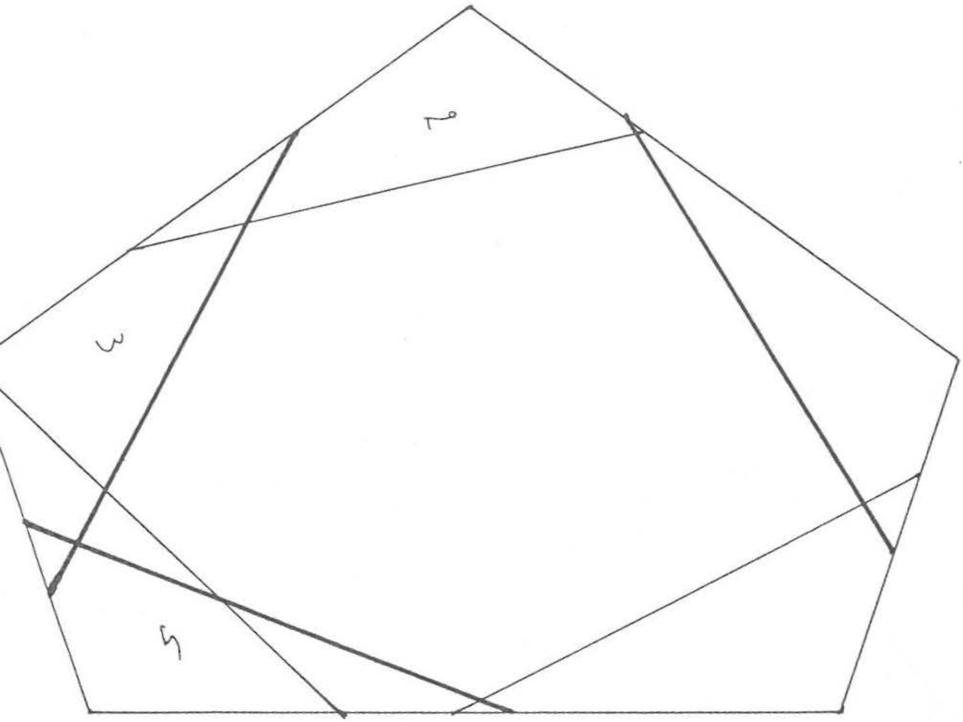
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-0³

(03)

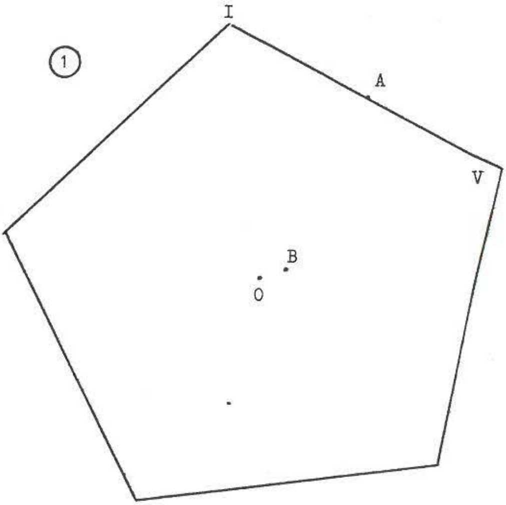


PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-0[4]

(04)



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-1



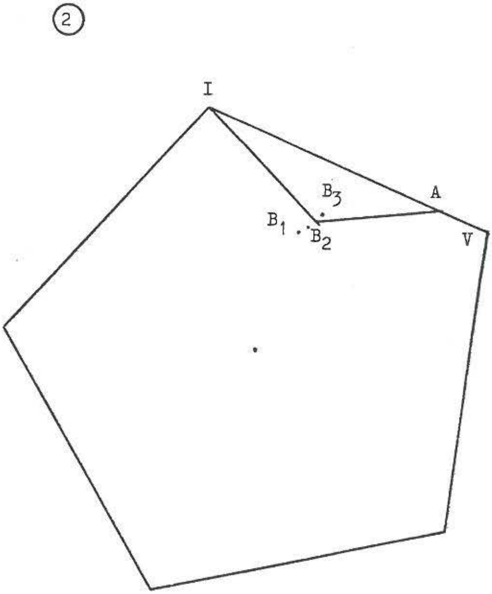
RIA - On peut mesurer ce qu'on veut ?

Expérimentateur - Tu peux mesurer ce que tu veux.

L'élève commence son dessin (1) . Pour cela elle place un point A sur le côté I V à 6 cm de I. Puis elle place le point B à 10 cm du sommet I ; B est à proximité de O.

RIA - Là ça fait pas assez.

Elle vient de mesurer la longueur AB et trouve que 5 cm ce n'est pas assez pour cette longueur. Autrement dit, AB ne convient pas, donc le triangle IAB ne convient pas.



A la deuxième minute, elle réalise la figure (2). Pour cela elle choisit, sur le côté I V du pentagone un point A situé à 10 cm de I.
Elle cherche ensuite à placer un point B situé à 6 cm de I et à 5 cm de A. Pour cela elle trace plusieurs points B_1, B_2, B_3 situés à 6 cm de I, puis mesure la distance de ces points à A. Elle arrête son choix au point B tel que BI = 6 et BA = 5.
Elle trace ensuite le triangle IBA.
L'expérimentateur demande à RIA de bien relire l'énoncé.

RIA - ... 3 sommets. Là, ils ont pas les ...

EXP - Il y en a combien ?

RIA - ... Il y en a un.

EXP - Attention, il s'agit des sommets. Il y en a combien des sommets du triangle .

RIA - Ah, deux.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-2

Après une relectrure de l'énoncé, l'élève confond encore côtés et sommets du triangle, elle compte donc 1, le côté IA ; puis elle rectifie, après l'insistance de l'expérimentateur et compte bien 2, les sommets I et A. RIA se rend comte qu'elle ne répond pas à la question posée car elle n'a pas 3 sommets sur le bord.

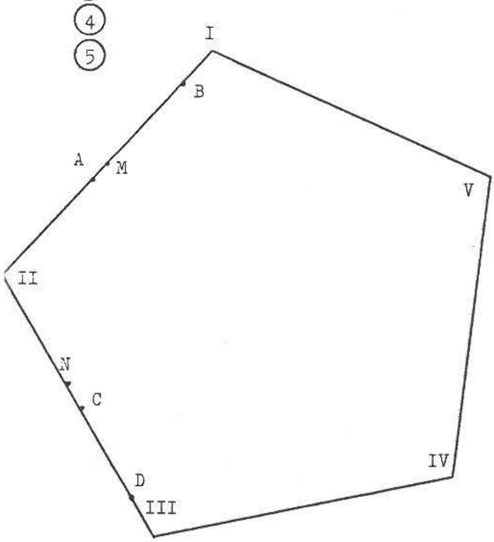
RIA - C'est pas impossible ?

EXP - Je ne peux pas te répondre.

3

4

5



RIA - J'ai trouvé !

A la cinquième minute elle réalise sa figure 3. Pour cela elle place deux points A et B sur le côté I II du pentagone respectivement à 5 cm et 10 cm de II. Puis délaissant le point B elle construit un point C sur II III à 6 cm de II et constate que AC ne mesure que 9 cm.

RIA - Je vais essayer de prendre 10.

A la septième minute elle réalise sa figure 4. Pour cela elle prend un point D, sur le côté II III du pentagone, situé à 10 cm de II. Puis elle mesure le segment AD et constate que :

RIA - Ca fait trop ...

Ce segment AD est trop long, alors qu'elle cherche à avoir 6 cm, puisque II A = 5 cm.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-3

Sa réalisation suivanteque nous numérotons 5 consiste à choisir les points M et N tels que II M = 6 cm et II N = 5 cm.

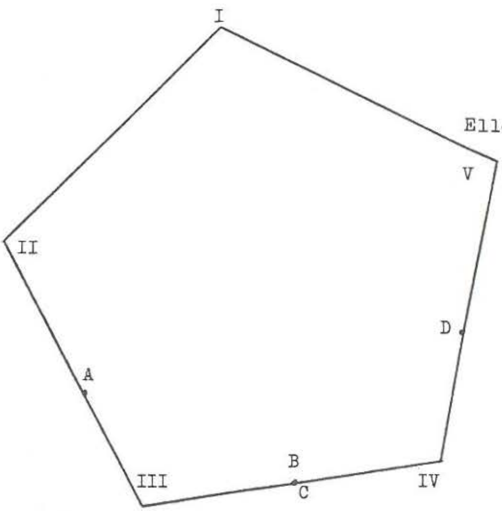
EXP - Et là, qu'est-ce-qu'il se passe ?

RIA - J'ai inversé.

Elle constate que M et N jouent les mêmes rôles que C et A en 3 et qu'alors la situation est symétrique ; elle emploie le mot "inversé". Pour cette réalisation, c'est le côté IV V qui est placé "horizontalement" le sommet II étant le point le plus "haut" du pentagone.

6

7



A la neuvième minute, elle réalise 6. Pour cela elle choisit le point A sur le côté II III, à 5 cm de III, et le point B sur le côté III IV à 6 cm de III et elle constate :

RIA - Ca fait pas assez.

Elle a donc à nouveau un segment AB qui mesure moins de 10 cm.

RIA - J'essaie d'abord tous les côtés.

Elle précise qu'elle répète l'opération consistant à choisir 5 cm, puis 6 cm, sur deux côtés consécutifs du pentagone pour chaque couple de côtés.

Elle réalise donc sa figure 7. Pour cela elle choisit C à 6 cm de IV et D à 5 cm de IV. Mais c'est un nouvel échec. Pour chaque réalisation 6 et 7 elle place le pentagone de telle sorte que son dessin se situe dans la partie "haute" du pentagone ; autrement dit, pour 6, I V est "horizontal" donc sa feuille a été tournée de 180°, et III est le point le plus "haut", et pour 7 c'est IV qui est le point le plus "haut".

Pour sa réalisation 7 elle prend comme point C le point B de 6 , B et C sont donc confondus.

RIA - J'en trouve pas.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-4

A la onzième minute RIA pose une question.

RIA - Ca compte, ça aussi ?

EXP - Ca c'est un point ; c'est à toi de voir si tu dois t'en servir.

L'élève demande à quoi sert le centre du cercle circonscrit qui est tracé au milieu de la figure ; mais l'expérimentateur ne lui donne aucun renseignement.
Elle pose la pointe de son crayon sur le centre du pentagone.
Elle mesure la distance du centre 0 à différents points du bord du pentagone.

EXP - Qu'est-ce que tu fais ?

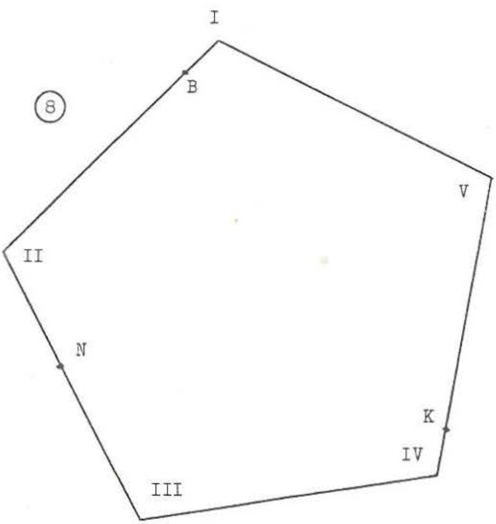
RIA - J'essaie de trouver 6 cm.

Elle essaye de voir s'il n'existe pas sur le pentagone un point situé à 6 cm du centre du pentagone.

EXP - Y en a pas.

Elle ne trouve pas de tels points.

8



RIA - Je pense qu'on peut pas en dessiner.

EXP - C'est ta réponse ? Tu dis qu'il y en a pas.

RIA - Oui.

EXP - Tu es sûre ?

RIA - Chaque fois je cherche et ça fait trop ou pas assez.

RIA pense donc ne pas pouvoir trouver de triangle solution.
A la quatorzième minute, sa réalisation 8 est constituée par trois points :
le point B sur I II, situé à 10 cm de II,
le point N sur II III, situé à 5 cm de II,
le point K sur IV V, situé à 10 cm de V.
Mais à nouveau ses essais n'aboutissent pas.

RIA - Je pense qu'on peut pas.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-5

A la seizième minute, l'expérimentateur donne à l'élève le triangle tracé sur une feuille semi-transparente.

EXP - Et si je te le donne sur une autre feuille ?

RIA - Non ...
Je cherche si on peut le mettre, je trouve pas.

EXP - Tu trouves pas ? Cherche encore un petit peu.

RIA - Comme ça ?

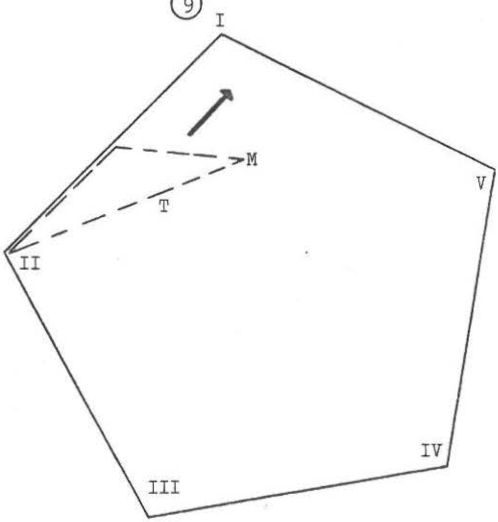
EXP - Comment tu as fait pour t'en apercevoir ? Explique -moi.

RIA - J'ai cherché un peu ; puis j'ai mis comme ça là sur ..., j'ai fait glisser j'ai vu les 3 sommets.

EXP - C'est pas mal comme idée.

L'élève, comme elle l'indique, a placé le triangle T de sa feuille semi-transparente sur le pentagone, dans la position représentée à la figure (9) ci-contre, par des pointillés. La feuille comportant le triangle T se trouve sur la feuille comportant le pentagone P.
Elle translate ensuite son triangle T en faisant glisser le côté moyen de T sur le côté I II du pentagone, jusqu'à ce que le sommet M du triangle rencontre le côté I V du pentagone. Le mouvement de translation est indiqué par une flèche sur la figure (9).

9



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-6

EXP - Tu te rappelles la question ? On te demande combien y en a ?

RIA - Là, y en a déjà un.
Je peux pas prendre une autre feuille ?

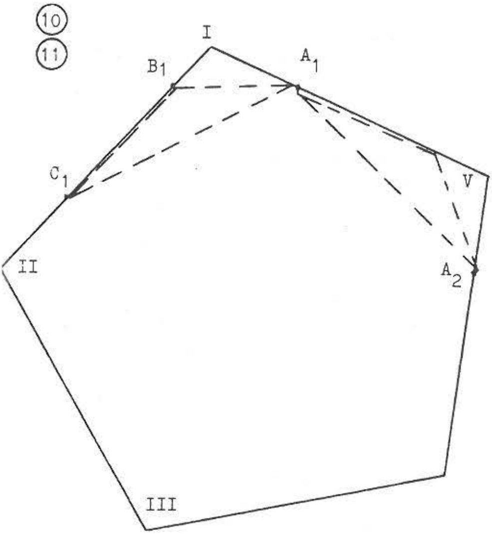
EXP - Si, si.

L'élève prend une nouvelle feuille sur laquelle se trouve le pentagone.

RIA - Je vais appuyer pour bien marquer les points.

10

11



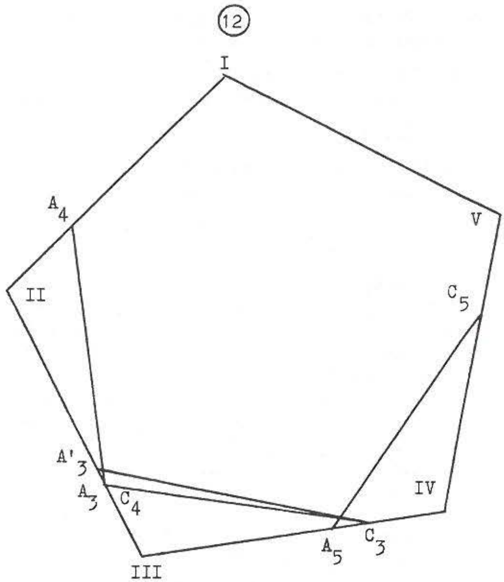
A la dix-neuvième minute l'élève réalise la figure 10. Pour cela elle pose la feuille semi-transparente comportant le triangle T, sur le pentagone ; T est dans la position indiquée ci-contre par les pointillés. Elle appuie avec son crayon sur les sommets du triangle T. Elle essaie de retrouver les traces sur le pentagone.
Elle marque, sur le pentagone, 3 points : le point A_1 sur I V, les points B_1 et C_1 sur I II. Bien entendu, elle a beaucoup de difficulté pour obtenir ces 3 points avec cette méthode.
Elle trace enfin le segment A_1C_1.

RIA - Je pense qu'on peut en tracer quatre ; un de chaque côté.

Elle réalise alors la figure 11. Toujours avec la même méthode, par transparence, ayant positionné T selon les pointillés représentés sur 11, elle marque le point A_2 et joint A_2A_1. Elle a pris le point A_1 obtenu en 10, comme un des sommets de sa nouvelle position.

RIA - Ca m'étonnerait qu'on en trace quatre.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-7



A la vingt-et-unième minute RIA réalise la figure (12), toujours avec la même méthode, par transparence. Elle trace les segments A_3C_3, puis A_4C_4 ; les points C_4 et A_3 étant confondus en un seul point.

RIA - On peut croiser là.

EXP - C'est toi qui voit. C'est toi qui décide. Regarde ce qu'on demande.

L'élève se demande si deux triangles peuvent chevaucher ; c'est à dire si elle peut avoir certains points d'un triangle à l'intérieur d'un autre triangle, ce qui a pour conséquence que 1 côté du premier triangle coupe 1 côté du deuxième triangle ; elle parle alors de côtés qui se croisent.

RIA - Je crois que je me suis trompée quelque part, aux dimensions ...

Elle trouve que le segment C_3C_4 ne convient pas ; elle propose le segment $C_3A'_3$ qu'elle trace.

RIA - Je pense qu'on peut en dessiner trois ; attendez, je vais voir . Là je vais recommencer.

Elle trace encore un segment A_5C_5, le point C_5 étant confondu avec A_2 de (11).

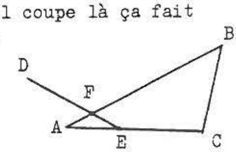
C_5A_5 et A'_3C_3 se croisent.

RIA - Quatre, parce que celui-là après il coupe celui-là.

Elle propose donc les solutions représentées par les segments A_1C_1, A_2C_2, A_5C_5, A_4C_4 ; elle rejette $C_3A'_3$ car les segments $C_3A'_3$ et C_5A_5 se coupent.

EXP - Tu ne veux pas qu'ils se coupent ? Est-ce que tu crois qu'il ne peut pas couper ?

RIA - Parce que s'il coupe là ça fait quatre sommets.



Pour l'élève, si un segment DE vient couper un triangle ABC alors on trouve quatre sommets BCFE et non plus trois sommets ; on n'a donc plus un triangle.

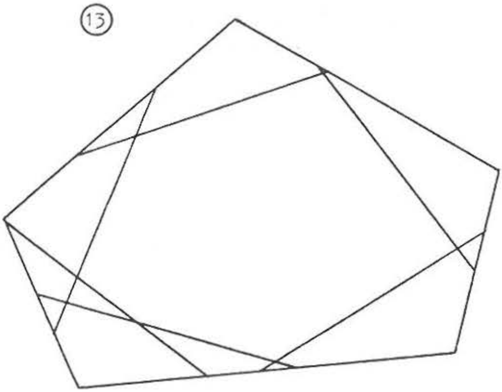
L'expérimentateur insite longuement, lui demande plusieurs fois :

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-8

EXP - Ca t'embêterait qu'il coupe ?

Il demande à l'élève de bien relire l'énoncé.
En définitive, RIA compte : 5.
C'est sa réponse donnée à la vingt-huitième minute.

13



L'Expérimentateur propose alors à RIA le même problème avec le pentagone applati.
Elle réalise alors la figure 13 ; pour cela elle trace 6 segments, toujours avec la même méthode, par transparence.
Dans ses manipulations elle utilise encore le même mouvement de translation que celui introduit en 9 .
Elle accepte ici le chevauchement.
L'élève trace certains segments en traits forts, d'autres en traits fins, afin de mieux s'y reconnaître. Elle numérote quatre de ces triangles.
Elle annonce 6.
Elle achève cette figure 13 à la trente-quatrième minute.

RIA - Je vais voir si je m'étais pas trompée ; parce que là j'en trouve 5 et là j'en trouve 6.

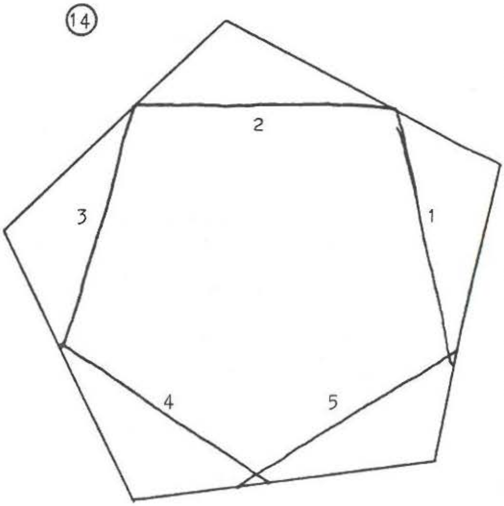
Elle reprend donc en main sa deuxième feuille avec le pentagone régulier sur laquelle elle a déjà tracé 5 segments ; car elle trouve contradictoire d'en avoir compté alors 5, tandis qu'avec son pentagone aplati elle trouve 6 solutions.

RIA - Je pense que ça dépend de la grandeur des pentagones.

Elle envisage d'expliquer la différence dans le nombre de solution par la différence entre les deux pentagones.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - RIA 6-12;02-9

(14)



A la trente-cinquième minute elle réalise la figure (14) .
Cette figure complète les figures (10) (11) et (12) déjà tracées.
RIA trace dans l'ordre les segments 1, 2, 3, 4 et 5. Elle numérote ensuite l'ensemble de ses segments.
Ces segments sont tracés pour la plupart très grossièrement à main levée.
La feuille sur laquelle se trouve le triangle T et qui sert à l'élève pour décalquer n'a jamais été retournée.
Les triangles d'une même série de 5 se déduisent les uns des autres par des rotations dont l'angle est grossièrement un multiple de 72°. Elle annonce 10 comme résultat. Inscrit ce résultat et s'arrête à la quarantième minute.

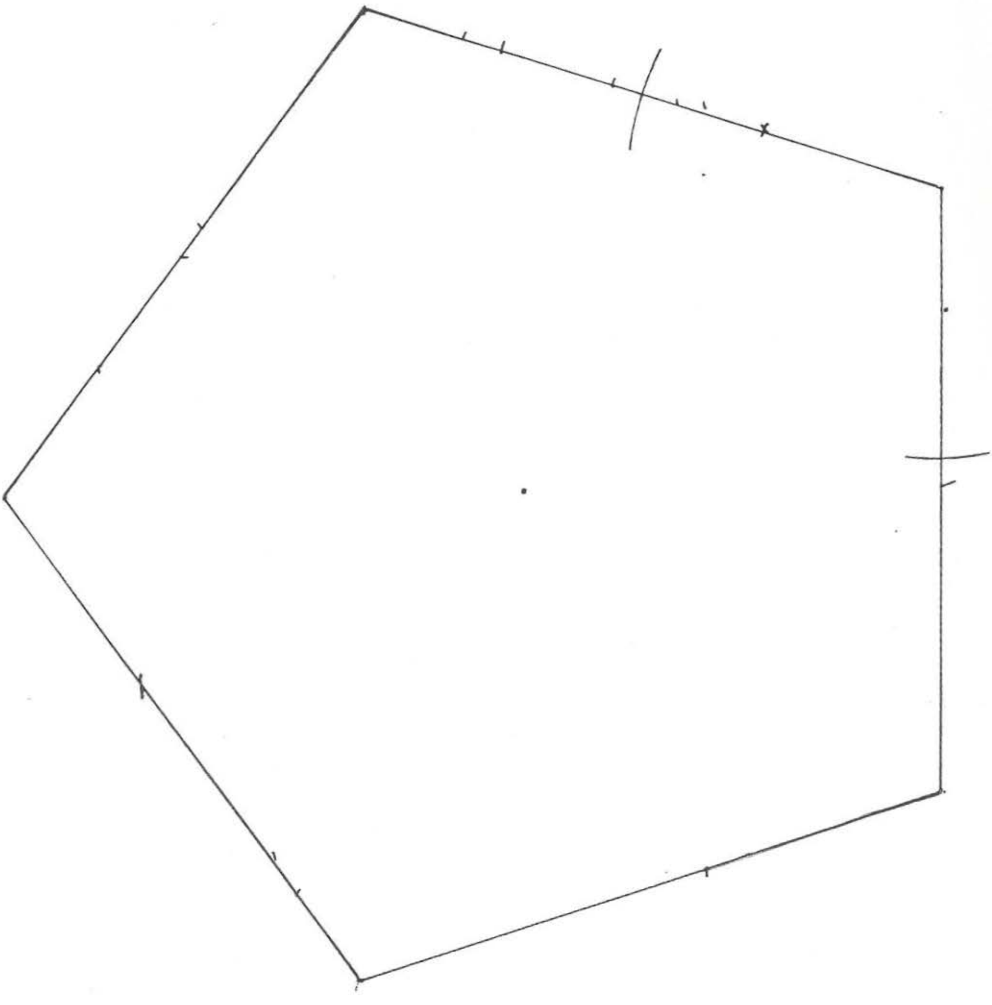
Après la séance de recherche l'expérimentateur demande à RIA pourquoi elle ne trace que le grand côté du triangle cherché.
RIA explique qu'elle a tracé une fois les 3 sommets, en (10) , puis elle ajoute :

RIA - Je croyais que c'était pas important, maintenant je me rends compte que c'est important parce que là ça fait 6, 5, etc ...
Au début je l'ai tracé, puis après j'ai dit : oh ! ça doit pas avoir de l'importance ; puis après j'y ai plus pensé ; puis maintenant je me rends compte que c'est important.

On peut remarquer que sa première série de 5 solutions, en (10) (11) et (12) correspond à des triangles dont le côté de 6 cm est porté par un même côté du pentagone ; tandis que sa deuxième série de 5 solutions en (14) , correspond à des triangles dont le côté de 5 cm est porté par un même côté du pentagone.

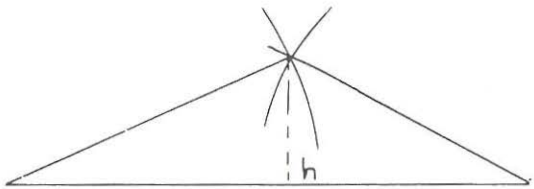
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-0^1

$\boxed{0^1}$



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-0^2

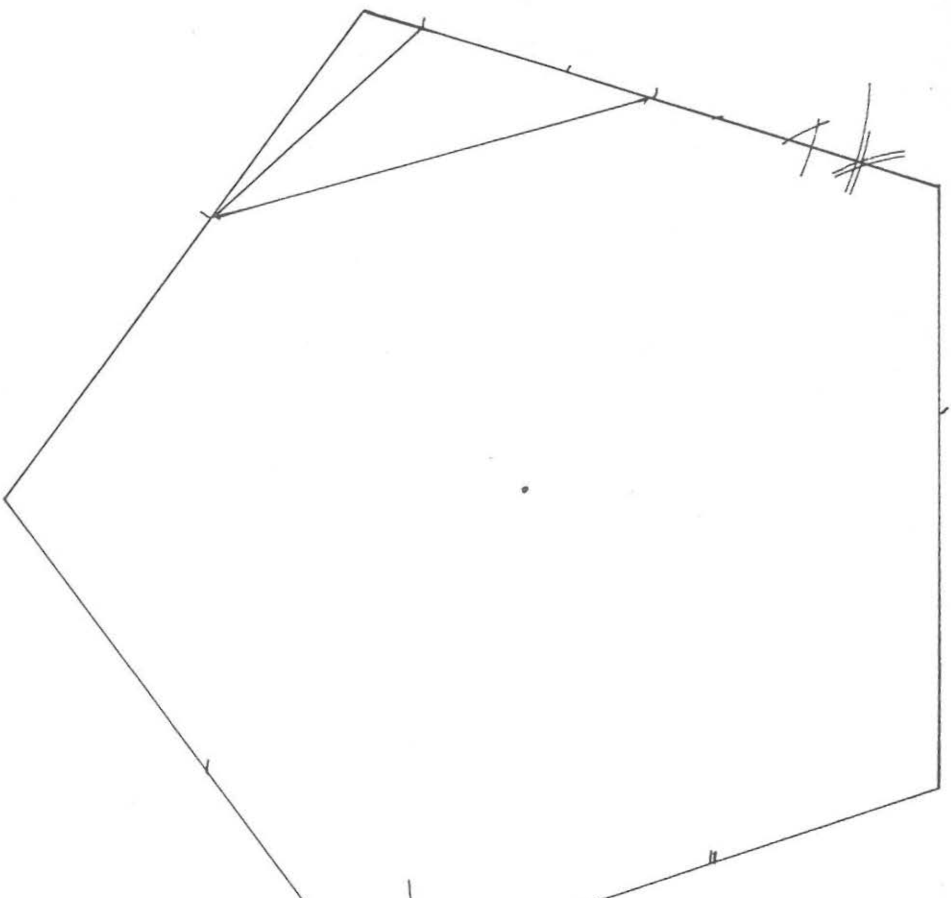
$\boxed{0^2}$



$h = 2,5$

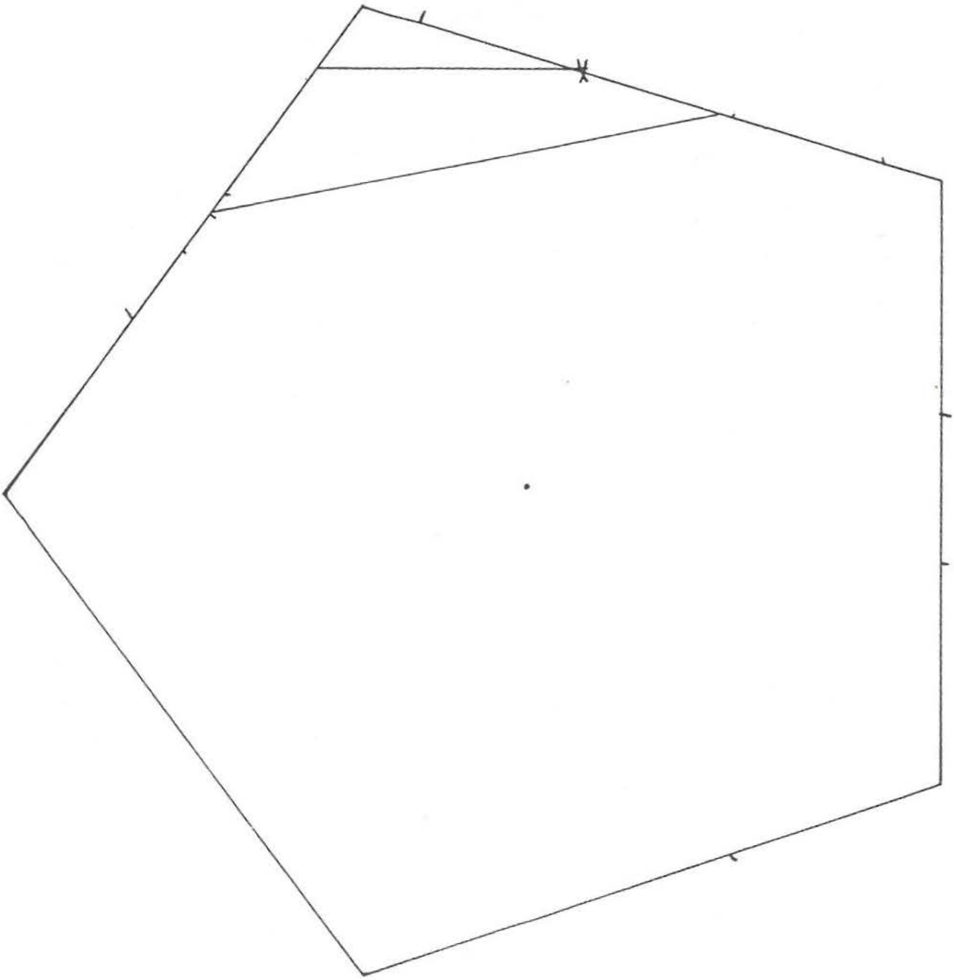
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-0^3

$\boxed{0^3}$

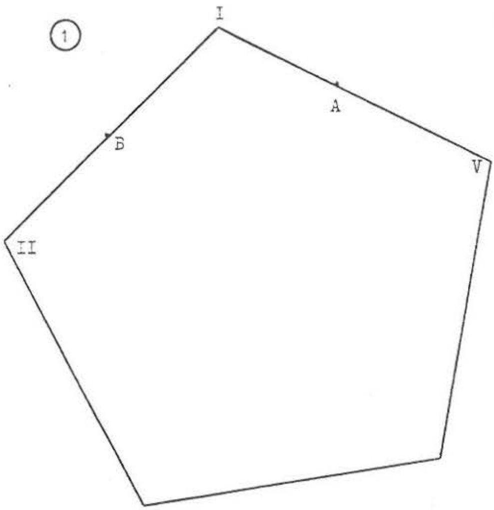


PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-0^4

$\boxed{0^4}$



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-1



EXP - Tu as bien compris l'énoncé ?

THI - Pas tellement.

EXP - Dis-moi ce qui te gêne ?
....
Relis l'énoncé.

L'expérimentateur relit l'énoncé avec l'élève.

THI - On peut avoir une règle ?

L'expérimentateur lui donne une règle graduée.
THI réalise alors son dessin 1 . Pour cela il prend un point A sur le côté I V à 5 cm du sommet I ; puis il marque un point B sur le côté I II du pentagone à 6 cm du sommet I.

THI - Le côté de 10 cm, il peut pas rentrer dans le dessin que je voulais faire.

L'élève constate alors que AB mesure moins de 10 cm.

A la quatrième minute l'élève demande un compas que l'expérimentateur lui donne.

EXP - Que veux-tu faire ?

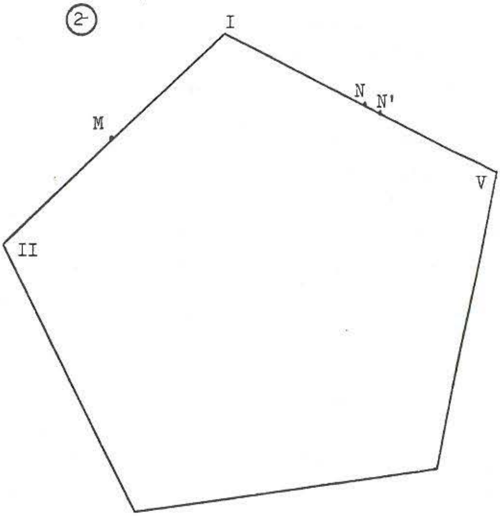
THI - Je sais que j'ai appris un système pour faire les triangles sur mesure. Je me souviens plus de cette ...

EXP - Tu as pris le papier brouillon, c'est pourquoi faire ?

THI - Je veux essayer de trouver cette méthode ...

Il abandonne pour revenir à son pentagone régulier.

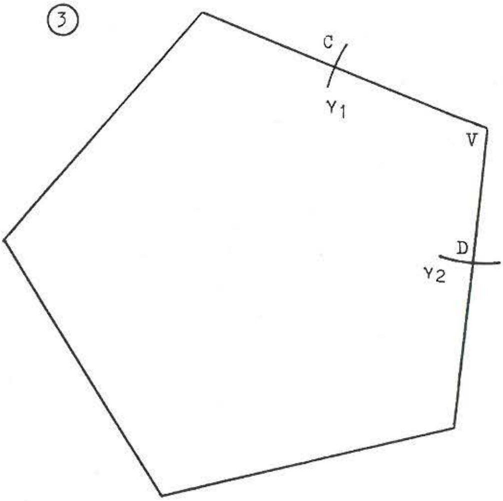
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-2



Il réalise alors sa figure (2) . Pour cela il place un point M sur le côté I II du pentagone, à 6 cm de I. Puis, toujours en utilisant le double décimètre, il place un point N sur le côté I V du pentagone de telle sorte que MN = 10 cm ; il se trompe en prenant d'abord N' tel que MN' = 10,5 ; puis il prend N.

THI - Là, ça fait 6,2 ; donc c'est pas ça ...

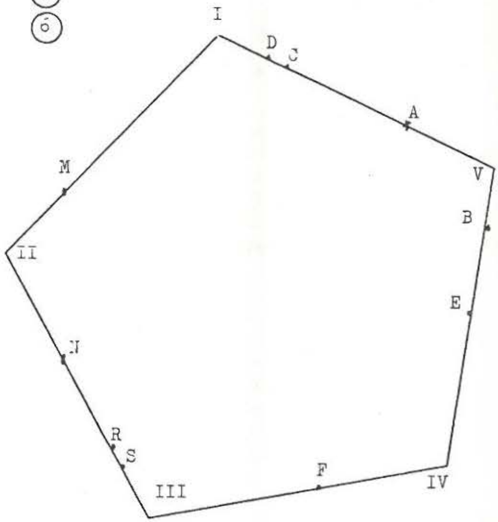
Il constate que le segment IN mesure 6,2 cm ; il en conclut que le triangle IMN ne convient pas.



A la septième minute, il réalise la figure (3) . Il prend un écartement de compas de 6 cm ; pour cela il pose règle et compas à plat sur la table et écarte son compas en plaçant pointe sèche et crayon devant les graduations convenables ; il obtient en fait 6,2 cm. Il trace un arc de cercle γ_1 de centre V. Puis il trace un arc de cercle γ_2 de centre V et de rayon 5 cm ; ces arcs coupent les côtés respectivement en C et D ; il constate, puisque CD n'est pas égal à 10 cm, qu'il n'a pas le triangle cherché.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-3

4
5
6



A la neuvième minute, il réalise la figure 4 . Pour cela il place deux points A et B, respectivement sur les côtés I V et V IV du pentagone de telle sorte que AB = 5 cm.
Il place ensuite un point C sur le côté I V, situé à 10 cm de B. Il constate que le point D appartenant au côté I V et situé à 6 cm de A n'est pas confondu avec C.

THI - Donc ça va pas.

L'élève constate qu'il n'obtient pas le triangle cherché.

THI - Je vais essayer la même méthode mais avec 6.

Il veut partir d'un segment de 6 cm, au lieu de partir d'un segment de 5 cm comme en 4 .
Il réalise donc la figure 5 . Pour cela il choisit deux points M et N respectivement sur I II et II III, tel que MN = 6 cm (en fait MN = 6,2 cm) ; puis comme précédemment, il trace les points R et S sur le côté II III du pentagone, tels que MR = 10 cm et NS = 5 cm.
Les points R et S ne sont pas confondus.
Là encore ça ne va pas.

A la onzième minute THI réalise la figure 6 . Pour cela il place le point E à 6 cm de IV et le point F à 5 cm de IV et constate que EF est égal à 9 cm environ. Nouvel échec.
Il met la règle de côté sans rien dire.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-4

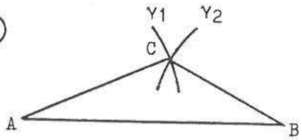
A la treizième minute l'expérimentateur pose une question.

EXP - Là qu'est ce que tu fais ?

THI - Ben ! je vais essayer de me représenter le ...

L'élève veut tracer un triangle dont les côtés sont 10 cm, 6 cm, 5 cm.
Il réalise alors la figure (7) . Pour cela il prend une de ses feuilles quadrillées.
Il trace un segment AB de 10 cm (en fait AB = 10,2 cm), ce segment est horizontal.

(7)

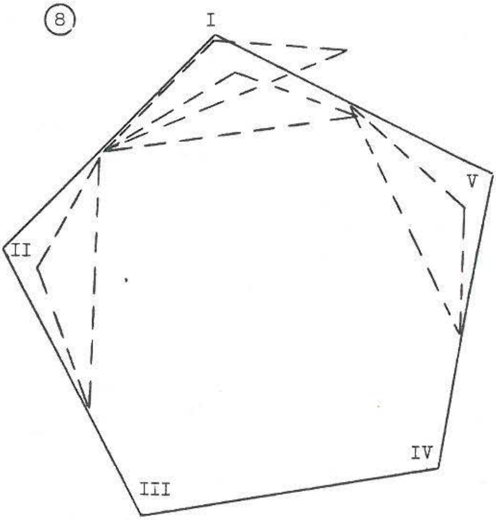


THI - Je trace un point de 5.

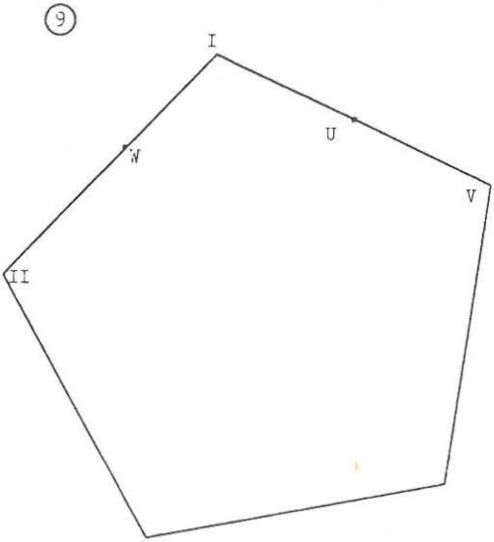
L'élève trace un arc de cercle γ_1 de rayon 5 cm et centré en B, puis un deuxième arc de cercle γ_2 centré en A et de rayon 6 cm (en fait ce dernier rayon est égal à 6,2 cm). Il obtient ainsi le point d'intersection C. Il trace alors les 2 autres côtés AC et BC de ce triangle.

A la quinzième minute il procède par transparence ; c'est sa réalisation (8).
Il place la feuille sur laquelle se trouve son triangle ABC sur le pentagone.
Nous représentons sur la figure (8) quatre positions données au triangle ABC.
Il essaye de voir si le grand angle du triangle peut coïncider avec l'angle que forme deux côtés consécutifs du pentagone.
Il semble un peu gêné d'utiliser la transparence.
Il abandonne cette méthode.

(8)



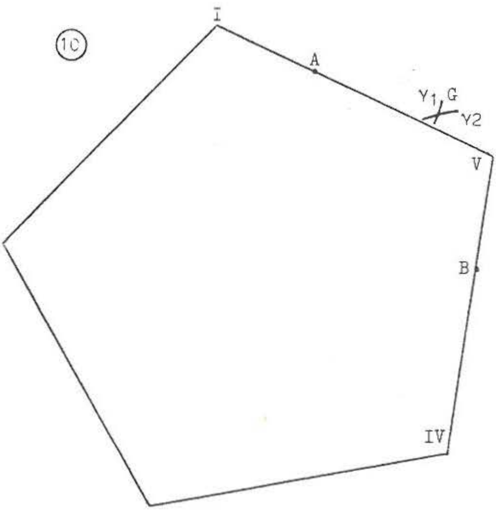
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-5



A la dix-neuvième minute il change de feuille et réalise la figure 9.
Il place un point U à 6 cm de I et un point W à 5 cm de I et constate que UW est égal à environ 9 cm.
THI demande une équerre que lui donne l'expérimentateur.

EXP - Qu'est-ce que tu veux faire avec l'équerre ?

Peu après il abandonne l'équerre.

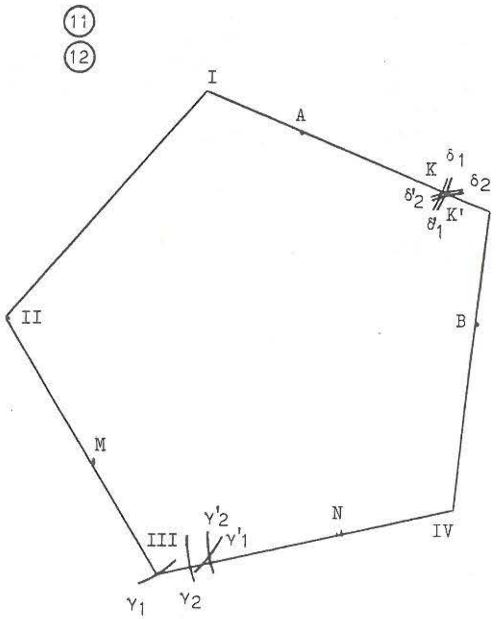


A la vingt-deuxième minute THI demande si ce sont les sommets qu'on doit placer sur le bord du pentagone. L'expérimentateur le lui confirme.
Il réalise alors la figure 10 . Pour cela il place deux points A et B, respectivement sur I V et V IV, à 10 cm l'un de l'autre. Puis il trace deux arcs de cercle γ_1 et γ_2 centrés respectivement en A et B et de rayons 5 et 6.

THI - J'espérais que les deux rayons se croisent ici, que ça fasse un sommet.

A l'encontre de ce qu'il attendait, THI observe que l'intersection G des deux arcs de cercle n'est pas sur le côté du pentagone. C'est donc encore un échec.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-6



A la vingt-cinquième minute il réalise la figure (11) . A partir des points A et B précédents, il trace deux arcs de cercle δ_1 et δ_2, le premier ayant pour centre A et pour rayon 6 cm, le deuxième ayant pour centre B et pour rayon 5 cm.
Il obtient alors un point K sur I V.

EXP - Qu'est-ce qui t'a fait pensé à mettre six ?

L'expérimentateur demande à THI pourquoi il a pris 6 cm comme rayon de δ_1 alors que précédemment le rayon γ_1 mesurait 5 cm.

THI - Parce que comme c'était un peu plus grand, j'ai essayé de le rapprocher.

THI veut certainement dire que G étant trop loin de B avec un rayon de 6 cm, il essaye de rapprocher G de B en prenant un rayon de 5 cm, d'où le rayon de 5 cm pour δ_2, et par conséquence le rayon de 6 cm pour δ_1.

THI - Je vais vérifier.

Il va refaire la même construction avec plus de précision ce qui lui donnera les arcs δ'_1 et δ'_2 ainsi que le point K'.

THI - Ca s'embrouille. Ca touche pas.

Le point K' n'est plus sur I V.

THI - Je vais essayer de l'autre côté parce que ...

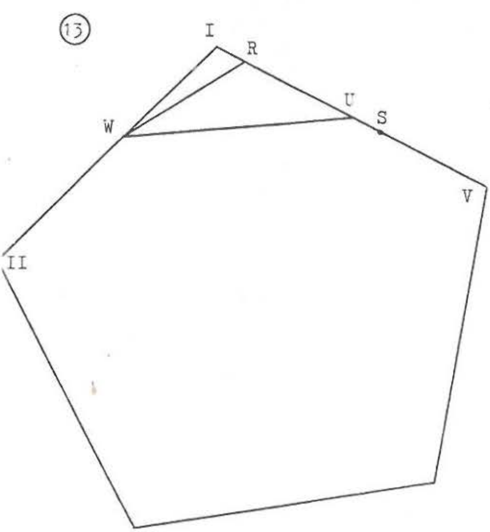
Il réalise alors la figure (12) en prenant tout d'abord les points M et N avec MN = 10 cm puis les arcs γ_1 et γ_2 qui ne conviennent pas ; ensuite, en permutant les 2 rayons de 5 cm et 6 cm, il trace les arcs γ'_1 et γ'_2. Il essaie de faire un dessin très précis, d'où les 2 points en N. De nouveau,

THI - Le sommet ne touche pas.

Après ce nouvel échec, il regarde longuement le pentagone et le triangle ABC qu'il a tracé à la treizième minute.

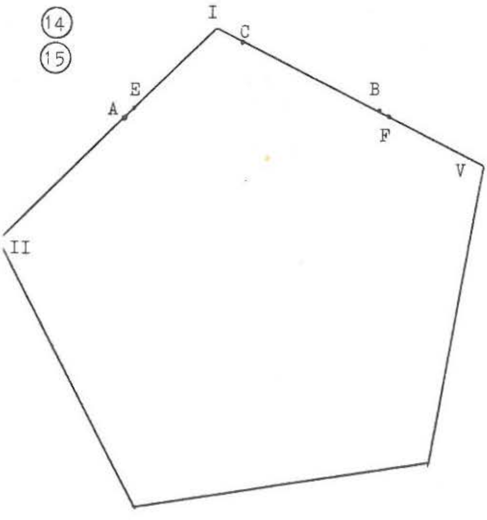
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-7

(13)



A la trentième minute il réalise sa figure (13) . Pour cela il prend un point W sur I II, situé à 5 cm de I, ce point a été tracé à la dix-neuvième minute lors de la réalisation (9) ; puis il trace sur I V un point S situé à 10 cm de W ; enfin il trace un point R situé à 6 cm de W. Sur le même côté I V on trouve encore le point U réalisé en (9).
Il joint alors W à R et W à U.
Ce qui, bien entendu, ne le satisfait pas.

(14)
(15)



A la trente-cinquième minute il prend une nouvelle feuille comportant un pentagone. Il réalise alors la figure (14) .Pour cela il prend deux points A et B, respectivement sur I II et sur I V, à une distance l'un de l'autre égale à 10 cm. Il trace le segment AB. Puis il choisit un point C sur I V, situé à 6 cm de B. Mais alors il fait une constatation.

THI - Cinq et demi.

Il constate que AC = 5,5 cm, et donc son triangle ABC ne convient pas.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-8

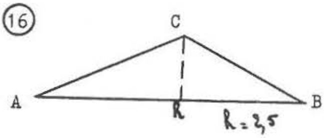
A la trente-sixième minute, il réalise (15). Pour cela il place E sur I II, à une distance de 5 cm du point C de 14 ; puis il marque F sur I V, à une distance de 10 cm de E. Mais c'est un nouveau constat d'échec.

THI - Six, trois virgule cinq.

Il constate donc que FC = 6,35 cm. Donc EFC ne convient pas.

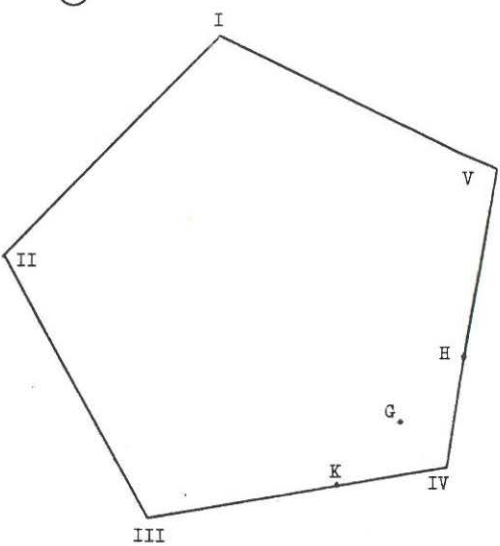
---

(16)



A la trente-septième minute il réalise la figure (16) . Pour cela il trace la hauteur Ch du triangle ABC obtenu en (7). Il mesure cette hauteur et trouve 2,5 cm.

(17)



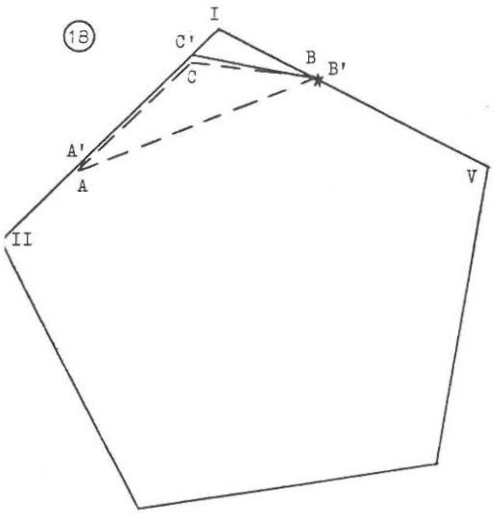
Il réalise alors le dessin (17) . Pour cela il place un point G à 2,5 cm du sommet IV du pentagone ; puis il trace deux points H et K respectivement sur IV V et IV III de telle sorte que H, G et K soient alignés. L'expérimentateur lui demande comment il a choisi ses 2 points H et K.

THI - Je les ai pris comme ça ...

L'élève dit qu'il les a pris sans donner à la droite HK une position rigoureusement définie.
THI abandonne d'ailleurs cette direction de recherche.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - THI 5-13;05-9

(18)



A la quarantième minute, THI utilise de nouveau la transparence et réalise la figure (18) . Il pose son triangle ABC tracé en (7) sur sa feuille comportant le pentagone, le déplace.

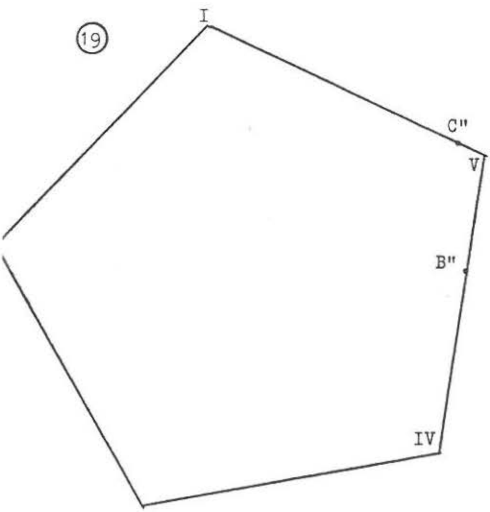
THI - J'essaye de le superposer ...
Et là, je vois que ça marche, comme ça.
Ouais, ça y est !

Pour arriver à ajuster par transparence la position du triangle représenté par les pointillés ci-contre, il déplace ce triangle ABC d'un mouvement de translation rectiligne de faible amplitude.
Il marque tout d'abord le point B' sur le côté I V, en soulevant la feuille sur laquelle se trouve son triangle ABC ; puis il marque C' en le plaçant sur I II, à 5 cm de B' ; il marque enfin A' à 6 cm de C', toujours sur I II. Il trace seulement C'B'. C'est le triangle A'B'C' qui est pour lui le triangle cherché. Il considère alors qu'il a trouvé. Son triangle présente des erreurs de l'ordre de 3 mm.

EXP - Qu'est-ce qui te gêne ?

THI - Je vais faire le calcul ... j'ai mal disposé mon point ...

(19)



L'élève veut refaire son tracé de façon plus rigoureuse, car il n'est pas satisfait de la précision.
Il réalise alors sa figure (19). Pour cela il mesure la distance IB' de la figure (18).
Il trouve 4,5 cm ; il trace alors le point B" sur V IV, situé à 4,5 cm de V ; puis il marque C" sur I V de telle sorte que B"C" = 5 cm.
Mais alors sonne la fin de la classe.
L'expérimentateur lui pose encore une question.

EXP - Quant tu en as mis un, tu y arrives à en mettre un, d'après toi, combien y-en a-t-il ?

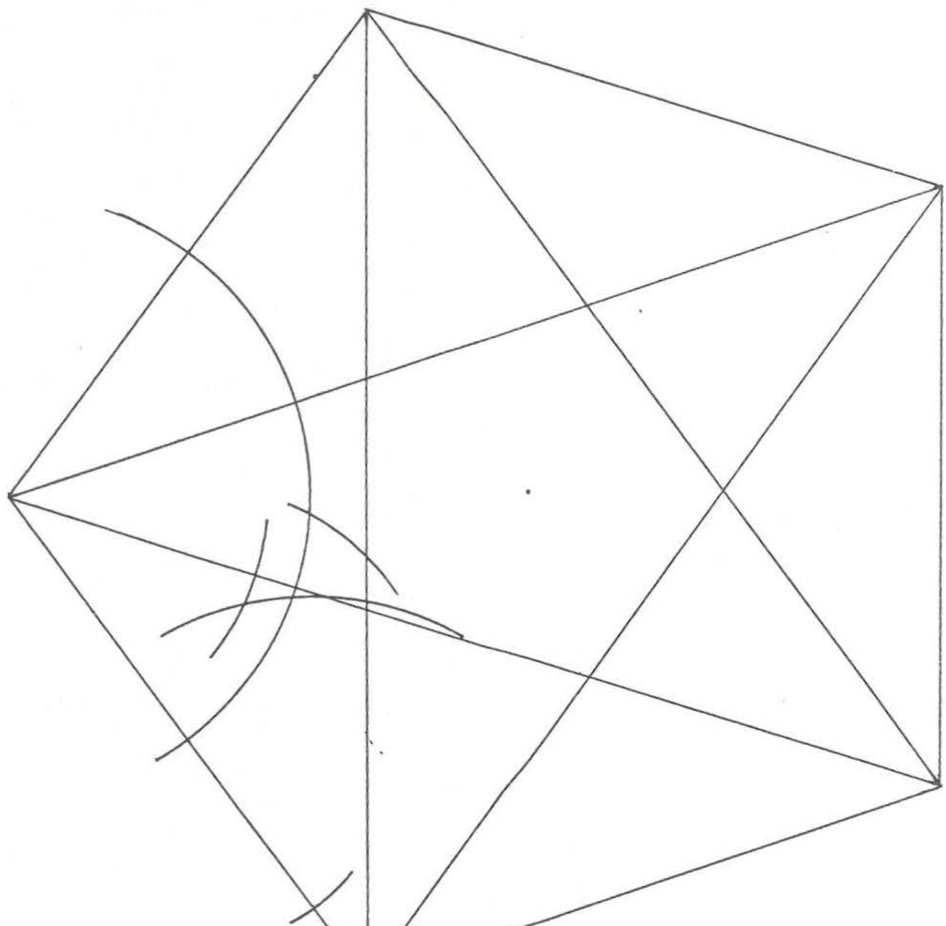
THI - Cinq ... Euh ! ... Oui, cinq.

EXP - Tu es sûr ? Si tu es sûr tu peux écrire le résultat.

THI - Je suis pas sûr.

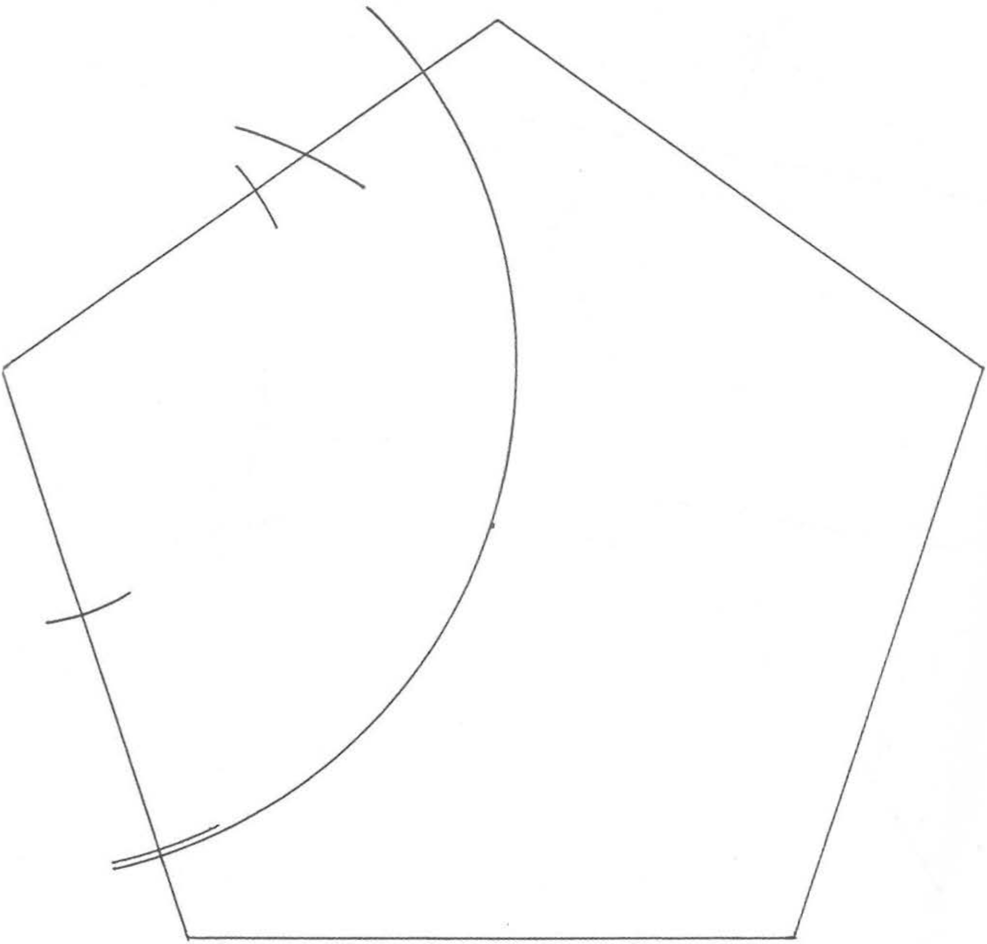
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-0^1

0^1



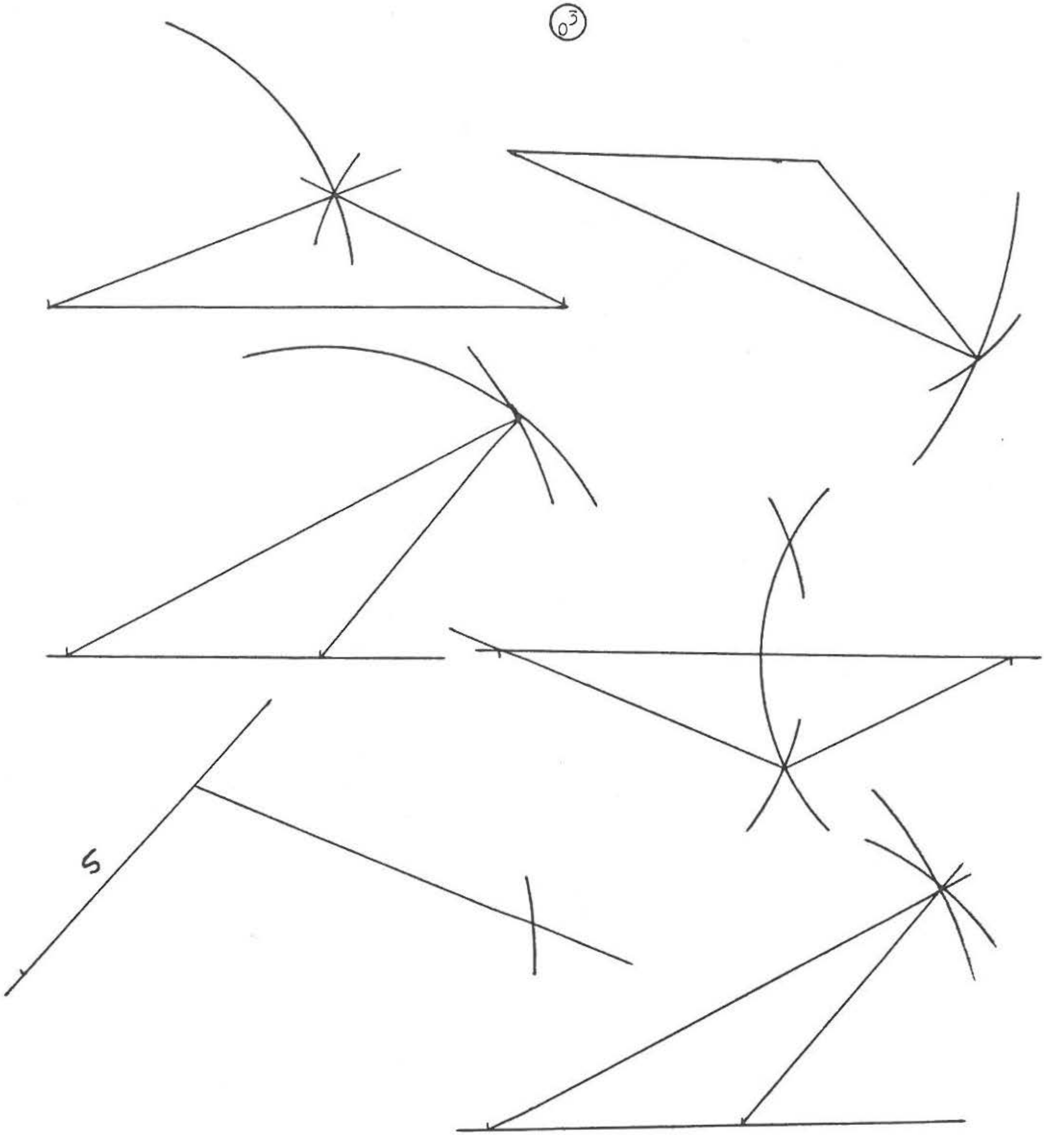
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-0^2

0^2



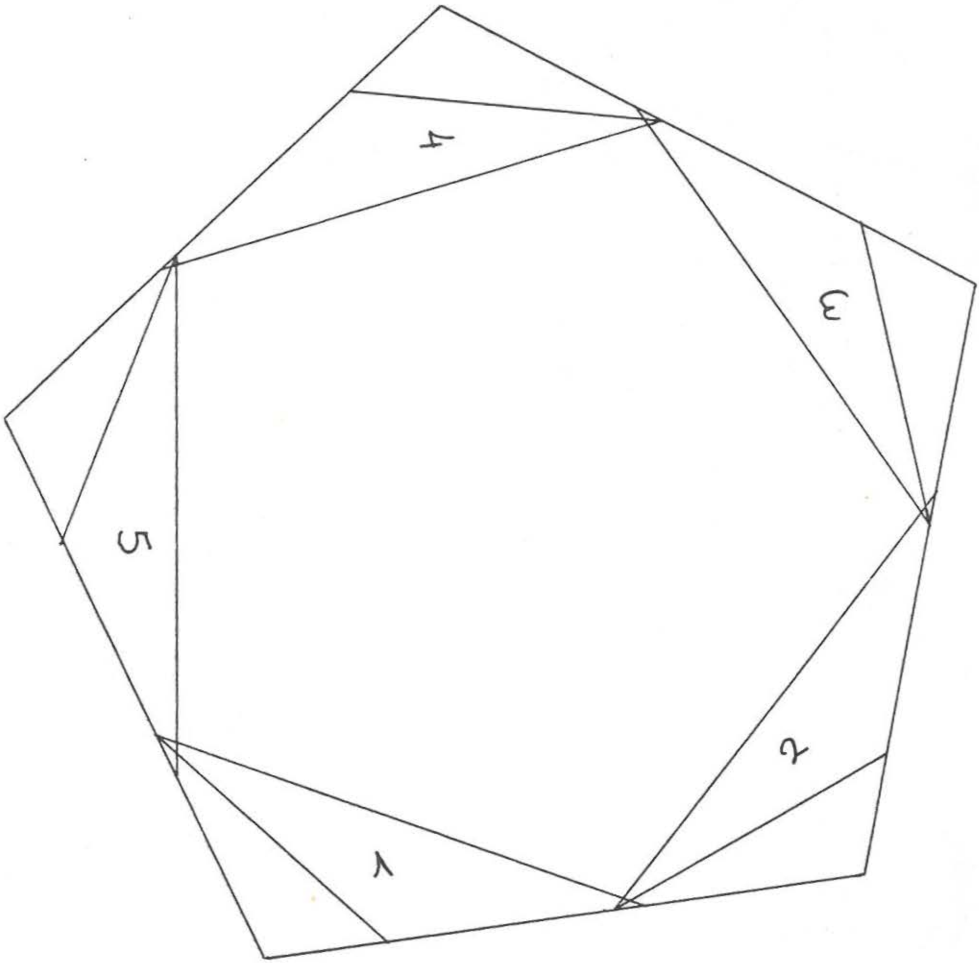
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-0^3

0^3



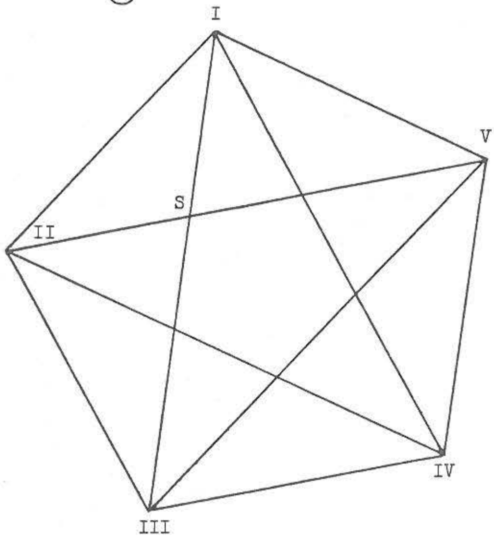
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-0^4

0^4



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-1

1.1



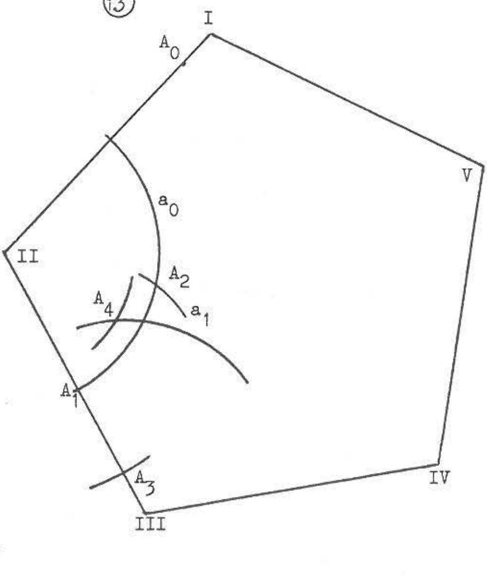
Sa première réalisation, 1.1 consiste à tracer les diagonales du pentagone : I III, I IV, V III, V II, IV II.
Elle mesure IV et IS, où S est un point d'intersection de deux diagonales.

LIN - Mais ça ne fait pas les dimensions ...

Elle constate que les mesures qu'elle vient d'obtenir ne sont pas égales aux dimensions données, 10 cm, 6 cm, 5 cm.

LIN - Il faut que le triangle ait ces mesures là ? ...
Il faut que le triangle soit comme celui-là ? (elle montre I II V)...

1.2
1.3



Elle procède alors à une réalisation 1.2. Pour cela elle marque un point A_0 tel que II A_0 = 10 cm. Puis elle trace un arc de cercle a_0, centré en II et de rayon 6 cm. Elle considère le point A_1, intersection de a_0 et du côté II III du pentagone. Elle trace un arc de cercle a_1, centré en A_1 et de rayon 5 cm. Ceci afin d'obtenir l'intersection A_2 des deux arcs de cercles a_0 et a_1.

Elle réalise ensuite 1.3 . Pour cela elle marque, au compas, le point A_3 situé à 10 cm de II. Puis elle trace deux arcs de cercle centrés respectivement en A_3 et II et de rayons 6 cm et 5 cm ; ce qui lui donne le point A_4.
En parlant des trois sommets du triangle II A_3 A_4 elle déclare :

LIN - Mais ils ne sont pas tous les trois sur le bord.

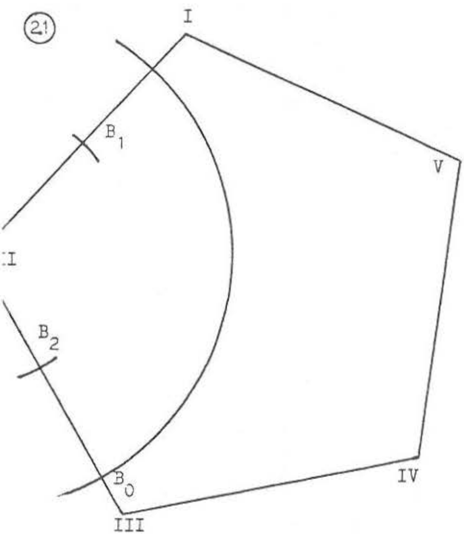
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-2

Puis en parlant du triangle II A_0 A_1 elle ajoute :

LIN - Celui-là, ils sont tous les trois sur le bord ; mais il ne fait pas les mesures.

Elle prend une autre feuille sur laquelle est dessiné un pentagone.

21



L'élève réalise sur cette autre feuille la figure 21 . Elle choisit un point B_0 sur II III, à 10 cm de II. Puis elle marque les points B_1 et B_2 respectivement à 6 cm et 5 cm de II. Pour trouver ces différents points B_0, B_1, B_2, elle utilise le compas. Elle mesure B_1B_2.

LIN - Ca ne fait pas dix.

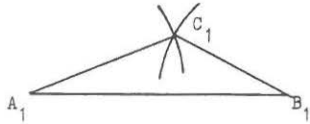
Elle mesure alors B_0B_1 et dit :

LIN - Ca devrait faire 5. Ca ne va pas.

Elle place son crayon dans diverses positions, le crayon simulant le troisième côté d'un triangle dont les deux autres seraient portés par deux côtés consécutifs du pentagone, tandis qu'un sommet du triangle serait un sommet du pentagone.
Elle reste pensive.

LIN - C'est vraiment compliqué.

31

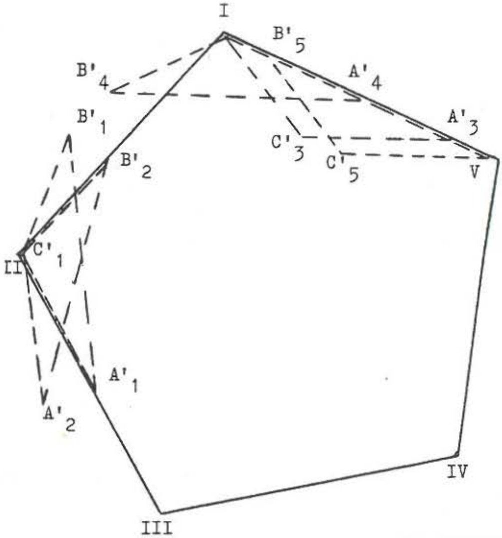


A la vingtième minute, l'expérimentateur donne une feuille vierge à l'élève. Il lui demande de construire un triangle dont les côtés mesurent 10, 6 et 5 centimètres. L'élève réalise la figure 31 . Il s'agit d'un triangle dont elle trace, tout d'abord, le grand côté A_1B_1. Elle marque ensuite le point C_1 en utilisant le compas.

LIN - Voilà un triangle 10, 6, 5.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-3

32



Sa réalisation suivante 32 consiste à utiliser immédiatement la transparence de la feuille sur laquelle elle vient de dessiner le triangle $A_1B_1C_1$.
Elle place dans la position $A'_1B'_1C'_1$ indiquée par les pointillés sur la figure 32 ci-contre.

LIN - Il faut qu'il soit là.

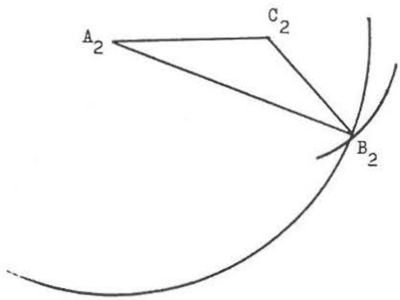
En parlant du grand angle du triangle, elle dit :

LIN - Mais l'écartement est trop grand.

Puis observant les cinq angles du pentagone, elle pose une question.

LIN - Les angles ont tous le même écartement ?

33

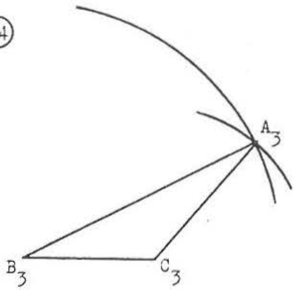


Comme nouvelle réalisation 33 elle veut construire un second triangle sur la feuill où se trouve $A_1B_1C_1$. Elle commence par construire le côté moyen A_2C_2, horizontalement ; puis elle obtient avec son compas le troisième sommet B_2.
Elle place ensuite le triangle $A_2B_2C_2$ sur le pentagone dans la position $A'_1B'_1$ II présentée en 32 , en utilisant la transparence. Puis elle se reprend et le place dans la position $A'_2B'_2$ II indiquée par des pointillés sur la figure 32 ; le petit côté est alors placé sur I II.
En parlant du triangle $A_2B_2C_2$ elle déclare

LIN - Il ne peut pas avoir cette forme.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-4

34



Elle réalise 34 , un nouveau triangle. Elle place d'abord le petit côté C_3B_3 horizontalement. Puis elle construit A_3 au moyen du compas. Par transparence, elle place son triangle dans la position $A'_3IC'_3$ indiquée par des pointillés sur la figure 32 . Le grand côté du triangle est porté par I V.

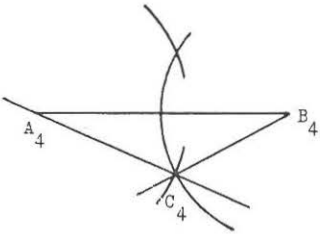
En parlant de son triangle $A_3B_3C_3$ elle dit :

LIN - C'est toujours pas cette forme.

EXP - Que veux-tu dire par "ce n'est pas cette forme" ?

LIN - Eh bien ! Il n'est pas disposé comme ça ...

35



Elle construit un nouveau triangle $A_4B_4C_4$; c'est sa réalisation 35 . Elle trace tout d'abord le grand côté A_4B_4, horizontalement. Puis, après une première tentative pour placer le troisième sommet au dessus de A_4B_4, elle préfère le construire au dessous. Elle pratique, là encore, une construction au compas.

EXP - Pourquoi dessines-tu un autre triangle ?

LIN - Pour voir si il tient dans l'un des angles.

En prononçant cette phrase, elle montre l'angle $\hat{I}$ du pentagone.

LIN - Le premier ne va pas, celui-là non plus, celui-là non plus.

Elle montre successivement ses triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$.

EXP - Tu veux donc essayer d'en dessiner un qui aille bien ?

LIN - Oui, mais je ne sais pas si j'y arriverai .

Par transparence, elle place son triangle $A_4B_4C_4$ dans la position $A'_4B'_4I$, indiquée par des pointillés sur la figure 32 . Le côté moyen du triangle est porté par I V. Mais cela ne convient pas.

LIN - Non, ça va pas.

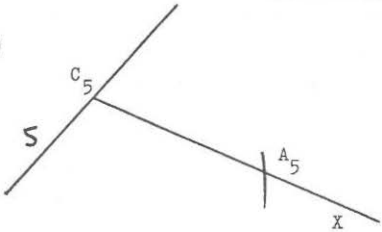
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-5

Sa réalisation suivante, 36 consiste à mesurer les 5 angles du pentagone, au rapporteur.

LIN - Et en plus ils ont le même écartement.

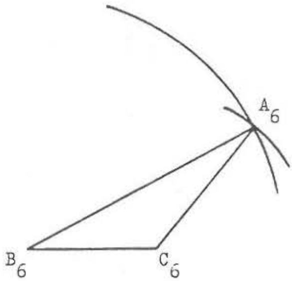
Elle constate que ces cinq angles sont égaux.

37



Nous appelons 37 la réalisation suivante. Elle trace sur sa feuille un segment B_5C_5 de 5 cm, et note 5 à côté de ce segment. Puis à l'aide du rapporteur, elle trace un angle B_5C_5X égal à un angle du pentagone.

38



Elle abandonne momentanément cette construction pour réaliser la figure 38 . Pour obtenir 38 elle trace tout d'abord un segment B_6C_6 de 5 cm. Le troisième sommet A_6 est construit au compas dans le demi plan supérieur.
Elle utilise alors la transparence pour placer le triangle dans la position $A'_3B'_3C'_3$ indiquée en pointillés sur la figure 32 . Puis elle fait glisser son triangle le long de I V de manière que le sommet du petit angle de son triangle soit maintenant en contact avec V. Son triangle prend donc la position $B'_5C'_5V$ indiquée par des pointillés sur la figure 32 .

Elle revient alors à sa réalisation 37 .
Elle trace un arc de cercle de centre B_5 et de rayon 10 cm. Cet arc coupe C_5X en un point A_5 qu'elle marque.
Elle mesure C_5A_5 ...

EXP - Tu as dessiné cinq triangles ...

LIN - Il n'y en a aucun qui rentre et d'ailleurs ... ils sont pareils.

Elle mesure les grands angles de chacun de ses triangles.

LIN - Ils ont tous le même écartement.
Ils sont pareils.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-6

Elle constate que ces angles sont égaux. Elle en conclut que les triangles sont les mêmes.

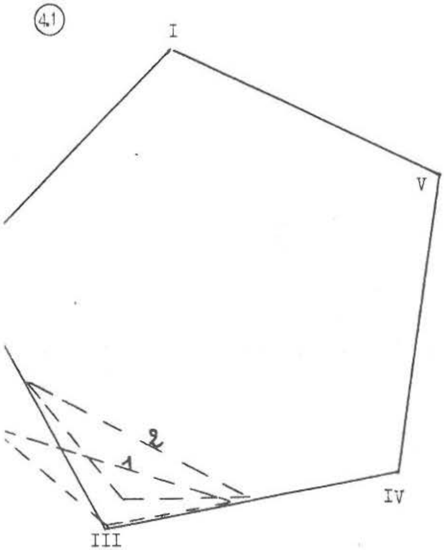
A la quarante-deuxième minute, l'expérimentateur donne à l'élève le triangle T dessiné sur une feuille semi-transparente. LIN mesure au rapporteur le grand angle de T.

LIN - Il fait 140,
et les autres 110.

Ce sont les angles du pentagone qui mesurent 110°, tandis que le grand angle du triangle mesure 140°.
Elle utilise la transparence. Très vite, elle essaie de placer correctement le triangle sur le pentagone. Elle place, treize fois de suite, un côté et un sommet du triangle en coïncidence avec un côté et un sommet du pentagone.

LIN - De toute façon, je n'y arriverai pas comme ça, parce que ça (elle montre le grand angle du triangle) c'est pas égal à ça (elle montre l'angle $\hat{I}$ du pentagone).

4.1



Elle procède à la réalisation 4.1 . Elle retourne la feuille semi-transparente sur laquelle est dessiné le triangle donné T. Par transparence elle place, alors, cette feuille retournée de telle sorte que le petit côté du triangle soit porté par III IV et que le sommet du grand angle du triangle soit en III. Nous représentons par des pointillés cette position sur la figure 4.1 et appelons 1 cette position.

LIN - Ca m'étonnerait qu'il en rentre, il faut qu'il ait un angle des trois qui rentre là-dedans (elle parle de l'angle $\widehat{III}$) et comme le plus grand fait 140 ...

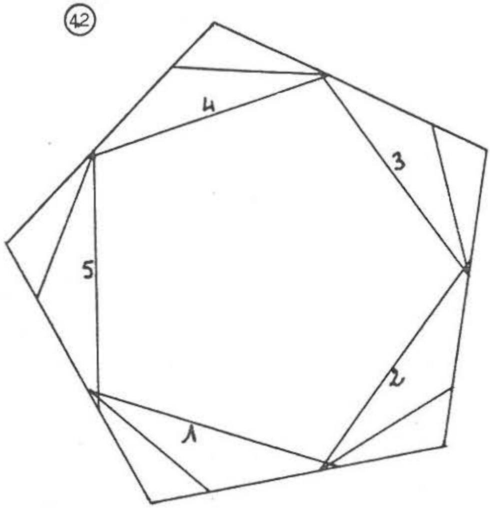
Elle place ensuite le triangle dans une position que nous appelons 2 et que nous représentons par des pointillés sur la figure 4.1 .

LIN - Là, il n'y a que deux sommets ...

Elle constate que les sommets du triangle ne sont pas tous les trois sur le bord du pentagone.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIN 5-13;11-7

42

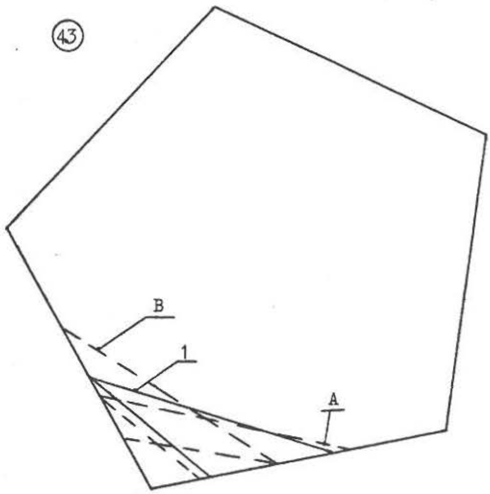


Arrive enfin la réussite avec la réalisation 42 . En effet, après beaucoup de tâtonnements qui semblent désordonnés, elle arrive à placer le triangle dans la position 1 de la figure 42 .
Elle semble très heureuse d'avoir réussi. Avec le compas, elle pique les trois sommets, et trace ainsi le triangle 1.

LIN - Je peux faire la même chose sur chaque côté ; il y en a encore quatre. C'est pas mal ça ; moi qui croyais qu'il n'y en avait pas.

Elle dessine, en utilisant la transparence et la pointe du compas, les triangles 2, 3, 4, 5, représentés sur 42 .

43



III

Elle retourne à nouveau (elle l'avait retournée en 41) la feuille sur laquelle est imprimé le triangle T. Cette feuille est donc maintenant à l'endroit. Elle procède alors à la réalisation 43 . Elle utilise la transparence, et place son triangle T dans la position A, indiquée ci-contre par des pointillés. Ce positionnement est effectué sur la figure 42 où on retrouve le triangle 1.

LIN - Ca va en faire dix.

Sans dessiner, elle place le triangle T aux quatre autres angles du pentagone dans une position analogue à la position A.
Elle place ensuite T dans la position B indiquée par des pointillés sur 43 .
Mais la sonnerie annonce la fin de la séance.

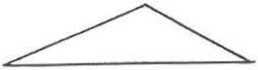
EXP - Alors, qu'est-ce que tu écris dans la case réponse .

LIN - Dix.

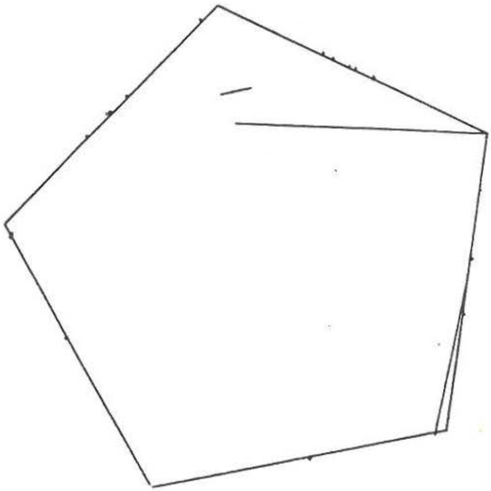
Et elle écrit 10.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN 4-13;04-0[1]

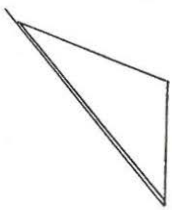
01



02

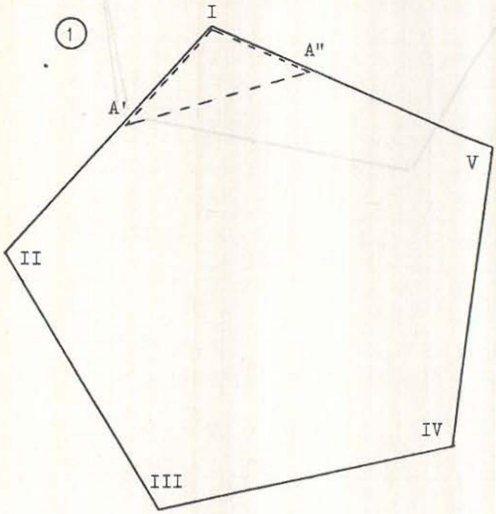


03



Dessins de l'élève à l'échelle $\frac{1}{2}$.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN 4-13;04-1



Au tout début, l'expérimentateur insiste en rappelant l'énoncé, en faisant relire l'énoncé. L'élève lit longuement l'énoncé.

CAN - ... 10 cm, 5 cm, ...

A la troisième minute, l'élève pose une question.

CAN - Tous les côtés là, ils sont égaux ?

Expérimentateur - Oui, il est régulier.

L'élève a demandé si tous les côtés du pentagone sont égaux entre eux.

CAN - Là, y aura un côté par exemple ici, mais l'autre sera obligé d'être à l'intérieur du triangle.

L'élève envisage de placer, comme nous l'indiquons en (1) , un côté du triangle sur I II, les extrémités de ce côté étant en I et A', un deuxième côté sur I V, les extrémités étant en I et A" ; elle est alors gênée par le fait que le 3ème côté A'A" doit être à l'intérieur du pentagone qu'elle appelle triangle.

EXP - Je ne peux rien te dire puisque c'est la règle du jeu. Réfléchis bien, tu as l'énoncé ...

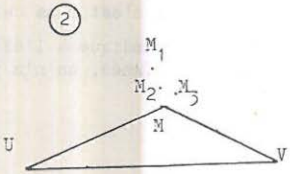
A la sixième minute,

EXP - Là, qu'est-ce que tu fais ?

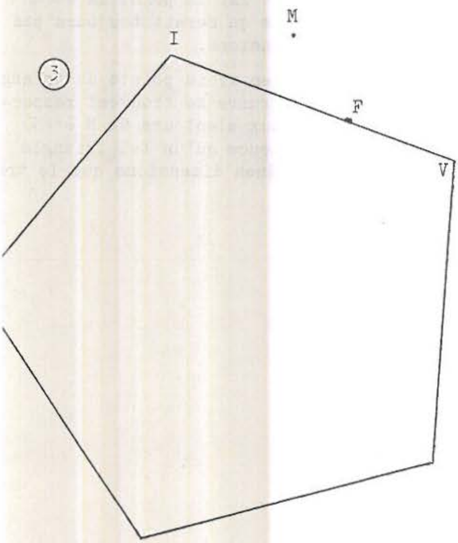
CAN - Je vais voir à peu près les dimensions du triangle.

Elle veut construire un triangle ayant les dimensions données.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN 4-13;04-2



Elle réalise alors la figure (2) ; pour cela, sur une feuille de papier quadrillé, elle trace un segment UV de 10 cm, puis au moyen du double décimètre, elle cherche un point M qui soit à 6 cm de U et à 5 cm de V. Elle marque donc plusieurs points M_1, M_2, M_3 jusqu'à ce qu'elle trouve M, celui qui lui convient.
Le triangle qu'elle vient ainsi de réaliser est correct à 1 ou 2 mm près.
Elle compare ensuite le triangle (2) qu'elle vient de tracer et le pentagone régulier, pour cela elle place ces deux feuilles côte à côte. Comme elle semble se poser des questions sur la signification de l'énoncé, l'expérimentateur lui rappelle l'énoncé, puis lui fait désigner sur son dessin (2) ce que sont les sommets d'un triangle ; elle les désigne sans difficulté.



Elle compare encore longuement la feuille sur laquelle se trouve le triangle (2) et la feuille sur laquelle se trouve le pentagone régulier.
Elle envisage à la huitième minute de construire un triangle selon la figure (3).

CAN - Y aurait un sommet là ; un sommet par exemple par ici ; et l'autre il serait par là.

L'élève envisage de placer un premier sommet en I, un deuxième sommet sur I V aux alentours du point que nous appelons F et alors le troisième sommet serait aux alentours d'un point que nous avons appelé M. Mais elle ne trace ni ne mesure rien.

EXP - Alors si tu le faisais comme ça là, qu'est-ce que tu en penses ?

CAN - Que les trois sommets ne seraient pas sûr ...

L'élève ajoute.

CAN - Pour trouver les 3 sommets sur le bord du pentagone, il faudrait, je pense, que les points soient alignés.

EXP - Tu parles de quels points ?

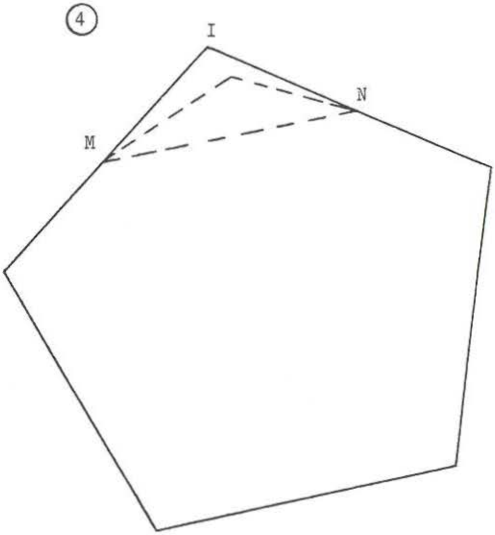
CAN - Les 3 sommets.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN - 4-13;04-3

EXP - Ah oui, mais c'est plus celui-là.

L'expérimentateur indique à l'élève que si les points sont alignés, on n'a plus le triangle (2) .

4

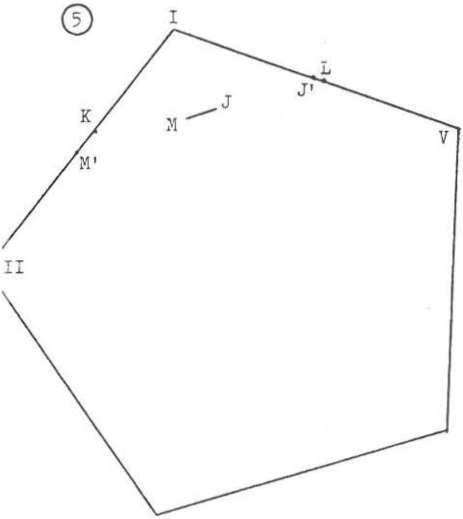


A la dixième minute, l'élève procède par transparence ; elle a posé la feuille sur laquelle se trouve le pentagone, sur son triangle (2) .
Nous représentons par des pointillés sur la figure (4) la position du triangle par rapport au pentagone. Elle envisage alors de placer son triangle selon la figure (4) .

CAN - Les points peut-être qui se trouveraient un point là, un point là et un point là ; mais ça serait toujours pas les mêmes dimensions.

Elle imagine que les trois points du triangle qu'elle doit construire se trouvent respectivement en I et aux alentours de M et N. Mais elle a conscience qu'un tel triangle IMN n'a pas les mêmes dimensions que le triangle donné T.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN 4-13;04-4



Elle dit pourtant :

- On va voir.

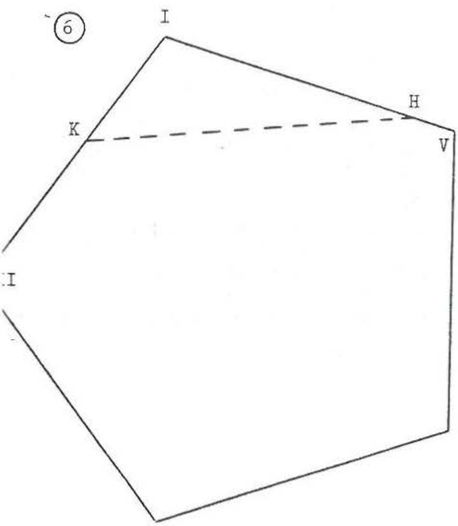
Elle passe alors à la réalisation (5) ; pour cela elle trace d'abord sans mesurer ni décalquer un petit segement MJ qui est sensé représenter un segment joignant 2 points M' et J', situés respectivement sur I II et I V, à 10 cm l'un de l'autre. Elle place alors K et L.

EXP - Comment tu les as pris ces points ?

L'expérimentateur lui demande comment elle a obtenu les nouveaux points K et L. L'élève s'explique :

CAN - En mesurant 5 cm de là à là ; et 6 cm de là à là, et maintenant je vais voir ... Ca va pas, ça fait pas 10 cm.

L'élève indique donc que le point K est à 5 cm de I sur I II et que le point L est à 6 cm de I sur I V ; mais alors elle constate que "ça va pas" car la distance de K à L n'est pas égale à 10 cm. Nous en sommes à la treizième minute.



CAN - Trop grand.

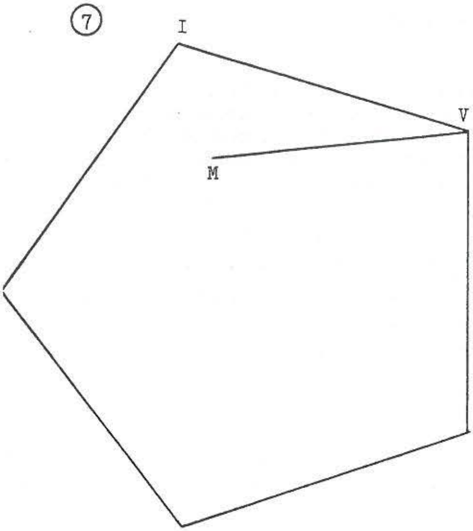
Comme nous l'indiquons sur la figure (6), l'élève a imaginé de prendre IK = 5 cm et IH = 10 cm, le point H étant maintenant sur le côté I V, mais elle s'arrête aussitôt en constatant que le segment KH est nettement "trop grand".
Elle explique qu'elle envisageait 6 cm pour KH.

CAN - Ca aurait pu faire 6 cm ; mais ça faisait vraiment trop grand.

Après un silence de réflexion, l'élève déclare :

CAN - Oui, je pense que déjà pour les 2 plus petits côtés il faudrait qu'ils se trouvent sur les bords et le trait de 10 cm, il faudrait qu'il se trouve à l'intérieur même du pentagone puisque c'est la plus grande dimension.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN 4-13;04-5



Elle réalise alors son dessin 7 ; pour cela elle trace un segment V M de 10 cm en disant :

CAN - En mesurant de là à là ça ferait 10 cm.

Elle s'arrête aussitôt et dit :

CAN - Ca va pas là !

EXP - Qu'est-ce qui va pas ?

CAN - Ce point là (elle parle de M). Il faudrait qu'il se trouve sur l'un des bords.

Durant tout ce travail elle a posé, involontairement, son pentagone sur la feuille où se trouve le triangle 2 ; le triangle est donc visible par transparence mais il semble qu'elle ne s'en aperçoive pas; du moins, elle ne fait aucun usage de cette transparence.

L'élève déclare à la trente-deuxième minute.

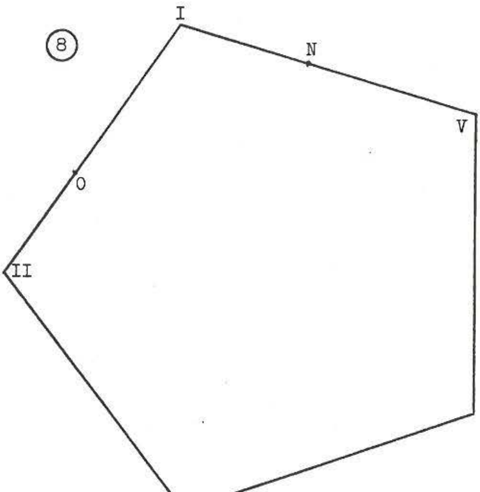
CAN - C'est les angles qui sont trop ...

Elle trouve que les angles du pentagone ne conviennent pas.

Elle réalise alors la figure 8 .

CAN - On prend les 5 cm, je vais essayer ... Ca fera trop grand de là à là, ça fait 7 cm.

Sa réalisation consiste à choisir un point N à 5 cm de I sur le côté I V ; puis à choisir un point O sur le côté I II situé à 10 cm de N ; mais elle constate alors que I O est égal à 7 cm et non à 6 cm, donc I O est trop grand et le triangle INO ne convient pas.



Elle relit alors attentivement l'énoncé.

CAN - Il doit y avoir un petit truc.

EXP - C'est un problème, les problèmes c'est comme ça ; on sait pas où il faut chercher.

A la dix-neuvième minute, l'élève relisant l'énoncé demande :

- Sur les bords obligatoirement ?

L'expérimentateur lui désigne du doigt ce qu'on entend par le bord du pentagone.

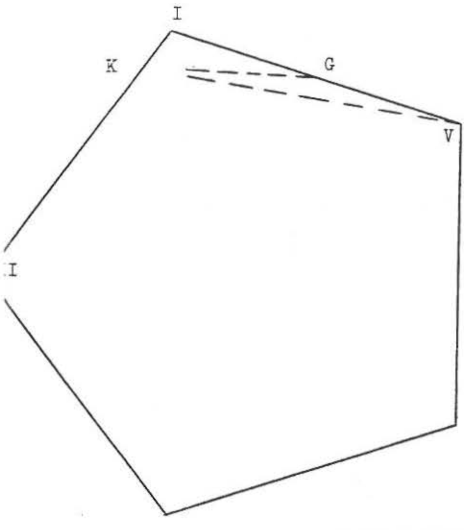
EXP - Le bord c'est tout ça. C'est tout le pourtour, la ligne qui fait le tour.

Après un long silence,

CAN - Je regarde s'il n'y a pas un endroit dans le pentagone où les trois sommets pourraient toucher.

Le triangle (2) de l'élève est toujours visible par transparence, mais l'élève n'en fait aucun usage.

(9)



Un peu plus tard, c'est un nouvel essai que nous représentons sur le dessin (9) .

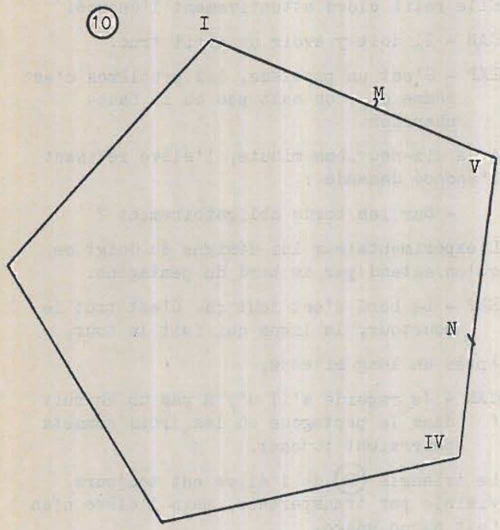
CAN - En comptant les 6 cm là, peut-être que 5 cm iraient de là à là ; hum ! c'est juste !!!

EXP - Qu'est-ce que tu veux faire ?

CAN - Je fais rentrer les 6 cm là ; de ce point à un des bords du pentagone, je voudrais voir si il n'y aurait pas 5 cm de façon ... mais ça fera plus de 10 cm !

L'élève a choisi tout d'abord un segment GV porté par I V, de 6 cm de long ; puis elle essaie de trouver un point K sur le côté I II situé à 5 cm de G ; mais elle s'aperçoit très vite qu'un éventuel point K lui donnera toujours un segment K V supérieur à 10 cm.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN 4-13;04-7



A la vingt-quatrième minute, elle réalise la figure (10) .

CAN - 5 cm de là à là ; là 10 cm ; et là ... Hum, c'est toujours trop grand, ça fait 7 cm de là à là, c'est toujours pareil..

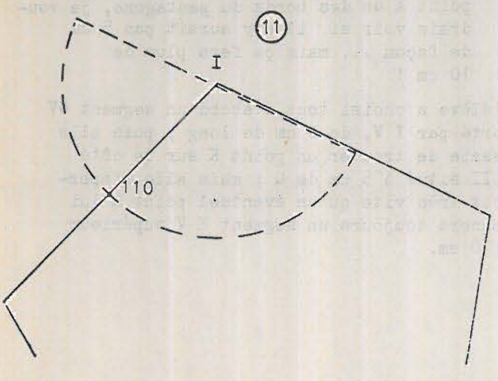
Elle a tout d'abord choisit un segment V M de 5 cm, porté par I V ; elle repère ensuite un point N situé sur IV V à 10 cm de M ; mais elle constate alors que V N mesure 7 cm, il est donc trop grand et de nouveau ce triangle VMN ne convient pas.

CAN - C'est chaque côté des triangles qui font 10 cm, 6 cm, 5 cm ?

EXP - Oui, c'est comme ça.

CAN - Il faudrait peut-être que j'essaie de trouver avec un rapporteur l'angle et après j'essaierai de le reporter sur mon triangle et je ferai avec les dimensions de 5 cm, 6 cm, 10 cm.

Elle projette de construire un triangle dont un angle est égal à l'angle formé par 2 côtés consécutifs du pentagone et dont les trois côtés ont pour dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm.
Elle place donc son rapporteur, tracé en pointillés sur la figure (11) ci-contre, sur le pentagone.
Elle a beaucoup de mal à effectuer cette mesure. L'expérimentateur ne l'aide pas.



CAN - Je ne m'en rappelle plus.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN 4-13;04-8

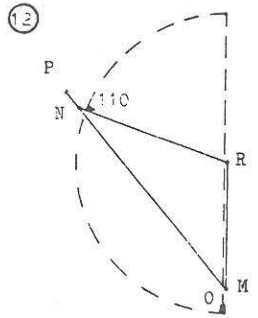
Elle arrive enfin à placer le centre de son rapporteur en R et trouve 110° (au lieu de 108°). Elle note ce résultat sur sa première feuille de brouillon.
Elle réalise ensuite, à la trentième minute, le triangle présenté en (12) ; pour cela elle place d'abord son rapporteur, en pointillés sur (12) , et marque les graduations 0 et 110, ainsi que le centre R du rapporteur. Sur le segment joignant R à la graduation 0, elle porte le segment RM = 5 cm ; sur le segment joignant R à la graduation 110, elle porte le segment RN = 6 cm ; elle joint MN qu'elle prolonge jusqu'en P tel que MP = 10 cm.

EXP - Qu'est-ce qui se passe ?

CAN - Ca va pas, les 10 cm ne rentrent pas.

Elle a bien constaté que MN $\neq$ 10 cm.

(12)

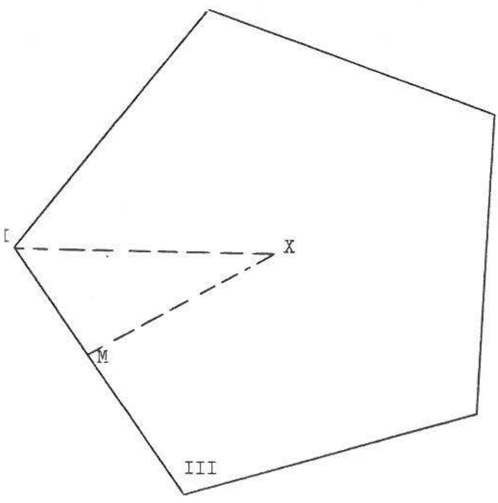


Elle mesure la distance d'un sommet du pentagone au centre du pentagone, puis la distance du milieu d'un côté au centre du pentagone.
Elle envisage alors le triangle X II M représenté ci-contre en (13) ; elle a mesuré la distance du sommet II au centre X du pentagone ; elle a trouvé 10 cm ; elle trace alors un point M sur le segment II III à 5 cm de II. Et là, elle déclare :

- Il faudrait 6 cm alors qu'il y en à 8.

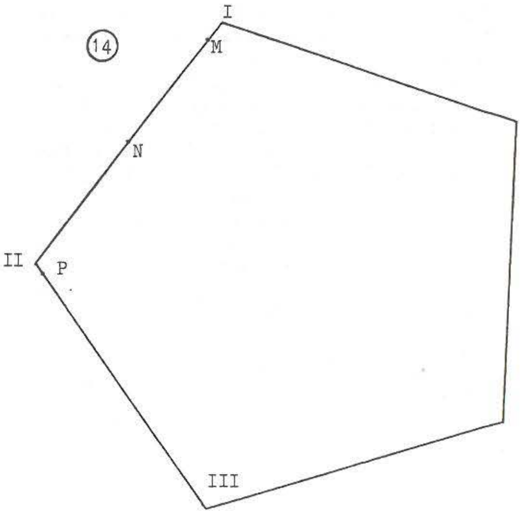
Elle constate donc que MX = 8 cm, le triangle II M X ne convient donc pas puisque MX $\neq$ 6 cm.

(13)



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CAN 4-13;04-9

14



La trente-septième minute est suivie d'un long silence.

Elle réalise ensuite sa figure 14 ;

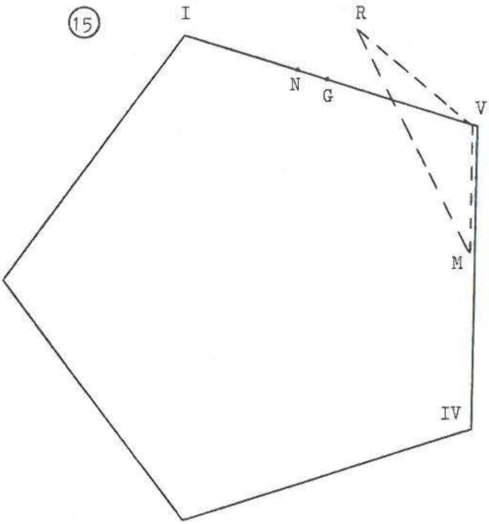
CAN - Je vais voir combien ...
De là à là, 5 cm ; de là à là 6 cm ...

EXP - Qu'est-ce qui te gêne ?

CAN - ... C'est trop grand, ça dépasse les 10 cm, ça fait 11.

Elle a donc tracé les points M et N sur le côté I II tel que MN = 5 cm ; puis le point P, sur le côté II III, situé à 6 cm de N ; et elle constate alors que PM = 11 cm > 10cm, donc que le triangle PMN ne convient pas.

15



A la quarantième minute, l'expérimentateur décide d'intervenir. Il propose à l'élève d'utiliser la transparence et de placer son triangle 2 sous la feuille où est dessiné le pentagone.
L'élève place le triangle donné T selon la figure 15 , où nous le représentons en pointillés.

CAN - Déjà ce côté il va. Là y a déjà les 5 cm.

Elle marque le point M sur IV V tel que V M = 5 cm.

CAN - Maintenant, peut-être en mettant les 6 cm là au lieu de les mettre ici.

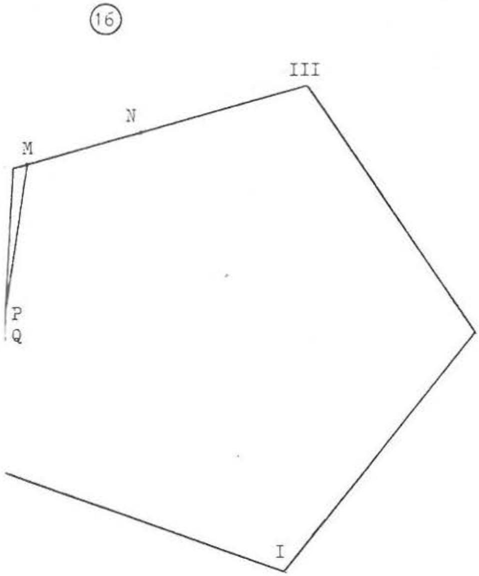
Elle envisage alors de placer un segment V G sur le côté I V, mesurant 6 cm elle veut prendre V G au lieu de V R.
Puis elle change d'avis.

CAN - Mais d'abord, je vais mettre mes 10 cm.

Elle trace donc un point N sur le côté I V, à 10 cm de M.

CAN - Ah ! Mais les 6 cm ça ne rentre pas !

Elle constate donc, en définitive, que
$N V \neq 6$.
Elle n'a donc pas la solution cherchée.



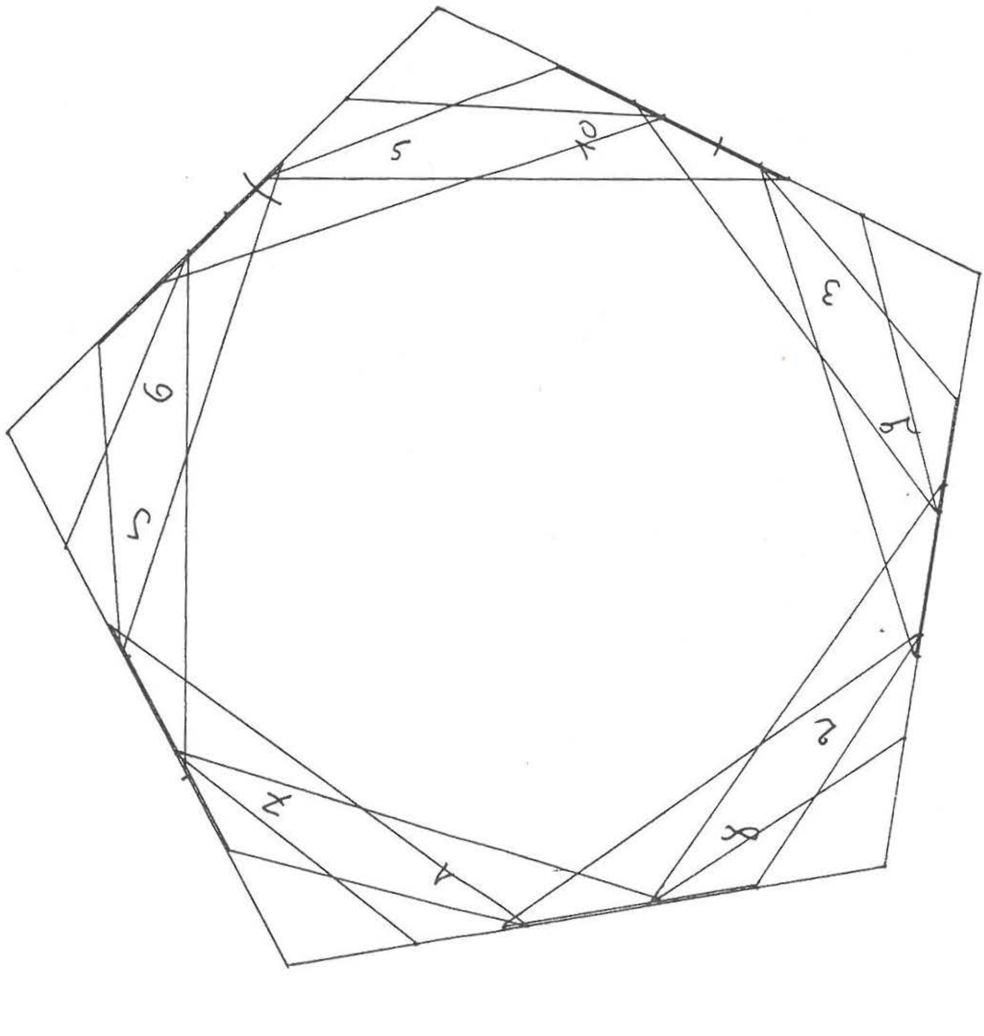
A la quarante-troisième minute, elle réalise la figure (16) ; pour cela elle choisit un segment de 5 cm, le segment MN porté par le côté III IV ; puis un segment MP de 6 cm, le point P étant sur le côté IV V ; elle trace le segment MP.

CAN - Voilà, ça y est ...
Attendez ! Ah non ! J'ai confondu avec ce point.

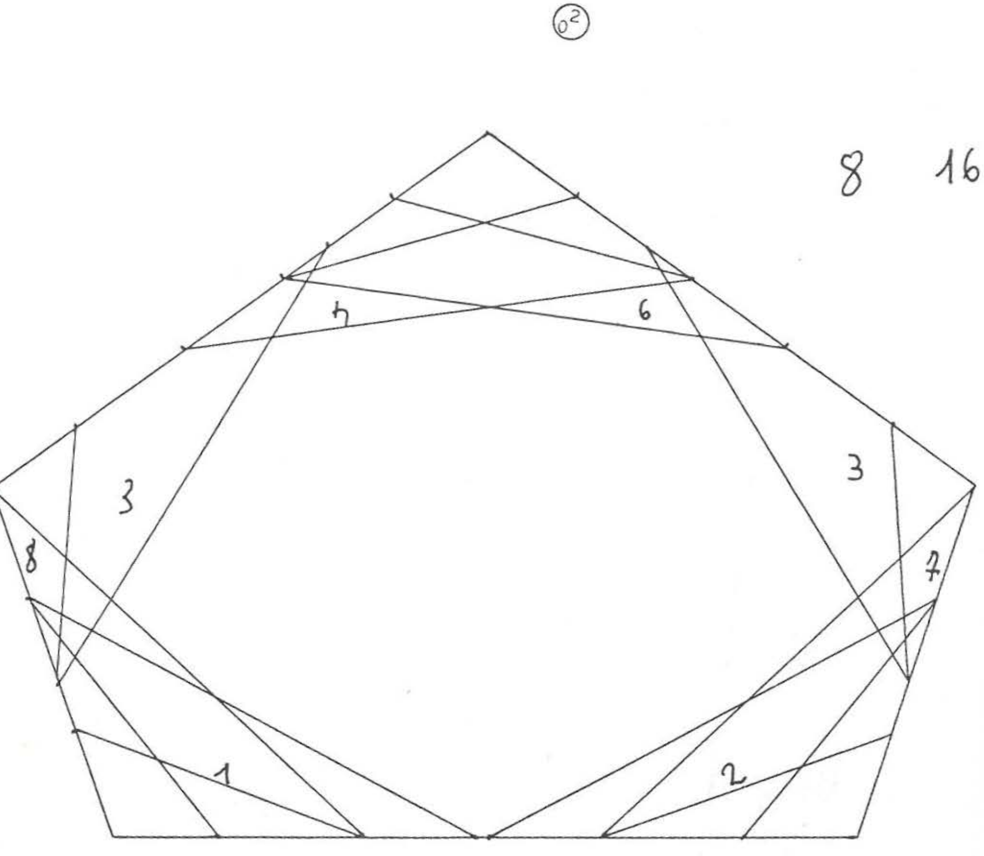
Elle a choisi ensuite un point Q, sur IV V à 10 cm de N ; elle confond momentanément les points P et Q, croit avoir trouvé? Puis, déçue, constate qu'elle n'a pas obtenu le triangle. Elle réalise sa figure (16) dans la position indiquée ci-contre, I étant le point le plus bas.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-0^1

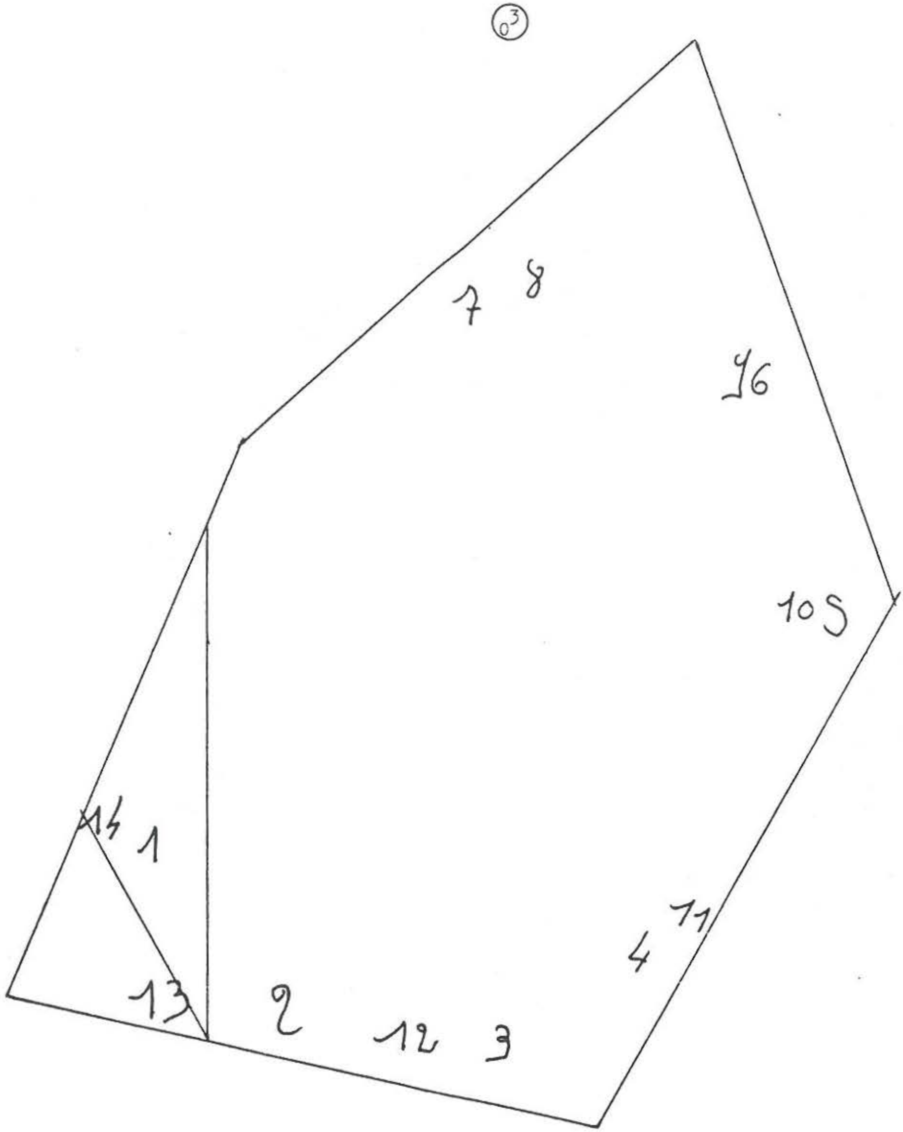
o^1 10 20



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-0^2



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA $4\text{-}14;11\text{-}0^3$



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-1

CLA - Je peux prendre une règle ?

EXP - Bien entendu, rien n'est interdit par l'énoncé.

CLA - 10, 6 et 5 ... ce sont les trois côtés du triangle ... ? ... !

Il lit, relit l'énoncé ... réfléchit longuement.
A la troisième minute,

CLA - On nous demande un triangle qui ait les 3 sommets sur un bord ?

EXP - Sur le bord du pentagone.

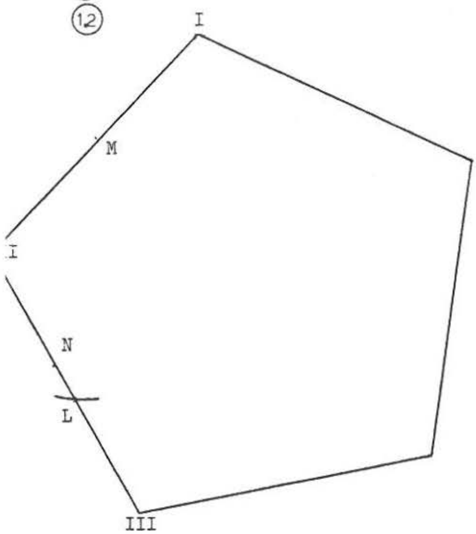
CLA - Ah, bon !

Il avait confondu "bord" et "côté" du pentagone. En effet, au début de la séance, lors de la lecture de l'énoncé, l'élève était inatentif . Lorsque le présentateur parcourait du doigt le bord du pentagone, pour expliquer le problème à l'ensemble des élèves, CLA regardait la feuille posée sur son bureau.
Immédiatement, CLA saisit un crayon et réalise sont dessin (1.1) . Il place respectivement sur les côtés I II et II III, les points M et N tels que II M = 6 cm et II N = 5 cm.
Il mesure MN.

CLA - C'est pas ça !

Il attendait MN = 10 cm ; or il trouve, pour MN, moins de neuf centimètres.

(1.1)
(1.2)



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-2

Pour réaliser 12 , à la cinquième minute, il demande un compas. Il prend un écartement de 10 cm, place la pointe sèche en M. Il trace un arc qui coupe II III en L. Il mesure II L. Son résultat est supérieur aux 5 cm espérés.
Découragé, il repousse le compas.

Sa réalisation 13 consiste en de simples mesures. Il prend la règle graduée et essaie de mesurer 10 cm d'un point de II III à un point de II I. Il la déplace ..., reste perplexe pendant près de trois minutes.

CLA - Je vois vraiment pas comment dessiner le premier triangle.

EXP - Vous décidez d'en dessiner un ?

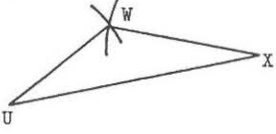
CLA - Oui, mais ... je vois pas.

Il pose son crayon et paraît renoncer définitivement à sa recherche.

A la dixième minute, l'expérimentateur intervient pour relancer la recherche.

EXP - Vous pourriez dessiner le triangle sur la feuille de brouillon, si vous voulez.

21

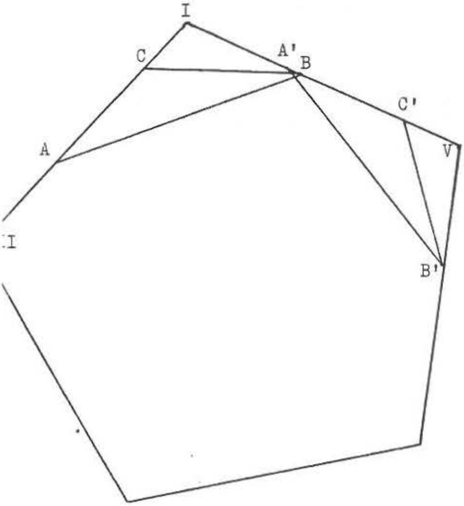


L'élève réalise 21 . Il construit immédiatement et très correctement, à l'aide du compas, le triangle UXW. Il trace UX = 10 cm, à l'aide de la règle graduée ; puis, à l'aide du compas, il détermine le point W :

WU = 5 cm ; WX = 6 cm.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-3

31
32



Pour sa réalisation 31 il va procéder par décalquage. Il pose sa feuille de brouillon portant le triangle qu'il vient de dessiner (21) sur le pentagone donné P. Il situe le triangle en ABC. Sans soulever la feuille de brouillon, il mesure IA et IB. Il repousse, alors, le brouillon et il porte sur le pentagone les mesures IA = 7,6 cm et IB = 4,8 cm. Il trace le triangle ABC. Il vérifie les trois dimensions de ce triangle ABC.

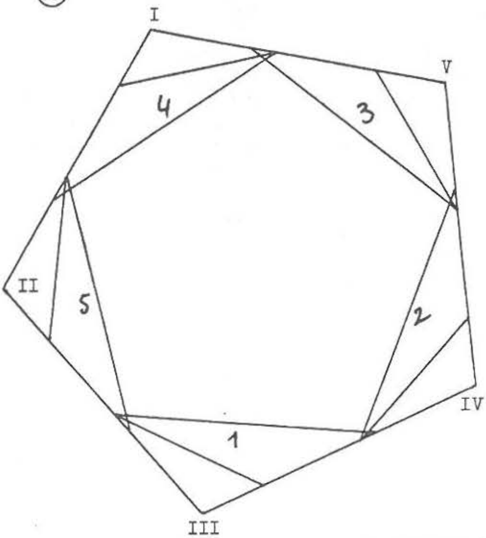
Immédiatement, sans aucun temps de pose, il réalise 32 . Pour cela il mesure IC = 2,4 cm et reporte cette valeur sur VI, en marquant C':

V C' = 2,4 cm.

Il place ensuite A' tel que A'C' = 5 cm ; B' tel que C'B' = 6 cm. Il vérifie que A'B' = 10 cm et il trace les trois côtés du triangle A'B'C'.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-4

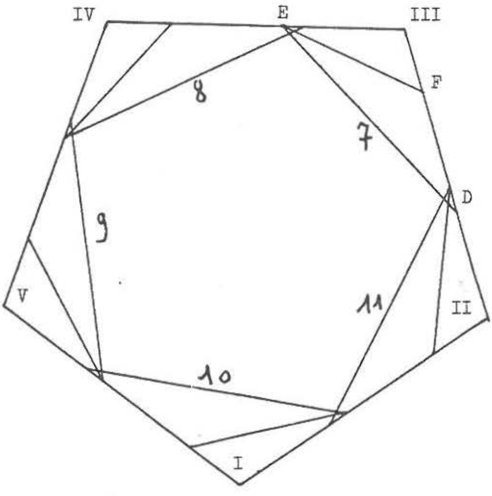
(33)



Sa réalisation (33) consiste à répéter trois fois cette construction, exactement dans le même ordre en travaillant successivement dans les angles $\widehat{IV}$, $\widehat{III}$ et $\widehat{II}$. Il tourne sa feuille dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de telle façon que l'angle dans lequel il travaille soit toujours en position d'angle supérieur droit. Il numérote alors les cinq triangles obtenus en (31) , (32) , (33) de 1 à 5. La numérotation ne tient pas compte de l'ordre de réalisation. En effet, c'est le triangle numéroté 4 qui a été réalisé en premier ((31)) il a été suivi, successivement par 3, 2, 1 et 5.

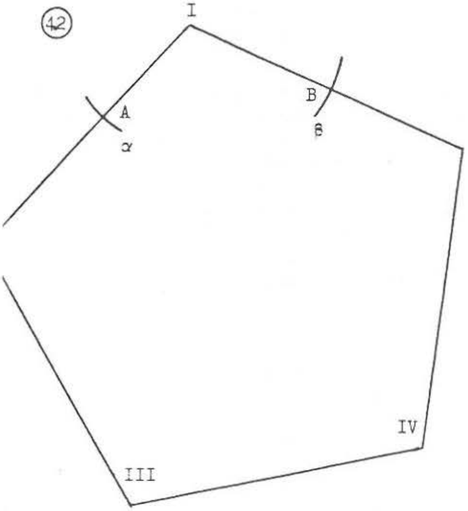
---

(41)



A la quatorzième minute, sans temps de pose, il procède à la réalisation (41) . Dans un souci de clarté, probablement, il change de stylo : il travaillait jusqu'alors au crayon noir et il prend, maintenant, un stylo rouge. Il place un point F tel que III F
III F = 2,4 cm. Il place ensuite les points D et E tels que FD = 5 cm et FE = 6 cm. Après avoir vérifié que DE = 10 cm, il trace les côtés FE et DE. Il a ainsi obtenu le triangle DEF dans l'angle $\widehat{III}$.
Il fait alors tourner sa feuille dans le sens des aiguilles d'une montre pour construire successivement dans les angles $\widehat{IV}$, $\widehat{V}$, $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ des triangles analogues. Il place sa feuille de telle sorte que sa construction soit effectuée dans l'angle supérieur droit. Ses constructions sont très méthodiques ; toujours dans le même ordre. Il mesure 2,4 ; 5,6 ; il vérifie 10 et trace les trois côtés du triangle. La numérotation ne tient pas compte de l'ordre de réalisation. En effet, c'est le triangle numéro 7 qui a été réalisé en premier. Il a été suivi de 8, 9, 10 et 6.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-5



A la vingtième minute, l'élève réalise 42 . Ayant placé sa feuille dans la position normale, avec le sommet I en haut et le côté III IV en bas, il observe ses résultats. Avec le compas, un écartement de 5 cm, puis de 6 centimètres, il trace les arcs α et β coupant les côtés du pentagone en A et B tels que IA = 5 et IB = 6. Il mesure AB, puis renonce. Il a donc essayé de construire un triangle comme il l'avait déjà fait en 1.1 .

CLA - Je crois que c'est tout.
J'en ai trouvé dix pour l'instant ...
Je crois que c'est tout.

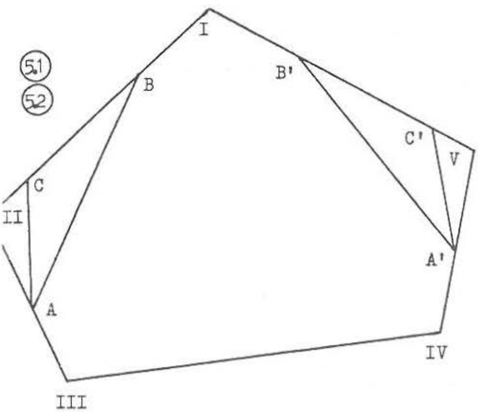
Il inscrit 10 dans la case prévue à cet effet ... et s'arrête.
Sa recherche a duré vingt-et-une minutes.

A la vingt-et-unième minute, l'expérimentateur propose à l'élève le même problème mais avec un pentagone irrégulier, à angles égaux.

CLA - C'est le même exercice ?

EXP - Oui, avec le triangle ayant les mêmes dimensions.

CLA - Mais le pentagone n'est pas régulier ..
Il doit y en avoir beaucoup là !
Est-ce que je peux avoir des ciseaux, S.V.P. ?



C'est alors la réalisation 5.1 qui commence. Il prend la feuille de brouillon sur laquelle il a déjà dessiné le triangle. Il vérifie les trois dimensions, apporte une légère correction afin de parfaire le tracé et découpe le triangle. Il mesure les côtés du pentagone.

CLA - Il n'est pas si irrégulier que ça.

EXP - Pourquoi ?

CLA - Là, il y a 14,5 (il montre le côté III IV), là sept virgule deux et demi (c'est à dire 7,25 pour II III et V IV qu'il montre du doigt) ; ce qui est le

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-6

double de 14,5 et là il fait 11,9 et là 11,9 (il désigne les côtés I II et I V).

Il emploie le mot double pour le mot demi. Il pose le triangle découpé sur le pentagone le fait glisser et l'amène dans la position ABC. Il pointe les trois sommets A, B et C, déplace le triangle et vérifie les distances AB, AC et BC. Peu satisfait, il revient au triangle, mesure ses côtés et redécoupe afin d'obtenir un tracé très correct. Enfin, il trace le triangle ABC.

Il passe aussitôt à la réalisation (52). Pour cela il mesure II C = 2 cm et place C' tel que

VC' = II C = 2 cm.

Puis il mesure AC = 5 cm et place A' tel que

A'C' = AC = 5 cm.

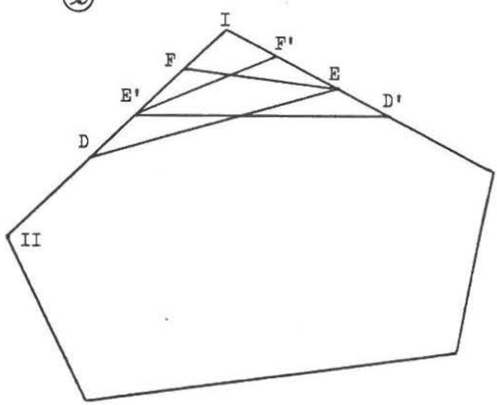
Il mesure enfin AB = 10 cm et place B' tel que

A'B' = AB = 10 cm.

Il vérifie que ses points A', B', C' sont au bon endroit en posant le triangle découpé sur ce triangle A'B'C'. Il trace les trois côtés du triangle A'B'C'.

---

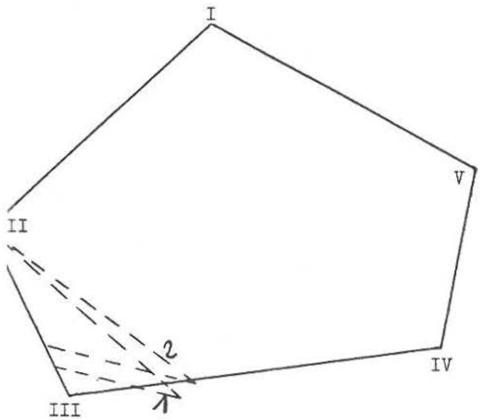
(53)



Il procède à la réalisation (53) . Pour cela il pose le triangle découpé sur le côté I II en DEF et procède comme précédemment, en (51) . Il pointe les sommets, vérifie les dimensions, trace. Immédiatement, en utilisant DEF, il construit D'E'F', selon la procédure qui lui a permis de passer de ABC ((51)) à A'B'C' ((52)).

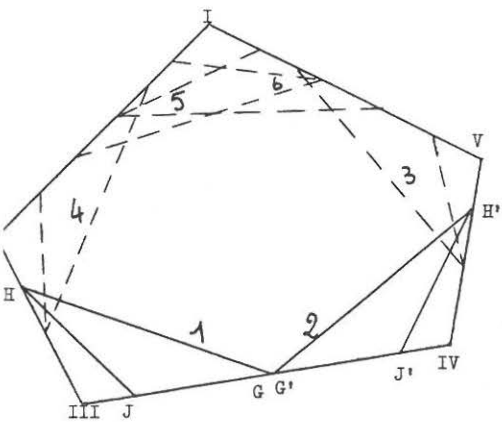
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-7

54



Pour sa réalisation 54 , il essaie de placer le côté moyen du triangle sur le côté II III du pentagone. C'est la position 1 que nous indiquons par des pointillés sur la figure ci-contre. Il retourne alors le triangle découpé, et le place dans la position 2. Mais, là encore, la pointe sort. Il renonce.

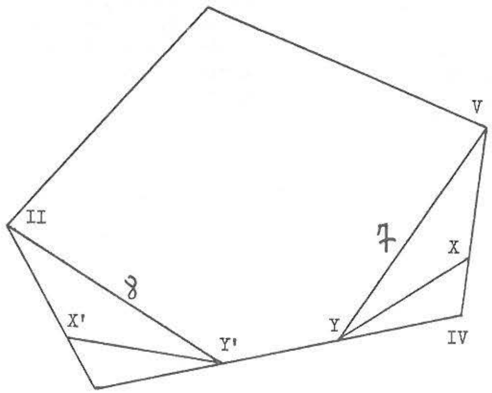
55



Pour sa réalisation 55 il s'intéresse au côté III IV du pentagone. Il a retourné son triangle découpé dans la position qui lui avait permis de tracer ABC (51) et DEF (53). Il le place dans la position GHJ indiquée par la figure ci-contre. Comme pour les réalisations 51 , 52 et 53 , 54 , il pointe, il vérifie les mesures, il trace le triangle GHJ ; puis il trace le triangle G'H'J' à l'aide des mesures associées à GHJ.
Il numérote alors les six triangles qu'il vient d'obtenir. GHJ et G'H'J' ont les numéros 1 et 2. ABC et A'B'C' ont les numéros 4 et 3. DEF et D'E'F' ont les numéros 5 et 6.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-8

56



Pour sa réalisation 56 il s'intéresse au côté V IV du pentagone mais sans conviction. En effet, il se souvient que sur le segment II III il n'a pas pu placer le triangle. Il essaie. La pointe sort à peine !

CLA - Hum ! c'est juste ! je vais quand même essayer.

Il vérifie les mesures, paraît satisfait. Il trace le triangle VXY ; puis le triangle II X'Y' en portant III X' = V X = 2,2 cm. Il mesure III J, IV J', IF, IF' (cf. (55 et 53). Il trouve 2,2 cm.

CLA - C'est drôle ... ! Partout il y a 2,2 et pourtant il est pas régulier ... pas tout à fait.

Il numérote ses deux derniers triangles VXY et II X'Y', respectivement, 7 et 8.

Il reprend le triangle découpé et le fait glisser sur le bord du pentagone. Il le place dans l'angle $\hat{I}$ du pentagone en faisant porté le côté moyen du triangle successivement par I II, puis IV. Il ne voit pas que ces deux positions sont différentes des deux triangles DEF et D'E'F' qu'il a obtenus en 53 .

CLA - C'est tout, oui ... ça en fait huit.

Il inscrit 8. Estimant avoir terminé, il observe son dessin et effectue des mesures sur les segments qui délimitent le polygone intérieur dans sa figure complète 0^2.

CLA - Je regarde que ça me fait un autre pentagone, mais plus petit à l'intérieur.

EXP - Est-ce un pentagone ?

L'élève compte les côtés, se trompe.

CLA - Ah, non ! il y en a six.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - CLA 4-14;11-9

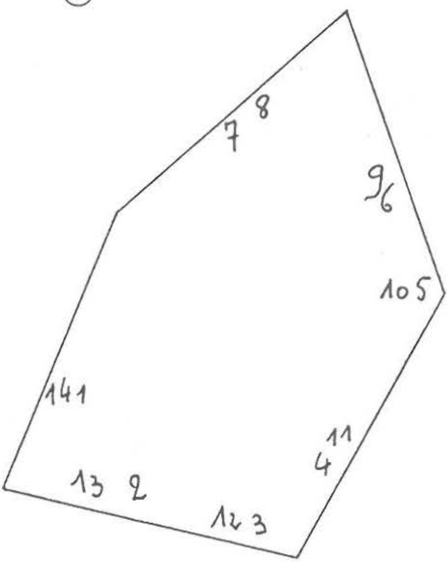
L'expérimentateur montre à l'élève le pentagone irrégulier dont les côtés sont égaux.

EXP - Et là, sans dessiner, pouvez-vous dire combien il y en a ?

CLA - Là ? Ah, ça, je ne sais pas !

Il mesure les côtés. C'est le début de sa réalisation (61) .

61



CLA - C'est les mêmes mesures partout. Sans dessiner ?

EXP - Oui, il y a trop peu de temps, d'ailleurs !

Il promène le triangle découpé en faisant le tour du pentagone. Il compte 7 triangles solution.
Il numérote les emplacements trouvés sans tracer les triangles.

CLA - Sept dans un sens, sept dans l'autre : ça fait 14. Tout à l'heure j'aurais du faire pareil (retourner le triangle), c'est dommage! Il doit y en avoir le double normalement.

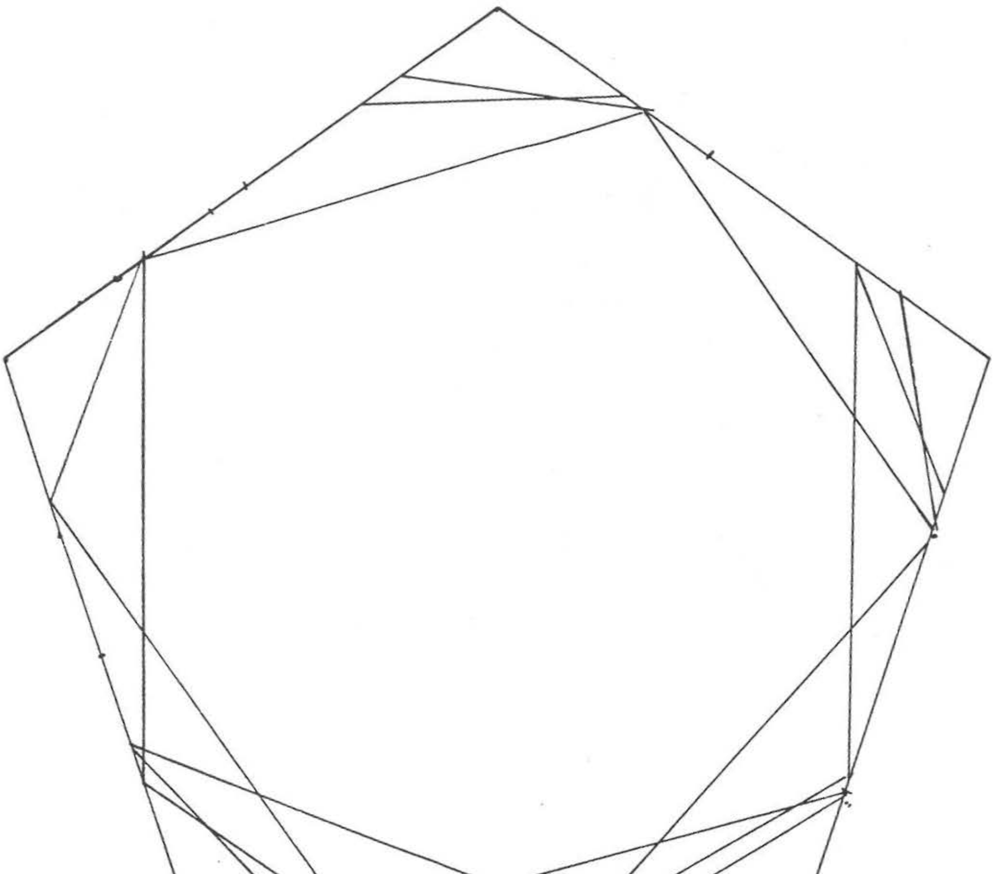
Il reprend donc ses deux premières feuilles de dessin.

CLA - Là, je double le chiffre, ça fait 16 et sur l'autre, j'avais 10, je mets 20.

Sur la deuxième feuille il remplace sa réponse antérieure 8 par 16. Et sur la première feuille, comportant le pentagone régulier, il remplace 10 par 20.

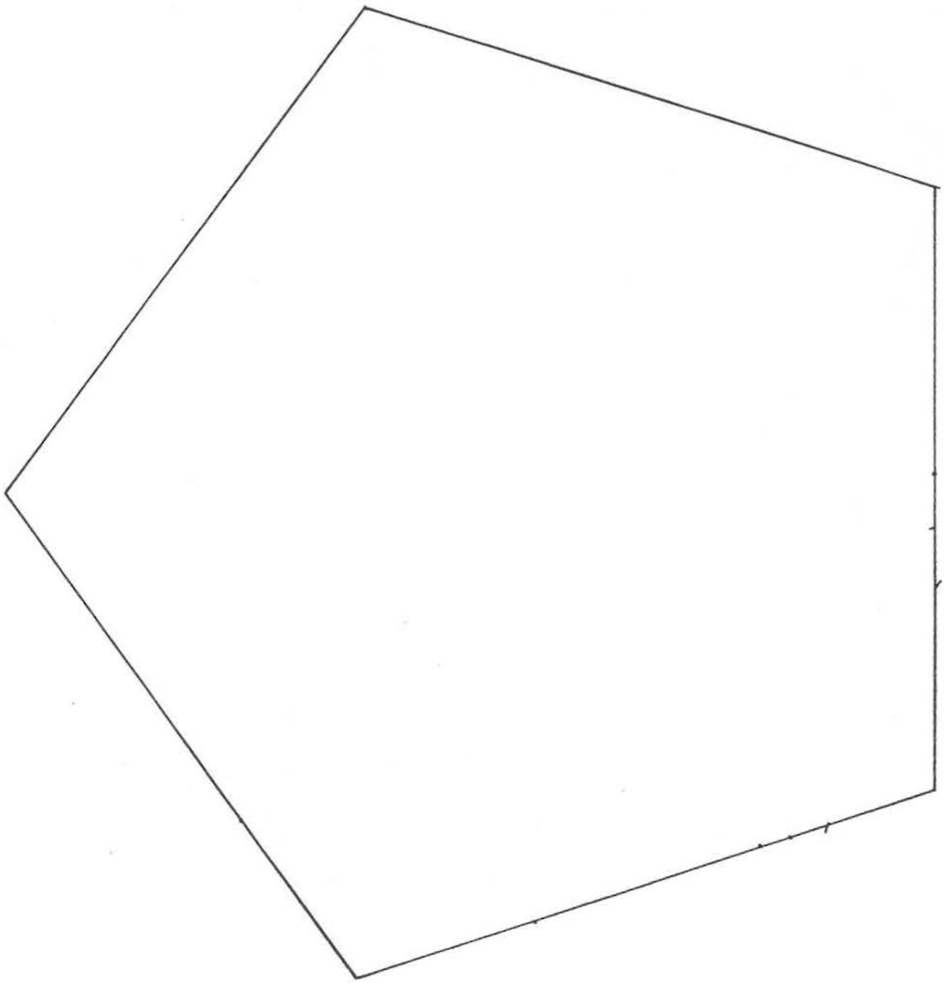
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - SYL 4-15;04-0[1]

(01)



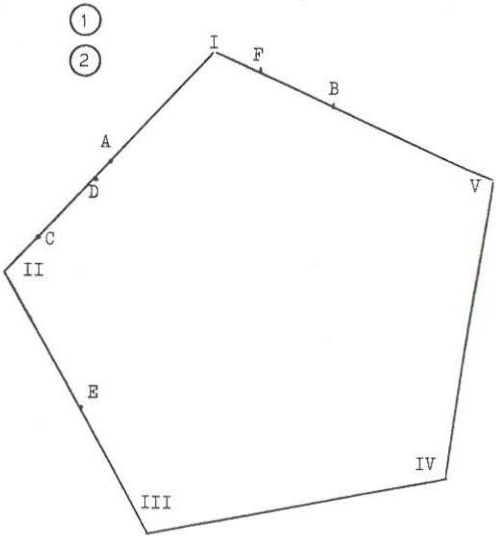
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - SYL $4\text{-}15;04\text{-}0^2$

(02)



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - SYL 4-15;04-1

SYL constate qu'un côté du pentagone mesure 12 cm.
L'expérimentateur rappelle l'énoncé.
Sa première activité consiste simplement à mesurer une distance de 10 cm sur le côté I II du pentagone.



Elle réalise ensuite la figure 1 ; pour cela elle place à la troisième minute un point A sur le côté I II à 6 cm du sommet I, puis un point B sur le côté I V du pentagone, à 5 cm de I.

SYL - Ca fait pas 10.

Elle constate que AB n'est pas égal à 10 cm.

EXP - Tu as l'air embêté ; qu'est-ce qui t'embête ?

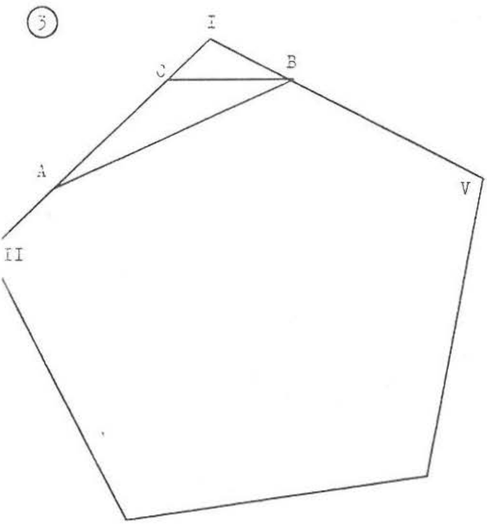
SYL - Il faut de toute façon que, sur un côté, ce soit, soit 10, soit 6, soit 5.

Elle réalise alors la figure 2 ; pour cela elle place un point C sur le côté I II du pentagone, à 10 cm de I. Le point C est tracé à la quatrième minute. Elle place ensuite un point D à 5 cm de II sur le côté I II et un point E sur le côté II III, situé à 6 cm de II.
A la cinquième minute, elle mesure les quatre côtés I V, V IV, IV III, III II du pentagone régulier.

SYL - C'est pareil.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - SYL 4-15;04-2

Elle constate que tous ces côtés sont égaux entre eux.
A la septième minute elle effectue différentes mesures au double décimètre; elle lui donne différentes positions, trace quelques points, notamment le point F sur le côté I V situé à 10 cm de V.



EXP - Tu as une idée ?

SYL - Ca en fait 1 là !

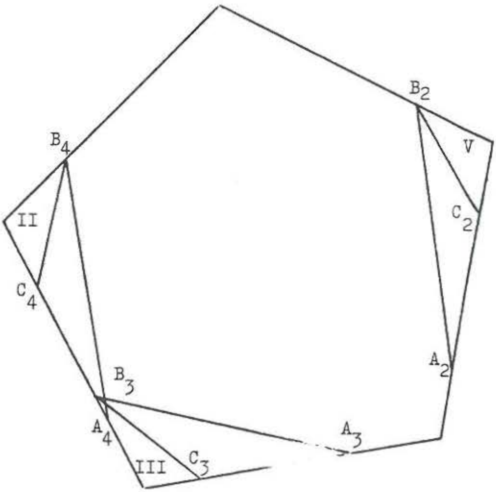
L'élève explique alors sa réalisation (3), à la neuvième minute. Elle indique qu'un premier segment de 10 cm est constitué par AB, A étant sur le côté I II et B étant sur le côté I V ; puis elle désigne le point C, situé sur I II, à 6 cm de A, et alors CB = 5 cm.
Elle a bien obtenu un triangle dont les trois sommets sont sur le bord du pentagone, ceci avec une approximation de 2 ou 3 millimètres.

EXP - Tu dis que tu en as 1.

SYL - Oui.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - SYL 4-15;04-3

4



A la onzième minute SYL déclare :

- Tous les angles y en a 1.

Elle veut dire qu'elle a un triangle solution aux alentours de chaque sommet du pentagone.
Elle réalise la figure (4). Pour cela elle construit le triangle $A_2B_2C_2$ aux alentours du sommet V, avec toujours une approximation de 2 ou 3 millimètres. Elle construit ensuite le triangle $A_3B_3C_3$ toujours en plaçant approximativement les côtés et en prenant en considération, par simple coup d'oeil, la position de son premier triangle ABC.
Elle trace ensuite un segment B_4C_4 de 5 cm ; puis s'arrête.

EXP - Qu'est-ce qui t'embête ?

SYL - Il va aller dedans celui-là.

L'élève constate que si elle trace le point A_4 sur le côté II III, avec C_4A_4 = 6 cm, la pointe B_3 du triangle $A_3B_3C_3$ précédent va se trouver à l'intérieur du triangle $A_4B_4C_4$, ce qui la gêne et donc l'arrête momentanément.

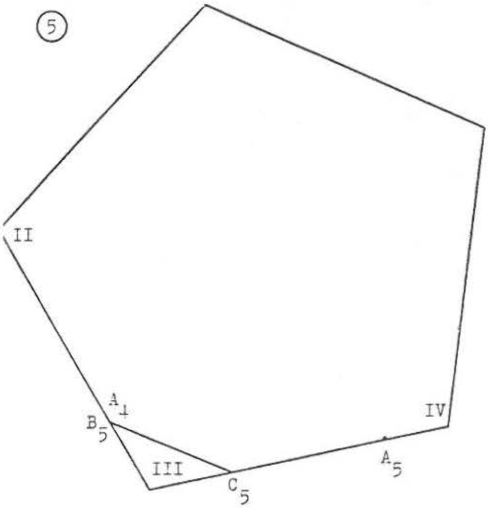
EXP - C'est à toi de voir ; tu regardes ce qu'on te pose comme question.

Elle réfléchit.
Une élève de la classe s'approche de SYL et, par signes, essaye d'indiquer la solution à SYL. L'expérimentateur l'éloigne en riant et en lui disant :

- Tu lui raconteras après.

A la quatorzième minute l'élève achève son triangle $A_4B_4C_4$.
Elle réfléchit longuement.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - SYL 4-15;04-4



A la dix-huitième minute elle réalise la figure (5) .pour cela elle trace, au stylo à bille rouge, un segment B_5C_5 de 5 cm. B_5, confondu avec A_4, étant sur le côté II III du pentagone et C_5 sur le côté III IV. Elle place ensuite le point A_5 à 6 cm de C_5 sur le côté III IV du pentagone

EXP - A quoi penses-tu ?

SYL - Si je fais comme ça partout, je peux en trouver beaucoup.

Un peu plus tard l'expérimentateur demande :

- Qu'est-ce qui se passe là ?

SYL - Ca marche pas, ça fait pas dix.

Elle constate donc que B_5A_5 n'est pas égal à 10 cm.

L'expérimentateur l'interroge à la vingtième minute.

EXP - A quoi tu penses ?

SYL - Comme ça, y en a une infinité.

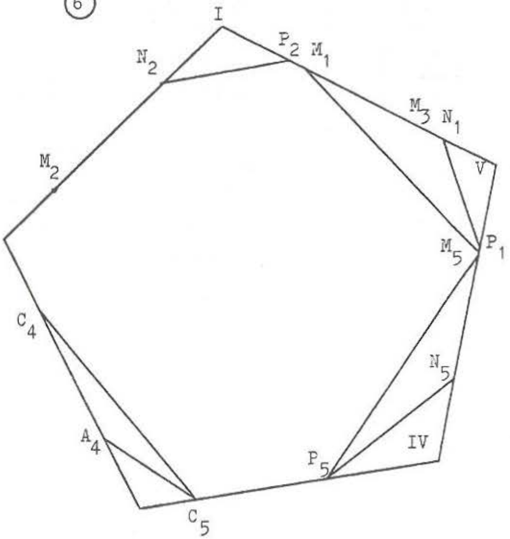
EXP - Qu'est-ce qui te fait dire ça ?

SYL - Suivant comme je mets ma règle à 5 là, ça m'en fait un.

Elle veut dire que chaque fois qu'elle choisit 2 points sur deux côtés consécutifs du polygone, à 5 cm l'un de l'autre, elle peut, à partir de ce côté qui sera le petit côté, construire un triangle. L'infinité vient certainement pour elle du fait qu'elle envisage une infinité de positions possibles pour ce segment de 5 cm, côté d'un triangle convenable.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - SYL 4-15;04-5

6



De la vingtième à la vingt-septième minute, elle ébauche ou réalise cinq triangles que nous présentons sur la même figure (6). Tout d'abord, elle trace le triangle $M_1N_1P_1$, toujours avec une approximation de plusieurs millimètres, en plaçant le grand, le moyen et enfin le petit côté. Le premier segment est choisi au coup d'ceil compte-tenu de ses réalisations précédentes.

Elle trace ensuite les points P_2, N_2 et M_2 et le segment $N_2P_2 = 5$ cm, les points M_2, N_2 étant à 6 cm l'un de l'autre ; mais SYL s'arrête alors certainement parce que $M_2P_2 \neq 10$ cm.

Sans rien tracer, elle envisage un point M_3 sur le côté I V à 6 cm de P_2 et à 10 cm de N_2, mais s'aperçoit que ce n'est pas possible.

Elle prend en considération le point C_4 de la figure (4) ainsi que le segment A_4C_5 de la figure (5) ; elle trace alors le triangle $C_4A_4C_5$, pour lequel nous relevons une erreur de 4 millimètres sur le grand côté.

Elle trace enfin, toujours au coup d'ceil, mais avec une assez bonne approximation, le triangle $M_5N_5P_5$, avec $M_5P_5 = 10$ cm, M_5 étant certainement confondu avec P_1 ; puis $M_5N_5 = 5$ cm et enfin $P_5N_5 = 6$ cm.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - SYL 4-15;04-6

A la vingt-septième minute, l'élève déclare :

SYL - J'essaye de trouver un triangle qui ait pas le côté sur le côté du pentagone.

Elle envisage donc de chercher un triangle qui n'ait pas de côté contenu tout entier dans un côté du pentagone.
SYL réfléchit longuement, silencieusement.

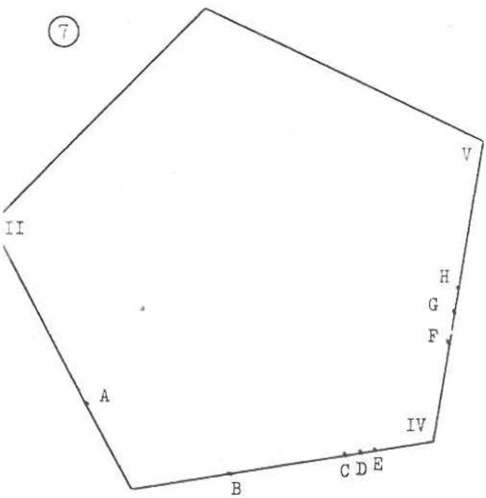
EXP - Tu n'oublies pas que ce qu'on te demande c'est le nombre de triangles.

Elle déplace souvent sa règle graduée sur la figure.

SYL - Un triangle avec simplement un sommet sur le côté.

A la trentième minute, elle cherche encore un triangle qui, sur chaque côté du pentagone où se trouve un de ses sommets, n'ait qu'un seul sommet.

7

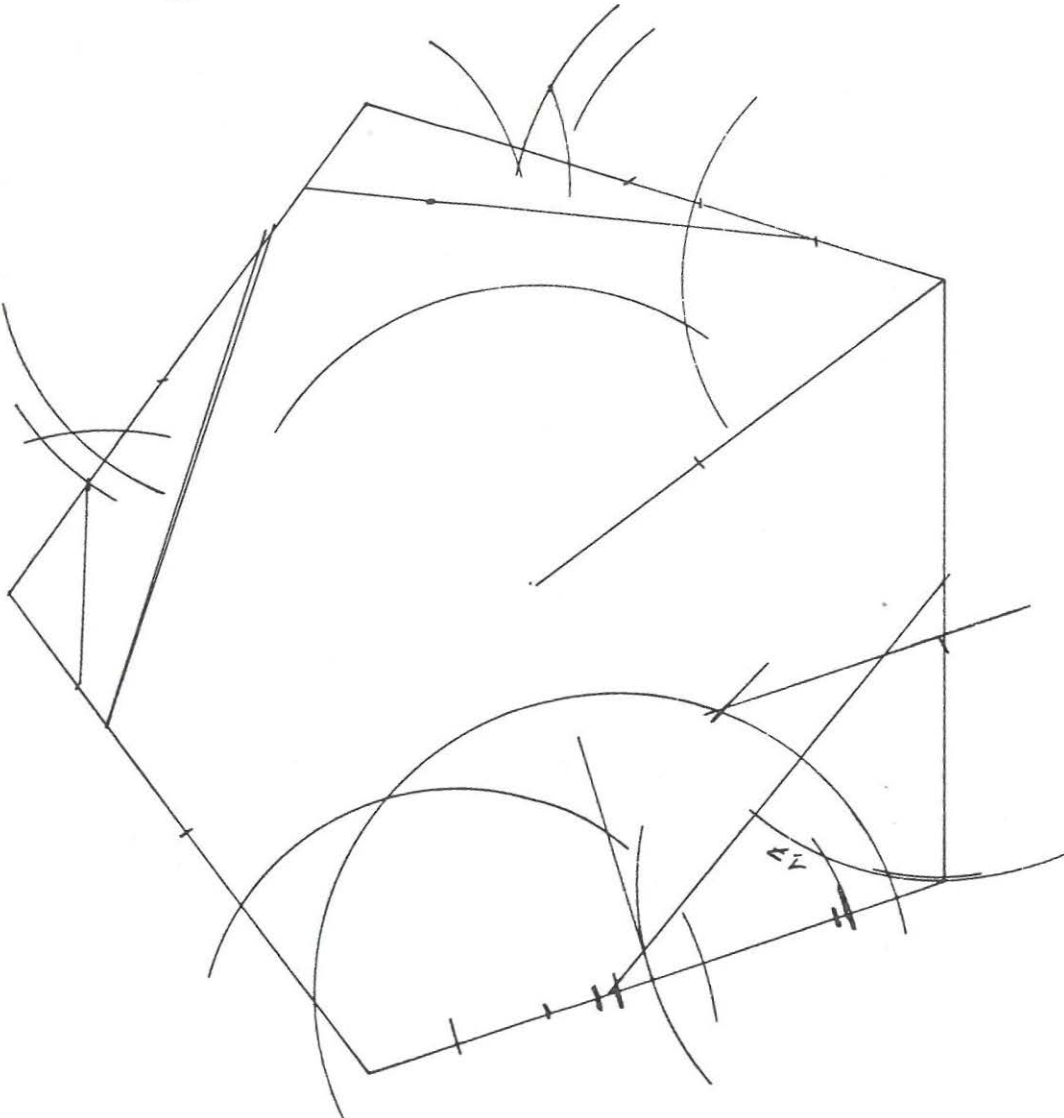


Elle réalise sa dernière figure 7 . Pour cela sur une nouvelle feuille elle place encore différents points, A, B, C, D, E, F, G, H, qu'elle choisit en faisant intervenir des distances égales à 5 cm, 6 cm ou 10 cm ; par exemple :
IV G = 5 ; IV H = 6 ; EF = 5 ; BD = 5 ; AB = 6 ; AC = 10.

A la fin de l'expérience, malgré la demande de l'expérimentateur, elle ne peut pas faire de pronostic sur le nombre cherché.

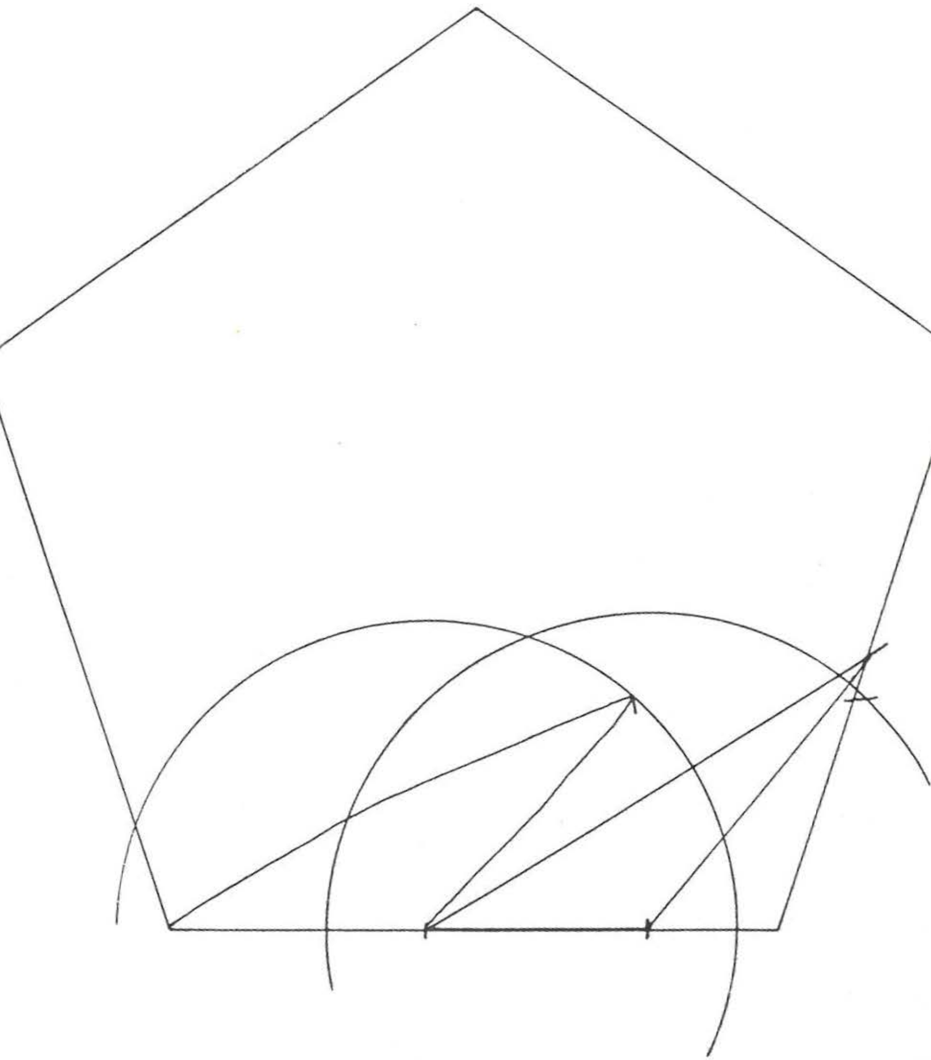
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-0[1]

(01)



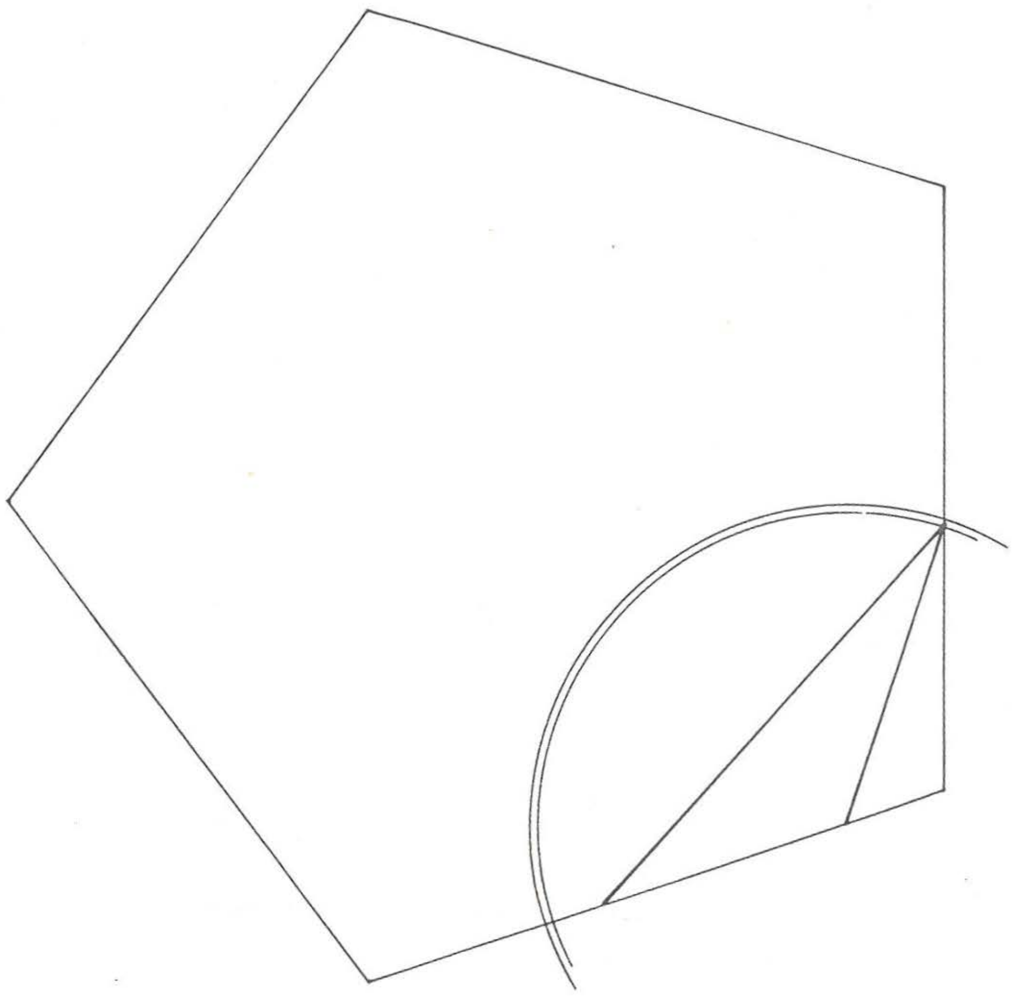
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-0²

(02)



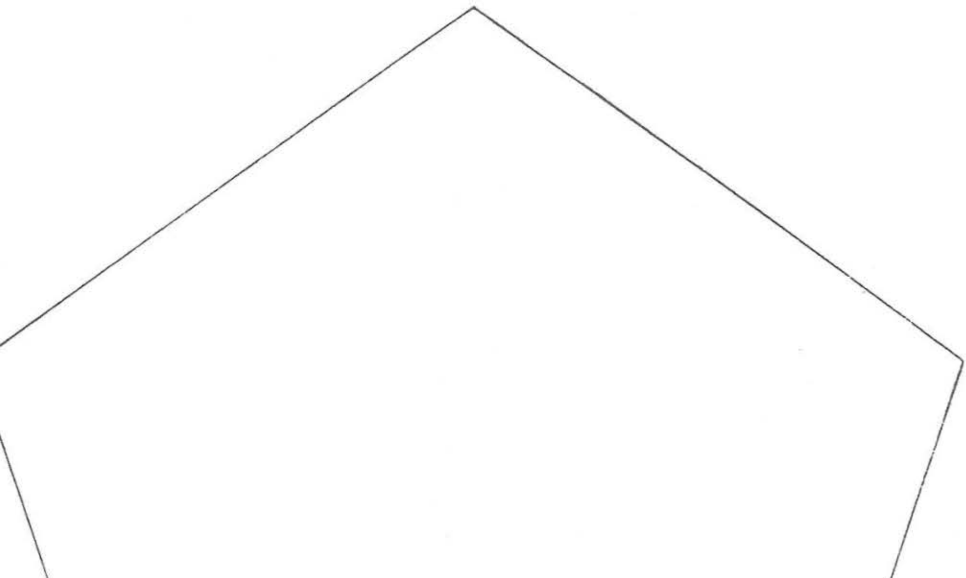
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-0^3

(03)



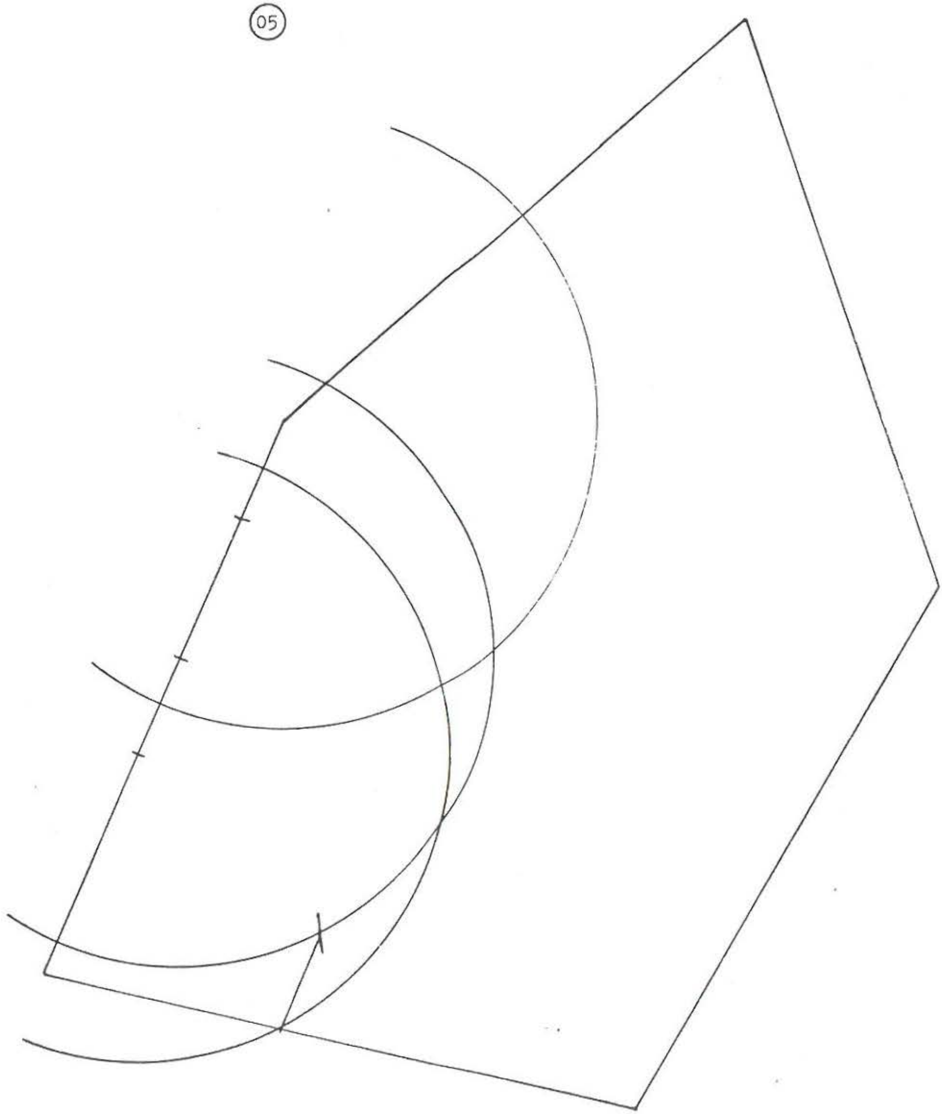
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-0^4

04



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY $3\text{-}15;02\text{-}0^5$

05



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-1

Expérimentateur - As-tu bien compris l'énoncé ?

KAY - ... un triangle qui ait ses sommets sur chaque côté du pentagone.

Dès la première minute l'élève répète à sa manière l'énoncé.

EXP - Non, il faut que les trois sommets soient sur le bord ; le bord c'est tout ça. C'est pas qu'un côté.

L'expérimentateur parcourt du doigt le bord du pentagone et il précise :

EXP - Mais ce qu'on demande c'est de trouver le nombre de triangles.

KAY - Y en a une infinité.

EXP - Ca peut être ta réponse. Est-ce que tu es sûre ?

KAY - Ben ! Ah non !

EXP - Pourquoi tu dis une infinité ?

KAY - Il me semble que si on place le triangle comme ça ; on le place incliné ; on peut le placer à un millimètre près.

Elle indique avec son doigt, sans rien tracer, la position d'un triangle que nous représentons par le triangle ABC en pointillés sur la figure 1 ci-contre. Nous interprétons sa dernière phrase comme voulant dire qu'en déplaçant ce triangle d'un ou deux millimètres, on obtient un autre triangle solution ; d'où son infinité de solutions annoncées plus haut.

EXP - Tu es sûre ?
Quand tu es sûre de ta solution, tu dis : maintenant j'en suis sûre, j'ai fini.

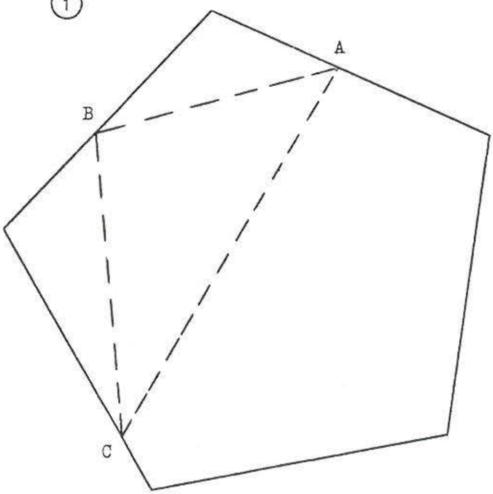
KAY continue à chercher.

KAY - Et c'est quoi la longueur des côtés ?

EXP - Tu peux le mesurer.

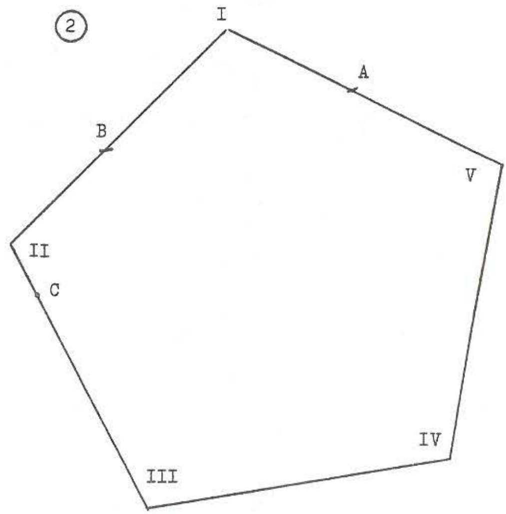
L'expérimentateur donne un double décimètre à l'élève.

1



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-2

2



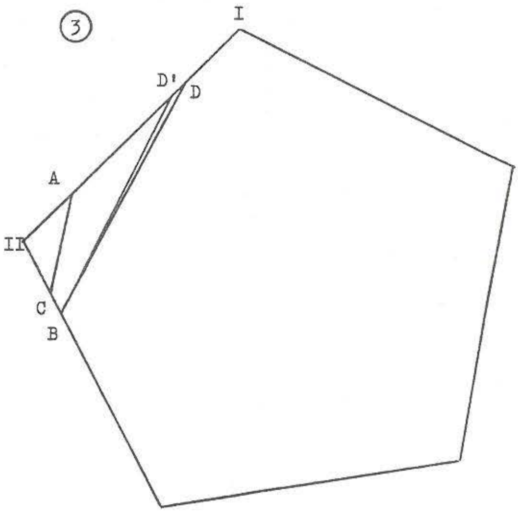
Elle réalise alors (2) à la deuxième minute. Nous rencontrons là ses premières mesures. Elle trace un premier point A sur le côté I V du pentagone et un deuxième point B sur I II à 10 cm de A. Elle trace ensuite un point C sur II III en prenant, semble-t-il, BC = 6 cm.

EXP - Et là, qu'est ce qu'il se passe ?

KAY - Là, ça rentre pas, c'est pas comme je pensais.

Elle vient de vérifier que la distance de C à A est de 14 cm ; elle n'a donc pas le triangle envisagé.

3



Elle réalise à la quatrième minute, le dessin (3) .

EXP - Qu'est-ce que tu as fait, là ?

KAY - Là, j'ai mesuré 5 cm.

Elle place un point A sur le côté I II du pentagone et un point B sur II III de telle sorte que AB = 5 cm.

KAY - Est-ce qu'un côté du triangle que vous m'avez demandé de chercher peut faire partie du côté du pentagone ?

Elle demande si elle peut placer un côté du triangle cherché sur un côté du pentagone.

EXP - Je réponds pas ; c'est toi qui trouves. C'est à toi de résoudre tous les problèmes? Je peux pas répondre.

KAY - Je peux les dessiner ?

EXP - Tu fais ce que tu veux, tout est autorisé.

Elle place alors un point D sur le côté

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-3

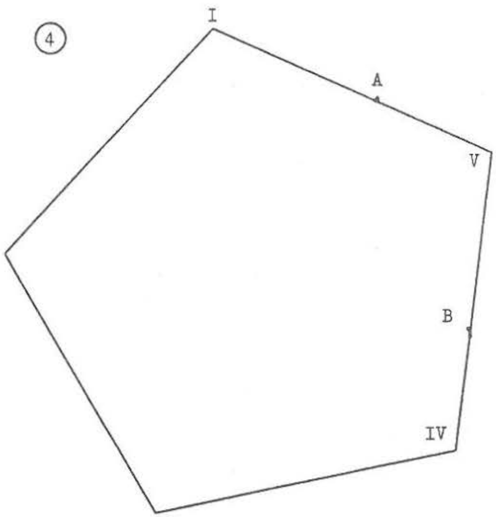
I II du pentagone, à 10 cm de B.
Elle joint BD, puis BD' où D' est un point voisin de B sur le côté I II du pentagone, car la distance BD' = 10 cm alors que le segment BD, un peu plus long, ne lui convient pas.
Elle trace alors le segment AC où C est le point obtenu dans son dessin (2) .

KAY - Ça va pas ici ; et ça fait pas 6.

Elle se rend compte qu'elle n'a pas un triangle puisqu'elle a joint AC et BD'. Elle constate de plus que la distance AD' n'est pas égale à 6 cm.

---

(4)

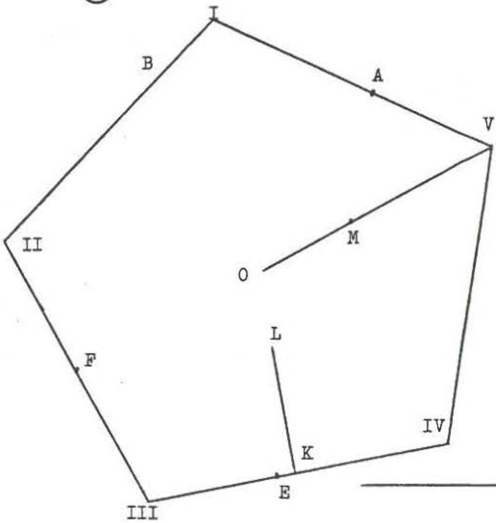


A la sixième minute, elle réalise la figure (4) ; pour cela elle place un point A sur le côté I V à 5 cm de V ; elle place ensuite un point B sur le côté V IV du pentagone à 10 cm de A. Mais elle constate alors que la distance VB n'est pas égale à 6 cm.

Elle manipule alors son double décimètre en lui donnant différentes positions sur son pentagone ; elle mesure plusieurs distances.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-4

5
6
7



Elle réalise à la septième minute la figure 5 . Pour cela elle trace un segment joignant le sommet V au milieu O du pentagone. Elle place sur ce segment un point M situé à 6 cm de V. Elle prend en considération le point A de la figure 4 qui se trouve à 5 cm de M, mais elle constate :

- Ca fait pas 10.

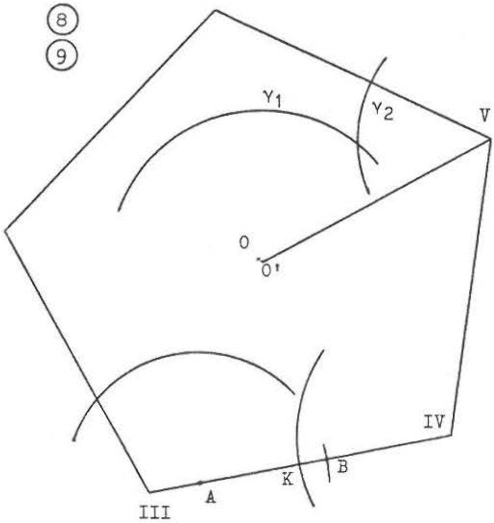
Le point A n'est pas à 10 cm de V.
Elle envisage de prendre un point B sur le côté I II du pentagone et situé à 10 cm de M, mais elle constate aussitôt que B ne pourra pas être à 5 cm de V.

Elle réalise alors la figure 6. Pour cela elle place un point E à 5 cm de III sur le côté III IV du pentagone ; puis elle place un point F sur II III, situé à 6 cm de III. Elle constate alors que la distance EF n'est pas égale à 10 cm.

A la onzième minute, KAY commence alors 7 . Pour cela elle choisit un point K sur III IV, placé à 6 cm de IV. Elle trace alors certainement, le segment KL, O étant dans le prolongement de KL, L étant à 5 cm de K. Puis elle laisse cette construction inachevée ; cela est du sans doute au fait que la distance L IV n'est pas égale à 10 cm.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-5

8
9



KAY - ... un compas.

L'expérimentateur donne un compas à l'élève. Elle réalise alors à la treizième minute sa figure 8 ; pour cela elle place un point A sur le côté III IV du pentagone, à 10 cm du sommet IV. Puis elle trace un arc de cercle, centré en A, de rayon 5 cm et qui coupe le côté III IV en B ; elle trace ensuite un arc de cercle, centré en IV, de rayon 6 cm qui coupe alors le côté III IV au point K, qu'elle avait déjà obtenu en 7 .

KAY - Ca marche pas.

KAY - ... qu'on pourrait mettre les triangles plats sur les côtés et puis que ...

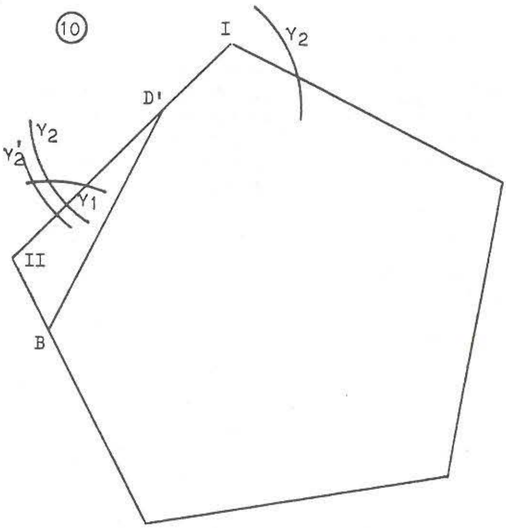
Elle se rend compte, avec une pointe d'humour, qu'elle aurait aimé avoir un triangle plat, sur le côté III IV qui soit solution.

KAY - De toute façon ça marche pas.

A la quinzième minute, elle réalise la figure 9 . Pour cela elle utilise le segment VO' qu'elle avait tracé sur la figure 5 ; O' est un point situé à moins d'un millimètre de O. Elle trace alors un arc de cercle γ_1 centré en O' et de rayon 6 cm ; puis un arc de cercle γ_2 centré en V, et de rayon 5 cm.
Elle n'en tire aucune conclusion. On peut remarquer que les deux rayons ont, en fait, pour longueur 5,15 cm et 5,8 cm.

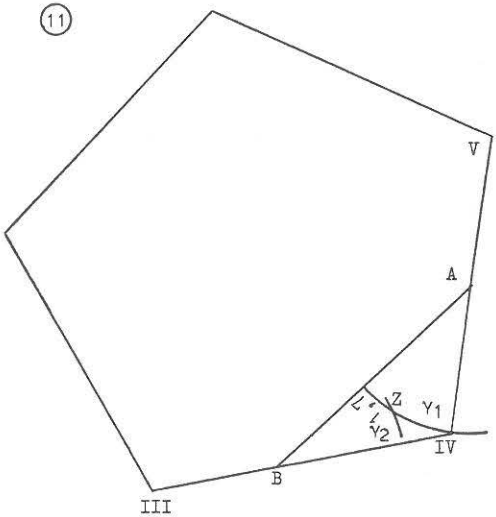
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-6

10



KAY réalise alors sa figure (10) . Pour cela elle prend en considération le segment BD' qu'elle avait tracé sur la figure (3) , ce segment mesurant 10 cm.
Elle trace alors un arc de cercle γ_1 de centre B et de rayon 6 cm (en fait le rayon est égal à 5,8 cm) ; puis elle trace un arc de cercle γ_2 de centre D' et de rayon 5 cm (en fait ce rayon est de 5,2 cm) ; elle a aussi tracé un arc de cercle γ'_2 de centre D' et de rayon mesurant très exactement 5,8 cm (elle a peut être voulu prendre 6 cm) mais ce dernier arc γ'_2 est pour elle une erreur ; elle n'en tient pas compte.

11



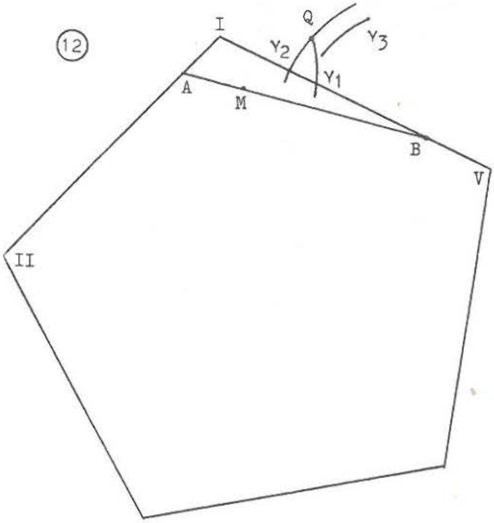
A la seizième minute, elle réalise la figure (11) . Pour cela elle place un point A sur le côté IV V du pentagone, à 6 cm de IV ; puis elle trace le segment AB = 10 cm, le point B étant sur le côté III IV. En fait IV A = 5,9 cm et AB = 10,5 cm.
Elle construit ensuite un arc de cercle γ_1 de centre A et de rayon 6 cm ; puis elle trace un arc de cercle γ_2 de centre B et de rayon 5 cm.

EXP - Qu'est-ce que tu en penses ?

KAY - ... ce sera toujours relatif, ces points seraient toujours à la même distance.

KAY veut dire que le point Z, intersection des deux arcs γ_1 et γ_2, aura toujours la même position relativement du grand côté du triangle.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-7



KAY - Là, je mesure ça.

KAY mesure la distance du point Z au côté AB. Elle trouve 1,7 cm, ce qu'elle note sur sa feuille.
Elle réalise alors la figure 12 à la dix-neuvième minute.

KAY - De là, je mesure 1,7 cm.

KAY place le point M à 1,7 cm du sommet I du pentagone. En fait IM = 2,2 cm.

KAY - Maintenant, je vais essayer de tracer un segment qui mesure 10 cm en passant par ce point.

Elle trace donc un segment AB, passant par le point M ; le point A est sur I II et le point B sur I V.

Elle trace ensuite deux arcs de cercle γ_1 et γ_2 centrés respectivement en A et B, avec comme rayons 5 et 6 centimètres ; elle marque Q, le point d'intersection de ces 2 arcs. L'autre arc γ_3 qu'on aperçoit à proximité correspond à une erreur de traçage.

EXP - C'est pas trop pénible ?

KAY - Ben !

EXP - Tu pensais que c'était plus facile ?

KAY - Ben oui, parce qu'on nous avait dit que c'était des exercices qu'on faisait faire en CM2 ; enfin, en sixième.

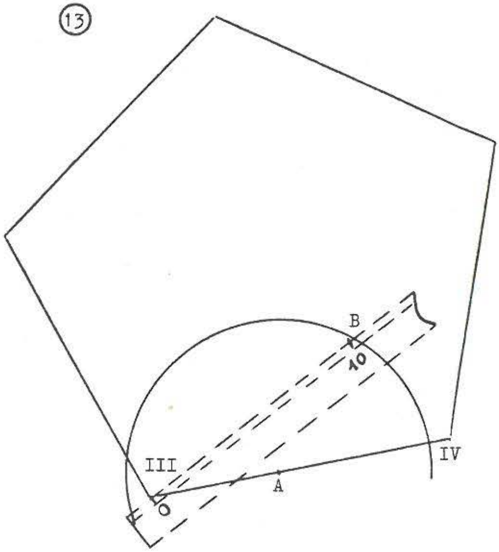
EXP - Oh non ! Ce sont des exercices qu'on fait faire en sixième, mais on les fait faire aussi à des élèves de terminale. Alors tu es en plein au milieu, tu es tranquille !

EXP - Si tu veux une autre feuille, tu peux la demander.

KAY - Ca va, parce que là j'ai déjà des repères.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-8

13

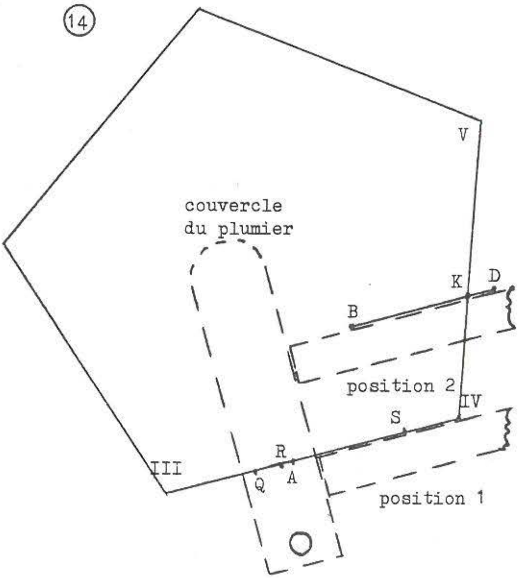


A la vingt-deuxième minute elle réalise la figure 13 . Pour cela elle prend un point A sur le côté III IV à 5 cm de III. Elle trace ensuite un arc de cercle centré en A et de rayon 6 cm (en fait ce rayon est égal à 5,8 cm).
Puis elle place sa règle graduée de telle sorte que le zéro de cette règle reste constamment en contact avec III et elle déplace cette règle jusqu'à ce que la graduation 10 de la règle soit en contact avec l'arc de cercle. Elle marque alors un point B.

KAY - Je le prends parallèle.

KAY veut donc construire une parallèle à III IV passant par le point B.

14



Pour cela, comme nous l'indiquons dans la figure 14 elle va se servir du couvercle de son plumier et de sa règle graduée comme d'une règle et d'une équerre. Elle réalise sa figure 14 à la trente-cinquième minute. Elle place sa règle en position 1 le long du côté III IV, puis son couvercle de plumier perpendiculairement, bord à bord avec la règle en position 1. Elle fait ensuite glisser sa règle le long du plumier qui reste fixe, jusqu'à ce que le bord de la règle passe par le point B précédemment trouvé. Le long de la règle en position 2, elle trace le segment BD qui coupe le côté IV V du pentagone en K. Elle mesure alors la distance BD.

KAY - Alors je vais le reporter là à partir de ça.

Elle place le point Q sur III IV.

KAY - Je crois que je me suis trompée en calculant ça.

En effet, III Q $\neq$ BK, puisque III Q = 3,7 cm alors que BK = 4,7 cm. Elle rectifie en

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-9

plaçant les points R et S tels que III R = 4,7 cm et AS = 4,7 cm, tandis que l'expérimentateur lui demande :

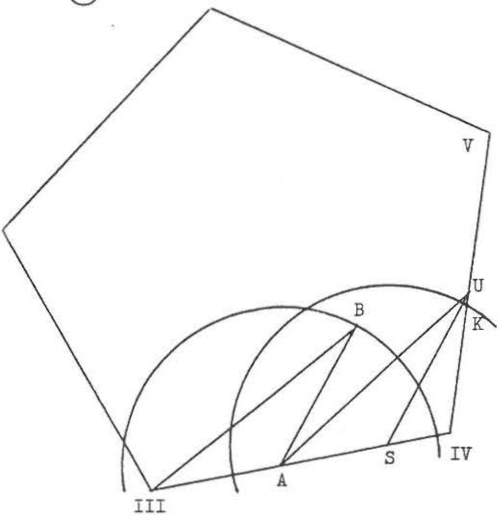
- Remarque, si tu veux le refaire comme il faut, ça m'arrange un peu, parce que après ...

KAY - Vous la regardez la feuille, après ?

EXP - Eh oui !

KAY - Si j'avais su je la changeais plus tôt.

15



Elle prend donc une autre feuille et va essayer de reconstituer sur la figure 15 à la vingt-septième minute, ce qu'elle vient de réaliser en 13 et 14 , en utilisant encore plumier et règle plate. Elle trace donc A tel que III A = 5 cm. Puis elle dessine l'arc de cercle de centre A et de rayon 6 cm. Après une hésitation elle construit B sur cet arc à 10 cm de III. Puis elle trace le point K comme en 15 . Elle mesure BK et construit S tel que AS = BK.
Elle prend ensuite un point U sur le côté IV V du pentagone tel que AU = 10 cm, et trace le triangle AUS.
Elle n'est pas du tout satisfaite.
Elle dessine encore l'arc de cercle de centre S et de rayon 6 cm (en fait ce rayon mesure 5,8 cm).
Elle réfléchit, elle vérifie.

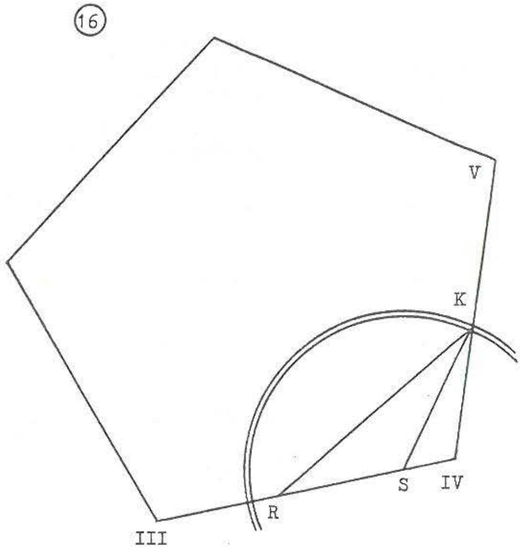
KAY - Oh, mais c'est là ! Je me suis trompée.

EXP - Explique -moi.

KAY - J'ai voulu décaler de 4,7 cm ; je suis partie de ce point au lieu de partir de là.
Je décale de 4,7 cm, puis après je calcule 5 cm.

Elle constate que son point A comme sommet du triangle est un mauvais choix Elle va donc choisir un point R à 4,7 cm de III puis un point (qui sera d'ailleurs le point S) à 5 cm de R.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-10



Elle réalise donc sa figure 16 à la trente-quatrième minute, sur une 3ème feuille. Et là, très rapidement, puisqu'elle connait le 4,7 calculé précédemment, elle trace le point R, puis le point S, tels que III R = 4,7 cm et RS = 5 cm, puis le cercle de centre S et de rayon 6 cm qui lui donne le point K ; elle dessine alors le triangle RSK qui est un triangle cherché. Elle s'y reprend à deux fois pour tracer le cercle qui ne lui paraît pas correct la première fois.

A la trente-cinquième minute,

KAY - Je peux en placer un, deux, trois, quatre, cinq.

Elle montre qu'elle peut placer le petit côté du triangle sur les 4 autres côtés du pentagone.

EXP - C'est ta réponse ?

KAY - Oui.

Quelques secondes après.

KAY - Attendez !
Je peux en placer plus de cinq, je peux en placer dix.

EXP - Comment ?

KAY - Je peux mettre ça de l'autre côté et la pointe ici.

Elle indique sur sa figure 16 , sans rien dessiner qu'elle peut placer le petit côté de 5 cm sur le côté IV V du pentagone et mettre le sommet opposé sur le côté III IV du pentagone. Et ainsi elle aura deux triangles sur chaque côté.

KAY - ... deux sur chaque côté.

Elle marque 10 dans le carré réservé à la réponse à la trente-huitième minute.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - KAY 3-15;02-11

L'expérimentateur lui propose alors le deuxième pentagone aplati et symétrique.

EXP - Peux-tu donner une réponse rapide, instinctive, de chic.
Précédemment tu as dit dix. Et là y en a dix ou y en a pas dix ?

KAY - Oui y en a dix.

EXP - Tu es sûre ?

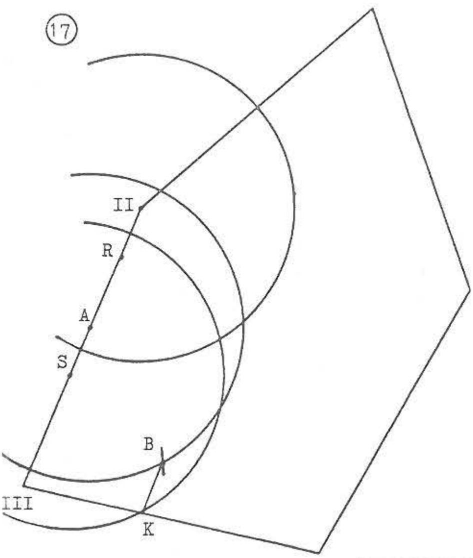
KAY - J'ai des doutes.

EXP - Quels doutes ?

KAY - Parce que celui-là, ce côté, était plus petit que les autres, il me semblait que je pouvais pas le placer ; en fait, les triangles je les mettais les uns sur les autres, je pourrais en mettre dix ; ça revient au même.

Elle ne dessine rien !

17



L'expérimentateur lui propose le troisième pentagone allongé, à côtés égaux, à la quarantième minute.

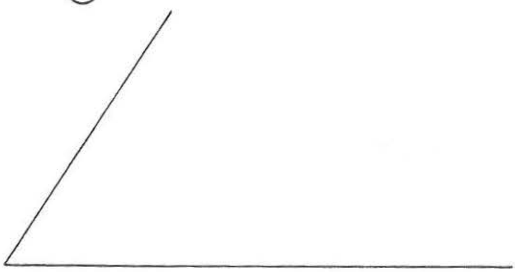
KAY - Celui-là, je sais pas.
Là aussi on peut en placer 10.
Ils seront beaucoup plus penchés.
Je préfère essayer.

N'étant pas tout à fait sûre, elle veut dessiner et réalise la figure 17 en utilisant sa méthode mise au point en 13 et 14 . Elle construit donc successivement sur le côté II III du pentagone allongé, ce côté étant placé "horizontalement", le point A à 5 cm de II ; puis deux arcs de cercle de rayons 6 cm, l'un centré en II qui ne lui sert à rien, l'autre centré en A.
Elle place le point B sur ce dernier cercle à 10 cm de II. Puis elle trace BK, la parallèle à II III ; mesure BK qui est égal à 2 cm. Trace les points R et S à 2 cm respectivement de II et A. Elle vérifie que le cercle centré en S et de rayon 6 cm passe par le point K.

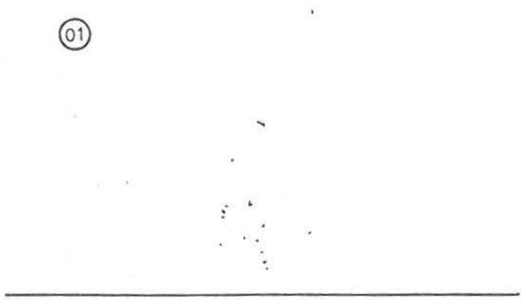
KAY - Je crois qu'il y en a dix.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-0[1]

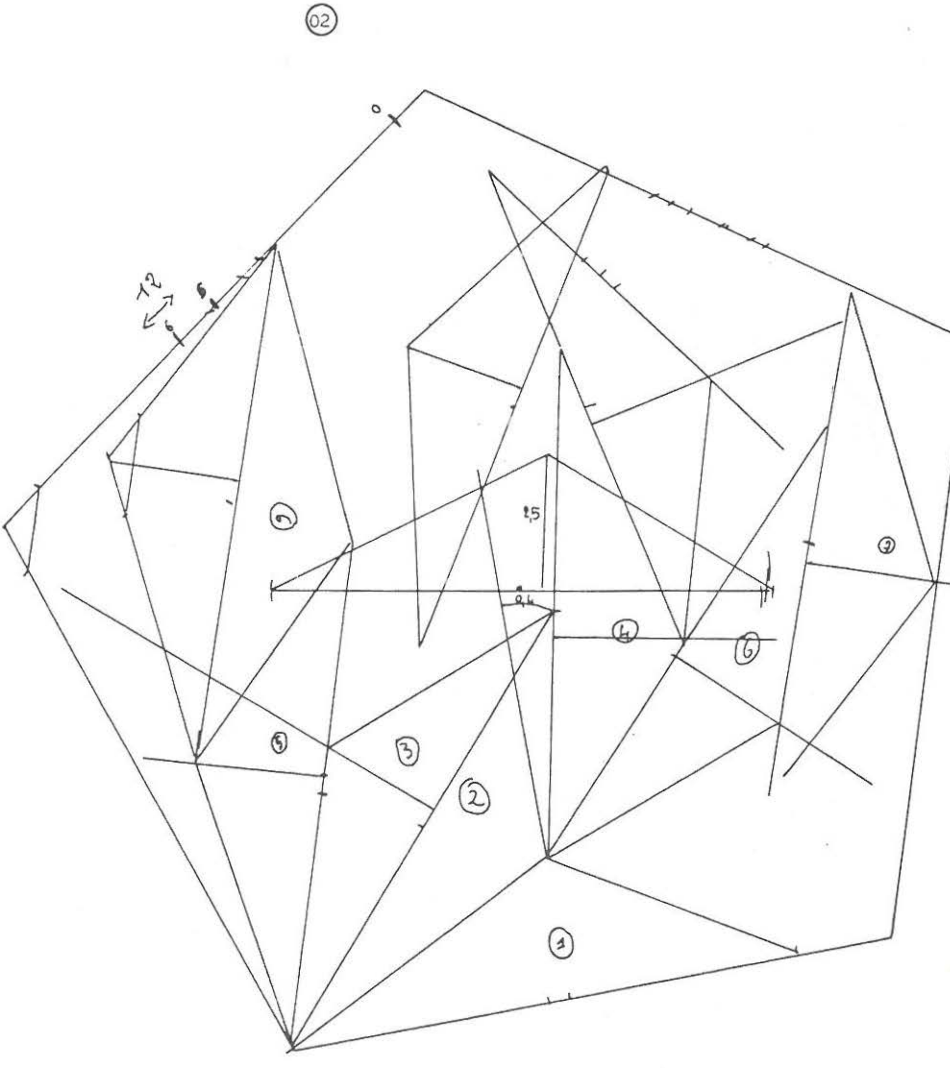
0



01

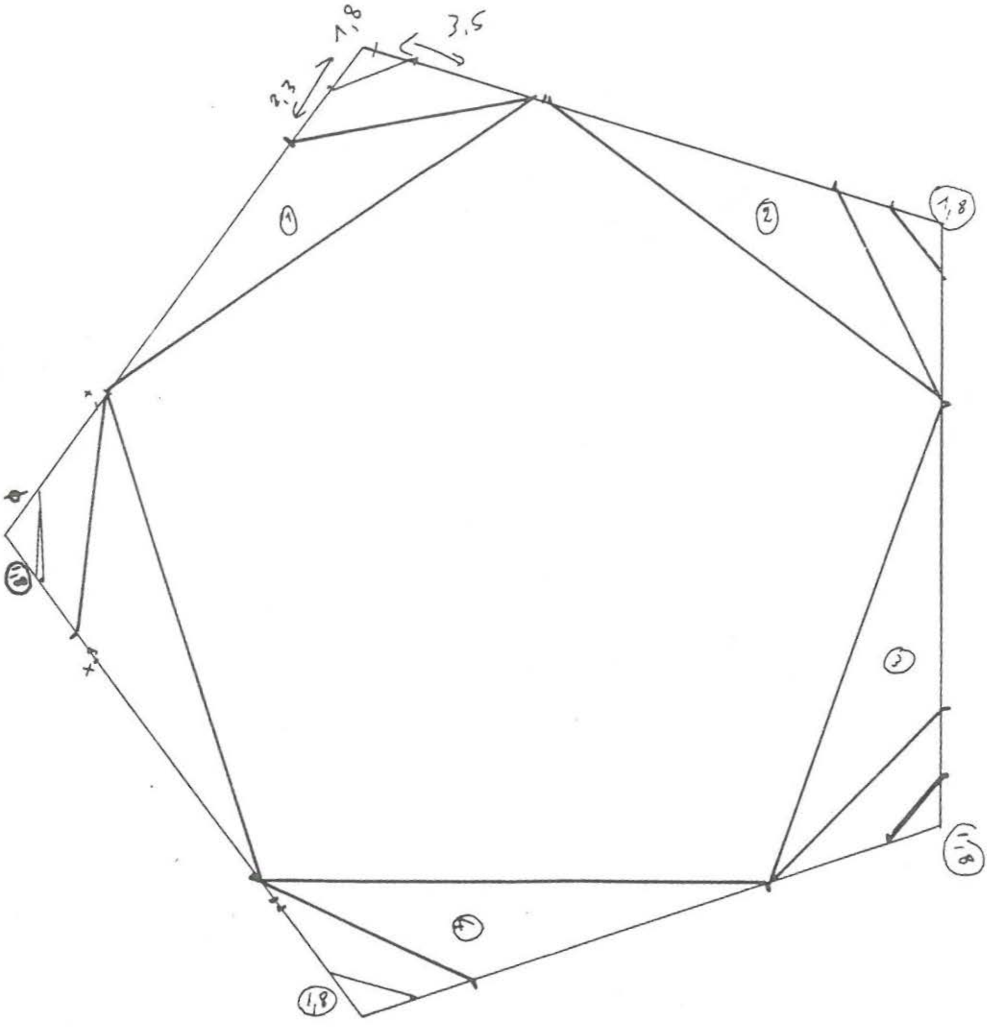


PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV $3\text{-}16;00\text{-}0^2$



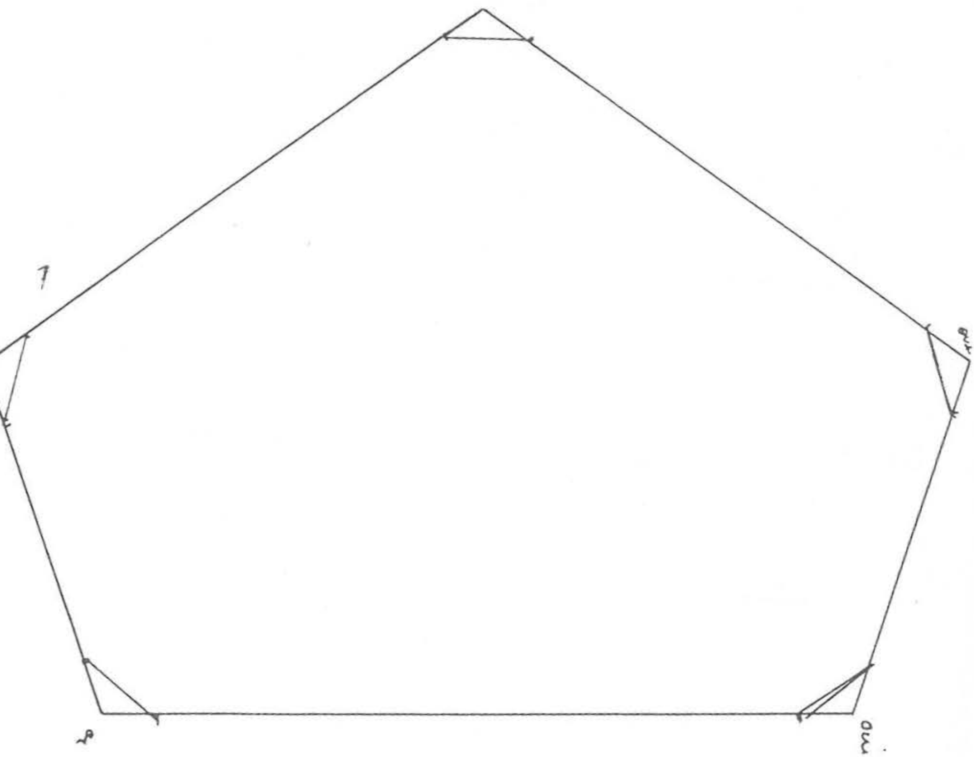
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-0^3

(03)



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV $3\text{-}16;00\text{-}0^4$

04



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-1

Dès le début PYV demande une règle graduée. Il mesure quatre côtés du pentagone.

Expérimentateur - Qu'est-ce que tu faisais là ?

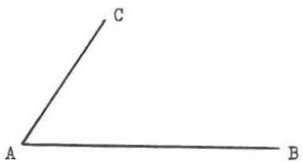
Elève - Là, je mesurais les côtés pour voir s'il y en a un qui va avec une de ces trois mesures.

Il essaye donc de savoir si un des côtés du pentagone mesure 5,6 ou 10 cm.

PYV - Ca tombe pas juste.

La réponse à la question qu'il s'est posée est donc négative.
PYV demande un brouillon que l'expérimentateur lui fournit.
Il réalise alors sa première figure, notée 1 ; pour cela il trace un segment AB horizontal de 10 cm, puis un deuxième segment AC de 6 cm ; il trouve alors que ça ne marche pas. En effet, CB est égal à plus de 8 cm.

1



Il recommence un autre dessin ; c'est sa réalisation 2 . Il trace tout d'abord un segment AB = 10 cm. Puis il cherche à placer un point O devant se trouver à 6 cm d'une extrémité et à 5 cm de l'autre. Il trace dans ce but plus d'une dizaine de points.

PYV - J'arrive pas à trouver le point qui fasse 6 d'un côté et 5 de l'autre.

PYV n'arrive pas à trouver le 3ème sommet du triangle cherché.
A la troisième minute, il abandonne.

2

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-2

PYV - C'est au millimètre près, là ?

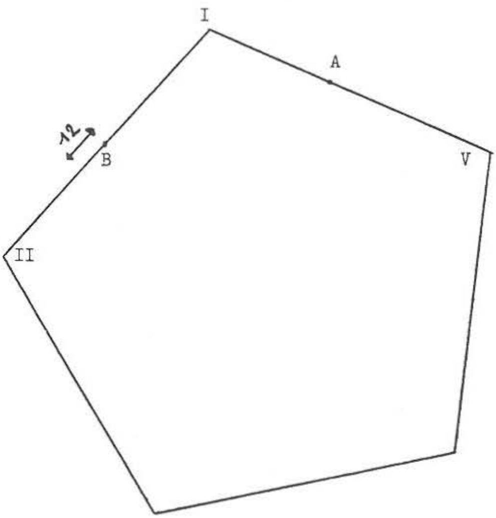
L'élève demande quel degré d'approximation il doit utiliser.

EXP - C'est toi qui choisit. Tu fais ton problème comme tu veux.

PYV - On me demande si le triangle, il touche l'un des bords.

L'expérimentateur, en réponse, demande à PYV de bien relire l'énoncé. L'expérimentateur relit lentement l'énoncé en insistant bien sur le nombre 3.

3



PYV réalise son dessin (3) ; pour cela il prend un point A sur le segment I V à 5 cm de I, puis un point B sur I II à 6 cm de I.

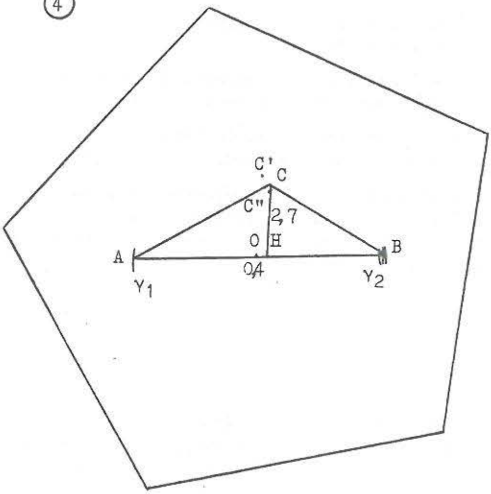
PYV - Si ça faisait 10, c'était bon !

PYV s'aperçoit que AB $\neq$ 10 ; il constate donc qu'il n'a pas la solution cherchée.

Il mesure encore un côté du pentagone qui, pour lui, est égal à 12 cm (au lieu de 11,8) ce qu'il note sur sa feuille.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-3

4



A la sixième minute l'élève demande un compas. Il réalise alors sa figure (4); pour cela il donne au compas un écartement de 10cm, puis de 5 cm. Il trace alors deux petits arcs de cercle γ_1 et γ_2, le centre de ces arcs de cercle étant le centre du pentagone, le rayon étant égal à 5 cm, le tracé de ces arcs n'est pas net. Il trace ensuite un segment AB horizontal et centré en O, le centre du pentagone. Ce segment est égal à 10 cm, à 2 mm près. Il choisit alors un point C à 6 cm de A et à 5 cm de B, mais pour cela il n'utilise que le double décimètre.

EXP - Et ton sommet (le point C), comment fais-tu pour le trouver ?

PYV - En regardant comme ça, à peu près, au hasard.

C a donc été construit comme (2) ; on remarque d'ailleurs 2 autres tentatives donnant des points C' et C" qui n'ont pas satisfait l'élève.
PYV trace ensuite la hauteur CH. Il mesure OH et trouve 0,4 cm. Il mesure ensuite HC et trouve 2,7 cm. Il note ces mesures sur son dessin (4).

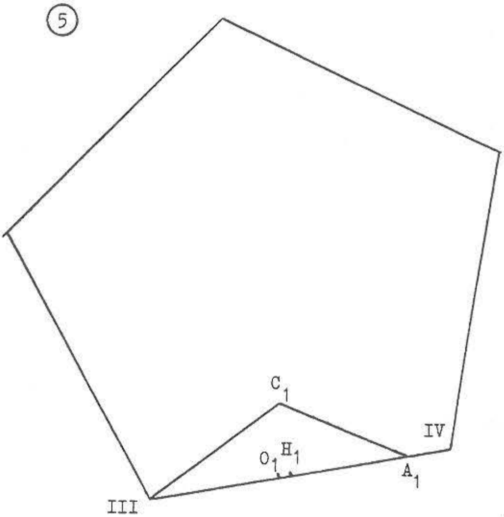
PYV - Je vais le tracer comme ça.

Il envisage donc de reproduire ce dernier triangle.
A la dixième minute, il réalise son dessin (5) ; pour cela il place le point A_1 sur le segment III IV, à 10 cm de III, il place alors O_1, le milieu de III A_1, puis H_1 à 0,4 cm de O_1.

PYV - Vous avez une équerre, s'il vous plait ?

PYV place alors le point C_1 à 2,7 cm de H_1 sur la perpendiculaire en H_1 à III IV.

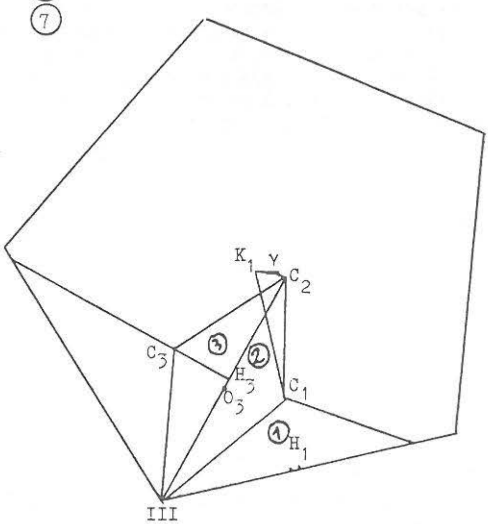
5



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-4

6

7



A la douzième minute, il réalise 6 ; pour cela il prolonge le segment H_1C_1 de 5 cm. Il obtient le point K_1 ; mais comme K_1 n'est pas à 10 cm de III, il trace à la main un petit arc γ qui l'amène en un point C_2 tel que C_2 III = 10 cm et C_2C_1 = 5 cm. Il a donc obtenu un triangle IIIC_2C_1 dont les côtés mesurent bien, comme il le vérifie, respectivement 10, 6 et 5 cm.

Il construit alors un nouveau triangle dont le grand côté est III C_2 ; c'est sa réalisation 7 .
Pour obtenir ce triangle, il prend le milieu O_3 de III C_2, puis H_3 à 4 mm de O_3. Sur la hauteur tracé avec l'équerre issue de H_3, il porte un segment H_3C_3 égal à 2,7 cm, selon lui (en fait H_3C_3 = 2,4 cm).

Il numérote ensuite ses trois derniers triangles : 1 , 2 , 3 .
Nous avons représenté ensemble nos dessins 6 et 7.

Il relit encore une fois l'énoncé et souligne le nombre 3 qui s'y trouve en disant :

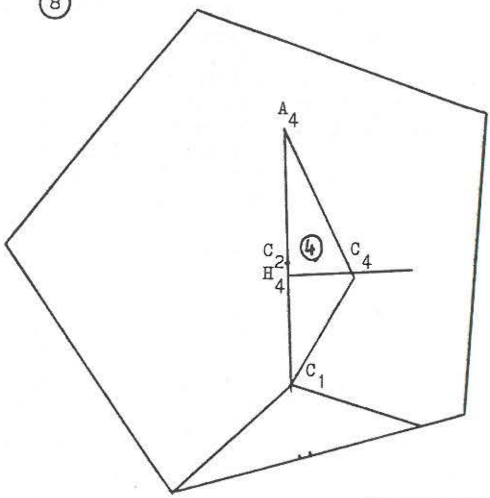
PYV - ... les trois sommets ... En les traçant tous ... Si j'arrive à les tracer tous, après j'aurais qu'à voir avec lesquels j'ai les 3 sommets.

Sa méthode consiste donc à tracer "tous" les triangles puis à observer quels sont ceux qui ont leurs 3 sommets sur le bord ; il aura alors la réponse à la question.

PYV - Je continue.

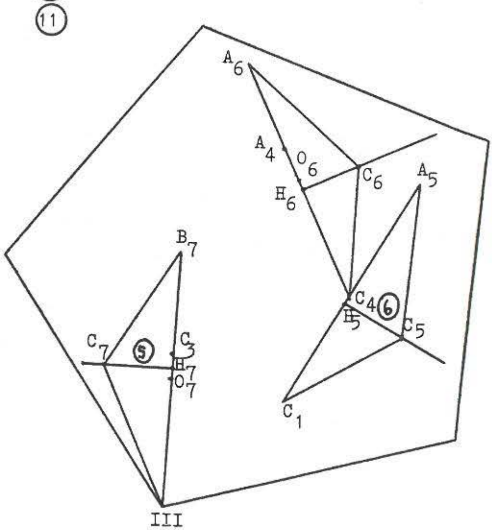
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-5

8



Il réalise alors la figure 8 ; pour cela il porte sur la droite C_1C_2 un segment C_1A_4 = 10 cm, puis il prend C_2 comme milieu de ce segment et H_4 à 4 mm de C_2 (en fait C_2H_4 = 5 mm). Il place C_4 sur la hauteur issue de H_4, à 2,5 cm de H_4. Il donne le numéro 4 à ce triangle $C_1A_4C_4$.

9
10
11

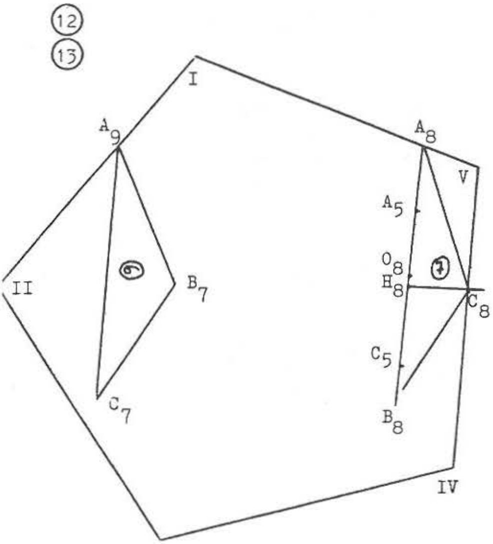


Il continue à construire sa mosaïque. Pour cela il réalise la figure 9 qui est le cinquième triangle de cette mosaïque. Le grand côté de ce triangle est porté par la droite C_1C_4 et nous l'appellerons C_1A_5 ; il place ensuite H_5 puis la hauteur et enfin C_5.

Son sixième triangle constitue la figure 10 ; le grand côté C_4A_6 est porté par la droite C_4A_4 ; il trace O_6 et H_6, puis C_6 selon la même méthode de construction.

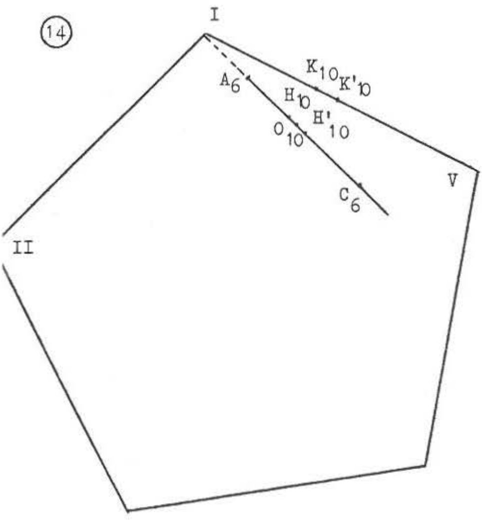
Son septième triangle est la réalisation notée 11 ; le grand côté est porté par la droite III C_3, nous le notons III B_7 ; il trace ensuite O_7, H_7, C_7 toujours selon la même méthode.
Ce dernier triangle numéroté 5 par l'élève, tandis que le triangle de notre figure 9 est noté 6 . Il ne numérote pas son sixième triangle dont nous avons décrit la construction en 10 .
Nous représentons ci-contre les figures 9 , 10 , et 11 dans un même pentagone.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-6



A la vingt-deuxième minute, sa réalisation (12) consiste à construire un triangle dont le grand côté A_8B_8 est porté par la droite A_5C_5 ; l'élève le dispose de telle sorte que A_8 soit sur le côté I V du pentagone ; il construit alors la hauteur à partir de O_8, H_8 ; ce qui le conduit au point C_8 qui est pratiquement sur le côté IV V du pentagone.

Pour sa réalisation (13), il place un point A_9 sur le côté I II du pentagone de telle sorte que $A_9C_7B_7$ soit un triangle égal au triangle proposé. Il donne le numéro (6) à ce dernier triangle et le numéro (7) au précédent.
Nous représentons ces 2 réalisations (12) et (13) sur la figure ci-contre.

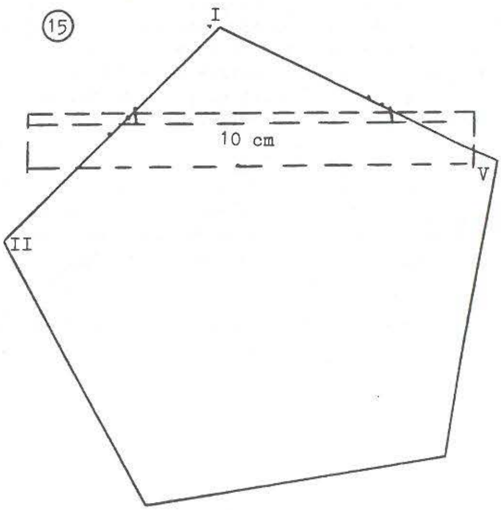


Il réalise la figure (14) en prenant comme grand côté un segment porté par la droite A_6C_6 ; ce grand côté doit avoir une de ses 2 extrémités sur le côté I II du pentagone ; il fixe O_{10} le milieu de ce grand côté et place H_{10} ; mais alors il s'aperçoit que la hauteur issue de H_{10} coupe le côté I V du pentagone en un point K_{10} qui est à une distance de H_{10} nettement inférieure à 2,5 cm ; il prend donc le point H'_{10} symétrique de H_{10} par rapport à O_{10}, mais là encore, la hauteur coupe I V en K'_{10} et $H'_{10}K'_{10} < 2,5$.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-7

---

(15)



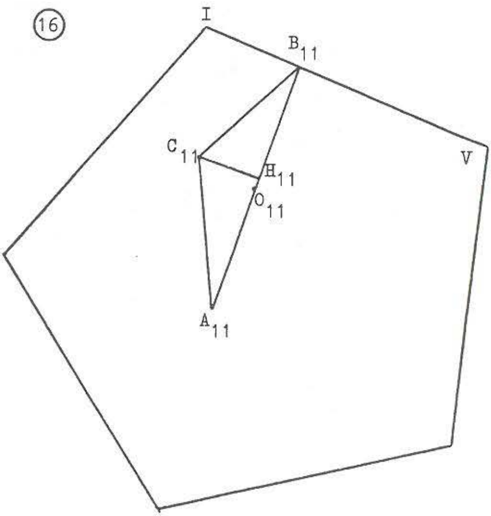
Un peu plus tard, il pose sa règle en travers des côtés I II et I V du pentagone comme l'indique la figure (15) ci-contre, puis il la déplace en la faisant légèrement pivoter. Il met la règle dans des positions telles que les 2 points d'intersection du bord de la règle avec les 2 côtés I II et I V soient à 10 cm l'un de l'autre. Nous retrouvons ces paires de points distants de 10 cm sur les côtés I II et I V.

PYV - Ca peut pas tenir dans le même angle parce que celui là il est plus pointu.

Il se rend compte que le grand angle du triangle ne peut pas être confondu avec l'angle de 2 côtés consécutifs du pentagone car ce dernier est plus petit.

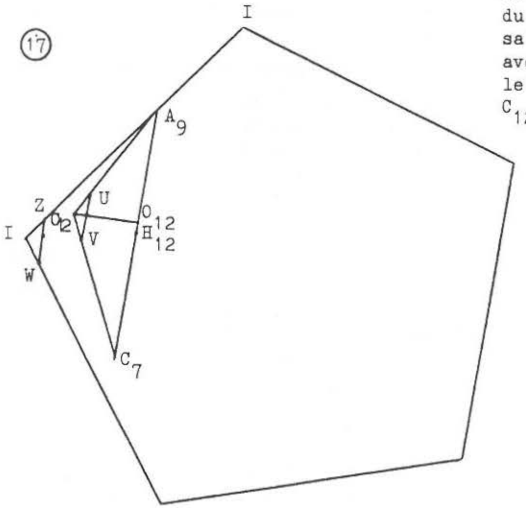
---

(16)



Il trace ensuite un triangle $A_{11}B_{11}C_{11}$; c'est sa réalisation (16) ; B_{11} est pris sur le côté I V du pentagone ; le triangle est tracé une fois choisi $A_{11}B_{11}$ au moyen du milieu O_{11} de ce segment et de la hauteur $H_{11}C_{11}$.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-8



Il construit un nouveau triangle à partir du côté C_7A_9 de notre figure (13) ; c'est sa réalisation (17) . Il trace toujours avec la même technique le milieu O_{12}, le pied de la hauteur H_{12}, puis le sommet C_{12}.

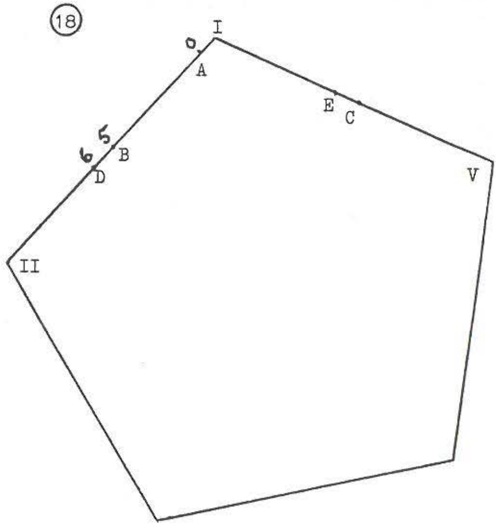
EXP - Qu'est-ce que tu fais ?

PYV - Je regarde pour voir si c'est le même angle. J'ai pris 1 cm de chaque côté ; et j'ai mesuré de là à là ... Comme c'est pas pareil, ça tient pas.

PYV a tracé les points U, V tels que $C_{12}U = C_{12}V = 1$ cm, puis les points W, Z tels que II W = II Z = 1 cm, et comme UV $\neq$ WZ il en conclut que le grand angle du triangle ne peut pas être confondu avec l'angle de 2 côtés consécutifs du pentagone.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-9

(18)



A la trentième minute, il envisage une autre possibilité.

PYV - Je vais essayer autre chose.

Il passe à sa réalisation (18) .
Pour cela il place deux points sur le côté I II. Ces points A et B sont à 5 cm l'un de l'autre. Il note 0 en A et 5 en B. Il envisage de placer le 3ème sommet sur le côté I V du pentagone et ajoute :

- Si ça c'est juste alors tout ça c'est faux.

Il veut dire que si cette nouvelle méthode conduit au résultat alors tout ce qui précède est "faux".

PYV - Si j'arrive à trouver le même angle : si j'arrive à trouver le six ici, ces trois seront sur le truc.

Il pense qu'il obtient bien la solution s'il arrive à trouver un point C sur I V à 6 cm de A. Il parle aussi de l'angle $\widehat{BAC}$.

PYV - J'avais pas pensé au cas où ils seraient les deux sur le même.

L'élève précise qu'il n'avait pas envisagé, dans sa recherche jusqu'ici, le cas où deux sommets du triangle se trouveraient comme A et B sur un même côté du pentagone.

PYV - On va prendre dix.

Il chosit alors le point C sur le côté I V à 10 cm de B.

PYV - Je regarde, ça fait pas six.

Il constate alors que AC ne mesure pas 6 cm.

PYV - Bon ! Je vais essayer de prendre 6 sur ce côté.

Il choisit alors un 3ème point D sur le côté I II, de telle sorte que AD = 6 cm.

PYV - ... 10 cm là.

Il place alors sur le côté I V un point E situé à 10 cm de D. Il constate alors qu'il manque $\frac{1}{2}$ cm entre A et E.

PYV - Donc ça s'est rapproché, peut-être qu'en baissant un peu ...

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-10

Il parle certainement de descendre un peu le point A le long du côté I II.
En fait, il ne s'est rendu compte qu'il cherchait à obtenir 6 cm pour deux côtés AD et AE de son triangle ADE.

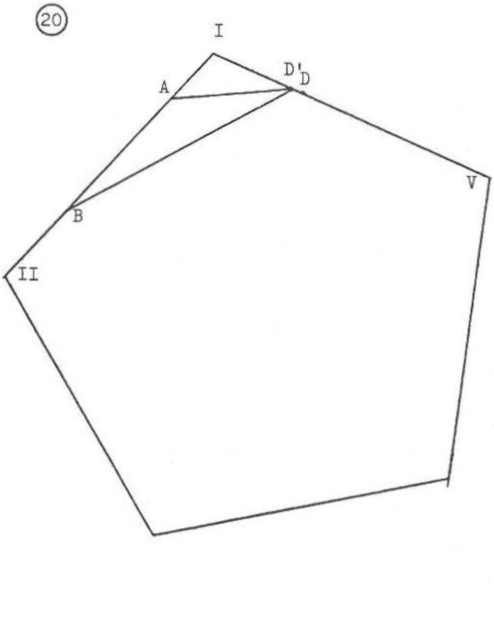
EXP - Veux-tu une autre feuille ?

PYV - Non, non ça va ...
Ouais, ouais...

Il prend une nouvelle feuille.

---

(20)



A la trente-deuxième minute, il réalise la figure (20) . Il procède par tâtonnement en se fiant un peu au travail qu'il a réalisé en (18) .

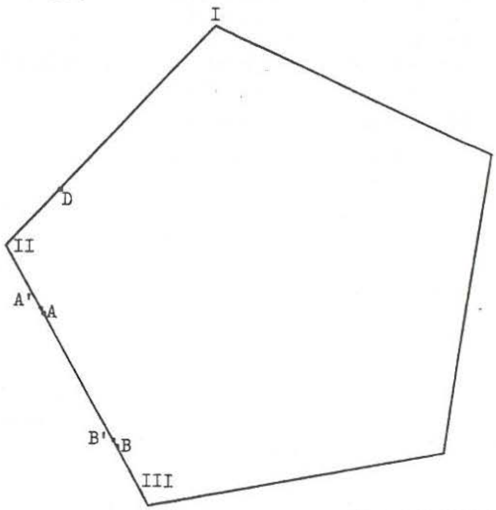
PYV - Je vais prendre le bord ; six là ;
je vais calculer le cinq directement ;
et le dix arrive là, à un millimètre près, c'est ça.

Il place donc un segment AB = 6 cm sur le côté I II du pentagone, la position de ce segment n'a pas été déterminée quantitativement ; elle semble provenir simplement d'une amélioration de la situation étudiée en (18) .
PYV place ensuite un point D sur I V, à 5 cm du point A. Il mesure BD et trouve qu'il a bien 10 cm à quelques millimètres près. Il joint B à un point D' tel que BD' = 10 cm (DD' = 0,3 cm) et achève de tracer le triangle ABD'.

PYV - C'est bon.
En voilà 1.
Bon, alors je vais essayer sur ce côté.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-11

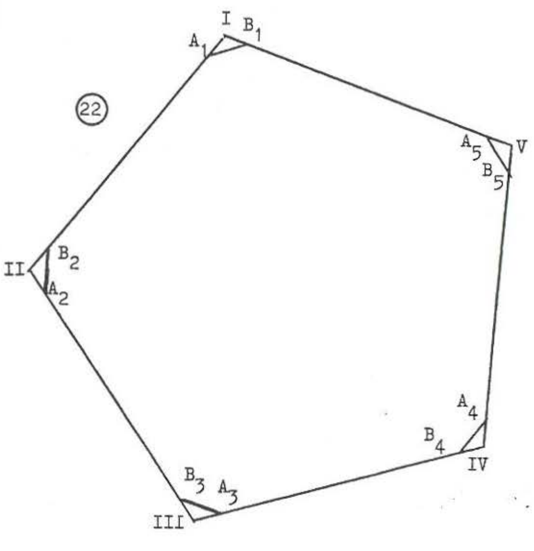
(21).



Il procède alors à la réalisation (21) . Il va essayer de placer un deuxième triangle avec un côté de 6 cm porté par II III ; il procède encore par tâtonnement de telle sorte qu'on trouve un point D sur I II, deux points A et A' sur II III, et deux autres points B et B' sur ce même côté II III. Mais ni DAB ni DA'B' ne sont des triangles satisfaisants pour lui.

---

(22)



PYV - J'ai une idée.

EXP - Qu'est-ce que tu as comme idée ?

PYV - Là, peut-être que tous les côtés ils sont pareils.
Je vais prendre un centimètre sur chaque côtés et je vais voir s'ils sont pareils ; s'ils sont égaux à ceux là, je pourrais refaire la même figure.

Il veut donc procéder à la même vérification que celle utilisée en (17) .
Il réalise alors, à la trente-cinquième minute, le dessin (22) ; pour cela il place les points A_1 et B_1 à 1 cm de I respectivement sur les côtés I II et I V du pentagone.

PYV - Celui là 1,8.

PYV annonce que A_1B_1 = 1,8 cm.

PYV - Donc chaque fois que j'aurais 1,8 je pourrais faire la figure.

Il place ensuite A_5 et B_5 autour de V et vérifie que A_5B_5 = 1,8.

Puis A_4B_4 autour de IV et A_3B_3 autour de III ; il trouve chaque fois 1,8.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-12

Il travaille sans s'en rendre compte avec une approximation qui peut atteindre 20 %.

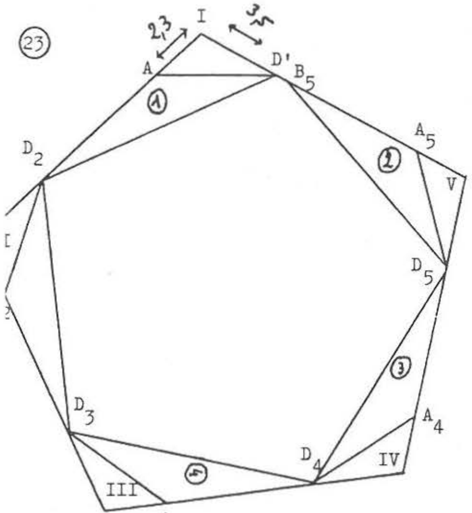
PYV - Ah ! c'est un pentagone régulier.

Ses dernières mesures en II avec les points A_2 et B_2 le conduisent à dire :

- Là, c'est pas bon.

Puis il rectifie et accepte aussi ces dernières mesures.

PYV - C'est bon, donc je peux le reproduire partout.
Bon maintenant, ça va être simple.



Il va donc construire des triangles égaux au triangle construit en 20 . Il construit donc son dessin 23 . Pour cela, il mesure le segment ID' de la figure 20 , trouve 3,5 cm ; il mesure ensuite le segment IA de la figure 20 et trouve 2,3 cm. Ce qu'il note sur sa feuille.

PYV - ... 3,5 à droite ...

Il construit alors le triangle $D_5A_5B_5$ en prenant D_5 V = 3,5 cm et A_5 V = 2,3 cm, puis A_5D_5 = 6 cm. Il obtient ainsi un triangle qu'il note 2 .

PYV - 1, 2, 3, 4, 5, ça va me faire 5.
Vous voulez que je fasse les figures ?

L'élève compte 5 triangles solutions alors qu'il en a tracé 2, il demande à l'expérimentateur s'il faut tracer tous les triangels. L'expérimentateur lui dit qu'il doit répondre seulement à la question et que c'est lui qui choisit ce qu'il doit faire.

PYV - Je vais encore essayer.
... J'ai dit 3,5 à droite.

Il construit de façon analogue les triangles D_4A_4 IV, puis D_3A_3 III, et enfin D_2A_2 II.

Les points D_5 et B_4 sont confondus, ainsi que D_4 et B_3, D_3 et B_2, D_2 et B.

Il numérote 4 triangles : 1 2 3 4 .

PYV - Ca donne 5. Un par côté.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - PYV 3-16;00-13

Il inscrit sa réponse dans le carré prévu sur sa feuille à cet effet.

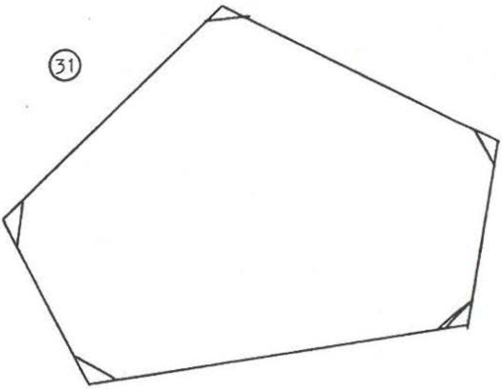
EXP - Tu as fini ?

PYV - Oui.

EXP - Sûr ?

PYV - Oui.

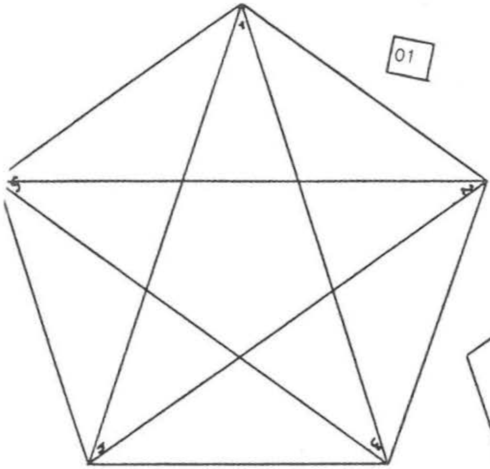
31



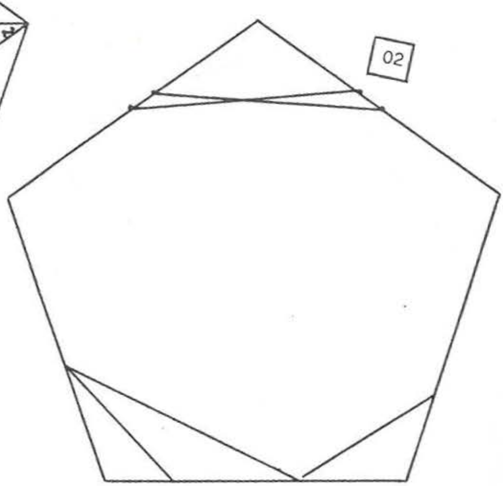
Questionné après l'épreuve, l'élève trouve que ce problème n'est pas très dur à condition de bien lire l'énoncé.
Il préfère ce problème à un problème avec des calculs.
L'expérimentateur propose le pentagone aplat: à l'élève.
L'élève procède à la même vérification que celle faite en 17 et en 22 , ce que nous représentons sur la figure 31 ci-contre. Il annonce que dans ce cas, il y a aussi 5 solutions.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-0[1]

01



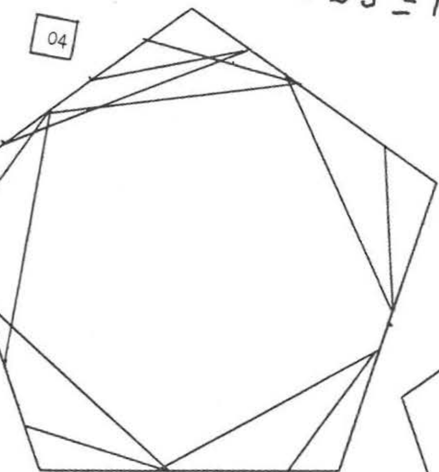
02



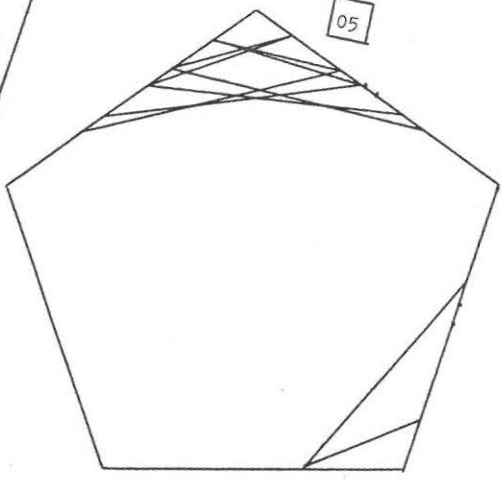
03

$36 + 25 = 100$

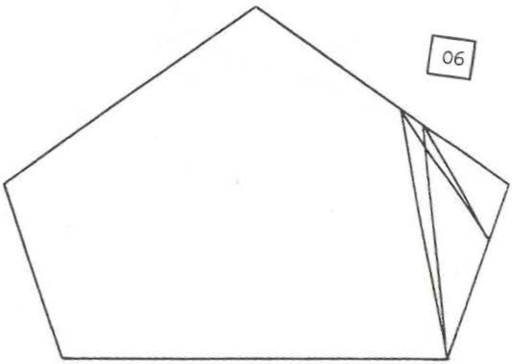
04

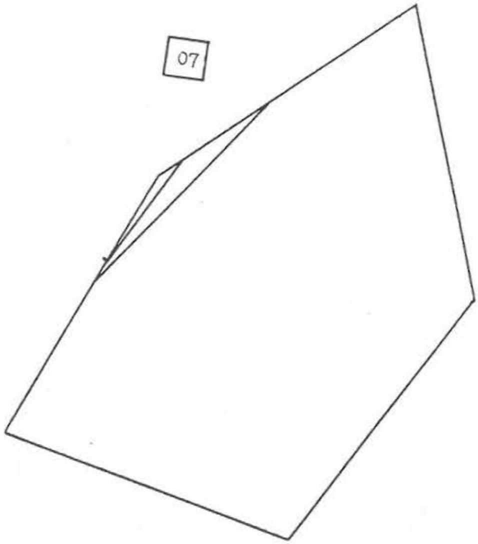


05

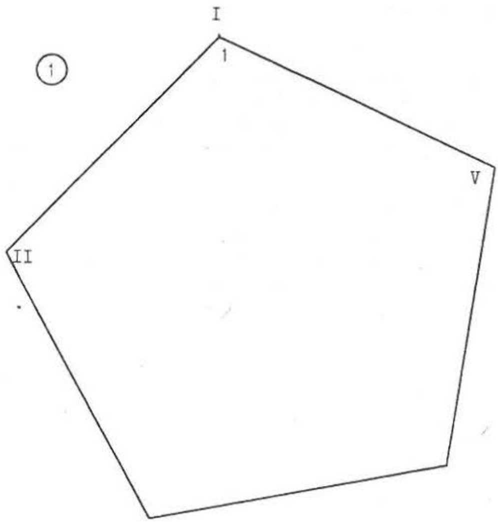


PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV $2\text{-}15;06\text{-}0^2$





PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-1



L'expérimentateur rappelle l'énoncé à l'élève.

LIV - Je vais essayer de faire le triangle avec chacun un sommet ici, là. Ca fera cinq triangles.

L'élève veut placer les sommets du triangle proposé aux sommets du pentagone. Il demande une règle. L'expérimentateur lui donne un double décimètre.

LIV - Je vais essayer avec ce sommet là.

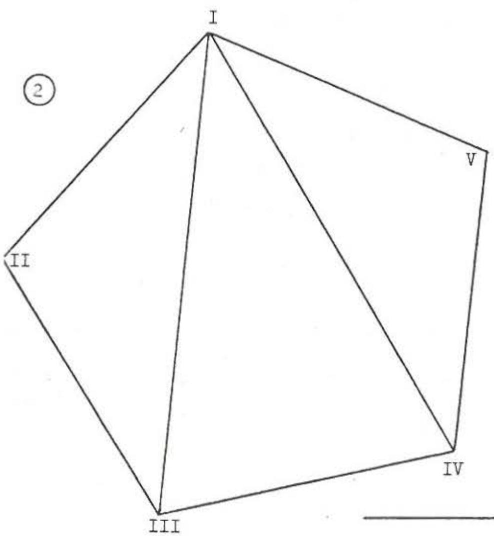
Comme réalisation 1 il place un indice 1 en face du sommet I du pentagone. Il mesure alors les segments I V, I II et II V ; il constate que ces segments ne mesurent pas les dimensions proposées pour le triangle T.
Il ajoute :

- Il n'y va pas.

Quelques secondes après,

LIV - J'ai l'impression qu'il y en aura aucun.

L'expérimentateur lui rappelle l'énoncé.



LIV - Je vais essayer autre chose.

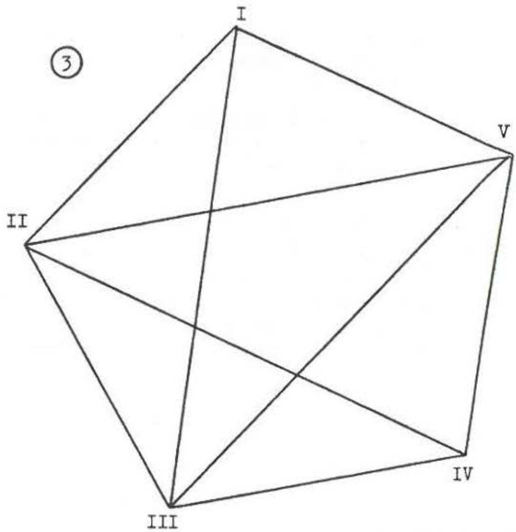
Il réalise alors la figure 2 . Pour cela il trace les segments I III et I IV.

LIV - Ce triangle, ça va pas non plus.

Il constate que le triangle I III IV n'a pas les dimensions voulues.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-2

3



A la troisième minute, LIV déclare :

- Je vais faire pareil à chaque sommet.

Il réalise la figure 3 ; pour cela il trace les segments III I et III V, puis les segments II V et II IV.

LIV - Lui, non plus.

Il constate chaque fois en mesurant les côtés du triangles III I V, puis ceux du triangle II IV V que ça ne va pas ; c'est à dire que les dimensions ne sont pas celles du triangle cherché.

LIV - Ca me fait trois triangles, y en a aucun qui marche.

Les trois triangles I III IV, III I V et II IV V ne conviennent pas.

LIV - C'est pas obligé que les sommets soient ici ?

L'élève demande si les sommets de T peuvent se trouver ailleurs qu'aux sommets du pentagone. L'expérimentateur lui dit qu'il doit répondre lui-même aux questions qu'il se pose.

LIV - Je peux faire un calcul ?

EXP - Oui, si tu veux.

LIV - Il est pas rectangle ?

4

$36 + 25 = 100$

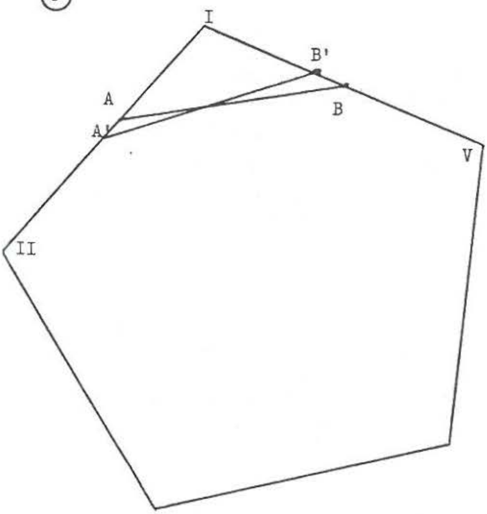
Comme réalisation 4 , LIV note sur une feuille l'égalité :

$36 + 25 = 100.$

Il veut savoir si le triangle T est rectangle ; pour cela il calcule le carré de chaque côté et comme 36 + 25 n'est pas égal à 100, il en conclut que le triangle T n'est pas rectangle.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-3

5
6



A la sixième minute, il réalise 5 .
Pour cela il prend une autre feuille sur laquelle est dessiné le pentagone.
Il place alors un point A sur le côté I II, situé à 5 cm de I, puis un point B sur le côté I V situé à 6 cm de I.
Il trace le segment AB.

LIV - Ils ont même angle ?

EXP - C'est à toi de voir.

L'élève se demande si les 5 angles du pentagone proposé sont les mêmes ; l'expérimentateur lui rappelle qu'il doit résoudre seul le problème.

LIV - Ils ont même mesure.

L'élève constate que les côtés du pentagone ont même mesure.

LIV - Comme ils ont même mesure, ils ont même angle.

Il déduit de l'égalité des côtés du pentagone, l'égalité des angles.

LIV - Donc, si j'en fais un comme ça dans cet angle, ça marchera pas de ce côté.

Il en conclut que puisque son triangle ABC ne convient pas, il n'aura pas non plus de solution dans les autres angles ; ou, de façon plus précise, un triangle avec deux côtés portés par deux côtés consécutifs du pentagone et ayant 5 cm et 6 cm pour longueurs ne conviendra pas, quelque soient les deux côtés consécutifs du pentagone que l'on choisisse.

A la huitième minute, LIV réalise la figure 6 . Pour cela il place les points A' et B' respectivement à 6 cm et 5 cm de I sur les deux côtés du pentagone issus de I. Il trace A'B'.

LIV - Ca revient au même.

Il constate qu'il échoue comme en 5 .

LIV - Ce que je suis sûr, c'est que dans un triangle il y aura jamais un triangle

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-4

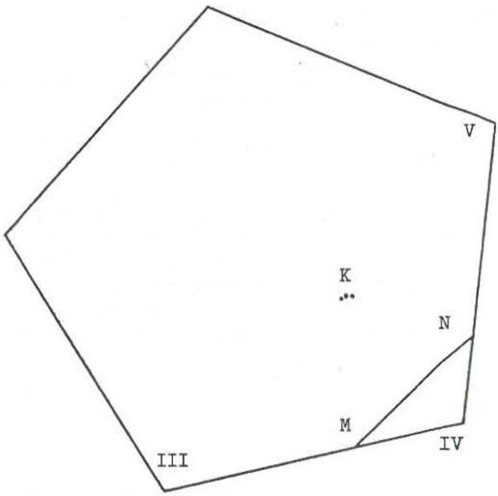
qui aura deux sommets qui appartiennent au pentagone. Parce qu'il y a douze et le triangle, il fait que 10.

L'élève précise qu'un triangle aux dimensions données, 10 cm, 6 cm et 5 cm, ne peut pas avoir 2 sommets consécutifs du pentagone comme sommets.

LIV - Il y aura jamais un sommet là.

L'élève déclare qu'un sommet du triangle donné ne pourra jamais être placé en un sommet du pentagone.

7



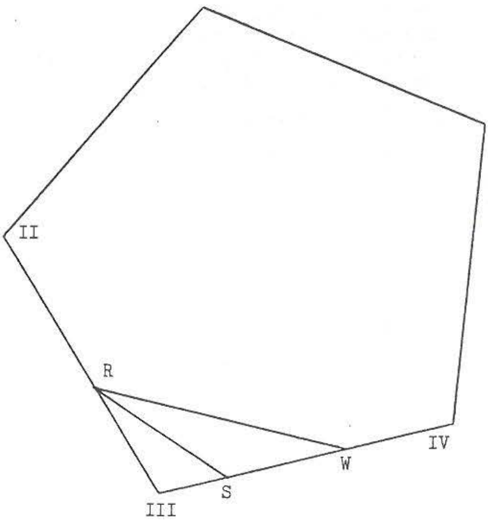
A la dizième minute, il réalise 7 .
Pour cela, il trace un segment MN = 6 cm M et N se trouvant respectivement sur les côtés IV IIIet IV V du pentagone.
Puis il envisage de placer un point K à 5 cm du point N.

LIV - Ca peut pas marcher.

Il constate que son idée qui consiste à chercher un triangle MNK ne lui donne rien.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-5

8



Il réalise alors la figure 8 .pour cela il place un segment RS de 6 cm, avec R sur le côté II III et S sur le côté III IV. Puis il trace le segment RW de 10 cm, W étant sur le côté III IV du pentagone. Avant de tracer son triangle RSW, LIV avait ébauché ce triangle avec la pointe de son crayon en essayant d'imaginer cette position.

LIV - Ca marche.
Je vais le refaire mieux.
Il faut que je me repère.

Il est sûr d'avoir trouvé une solution.

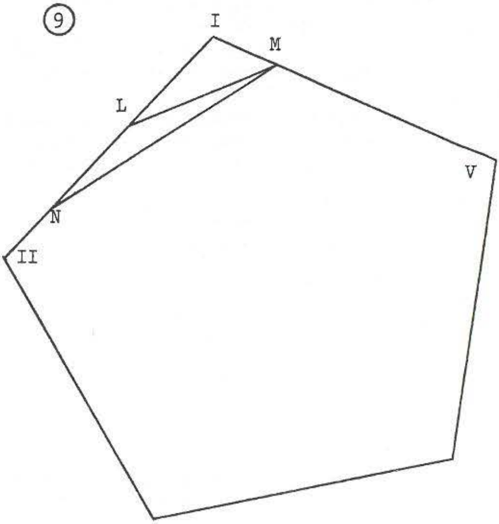
EXP - Qu'est-ce quė c'est qui t'a fait penser à dessiner ce triangle ?

LIV - Fallait qu'il y ait deux points qui soient sur la même droite.
Alors j'ai fait le 6 là, je trouvais normal que le 5 soit là.

Pour envisager son dessin RSW, LIV pense à placer le petit côté de son triangle sur un côté du pentagone, tandis qu'il se propose de placer les extrémités du côté moyen sur deux côtés consécutifs du pentagone. C'est pour cette raison qu'il envisage le côté SW sur le côté III IV du pentagone tandis que R et S sont respectivement sur II III et III IV.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-6

9



A la treizième minute, il change de feuille et réalise 9 . Pour cela il trace un segment LM de 6 cm, les points L et M étant respectivement sur I II et I V. Puis il choisit sur le côté I II du pentagone un point N situé à 10 cm de M.

LIV - Ca ne marche pas à tous les coups.

L'élève vient de constater que LN n'est pas égal à 5 cm.

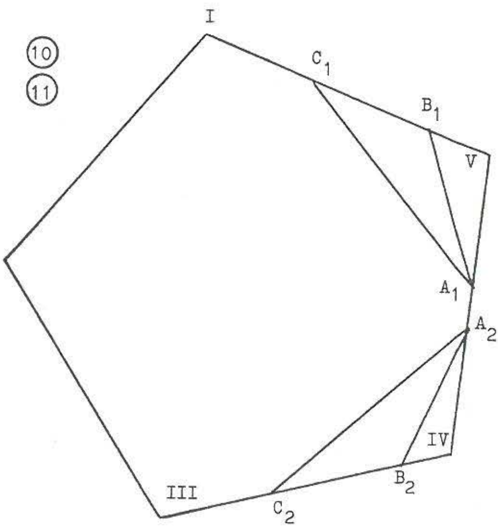
LIV - Je crois avoir compris ce qu'il faut faire.

EXP - Qu'est-ce que tu fais ?

LIV - Le point là, je le prend à 5 cm pour que ça se reporte pareil ici.

Il réalise alors, à la quatorzième minute, sa figure 10 . Pour cela, ayant mesuré dans sa figure 8 le segment III R qu'il trouve égal à 5 cm, il place un point A_1 sur le côté IV V à 5 cm du point V, puis il trace A_1B_1 = 6 cm avec B_1 sur le côté I V ; il place enfin sur I V le point C_1 à 10 cm de A_1. Le triangle $A_1B_1C_1$ qu'il vient de tracer a des dimensions qui diffèrent des dimensions données de 3 ou 4 mm.

10
11



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-7

Il réalise la figure 11 de la même manière. A_2 est placé à 5 cm de IV, ensuite il trace A_2B_2 = 6 cm, puis A_2C_2 = 10 cm. Il a précisé :

- Je fais pareil.

- A la quinzième minute, l'élève pose une question :

LIV - Ca peut se croiser là ?

Il demande si un nouveau triangle solution peut avoir des points communs avec un triangle solution précédemment obtenu.

EXP - C'est toi qui voit.

LIV - Je peux mettre un trait là ?

Il demande encore une fois si un côté d'un nouveau triangle peut être placé sur les côtés d'un triangle existant.

EXP - C'est normal que tu te poses des questions mais tu es tout seul et tu décides.

LIV - Si ça se croise, je peux en faire plusieurs ; je peux en faire un, deux, trois, quatre, cinq, si ça se croise.

EXP - Tu relis l'énoncé et tu prends ta décision.

LIV - Donc ça peut se croiser, ils précisent pas.

Il admet donc que deux triangles solutions peuvant avoir des côtés qui se coupent et pense qu'il y a 5 triangles solutions.

LIV - Un, deux, trois, quatre, cinq. Je les trace ?

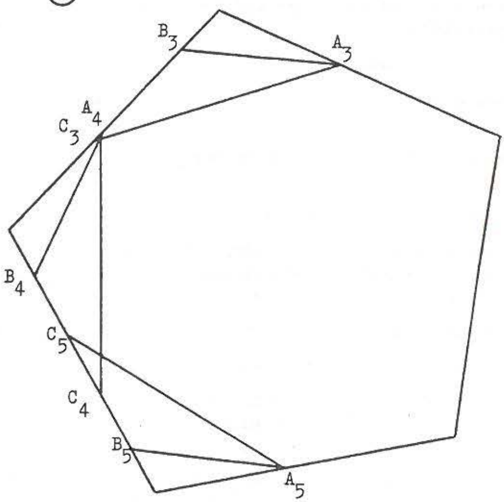
Il demande s'il doit tracer les cinq triangles qu'il envisage.

EXP - Comme tu veux. Toutes les décisions c'est toi qui les prends.

LIV - Je vais tracer.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-8

(12)



LIV réalise à la dix-septième minute la figure (12) , selon le procédé déjà utilisé en (10) et (11) . Il place un point à 5 cm d'un sommet, puis à partir de ce premier point il trace deux segments de 6 cm et 10 cm ;

LIV - Ca fait 5.

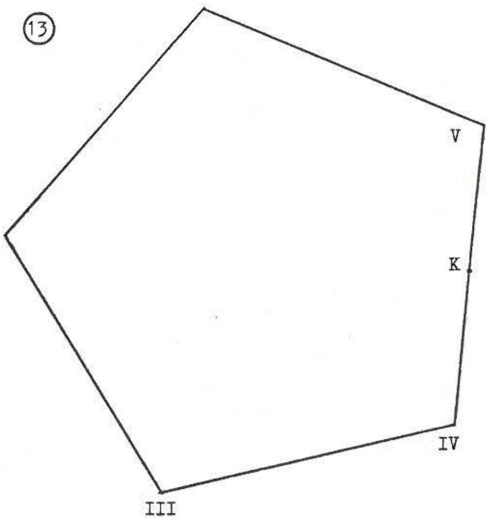
Il obtient alors le dernier segment de 5 cm.

Il construit ainsi les triangles $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ et $A_5B_5C_5$.

A la dix-huitième minute il déclare :

LIV - Maintenant, je vais essayer de prendre l'inverse ; en prendre six comme ça, tracer, ...

(13)



Il propose la réalisation (13) . Il choisit pour cela un point K sur IV V, situé à 6 cm du sommet IV. Pour lui, 5 et 6 font la paire ; comme il partait de 5 cm précédemment, inverser signifie maintenant qu'il doit partir de 6 cm.
Il compte donc choisir ensuite les deux autres sommets de son triangle sur le côté III IV du pentagone.

LIV - C'est impossible, parce que c'est plus grand. Ca peut pas faire 5 comme ça.

Il constate alors que K IV étant égal à 6 cm, il ne peut pas trouver sur III IV un point situé à 5 cm de K.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-9

LIV - Je vais essayer d'une autre manière ; de toute façon, je crois pas qu'il y en ait plus.
Pour moi, j'en ai 5 ; un à chaque sommet.

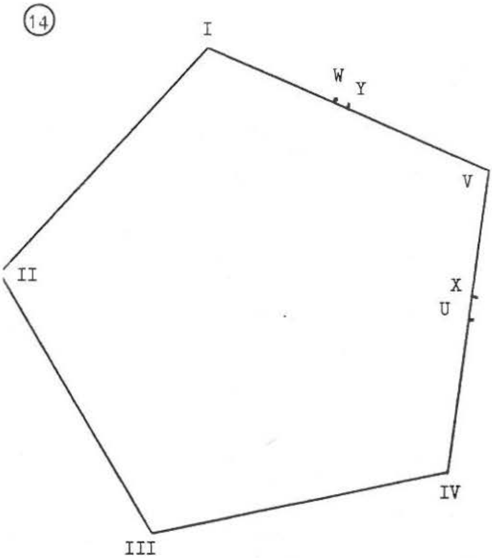
L'élève cherche sans dessiner.

LIV - Je crois que chaque fois, il faut se rapprocher de l'angle le plus possible.

Ses triangles dessinés sur sa quatrième feuille sont visibles à travers la cinquième feuille qu'il vient de prendre. Mais il n'utilise pas cette transparence.

LIV - Je cherche, mais je ne pense pas qu'il y en ait plus.

14



A la vingt-et-unième minute, il réalise la figure 14 . Pour cela il place un point U sur une nouvelle feuille à 6 cm de V ; puis il prend W à 10 cm de U.

LIV - Je crois que j'y avais pensé.

Il a l'impression d'avoir déjà procédé de la même manière.

Il construit encore X et Y à 5 cm et 6 cm de V, mesure XY qui est différent de 10.

LIV - J'ai l'impression que j'avais fait ça déjà.
Oui, oui, je l'ai déjà fait.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-10

A la vingt-troisième minute, l'élève s'interroge.

LIV - C'est bizarre ce point là, je vois pas qu'est-ce qu'il fait là.

Il se demande ce que vient faire sur la figure le centre O du pentagone.
Il mesure la distance de O aux sommets du pentagone, c'est sa réalisation 15 .

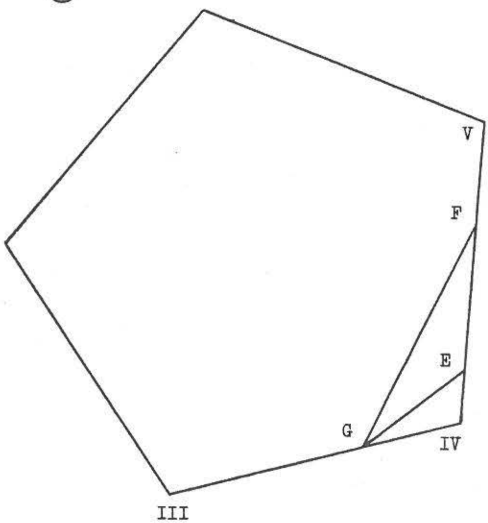
LIV - Il est à dix des angles.

Il annonce que la distance de O à un sommet du pentagone est de 10 cm.

LIV - Je crois pas que ça passe ici, c'est pas assez long.

L'élève ne pense pas qu'un triangle solution puisse utiliser le point O, car le triangle n'est pas assez grand.

16



A la vingt-cinquième minute, LIV examine sa quatrième feuille.
Il effectue sa réalisation 16 sur sa cinquième feuille. Pour cela il place 6 cm sur le côté IV V, c'est à dire qu'il place les points E et F à 6 cm l'un de l'autre puis il prend un point G à 5 cm de E.

LIV - J'ai pris 5 et 6, et là, il faut toujours mettre quatre.

Il obtient donc une solution en choisissant EF = 6 cm, EG = 5 cm et alors IV G = 4 cm.

LIV - Ca marche.

Le triangle GEF est une solution.

LIV - Ca fait encore cinq de plus.

Il annonce 5 solutions qui viennent s'ajouter aux cinq précédemment obtenues en 12 .

LIV - Je crois pas que ça soit le même, je vais faire par transparence.
C'est pas le même.
Y en a cinq de plus.

Il se demande si ce triangle n'a pas déjà été obtenu. Il superpose par transparence les dessins réalisés en 11 et 16 et constatant que $A_2B_2C_2$ en 11 et EFG en 16 ne sont pas superposables, il est convaincu d'avoir obtenu 10 solutions.

Il explique encore sa méthode.

LIV - Là, j'ai fait la méthode inverse. Au lieu que ce soit 6, c'est 5 ; dix il reste toujours pareil ; là, ça passe à quatre.

Sa nouvelle méthode consiste à placer le côté de 6 cm du triangle sur un côté du pentagone, au lieu d'y placer le côté de 5 cm ; et le sommet du triangle qui se trouve seul sur un côté du pentagone est à 4 cm du sommet du pentagone le plus proche.

LIV - J'ai l'impression que quand on fait comme ça celui-là doit être à un centimètre de moins.

Il insiste sur les 4 cm qui remplacent les 5 cm de la précédente construction.

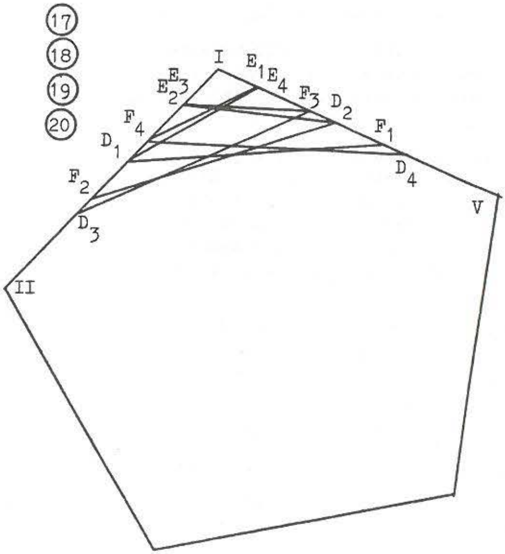
A la vingt-neuvième minute, il s'interroge.

LIV - J'essaie de faire une manière pour changer le 10 cm. Le mettre ailleurs.

Il essaye de trouver d'autres méthodes permettant de modifier la position du grand côté du triangle qui joue le même rôle dans les deux positionnements, précédemment trouvés.

LIV - Là, j'ai remplacé le 5 et le 6, le 10, je ne vois pas comment je le remplacerai.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-12



LIV - Je vais essayer d'arriver à 20.
Je vais refaire le premier.

A la trente-et-unième minute, l'élève réalise la figure (17) . Pour cela il place un point D_1 à 5 cm de I sur le côté I II du pentagone, puis un point E_1 à 6 cm de D_1 et situé sur le côté I V du pentagone ; il place enfin le point F_1 sur I V, situé à 10 cm de D_1. Comme pour lui $E_1F_1 = 5$ cm, il a obtenu un premier triangle $D_1E_1F_1$.

Il réalise alors la figure (18) .

EXP - Tu le prends comme ici ?

LIV - Pareil, le même, à l'envers.
Je vais essayer d'en avoir 20.

Il construit donc, avec la même méthode, le triangle $D_2E_2F_2$ symétrique de $D_1E_1F_1$.

LIV - Ca en fait 2.

Il annonce qu'il vient d'obtenir 2 triangles qui sont d'ailleurs dessinés, l'un au crayon l'autre au stylo bleu.

Il réalise alors, en rouge, la figure (19) . Pour cela il place F_3 à 4 cm de I, sur le côté I V du pentagone ; puis il trace E_3 sur I II, à 5 cm de F_3 et enfin D_3 à 10 cm de F_3. E_3 et E_2 sont confondus.

Il demande un stylo vert pour réaliser (20), à la trente-cinquième minute, et $D_4E_4F_4$ est construit par la même méthode, symétriquement à $D_3E_3F_3$.
De plus E_1 et E_4 sont des points confondus.

LIV - Donc ça me fait 20.
Je sais qu'il y en a quatre, je le fais à chaque côté, ça va m'en faire vingt.
Je pense qu'il n'y en a plus.
J'ai fait deux cas avec deux sous cas.
J'ai fait un cas où je faisais 5 là, au début et puis à l'envers, 5 là, 5 là ; un cas où je faisais 4 là, 4 là.

Il décrit donc ses réalisations (17) (18) (19) et (20) .

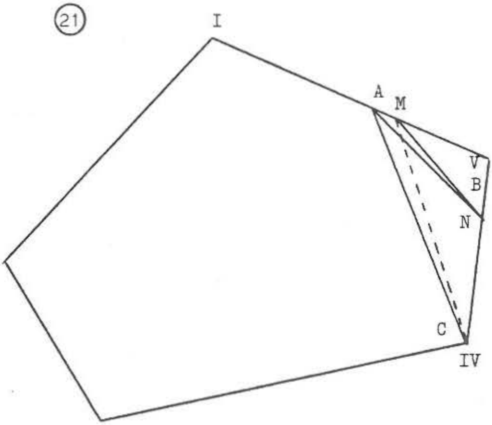
EXP - Si tu décides que tu as fini, tu dis : j'ai fini et tu mets ta réponse.

LIV - Je vais essayer de chercher quand même ; quand j'étais à 5 je pensais pas qu'il y en ait plus.

L'élève cherche encore quelques minutes. A la quarante-deuxième minute, LIV, estimant avoir la réponse, marque 20 sur sa feuille, au moment où la sonnerie retentit.

---

(21)



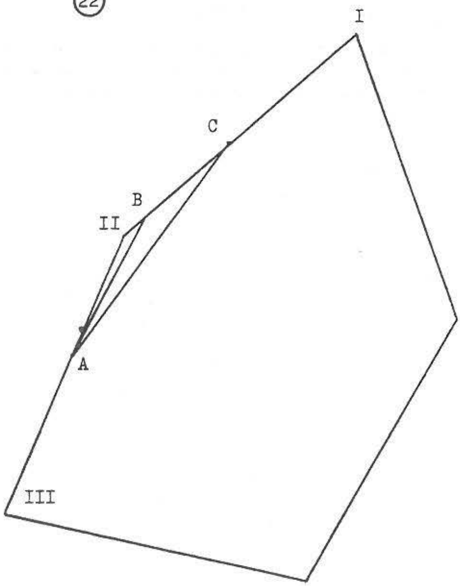
L'expérimentateur lui propose alors le pentagone aplati.
LIV hésite.
Il réalise la figure (21) . Pour cela il place le point A à 5 cm de V puis construit successivement B et C à 6 cm et 10 cm de A. Il veut recommencer en prenant M à 4 cm de V.

LIV - On peut pas faire celui de 4.

Il a bien tracé N à 5 cm de M (N étant d'ailleurs confondu avec B) mais n'arrive pas à tracer le troisième sommet car M IV est inférieur à 10 cm.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - LIV 2-15;06-14

(22)



L'expérimentateur lui propose alors le pentagone allongé.
Il pense que c'est la construction aux alentours de II qui lui pose un problème.

LIV - Si je le trace je le verrais de suite.

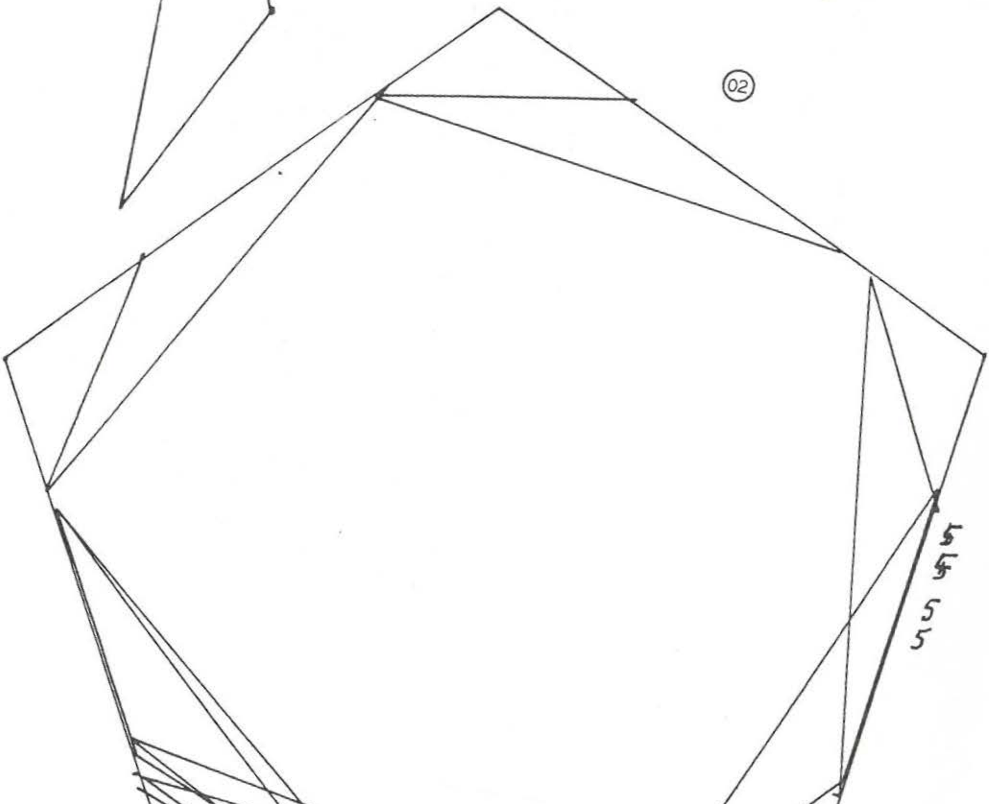
Il reprend donc sa méthode pour réaliser (22) . Il construit A, à 5 cm de II, puis B tel que AB = 6 cm, et AC = 10 cm.

LIV - Je crois que j'arriverai à le faire marcher, c'est une question de longueur, c'est pas une question d'angle.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-0[1]

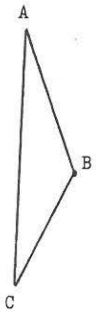
01

02



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-1

1



L'élève demande une règle. L'expérimentateur lui donne une règle graduée.

BRA - D'abord je vais tracer le triangle sur une autre feuille.

Il réalise la figure 1 en traçant un segment vertical de 10 cm. Puis en tâtonnant, et à 2 ou 3 mm près, il construit les 2 autres côtés, il a obtenu le triangle ABC représenté ci-contre.

BRA - C'est grosso modo que je fais ça ; mais c'est pour avoir une image que je vais, après, essayer de placer sur ce schéma.

Il veut donc tracer un triangle pour ensuite le placer sur le pentagone.
Il examine différentes positions par transparence. Il est un peu gêné parce que sa feuille quadrillée sur laquelle se trouve ABC est peu transparente.
Il observe une position ABC, avec un des deux plus petits côtés du triangle sur un côté du pentagone qui pourrait lui donner la solution par un mouvement de translation rectiligne ; mais il ne s'en sert pas.

BRA - J'essaye par tâtonnement. J'ai quelques difficultés à trouver un point de départ.

Il cherche toujours par transparence.

BRA - Bon, maintenant, je vais essayer un autre triangle qui puisse, une autre forme de triangle, peut-être ... bien que ça soit ...

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-2

A la quatrième minute, l'élève arrive à voir par transparence une position du triangle avec les 3 sommets sur le bord du pentagone.

BRA - Je commence un peu à avoir un point de départ.
Parce qu'au début, j'essayais de coller ces 2 angles et j'y suis pas arrivé.
Maintenant je viens de comprendre que en collant de cette manière on pouvait placer un triangle.
Bon, je vais faire le tour.
On peut placer un petit indice ?

EXP - Vous faites ce que vous voulez.

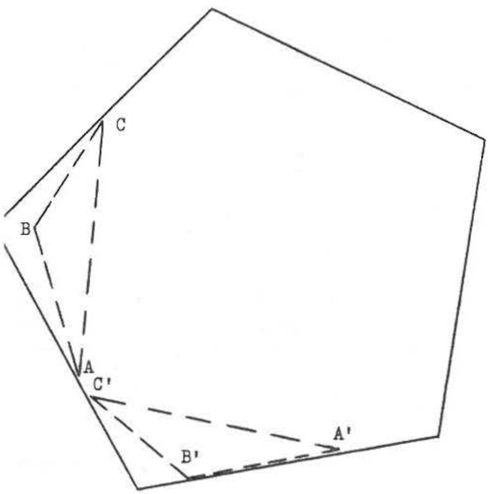
Il passe alors à la réalisation 2 , à la cinquième minute. Auparavant, il remarque qu'il ne peut pas mettre B, le sommet du grand angle de son triangle en un sommet du pentagone de telle sorte que les côtés BA et BC soient confondus avec les deux côtés consécutifs du pentagone. Nous schématisons cette recherche par la position ABC sur 2 .
Le triangle qui lui convient est dans la position indiquée par le triangle en pointillés A'B'C' sur la figure 2 .
Il veut placer un repère aux alentours des points A', B' et C'.

BRA - C'est un peu faux, mais c'est pas au centimètre près.

Il marque ses repères en soulevant la feuille sur laquelle se trouve son triangle, cette feuille recouvrant le pentagone à cause de sa recherche par transparence.

BRA - Comme ça, il y en aura cinq puisqu'il y a cinq côtés.

2



PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-3

A la sixième minute BRA pose une question.

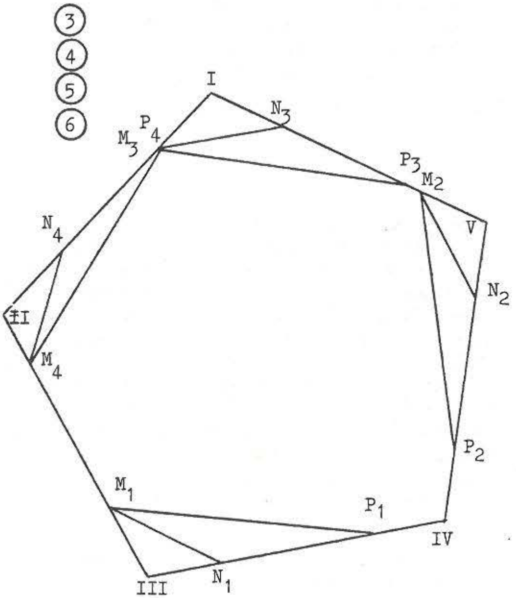
BRA - On peut retransmettre sur cette figure ?

Il demande s'il peut tracer les triangles sur le pentagone.

EXP - Vous faites ce que vous voulez.

BRA - C'est ce que je vais faire.

Il réalise alors la figure 3 .
Pour cela il construit un premier triangle $M_1N_1P_1$ avec M_1N_1 = 5 cm, M_1P_1 = 10 cm et N_1P_1 = 6 cm ; ce dernier segment se trouve sur le côté III IV du pentagone, tandis que le sommet M_1 se trouve sur II III.



Il réalise ensuite, très rapidement, $M_2N_2P_2$ avec M_2N_2 = 5, M_2P_2 = 10 et N_2P_2 = 6 ; c'est sa réalisation 4 placée au voisinage de V.

Sa réalisation 5 est constituée par le triangle $M_3N_3P_3$ où il veut avoir M_3N_3 = 5, N_3P_3 = 6 et M_3P_3 = 10.

Enfin, sa réalisation 6 est constituée par le triangle $M_4N_4P_4$ où il veut : M_4N_4 = 5, M_4P_4 = 10 et N_4P_4 = 6.
Tous ces tracés sont très approximatifs et on trouve des erreurs de 1 cm ; les angles tracés peuvent être le double des angles correspondants du triangle T donné.

BRA - C'est un peu faux.
C'est pas au centimètre près.

En cours de réalisation l'élève interroge.

BRA - On peut superposer les triangles ?

EXP - Je peux pas répondre.

L'élève demande si deux triangles peuvent avoir des côtés qui se coupent.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-4

L'expérimentateur ne répond pas à sa question. L'élève admet cette situation puisqu'il réalise (6) avec un côté M_4P_4 qui coupe le triangle $M_3N_3P_3$.

BRA - C'est un peu ennuyeux ce que je fais, mais je pense qu'après, quand j'aurai placé tous mes triangles, le décompte sera plus facile.

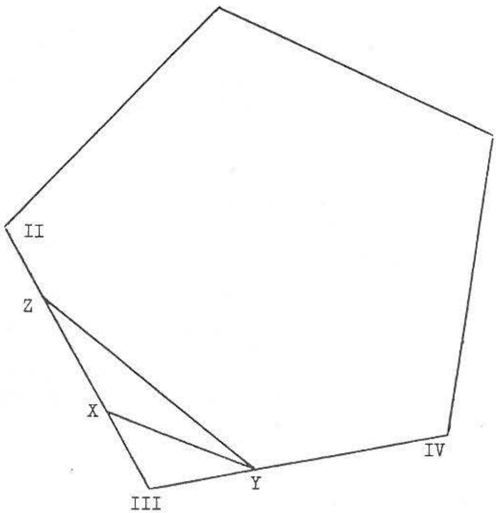
Il a l'air de penser que tous ces tracés sont un peu fastidieux mais qu'ils seront utiles pour connaître le nombre de triangles.

BRA - Je peux déjà marquer 4.

Il compte quatre triangles, ceux obtenus en (3) (4) (5) (6) .

---

(7)



L'élève demande un stylo d'une autre couleur.

BRA - Le genre de même emplacement, mais en inversant ; je vais voir si ça peut marcher.

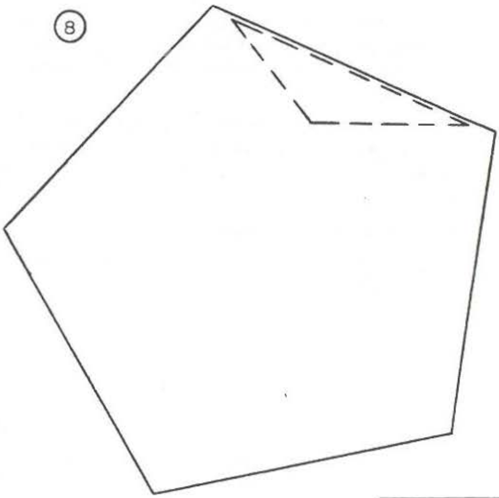
A la septième minute, il réalise (7) .
Pour cela il place un segment XY de 6 cm avec X sur II III et Y sur III IV.
Il place ensuite le point Z à 5 cm de X. Il obtient ainsi un triangle XYZ qui le satisfait. En fait, YZ = 10,6 cm. Il a envisagé la position XYZ en imaginant le changement de la position $M_1N_1P_1$ de (3) .

BRA - Déjà, ça fait 8.

Il ajoute donc aux 4 cas obtenus en (3) (4) (5) (6) , les 4 autres cas qui se déduisent de XYZ, de la même manière que ses quatre premiers triangles se déduisaient de $M_1N_1P_1$.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-5

8



BRA - J'ai employé cette forme, cette forme ; il y a une troisième forme d'utiliser, c'est à dire celle-là, mais ça marche pas.

A la dizième minute, il imagine, sans dessiner la situation 8 .
Lorsqu'il parle de "cette forme, cette forme", il veut dire qu'il a envisage d'une part, à partir de $M_1N_1P_1$ de mettre le petit côté du triangle sur un côté du pentagone, d'autre part, à partir de XYZ, de placer le côté de 6 cm sur le côté du pentagone. Sa troisième "forme" consiste donc à placer le grand côté du triangle sur un côté du pentagone comme l'indique le triangle en pointillés de 8 . Mais il pense que dans ce cas, il n'y a pas de solution.

BRA - Je vais essayer de m'imaginer dans ma tête si je peux placer d'une autre manière ce triangle.

Il réfléchit, il regarde par transparence.

BRA - J'ai de la difficulté à imaginer une autre façon. Je tâtonne en mettant cette figure dans l'espace.

Il fait quelques essais.

BRA - J'avais oublié certains côtés.
Je trouve une autre forme.
Il y a cinq côtés et j'avais compté que quatre.
C'est un truc que j'avais oublié.

A la douzième minute, il réalise qu'il n'a pas compté suffisamment de triangles. Il rajoute donc un triangle de plus associé à $M_1N_1P_1$ de 3 et un triangle de plus associé à XYZ de 7 .
Il a donc 5 + 5 triangles.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-6

BRA - J'essaie de voir si on peut faire une autre forme de triangle.
La forme elle évoluerait.
Mais non, elle peut pas évoluer.

On ne sait pas très bien s'il envisage une déformation du triangle ou un déplacement dans le plan. Il s'agit certainement d'un déplacement.

BRA - Vu la longueur de ce pentagone qui est de douze, je déduis que pour qu'il y ait les 3 sommets qui touchent le bord du pentagone, étant donné que la longueur maximum d'un des côtés du triangle est de 10 cm, il faut qu'il y ait une surface de contact ; c'est à dire que ce soit 5 cm ou 6 cm ou 10 cm entier qui soit en contact avec le pentagone.
Moi je pense que c'est comme ça, peut-être que je me trompe ; mais intuitivement, je pense que ça peut marcher comme ça, en observant les figures que j'essaye ; parce que là, la longueur maximum, on peut pas à partir de ce côté toucher l'autre côté. A part comme ça, mais dans cette position, à part dans la position déjà faite, dans ce cas là y a surface de contact.
On peut pas avoir trois points d'intersection avec le pentagone et les triangles. Donc il faut qu'il y ait surface de contact.

Lorsqu'il dit "on peut pas à partir de ce côté toucher l'autre côté", il veut dire que le triangle ne peut pas être en contact à la fois avec un premier côté du pentagone, et un deuxième côté qui ne serait pas adjaçant au premier ; il indique du doigt les 2 côtés en question.
Sa dernière phrase signifie que les trois sommets du triangle ne peuvent pas être sur 3 côtés différents du pentagone.

BRA - Pour la longueur 10 cm, je pense pas qu'il puisse y avoir de surface de contact. Je vais encore essayer mais je vois mal comment ça pourrait rentrer.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-7

Non, j'élimine la possibilité d'intersection entre la longueur 10 cm et le pentagone.

Il rejette la possibilité d'un triangle dont les 3 sommets sont sur le bord du pentagone et dont le grand côté de 10 cm est porté par un côté du pentagone. Ceci après encore quelques observations de ses dessins.

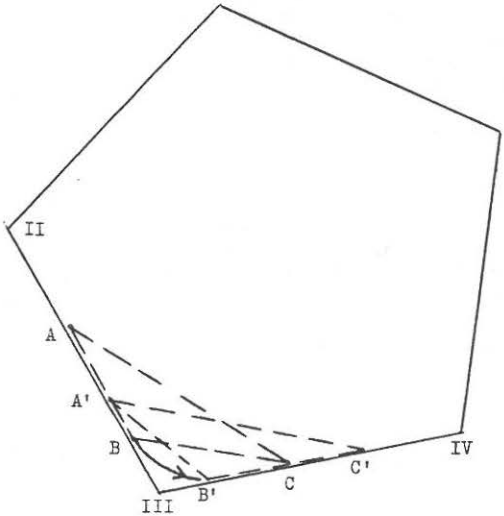
BRA - Maintenant, je vais essayer de voir si avec les autres surfaces de contact, 5 cm et 6 cm, j'arrive à trouver d'autres solutions que celles déjà utilisées.

A la dix-neuvième minute,

BRA - Là, intuitivement, j'ai peut-être fait une autre découverte.
Je vais voir si cette longueur là peut transformer ..... oui, ...
J'en rajoute 5 ; je pense ne pas m'être trompé.
Je vais voir ce que donne le triangle.
Et là, maintenant, j'en rajoute cinq autres de plus puisque j'ai changé la surface de contact.
Là, j'ai mis la surface de contact qui mesurait 6 cm, je l'ai mise là ...
Attendez, que je me trompe pas ...
Haïe ! Je crois m'être trompé ...
Je fais coulisser la surface de contact qui est de 5 cm, je la fais coulisser là. Intuitivement, je pense qu'il doit y avoir quelque chose.

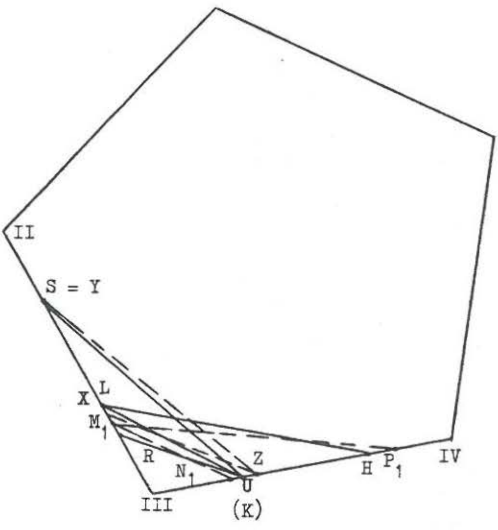
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-8

9



Il remarque, selon la figure 9 ci-contre, qu'un triangle ABC avec les points A et B sur le côté II III, à 5 cm l'un de l'autre et C sur III IV peut prendre une autre position en glissant : A peut venir en A', B en B' et C en C' ; il parle de "coulisser". Pour construire le triangle XYZ, en 7, BRA avait remplacé le côté M_1N_1 = 5 cm par XY = 6 cm et placé sur un côté du pentagone XZ = 5 cm au lieu de N_1P_1 = 6 cm.
Ici, il envisage une toute autre procédure cnnsistant à utiliser un mouvement plan sur plan ; il dit "coulisser". Il pense trouver d'autres triangles solutions puisque ces procédures sont distinctes, mais il a des doutes...

10
11



Il réalise à la vingtième minute la figure 10. Il considère sur sa feuille le sommet III autour duquel se trouvent les triangles $M_1N_1P_1$ de 3 et XYZ de 7 $M_1N_1P_1$ est tracé en bleu et XYZ est tracé en rouge.
Nous représentons ces deux triangles en pointillés sur la figure 10.
Il construit ensuite le triangle RSU. Il prend le segment RS sur le côté II III, avec RS = 6 cm ; S est confondu avec Y ; U est sur III IV, avec SU = 10 cm ; le triangle RSU est tracé avec un stylo de couleur verte.

BRA - Disons, y a toujours quelques petites erreurs de 2 ou 3 millimètres, mais c'est finalement l'image d'ensemble qui compte. Je pense que ce segment a une bonne valeur, puisque celui-là était de 5, je viens d'en prendre un de 6. On a de nouveau une autre figure qui me paraît juste.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-9

Il constate, après avoir achevé sa construction, en comparant les triangles XYZ et RSU, que le deuxième triangle RSU donne bien une autre solution. En effet, alors que le segment XY est de 5 cm, le nouveau côté SR est de 6 cm.

BRA – Je vous avais dit tout à l'heure que je pensais en prendre cinq autres de plus. Je vais essayer de vérifier ça. En mettant cette surface de contact qui est de 6, là je vais la diminuer, cette surface de contact ; je vais mettre une surface de contact de 5.

Pour réaliser sa figure 11 , à la vingt-deuxième minute, il va utiliser un stylo noir.

BRA – Heureusement que j'ai des crayons de couleur, sinon je m'en sortirais pas.

Il trace alors le segment KH de 5 cm, les points H et K se trouvent sur le côté III IV ; K est confondu avec le point U de 10 ; il place alors le point L sur le côté II III de telle sorte que KL = 6 cm.

BRA – Maintenant, je vérifie un peu si les autres je ne me suis pas trop trompé. Voilà, on en rajoute cinq de plus.

L'élève regarde si tous ces triangles $M_1N_1P_1$, XYZ, RSU, et KHL lui paraissent convenables ; il annonce que grâce à KHL, il a cinq triangles de plus ; ce qui lui fait un total de 20 triangles.

BRA – Maintenant, je vais essayer de voir si il y a une troisième possibilité ; mais ça m'étonnerait fort. Je repense à la surface de contact de 10 cm.

Nous en sommes à la vingt-quatrième minute, Il réfléchit longuement.

BRA – J'ai l'impression d'avoir fini. Mais puisqu'on nous a donné une heure, ça doit être plus compliqué.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-10

L'expérimentateur l'interroge.

EXP - Si vous résumiez ce que vous avez fait jusqu'à maintenant. En deux mots, si vous aviez à expliquer tout ce que vous avez trouvé et à essayer de donner une preuve, qu'est-ce que vous raconteriez ?

BRA - Bon, c'est à dire, je pars du principe que le pentagone est régulier. Donc finalement, on peut s'intéresser qu'à une certaine région ; et que cette région elle est morcelée en cinq fois, finalement.
Donc, ce qui sera bon pour cette région, le sera pour les quatre autres.
Après, je pars du principe qu'étant donné que la longueur maximale est de 10 cm pour le triangle, il peut pas avoir les deux bords extrêmes ... ils peuvent pas toucher à deux endroits distincts du pentagone...
J'arrive mal à expliquer ...
C'est à dire, ce point il peut pas avoir d'intersection avec deux côtés ...
Ah ! Que je dise pas de bêtises ...
Entre deux bords qui semblent un peu opposés, à moitié opposés, du pentagone, il peut pas avoir surface de contact.
Il peut avoir surface de contact qu'avec les deux côtés du pentagone qui se touchent.
Second point, au début, en se représentant l'image du triangle, qu'il y a surface de contact pour les deux autres ; c'est à dire surface de contact de 6 cm ou de 5 cm.
Après en jouant sur ces surfaces de contact, c'est à dire en mettant soit 6 cm soit 5 cm, d'abord de ce côté, puis après, de l'autre, je trouve un nombre de triangles qui sera de quatre ; quatre qui sera multiplié par cinq, puisqu'il y a cinq possibilités.
Ca va, vous avez compris ?

EXP - Oui, oui.

BRA - J'ai beau chercher une autre surface de contact, je vois pas comment je pourrais faire.

PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17;09-11

BRA - Instinctivement, mon premier réflexe c'est que je pose le truc là et que je regarde encore, bien que je me suis démontré deux ou trois fois que ça pouvait pas marcher. Instinctivement, ça c'est le réflexe, peut-être scolaire, je pose ça là, là, là ; j'essaye de voir, quand je me suis démontré deux ou trois fois que ça pouvait pas marcher.

A la trente-et-unième minute, il déclare :

BRA - Je crois avoir fini.
Je réfléchis encore un petit peu ...

Il réfléchit encore une minute à voix basse.
La cloche sonne.
Il note 20 sur sa feuille.

L'expérimentateur lui présente le pentagone aplati.

BRA - C'est pas un pentagone régulier ; le raisonnement que j'ai tenu : multiplier par cinq, marche pas.
Il faut que je reparte.

EXP - A priori, qu'est-ce que vous annoncez ?

BRA - Là, c'est inférieur à 8 cm ; là, il peut y avoir une surface de contact de la longueur maximum qui est de 10 cm avec ces deux trucs qui sont vraiment un peu opposés ; donc finalement, il va y avoir des solutions en plus.
Il faudrait que je calcule ...

EXP - Non, non, non.

L'expérimentateur présente alors à BRA le pentagone allongé.

BRA - Là, il semble peut-être qu'il y aurait beaucoup moins de solutions ; peut-être aucune.

La séance s'arrête à la trente-troisième minute.

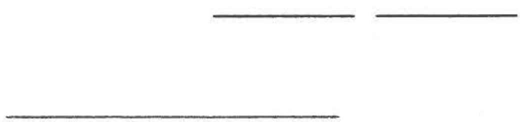
PROBLEME PEN - Avril-Mai 81 - BRA 1-17-09-12

A la question de savoir s'il correspond un ou plusieurs triangles à la donnée de trois dimensions d'un triangle, il répond que le triangle est unique.

Il est favorable à l'utilisation de la transparence. Il déclare d'autre part :

BRA - Ca ne ressemble pas aux mathématiques qu'on fait en D.

Il voit la symétrie selon le schéma ci-dessous :



Tome II - N° ISBN 2-902680-32-5

Imprimerie VAUDREY — LYON
N° d'édition 27818
Dépôt légal janvier 1984