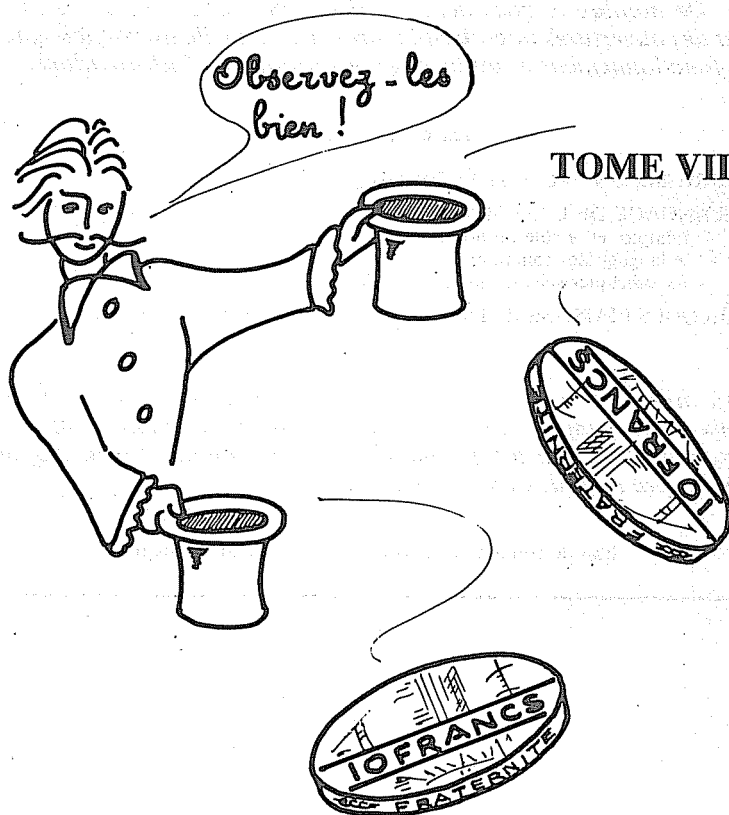


Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

MOTS

Réflexion sur quelques mots-clés
à l'usage des instituteurs et des professeurs



Angle
Symétrie
Orientation

Phase
Angle-de-couples
Repérage

Brochure A.P.M.E.P. n° 57 - 1984

ISSN 0291-5709

ERRATUM et COMPLÉMENT à MOTS VII

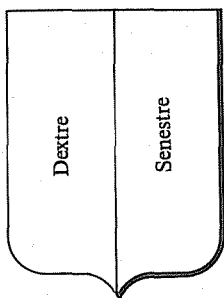
SYMÉTRIE, page 22, VII-1.1 : remplacer le début par :

“Supposons qu’un ensemble matériel admette une symétrie géométrique et que de plus deux parties quelconques géométriquement symétriques aient la même masse (ce qui se produit...)”.

Par ailleurs, la partie VII de la rubrique ORIENTATION a donné lieu aux remarques suivantes.

1) *Sur les appellations “droite” et “gauche” (VII-4.1).*

Les “évidentes raisons pratiques” grâce auxquelles “la position de l’observateur est connue ou imaginée d’avance” peuvent avoir varié suivant les époques. En héraldique, les appellations “dextre” et “senestre” pour les parties de l’écu sont celles qui sont indiquées ci-contre. Elles peuvent paraître paradoxales pour le lecteur moderne ou le visiteur d’un musée, qui se place en face de l’écu. Elles étaient naturelles pour l’homme médiéval, qui se plaçait derrière son écu pour se protéger.



2) *Sur les appellations “nord” et “sud” (VII-4.2).*

La petite histoire rapporte qu’une joyeuse confusion terminologique a régné à Houston en 1986 lors de la première exploitation des informations émises par Voyager 2 sur la planète Uranus. Qu’est-ce que l’axe sud-nord d’un corps planétaire ? Est-ce l’axe autour duquel le mouvement de rotation est direct, ou bien celui qui pointe vers l’hémisphère éclip-tique boréal ? Dans la quasi-totalité des cas les deux définitions sont équivalentes et on ne songe même pas à distinguer entre elles. Mais dans le cas d’Uranus l’axe du mouvement direct pointe vers l’hémisphère éclip-tique austral. Si l’on veut s’entendre, il faudra “normaliser”.

Presse écrite et mathématiques

120 pages
format 21 × 29,7

De nombreux documents et fiches méthodologiques permettant des ouvertures interdisciplinaires et une meilleure connaissance du fonctionnement et du langage des journaux d'informations.

Extrait du sommaire

LA PRESSE, UN PRODUIT ÉCONOMIQUE

LE LANGAGE DE L'INFORMATION

- l'emploi et le rôle du nombre
- le langage des fonctions
- les rubriques scientifiques et les mathématiques

QUELQUES LIAISONS ENTRE PRESSE ET ENSEIGNEMENT

“La presse écrite n'est pas un produit préfabriqué pour l'école. Mais pour comprendre ses contraintes de production comme sa fonction de vecteur d'informations, le mathématicien peut ajouter son propre regard, avec sa spécificité.”

Bon de commande dans les pages vertes du Bulletin.

ISBN 2-902-680-33-3

Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

n° 57

MOTS

Réflexions sur quelques mots-clés
à l'usage des instituteurs
et des professeurs

TOME VII
Brochure 1984

Angle
Symétrie
Orientation

Phase
Angle-de-couples
Repérage

Pour tout renseignement concernant
l'A.P.M.E.P.
**(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)**

- inscription (cotisation, abonnement)
- publications (Bulletin de l'A.P.M.E.P., brochures, en particulier les collections **ELEM-MATH** et **MOTS**)
- fonctionnement (Régionales, Commissions, ...)

s'adresser au

Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
13, rue du Jura
75013 PARIS
Tél. (1) 331.34.05

Les brochures de l'A.P.M.E.P.

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public veut être une grande équipe.

La vie d'une équipe, c'est la libre circulation de l'information entre ses membres, le droit qui appartient à chacun, le devoir qui incombe à tous, de rechercher et de poser des questions, de proposer des réponses, de remettre en cause...

Il était inéluctable que l'équipe ressentît le besoin d'éditer des brochures, et leur succès grandissant impose la nécessité de poursuivre l'œuvre entreprise, en appelant constamment l'attention des collègues sur la nécessité d'une collaboration permanente de tous.

Nous avons besoin de redéfinir périodiquement nos orientations fondamentales, et c'est dans les chartes ou les textes d'orientation que nous publions les mises à jour. Ces sortes de brochures seraient des bibles, sans le fait essentiel qu'elles ne prétendent pas détenir la vérité. Elles n'en doivent pas moins nourrir notre action.

Il faut aussi assurer à nos collègues une information de base sur la mathématique elle-même (vocabulaire, théories diverses, ...), sur les révolutions de notre époque (calculatrices, microprocesseurs, ...), sur les sciences de l'éducation (didactique des disciplines, évaluation, ...), sur les matériaux pour la classe (manuels scolaires...) et, naturellement, développer les thèmes qui s'en dégagent en tenant compte de la demande, soit pour la satisfaire, soit pour la compléter, soit pour la constater, arguments à l'appui.

Nos brochures pénètrent dans les classes (ainsi les *Aides Pédagogiques*) : elles doivent y subir les feux de l'expérimentation la plus large pour provoquer des débats ou des recherches complémentaires.

L'équipe doit aussi à ses membres la permanence de l'échange culturel. Nous avons beaucoup à travailler pour faciliter l'accès de tous les enseignants de mathématiques à une culture approfondie de la science qu'ils ont à faire aimer. Nous l'avons dit dans la Charte de Caen : "Le maître doit acquérir des connaissances qui dépassent largement celles du niveau de son enseignement".

La diversité des formations initiales ne simplifie pas le problème, et nous rejetons loin de nous l'idée de rédiger des exposés magistraux venant s'ajouter au nombre de ceux qui provoquent parfois des nausées à l'âge du lycée, ou même de l'Université.

Nous devons trouver ensemble le langage et la présentation qui susciteront de la part de tous une curiosité active pour l'Histoire des mathématiques, pour la beauté d'un très grand nombre de résultats ou de démarches, pour les jeux ou les paradoxes. Le maître "doit avoir eu l'occasion de poser et de résoudre des problèmes". (Charte de Caen).

Quelques brochures ont déjà partiellement répondu à ces attentes. D'autres doivent suivre, puisque la demande en est parvenue, et nous attendons des idées et des collaborateurs.

La brochure A.P.M.E.P., enfin, n'est pas l'ouvrage qu'on se contente de lire, chacun pour son propre compte. Elle ne trouve sa raison d'être que dans l'exploitation commune. Le lieu idéal pour cette tâche est le "chantier", réunion de plusieurs enseignants en groupes hétérogènes, où on cherche des problèmes tirés, soit de la pratique habituelle de la classe, soit de situations pêchées dans les brochures ou ailleurs.

De ces assemblées, qui veulent surtout ne pas être doctes, surgissent les idées pour les brochures nouvelles.

Maurice CARMAGNOLE

Collection MOTS

L'A.P.M.E.P. a pensé aider les instituteurs et d'autres enseignants, dans leur enseignement de la mathématique, en rédigeant les brochures MOTS.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un lexique. Cependant, il sera loisible à chacun de ranger les rubriques par ordre alphabétique. D'autre part, nous avons tenu compte des suggestions proposées par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. dans son recueil de fiches **La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent**.

Il ne s'agit pas non plus d'une codification autoritaire du vocabulaire : l'A.P.M.E.P. ne peut pas et ne veut pas codifier. Comme dans le Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., nous nous sommes néanmoins enhardis à suggérer une certaine harmonisation, à exprimer notre penchant ou notre aversion pour certains termes. Nous souhaitons ouvrir ainsi le débat avec nos lecteurs.

Enfin, il ne s'agit pas d'un ouvrage de formation, théorique ou pédagogique, des maîtres de l'école élémentaire. Nous pensons cependant qu'une réflexion sur le vocabulaire, si on la mène assez loin, débouche sur le fond même des notions mathématiques évoquées et sur leur introduction pédagogique éventuelle. Les formateurs (I.D.E.N., professeurs d'E.N., animateurs des I.R.E.M....) trouveront peut-être dans quelques-unes de ces rubriques un outil pour un travail en commun avec les collègues en formation initiale ou continue. Mais nous espérons surtout qu'elles seront lisibles et utilisables par les instituteurs isolés.

*

*

*

Toutes les remarques, critiques, suggestions seront accueillies avec reconnaissance.

Ecrire à :

Jacques LECOQ
16, rue du Plateau Fleuri, 14000 CAEN

Juin 1984
La Commission "MOTS"

MOTS I contient : ÉGALITÉ ; EXEMPLE et CONTRE-EXEMPLE ; COUPLE ; RELATION BINAIRE ; NOMBRE NATUREL ; ENTIERS et RATIONNELS ; NOMBRE DÉCIMAL, NOMBRE A VIRGULE ; FRACTION ; ENSEMBLES DE NOMBRES.

MOTS II contient : REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES ; APPLICATION, FONCTION, BIJECTION ; PARTITION, ÉQUIVALENCE ; PARTAGES ; DIVISIBILITÉ ; DIVISION EUCLIDIENNE ; DIVISION.

MOTS III contient : NUMÉRATION ; OPÉRATION, LOI DE COMPOSITION ; COMMUTATIVITÉ ; ASSOCIATIVITÉ ; DISTRIBUTIVITÉ ; ÉLÉMENTS REMARQUABLES POUR UNE LOI DE COMPOSITION ; PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS ; CONGRUENCES ; ORDRE ; PROPRIÉTÉS DES RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE ; PRÉ-ORDRE ; COMPARAISON DES ORDRES USUELS DANS LE DICTIONNAIRE, DANS N , DANS D^* .

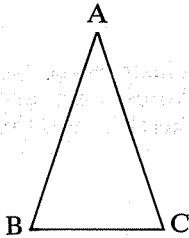
MOTS IV contient : APPLICATIONS LINÉAIRES ; PROPORTIONNALITÉ ; OPÉRATEURS MULTIPLICATIFS ; POURCENTAGES, ÉCHELLES... ; ÉQUATION, INÉQUATION ; ENSEMBLE ; CARDINAL ; APPROXIMATION.

MOTS V contient : SEGMENT, LONGUEUR ; SECTEUR, ANGLE ; VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE ; SOLIDES ; PARALLÈLE ; VERTICAL, HORIZONTAL ; EXPOSANT, PUISSANCE. Et un index terminologique des mots mathématiques figurant dans les **cinq premières** brochures.

MOTS VI contient une seule rubrique : GRANDEUR - MESURE. Et un index terminologique propre à cette rubrique.

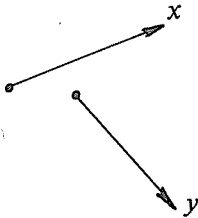
ANGLE (84)

En accord avec le sens le plus courant du mot (l'angle d'une pièce, une maison d'angle, ...), les mathématiciens ont longtemps appelé *angle* une partie de plan limitée par deux demi-droites de même origine. En témoigne la survivance d'expressions comme sommet, côtés, bissectrice d'un angle, etc. Mais de telles façons de parler semblent condamnées par l'évolution du langage mathématique, et cela pour deux raisons.



1° - Il est impossible de concilier l'existence de l'angle en tant qu'ensemble de points avec la notion actuelle d'égalité (voir MOTS I, ÉGALITÉ). Dire que "les angles à la base du triangle isocèle ABC sont égaux" signifierait que ces deux ensembles de points — c'est-à-dire, dans le langage actuel, les deux *secteurs* de sommets B et C — sont confondus; or, cela n'est certes pas ce qu'on voulait exprimer.

C'est seulement si l'on interprète l'angle comme une *classe d'équivalence* de secteurs qu'il devient possible de parler de secteurs "de même angle" (autrement dit $\widehat{B} = \widehat{C}$), de même que les segments [AB] et [AC] sont "de même longueur" ($AB = AC$).



D'ailleurs, les ensembles de points précédents n'existent pas toujours. Pourtant, il est commode de pouvoir parler de "l'angle des demi-droites x et y " même lorsqu'il n'existe aucun secteur de plan dont x et y sont les côtés. La nécessité apparaît donc d'élargir les classes d'équivalence ci-dessus.

2° - De surcroît, ces classes ne sont pas celles d'une *seule* relation d'équivalence. L'angle d'une paire $\{x, y\}$ de demi-droites n'est pas la même classe que l'angle du couple (x, y) de ces demi-droites. S'ajoute à cela le fait que dans certains problèmes, notamment en mécanique, on obtient une infinité de classes — qui sont des angles de rotations (cinématiques) — suivant la façon dont on va de x vers y . Enfin le sommet de l'incohérence est atteint lorsqu'on persiste à qualifier d'orientés des angles pour lesquels le concept d'orientation ne joue aucun rôle, sinon celui d'écran de fumée.

Pour ces raisons, nous jugeons périlleux, et nous nous déclarons d'ailleurs incapables, de définir le mot *angle*, indépendamment de son contexte, dans une rubrique unique. En conséquence nous renvoyons le lecteur

- a) pour les angles-de-secteurs, les angles-de-paires et les angles dans l'espace, à la rubrique SECTEUR-ANGLE (MOTS V);
- b) pour les angles-de-couples et les angles prétendument orientés, aux rubriques ANGLE-DE-COUPLES et ORIENTATION;
- c) pour les angles "cinématiques", à la rubrique PHASE, où sont rassemblés dans un tableau synoptique les objets usuellement dénommés "angles".

Nous avons conscience qu'en agissant ainsi nous heurtons certaines habitudes; mais plus encore, nous nous sommes efforcés de respecter celles qui demeurent légitimes. Surtout nous avons cherché, dans l'intérêt de tous les utilisateurs, *un vocabulaire honnête*.

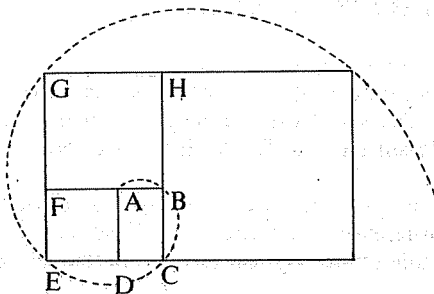
SYMÉTRIE (84)

- I. Les origines
- II. Symétries orthogonales
- III. Symétries affines
- IV. Autosymétries
- V. Autosymétries généralisées
- VI. Symétries en algèbre et en analyse
- VII. Symétries en mécanique et physique
- VIII. Du bon usage de la symétrie
- IX. "Par raison de symétrie"

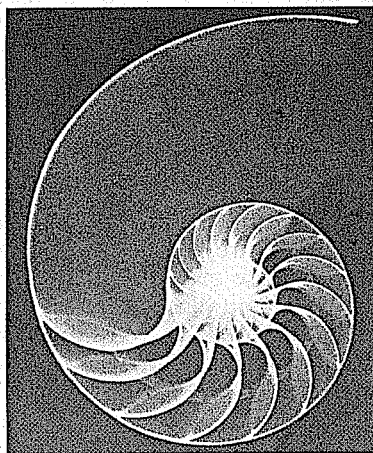
Symétrie, symétrique : exemple typique de mots dont le sens s'est tout à la fois modifié et diversifié ; certaines acceptions anciennes ont subsisté à côté de plus récentes. Aussi, dans l'état actuel, toute définition qui prétendrait à une parfaite généralité serait vouée à l'échec.

I. LES ORIGINES

Chez les Grecs, *summetria*, c'est littéralement l'accord des mesures. Cependant, cet accord peut être plus ou moins rigoureux. Quand un personnage d'Euripide propose qu'on vérifie si l'empreinte laissée par une chaussure est *summetros* au pied d'Electre, il pense évidemment à une concordance passablement exacte. Mais on passe facilement de là à l'acception plus vague *proportionné à*, souvent avec une connotation d'élégance ou d'harmonie. C'est plutôt ce sens élargi que retient la mathématique grecque : un exemple de *summetria* est fourni par le célèbre Nombre d'or : si un rectangle ABCD est tel qu'en lui adjoignant le carré ADEF construit sur l'un de ses grands côtés, on obtienne un rectangle BCEF qui lui soit semblable, le rapport $\frac{BC}{AB}$ est le Nombre d'or, à savoir $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



Naturellement, dans le nouveau rectangle, $\frac{CE}{BC}$ est $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; si on lui adjoint un carré BFGH, $\frac{EG}{CE}$ est encore $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. La construction peut se poursuivre indéfiniment. On a donc affaire à une similitude en quelque sorte organique, capable de s'engendrer elle-même de proche en proche. D'ailleurs, la *spirale logarithmique* (la courbe pointillée du dessin ci-dessus) a été inventée, quelques centaines de millions d'années avant que ne paraissent les géomètres, par certains mollusques comme le Nautilus : à chaque stade de la croissance, la dernière loge de la coquille, celle qu'occupe l'animal, reste *summetros* à celui-ci, au premier sens de ce mot ; et *summetros* à chacune des loges précédentes, au sens de *similitude*.



Nautilus

II. SYMÉTRIES ORTHOGONALES

A l'époque moderne, la géométrie classique a donné aux mots *symétrie*, *symétrique* un sens plus spécialisé, comportant toutefois plusieurs variantes. Ces sens sont demeurés vivaces dans l'enseignement élémentaire, le dessin décoratif, l'architecture, etc.

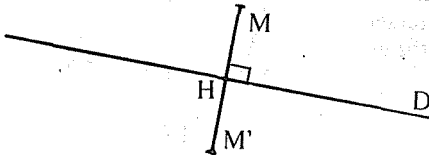
II — 1. On se place dans l'espace usuel de dimension 2 (géométrie du plan) ou de dimension 3 (géométrie de l'espace), et l'on se donne soit un point A, soit une droite D, soit (en géométrie de l'espace seulement) un plan P.

II-1.1. Le *symétrique* d'un point M par rapport au point A est le point M' tel que A soit le milieu de $[MM']$.

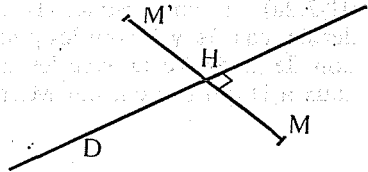


(figure du plan ou de l'espace)

II-1.2. Le *symétrique* d'un point M par rapport à la droite D est le point M' tel que la perpendiculaire menée par M à D contienne M' et que D coupe $[MM']$ en son milieu H .

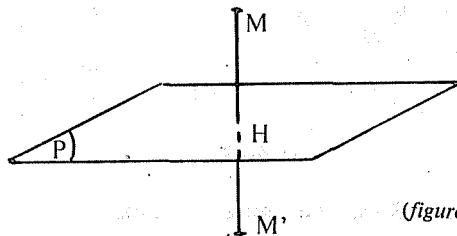


(figure du plan)



(figure de l'espace)

II-1.3. Le *symétrique* d'un point M par rapport au plan P est le point M' tel que la perpendiculaire menée par M à P contienne M' et que P coupe $[MM']$ en son milieu H .



(figure de l'espace)

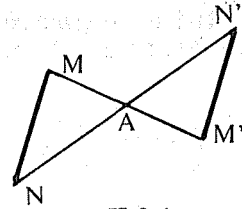
Les trois symétries classiques sont les *transformations* (1) du plan ou de l'espace qui à tout point M font correspondre, dans chacun des trois cas ci-dessus, son symétrique M' : la symétrie par rapport au point A , ou de *centre* A , la symétrie par rapport à la droite D , ou d'*axe* D (2), la symétrie par rapport au plan P .

II — 2. Dans chacune de ces trois symétries, tout segment de droite $[MN]$ a pour image un segment de droite $[M'N']$. On notera :

(1) Le mot *transformation*, consacré par l'usage, ne désigne ici rien d'autre qu'une bijection du plan ou de l'espace vers lui-même.

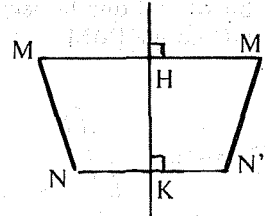
(2) Le mot *axe* n'a pas ici le sens de *droite graduée* qu'il a dans d'autres contextes (voir MOTS V : VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE).

1°) que la figure II-2.1 s'interprète à volonté comme une figure du plan ou une figure de l'espace ;

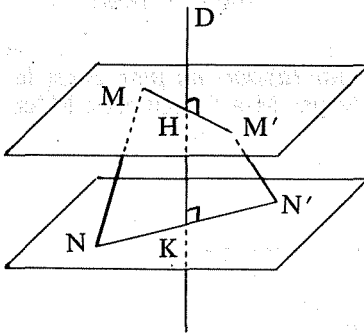


II-2.1

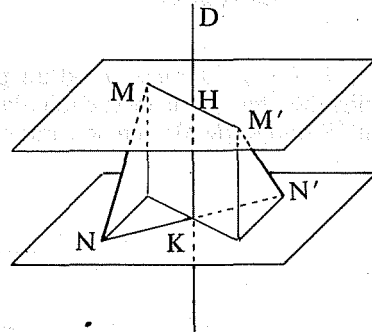
2°) que la figure II-2.2 revêt deux aspects selon qu'on opère dans le plan (II-2.2a) ou dans l'espace (II-2.2b) ; dans ce dernier cas, H et K sont les points d'intersection de la droite D avec les plans orthogonaux à D qui passent par M et N ;



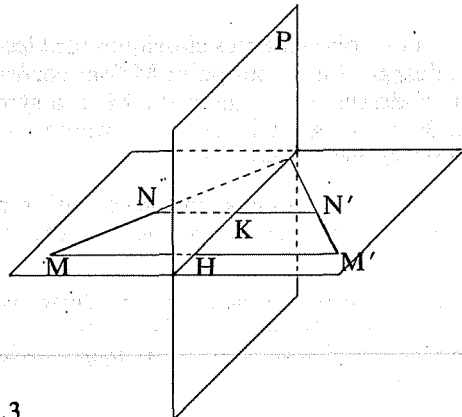
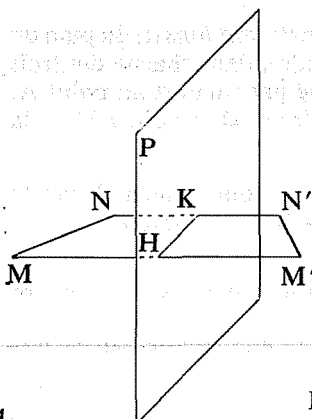
II-2.2a



II-2.2b



3°) que la figure II-2.3 est une figure de l'espace.



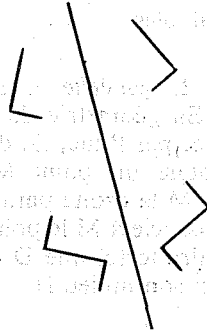
II-2.3

Le fait important est que, dans tous les cas, chaque segment a pour image un segment de *même longueur*. Toutes les symétries de ce paragraphe II sont donc des *isométries* (voir ORIENTATION, VI-3).

Cette conservation des longueurs entraîne la conservation des aires, des volumes, des angles, des angles dièdres, pourvu toutefois qu'on laisse de côté les questions d'orientation; sinon, l'analyse de la situation devient plus délicate.

Renvoyant à la rubrique ORIENTATION, nous nous contenterons de rappeler ici qu'une figure et sa symétrie peuvent n'être pas "superposables"; cela se produit :

- dans le plan, si on ne peut pas amener l'une d'elles sur l'autre par un simple glissement; c'est le cas de la lettre L ci-contre et de sa symétrie par rapport à une droite; il en est de même pour l'autre dessin;



- dans l'espace, si aucun "moule" de l'une ne peut être un "moule" de l'autre; c'est le cas d'une main et de sa symétrie par rapport à un plan.

On dit que de telles symétries sont des symétries *negatives*.

Par abus de langage, on finit même par qualifier de *symétriques* deux figures respectivement superposables à deux figures dont l'une est la symétrique de l'autre par une symétrie négative.

Par exemple, vu que les deux mains d'une personne peuvent être placées de façon que chacune soit, du moins en première approximation, symétrique de l'autre par rapport à un plan, on continue à les dire "symétriques" quelles que soient leurs positions.

II — 3. Une généralisation très vaste, que nous ne développerons pas ici, consiste à se placer dans des espaces de dimension plus grande que 3. La complexité s'accroît à mesure que la dimension s'élève, en même temps que s'amenuisent les possibilités de représentation visuelle; mais, pour l'essentiel, rien n'est changé.

Toutes ces symétries sont des isométries et on les englobe habituellement sous la dénomination de *symétries orthogonales* (1) lorsqu'on juge utile de les distinguer de celles qui vont faire l'objet du paragraphe suivant.

(1) Le mot *orthogonales* est pris ici dans un sens plus large (celui de "groupe orthogonal") que le sens élémentaire, qui évoque l'angle droit.

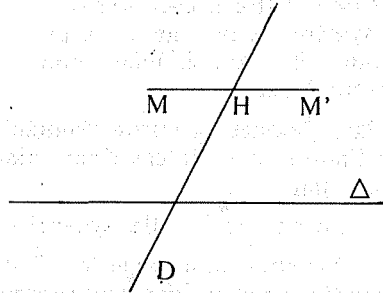
III. SYMÉTRIES AFFINES

III — 1. Supposons à présent qu'on dispose encore du parallélisme mais qu'on ne veuille plus ou qu'on ne puisse plus disposer de l'orthogonalité.

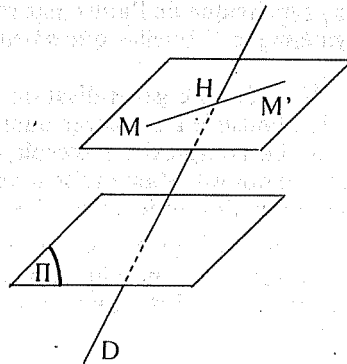
III-1.1. Symétrie par rapport à un point donné. La définition qui découle de II-1.1 peut être conservée; les figures de II-1.1 et II-2.1 restent valables.

III-1.2. Symétrie de direction donnée par rapport à une droite donnée. En géométrie du plan, soit (Δ) une direction de droites — représentée par l'une, Δ , de ses droites — et une droite D sécante à Δ . Etant donné un point M , on mène par M la droite parallèle à Δ et on associe à M le point M' de cette droite tel que D coupe $[MM']$ en son milieu H .

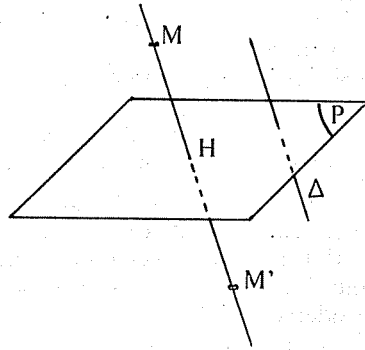
Cette symétrie s'est longtemps appelée "symétrie oblique". Mais il est illogique de parler d'obliquité dans un plan où on ne s'est pas donné les moyens de reconnaître l'angle droit; c'est pourquoi il vaut mieux appeler cette transformation *symétrie de direction (Δ) par rapport à la droite D* .



III-1.3. Symétrie de direction de plans donnée par rapport à une droite donnée. En géométrie de l'espace, soit (Π) une direction de plans — représentée par l'un, Π , de ses plans — et une droite D sécante à Π . Etant donné un point M , on mène par M la droite parallèle à Π et rencontrant D , et on associe à M le point M' de ce plan tel que D coupe $[MM']$ en son milieu H . Cette transformation est appelée *symétrie de direction (Π) par rapport à la droite D* .



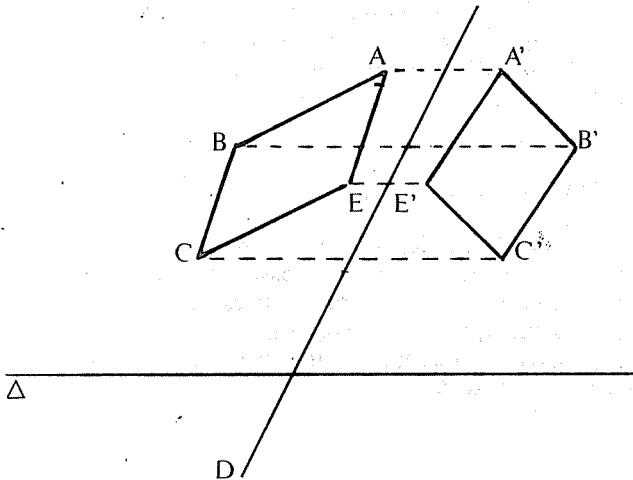
III-1.4. *Symétrie de direction de droites donnée par rapport à un plan donné.* En géométrie de l'espace, soit (Δ) une direction de droites — représentée par l'une, Δ , de ses droites — et un plan P sécant à Δ . Etant donné un point M , on mène par M la droite parallèle à Δ , et on associe à M le point M' de cette droite tel que P coupe $[MM']$ en son milieu H . Cette transformation est appelée *symétrie de direction (Δ) par rapport au plan P* .



III — 2. Toutes ces symétries conservent le parallélisme; mais elles ne conservent ni les angles, ni les angles dièdres, ni les longueurs (1).

Par contre, pourvu qu'on laisse encore de côté les questions d'orientation,

en géométrie du plan, la conservation des aires est assurée; ainsi, sur la figure ci-dessous, aire $ABCE = \text{aire } A'B'C'E'$;



en géométrie de l'espace, les volumes sont conservés mais les aires ne le sont pas.

(1) Il va de soi que la question ne se pose pas si on se place dans le cadre de la géométrie affine non euclidienne, où on ne s'est pas donné les moyens d'envisager ces diverses grandeurs.

III — 3. Pas plus qu'en II — 3., l'extension à des espaces de dimension supérieure n'apporte de modification profonde. On peut englober toutes ces symétries sous l'appellation de *symétries affines*; les symétries orthogonales du paragraphe II apparaissent comme des symétries affines particulières.

III — 4. Toutes les symétries affines (et, en particulier, les symétries orthogonales) ont en commun les propriétés suivantes :

III-4.1. Le point A dans le cas III-1.1 (figure en II.1.1) a pour symétrique le point A lui-même; de même, chaque point de la droite D en III-1.2 et III-1.3, chaque point du plan P en III-1.4, est son propre symétrique : on dit que ces points sont *invariants* par la symétrie considérée.

III-4.2. Si, par une symétrie S donnée, le symétrique d'un point M est le point M', alors le symétrique du point M', par la même symétrie, est le point M : $S(M) = M'$ et $S(M') = M$. En d'autres termes :

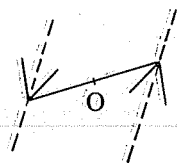
- pour tout point M, $S(S(M)) = M$; la composée d'une symétrie avec elle-même est donc la transformation identité I, ce qu'on écrit habituellement $S^2 = I$ (voir généralisation en V — 1);

- toute symétrie S est sa propre réciproque, ce qu'on écrit habituellement $S^{-1} = S$; cela entraîne pour le vocabulaire une conséquence, courante en pareil cas, concernant l'emploi du pluriel : on dit que "M et M' sont *symétriques l'un de l'autre*", ce qu'on abrège souvent en "M et M' sont *symétriques*". Cette tournure s'étend à deux segments, à deux figures (voir aussi VI — 1 et VI-3.1).

IV. AUTOSYMÉTRIES

Lorsque, par l'une des symétries précédentes, une figure a pour transformée elle-même, on pourrait assez justement la dire *autosymétrique*. En fait, l'usage le plus répandu est de dire qu'elle *admet une symétrie*, ou même qu'elle *est symétrique* par rapport à tel point, telle droite, tel plan (1). Ce glissement du sens aura des conséquences importantes pour toute la suite.

(1) La suppression simultanée de "l'une de l'autre" dans la phrase "Ces deux figures sont symétriques l'une de l'autre" (voir dernier alinéa de III-4.2) et du préfixe "auto" crée une ambiguïté : dire que "les deux figures ci-contre sont symétriques", est-ce dire que chacune d'elles est autosymétrique par rapport à une droite (dessinée en pointillé) ou qu'elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport au point O ?

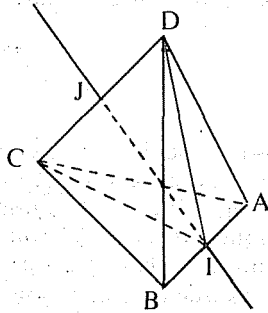


IV — 1. Exemples d'autosymétries orthogonales

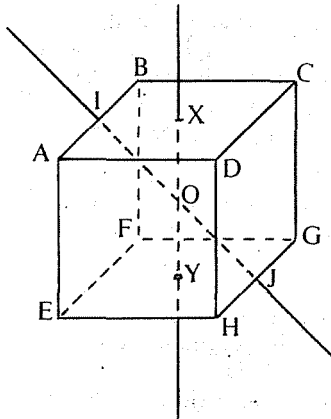
IV-1.1. Les nombreux exemples de figures planes admettant une ou plusieurs symétries orthogonales (triangle isocèle, triangle équilatéral, parallélogramme, rectangle, losange, carré, cercle, etc.) sont trop connus pour que nous insistions sur eux.

IV-1.2. En géométrie de l'espace, citons parmi les figures symétriques (voir SOLIDES, MOTS V) :

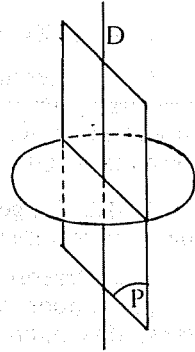
- le tétraèdre régulier,
 - par rapport à chacun des 6 plans, dits *plans médians*, tels que CDI , passant par une arête et le milieu de l'arête opposée ;
 - par rapport à chacune des 3 droites, telles que (IJ) , joignant les milieux de deux arêtes opposées ;
 soit, en tout : 9 symétries ;



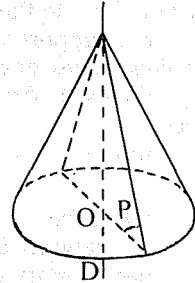
- le cube,
 - par rapport à son centre O ;
 - par rapport à chacune des 3 droites, telles que (XY) , joignant les centres de deux faces opposées ;
 - par rapport à chacune des 6 droites, telles que (IJ) , joignant les milieux de deux arêtes opposées ;
 - par rapport à chacun des 3 plans médiateurs d'arêtes, comme $XYIJ$;
 - par rapport à chacun des 6 plans diagonaux, tels que $ABGH$;
 soit, en tout : 19 symétries.



IV-1.3. Toute figure plane est, dans l'espace, symétrique par rapport à son propre plan. Outre cette symétrie triviale, toute figure plane qui admet déjà des symétries dans son plan en acquiert de nouvelles dans l'espace. Par exemple, le cercle est symétrique par rapport à son axe D (droite passant par son centre et perpendiculaire à son plan) et par rapport à chacun des plans, tels que P, qui contiennent cette droite.



IV-1.4. De là découle une propriété très générale : toute figure de révolution (cylindre de révolution, cône de révolution, tore, etc.) est symétrique par rapport à son axe et par rapport à chacun des plans passant par son axe ; ces plans, tels que le plan P pour le cône ci-contre, sont appelés *plans méridiens* de la surface de révolution.

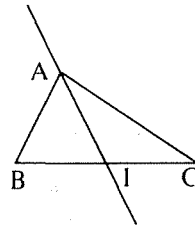


Dès lors, outre la symétrie par rapport à son centre, la sphère, puisqu'elle est de révolution autour de n'importe laquelle de ses droites diamétrales, admet des symétries par rapport à chacune d'elles et par rapport à chacun de ses plans diamétraux.

IV — 2. Exemples d'autosymétries affines

IV-2.1. En géométrie du plan :

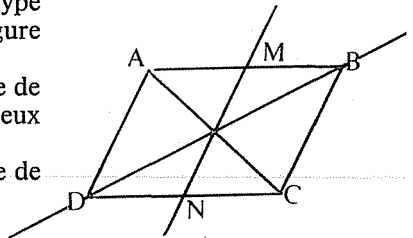
- si l'on prend pour direction de la symétrie celle du côté (BC) d'un triangle ABC, celui-ci est symétrique par rapport à la médiane (AI) relative à [BC] ; naturellement, il existe une symétrie analogue par rapport à chacune des deux autres médianes ;



- dans le parallélogramme (outre la symétrie par rapport au centre) on reconnaît l'existence de 4 symétries du type défini en III-1.2 ; parmi elles, sur la figure ci-contre :

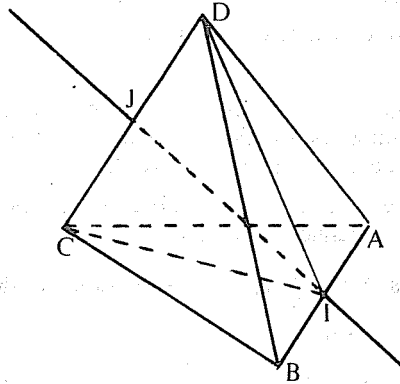
- la symétrie dont la direction est celle de (AB) par rapport à la droite joignant les milieux M et N des côtés [AD] et [BC]

- la symétrie dont la direction est celle de (AC) par rapport à la droite (BD).



IV-2.2. Dans l'espace, si l'on prend pour direction de la symétrie celle de l'arête (AB) du tétraèdre ABCD, celui-ci est symétrique par rapport au plan médian CDI passant par l'arête (CD) et par le milieu I de l'arête [AB].

De même, le tétraèdre est symétrique par rapport à la droite des milieux (IJ) pourvu qu'on prenne pour direction de la symétrie la direction de plans qui contient les directions des droites (AB) et (CD).



Pour ces deux symétries, la figure, dessinée en perspective ci-dessus, ne se distingue pas de la figure de IV-1.2. Sur cette dernière, le plan CDI était perpendiculaire à (AB), et la droite (IJ) était la perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD); rien de tel ne peut être affirmé ici.

V. AUTOSYMÉTRIES GÉNÉRALISÉES

V — 1. Symétries (ou répétitions) d'ordre n (n : naturel non nul).

Etendant la propriété signalée en III-4.2, on peut appeler *symétrie d'ordre n* toute transformation S telle que :

a) la composée de n transformations égales à S soit la transformation identité I : $\underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ composantes } S} = I$, ce qu'on écrit habituellement $S^n = I$.

b) on ne puisse obtenir I avec des composantes S en nombre plus petit que n .

De ce point de vue, les symétries rencontrées jusqu'ici sont d'ordre 2, la transformation identité elle-même pouvant être dite "symétrie d'ordre 1".

V-1.1. Dans la pratique, cependant, on ne s'intéresse qu'au cas où S est une rotation : dire qu'une figure admet une symétrie d'ordre n

signifie qu'elle est transformée en elle-même par une rotation dont l'angle est le n -ième du tour, ou plus généralement $\frac{k}{n}$ tr, où k et n sont des naturels étrangers (1). Cette dernière restriction est indispensable ; car, si $n = 6$ par exemple, et si on note R la rotation d'angle $\frac{4}{6}$ tr, alors RoRoR est la transformation identité I : une figure invariante par une telle rotation admet donc une symétrie d'ordre 3, mais il n'est pas certain qu'elle en admette une d'ordre 6 ; au contraire, si l'angle est $\frac{5}{6}$ tr, la figure admet bien une symétrie d'ordre 6.

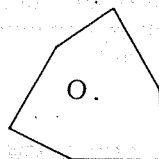
V-1.2. Ainsi, en géométrie du plan, le centre d'un triangle équilatéral est le centre de 2 symétries d'ordre 3 (on dit aussi "ternaires") ; celui du carré est le centre de 2 symétries d'ordre 4.

De façon générale, le centre d'un polygone régulier de n côtés est le centre de plusieurs symétries d'ordre n :

rotations d'angles $\frac{1}{5}$ tr, $\frac{2}{5}$ tr, $\frac{3}{5}$ tr, $\frac{4}{5}$ tr dans les deux pentagones réguliers (convexe et étoilé),

rotations d'angles $\frac{1}{6}$ tr et $\frac{5}{6}$ tr dans l'hexagone régulier, etc.

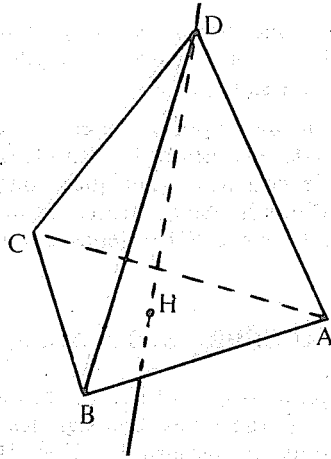
Mais les polygones réguliers ne sont pas les seuls à présenter de telles symétries : l'hexagone ci-contre admet 2 symétries ternaires de centre O.



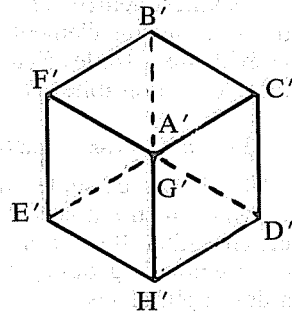
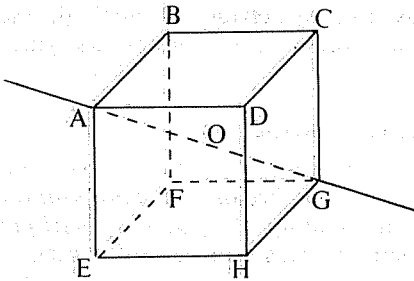
V-1.3. De même dans l'espace : l'axe d'un prisme régulier ou d'une pyramide régulière ayant n faces latérales est, pour ces solides, axe de symétrie d'ordre n . En particulier, le tétraèdre régulier possède 4 axes ternaires, tels que (DH), contenant un sommet et le centre de la face

(1) Naturels n'ayant pas d'autre diviseur commun que 1 (on dit aussi ; "premiers entre eux").

opposée, et le cube admet 3 axes d'ordre 4, les droites telles que (XY) de la figure de IV-1.2.



D'autres symétries ou répétitions peuvent se présenter : ainsi les diagonales du cube, telles que (AG) ci-dessous, sont 4 axes ternaires. C'est en raison de cette symétrie ternaire que le projeté orthogonal d'un cube sur un plan perpendiculaire à une de ses diagonales est une figure (voir ci-dessous) qui admet un centre ternaire, comme on s'en rend compte en regardant le cube depuis un point de la droite (AG) suffisamment éloigné du cube : B'C'D'H'E'F', projeté de BCDHEF, est un hexagone régulier.



V — 2. De proche en proche, le mot *symétrie* finit par signifier, dans certains cas, *invariance par rotation*.

Dire qu'une figure admet une *symétrie de révolution*, c'est dire qu'il existe une droite telle que la figure est invariante par *toute* rotation autour de cette droite.

Dire qu'une figure admet une *symétrie sphérique* de centre K, c'est dire qu'elle est invariante par n'importe quelle rotation autour de n'importe quelle droite passant par K.

A vrai dire, ces locutions s'appliqueraient en géométrie, la première uniquement aux figures de révolution, la seconde uniquement aux sphères ou aux réunions de couches sphériques concentriques ; elles n'y offrent donc que peu d'intérêt. Au contraire, en mécanique et en physique, nous verrons dans la partie VII qu'elles sont porteuses d'information.

VI. SYMÉTRIES EN ALGÈBRE ET EN ANALYSE

Le langage de la géométrie a infiltré ces branches des mathématiques, où l'on retrouve les traces des sens signalés plus haut. Ainsi, en VI-1, on retrouvera le sens des paragraphes II et III. Dans la suite, c'est le sens "autosymétrie" des paragraphes IV et V qui s'étendra à toutes sortes de propriétés d'invariance ou apparentées.

VI — 1. Éléments symétriques.

Dans un ensemble muni d'une opération notée $*$, pour laquelle il existe un élément neutre e , considérons un élément a : s'il existe un élément a' tel que $a * a' = a' * a = e$ (Voir MOTS III), cet élément est souvent appelé *inverse de a* ; mais il est dit *opposé de a* dans le cas des opérations notées additivement ; quand on veut disposer d'un vocable qui couvre tous les cas, on dit *symétrique de a* .

L'élément neutre est symétrique de lui-même ; si l'opération est associative, aucun élément n'a plus d'un symétrique. L'analogie est alors évidente entre les éléments symétriques a et a' et les points symétriques des paragraphes II et III.

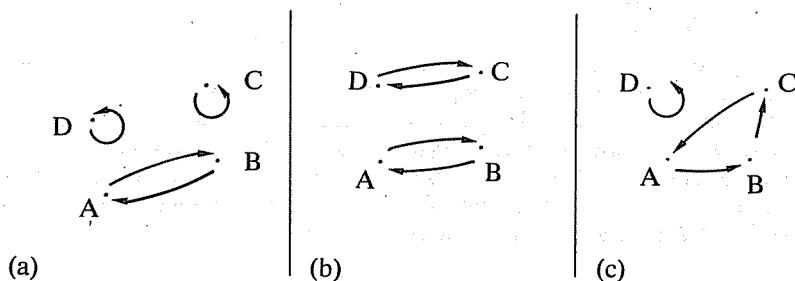
VI — 2. Groupe symétrique ; groupe alterné.

VI-2.1. Un exemple immédiat d'invariance est fourni par une bijection d'un ensemble sur lui-même, c'est-à-dire par une *permutation* de cet ensemble. Il est donc naturel qu'on ait appelé *groupe symétrique* d'un ensemble le groupe (1) de ses permutations pour la loi "composition des applications".

(1) Soit E un ensemble muni d'une loi de composition notée $*$. " $(E, *)$ est un groupe" signifie que :

la loi $*$ est associative,
il existe dans E un élément neutre pour cette loi,
tout élément de E possède un symétrique au sens de VI-1.

Les schémas fléchés (a), (b), (c) représentent trois des vingt-quatre permutations d'un ensemble $\{A, B, C, D\}$ à quatre éléments :



On constatera que, dans l'ensemble des sommets d'un tétraèdre ABCD, ces permutations résultent des symétries déjà rencontrées :

pour (a), la symétrie par rapport au plan médian CDI de IV.1.2 ;
 pour (b), la symétrie par rapport à la droite des milieux (IJ) de IV.1.2 ;
 pour (c), l'une des symétries d'ordre 3 signalées en V-1.3 ; elle est d'axe (DH).

VI-2.2. L'analyse peut être poussée plus loin. On appelle *transposition* toute permutation qui laisse invariants tous les éléments, sauf deux qu'elle échange. Alors la permutation de (a) est une transposition, tandis que celle de (b) est la composée de deux transpositions. Qu'en est-il de celle de (c) ? On peut l'obtenir également en composant deux transpositions : par exemple, celle qui laisse C et D invariants et qui échange A et B, puis celle qui laisse invariants B et D et qui échange A et C ; symboliquement : $ABCD \rightarrow BACD \rightarrow BCAD$.

Un tel résultat est général : dans tout ensemble fini de plus d'un élément, toute permutation peut être considérée, de différentes manières, comme composée de transpositions, et on démontre même que la parité du nombre des transpositions composantes ne dépend que de la permutation considérée.

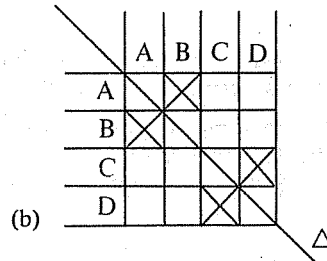
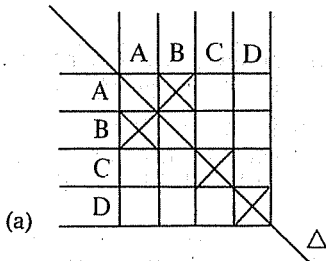
Il est alors possible de classer les permutations d'un ensemble de plus d'un élément pour moitié en permutations paires et, pour l'autre moitié, impaires. Les premières constituent, au sein du groupe symétrique, le *groupe alterné* ; les secondes sont à rapprocher des symétries qu'on a appelées négatives (II-2 et III-2), comme le suggère l'exemple du schéma (a).

VI — 3. Relations symétriques et relations antisymétriques

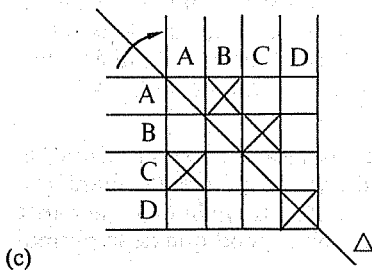
VI-3.1. On a défini dans MOTS III (PROPRIÉTÉS DES RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE) ce qu'est une relation binaire symétrique

$\mathcal{R}$ dans un ensemble. Comme en III-4.2., une telle relation est sa propre réciproque ($\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$) et l'emploi du pluriel "*a* et *b* vérifient $\mathcal{R}$ " devient acceptable sans qu'on ait à préciser lequel, de *a* et de *b*, est l'image de l'autre.

Le schéma cartésien d'une relation symétrique dans un ensemble admet une symétrie géométrique par rapport à la diagonale Δ (voir figures). Reprenons par exemple, dans l'ensemble des sommets d'un tétraèdre ABCD, les relations de liens verbaux "sont symétriques par rapport au plan médian CDI" et "sont symétriques par rapport à la droite des milieux (IJ)". Leurs schémas fléchés ne sont autres que les schémas (a) et (b) de VI-2.1 ; voici leurs schémas cartésiens :



Par contre, la relation présentée par le schéma (c) de VI-2.1. n'est pas une relation symétrique au sens présent. Son schéma cartésien, ci-



contre, n'est pas symétrique par rapport à la diagonale Δ . Remarque : sur le schéma (c), on ne peut se dispenser de mettre une flèche indiquant le sens de lecture, alors que sur les schémas (a) et (b), relatifs à des relations symétriques, l'information est complète même en l'absence de flèche.

VI-3.2. Ce qui précède peut être étendu aux relations *n*-aires (1).

(1) On a signalé dans la rubrique RELATION BINAIRE, de MOTS I, que les relations *binaires* sont seulement un cas particulier, d'ailleurs important. La définition donnée au paragraphe III de cette rubrique se généralise comme suit.

Soient des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ (pas nécessairement tous distincts), et $\mathcal{G}$ une partie de leur produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$; le $(n+1)$ -uplet $(A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{G})$ détermine une relation $\mathcal{R}$ dite *n*-aire. Par définition,

" $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifie $\mathcal{R}$ "

signifie

" $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ appartient à $\mathcal{G}$ "

On peut encore appeler $\mathcal{G}$ le *graphe* de cette relation.

Dire qu'une relation n -aire $\mathcal{R}$ est symétrique, c'est dire que, si $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifie $\mathcal{R}$, alors tout n -uplet obtenu en permutant $a_1, a_2, \dots, a_n$ vérifie $\mathcal{R}$.

Exemple : Considérons, dans l'ensemble des sommets du cube de la figure de V-1.3, la relation ternaire de lien verbal "déterminent un plan perpendiculaire à la diagonale (AG)". L'emploi du pluriel dans cette formulation annonce déjà que cette relation est symétrique ; elle est en effet vérifiée par les triplets (B,D,E) et (C,F,H) et par tous ceux qu'on obtient à l'aide de permutations de l'ensemble {B,D,E} et de l'ensemble {C,F,H}.

Contre-exemple : Considérons dans l'ensemble des points d'une droite la relation φ définie par :

$\varphi(x,y,z)$ équivaut à "x est situé entre y et z"

Cette relation n'est pas symétrique.

VI-3.3. Soient a,b,c,d quatre nombres réels. L'égalité

$$(E) \quad (a+b)(c+d) - 2(ab+cd) = 0$$

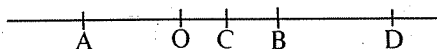
détermine plusieurs relations, parmi lesquelles :

- la relation 4-aire dont le graphe est l'ensemble des quadruplets qui vérifient l'équation (E) d'inconnue (a,b,c,d) ; or $(-1 ; 1 ; \frac{1}{2} ; 2)$ par exemple vérifie (E), alors que $(-1 ; \frac{1}{2} ; 1 ; 2)$ ne la vérifie pas ; cette relation 4-aire n'est donc pas symétrique ;

- les relations binaires dans $\mathbf{R}$ qu'on obtient en fixant arbitrairement c et d ; chacune d'elles est symétrique, car l'égalité qui découle de (E) par échange de a et b est équivalente à (E) ;

- les relations binaires dans $\mathbf{R}$ qu'on obtient en fixant arbitrairement a et b ; chacune d'elles est symétrique, pour une raison analogue ;

- la relation binaire dans $\mathbf{R}^2$ dont le graphe est l'ensemble des couples qui vérifient (E) considérée cette fois comme équation d'inconnue $((a,b), (c,d))$; cette relation est symétrique, les couples (a,b) et (c,d) jouant des rôles interchangeables dans (E).



Remarque : A,B,C,D étant quatre points d'une droite graduée dont les abscisses respectives a,b,c,d vérifient (E), on aura reconnu dans (A,B,C,D) un *quadruplet harmonique*.

A et B ont des rôles permutable ; C et D aussi ; {A,B} et {C,D} également.

VI-3.4.

$\mathcal{R}$ étant une relation binaire dans un ensemble E ,

$\mathcal{R}$ est *antisymétrique*

signifie :

L'un au plus des deux couples (a,b) et (b,a)
d'éléments de E est élément du graphe de $\mathcal{R}$

Cette définition ne donne aucune information sur les couples de la forme (a,a) . On rappelle à titre d'exemple que les relations d'ordre (MOTS III) sont antisymétriques, qu'elles soient réflexives ("ordre large") ou antiréflexives ("ordre strict").

VI — 4. Fonctions symétriques et fonctions antisymétriques

Nous nous bornerons ici à des fonctions dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

VI-4.1.

f étant une fonction de 2 variables,

f est *symétrique*

signifie :

Chaque fois que (x,y) a une image, alors (y,x)
en a une aussi, et c'est la même.

Par abus de langage, on dit que f est invariante par échange des variables.

La représentation cartésienne d'une telle fonction, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) où $z = f(x,y)$, est une figure autosymétrique ; dans le cas où le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport au plan contenant Oz et la bissectrice des premier et troisième quadrants du plan xOy .

Les exemples élémentaires sont nombreux :

$$(x,y) \longmapsto x+y$$

$$(x,y) \longmapsto \sqrt{x^4 + y^4}$$

$$(x,y) \longmapsto xy$$

$$(x,y) \longmapsto \cos(x+y)$$

$$(x,y) \longmapsto |x-y|$$

$$(x,y) \longmapsto \cos(x-y)$$

$$(x,y) \longmapsto x^2 - xy + y^2$$

$$(x,y) \longmapsto 5$$

Autre exemple : dans un tableau carré de nombres (par exemple celui d'une matrice), on peut considérer que le terme a_{ij} est fonction du couple (i,j) qui caractérise sa position : il est situé dans la ligne numéro i et dans la colonne numéro j . Dire que le tableau est symétrique signifie que pour tout couple (i,j) , $a_{ij} = a_{ji}$, ou encore que les termes qui occu-

pent des cases symétriques par rapport à la diagonale Δ du tableau sont un même nombre.

		Colonnes		
Lignes		1	2	3
	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Δ

Ainsi $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

VI-4.2. Voici deux exemples de fonctions symétriques de plus de deux variables :

$(x, y, z) \mapsto (x + y)(y + z)(z + x)$; on constate que les 6 triplets ayant pour composants x, y, z , à savoir (x, y, z) , (x, z, y) , (y, x, z) , (y, z, x) , (z, x, y) et (z, y, x) , ont la même image ;

$(x, y, z, t) \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}}{x + y + z + t}$; on constate de même que les 24 quadruplets ayant pour composants x, y, z et t ont la même image.

Ces exemples conduisent à étendre la définition de VI-4.1 :

f étant une fonction de 3 variables,
 f est symétrique
 signifie :
 Chaque fois que (x, y, z) a une image, alors les 6 triplets dont les composants sont x, y et z ont chacun une image, la même pour tous.

Cette définition s'étend à plus de 3 variables.

Par le même abus de langage qu'en VI-4.1, on dit que f est invariante par toute permutation des variables.

VI-4.3. Soit f la fonction de 4 variables :

$$f \Big| \begin{matrix} \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R} \\ (a, b, c, d) \mapsto (a + b)(c + d) - 2(ab + cd) \end{matrix}$$

Cette fonction n'est pas symétrique.

- Choisissons (c,d) égal à $(3; 5)$ et considérons la fonction g de 2 variables :

$$g \mid \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \\ (a,b) \mapsto (a+b)(3+5) - 2(ab + 3 \times 5) \end{array}$$

Cette fonction est symétrique.

Pour tout autre choix de (c,d) , on obtient encore une fonction symétrique de 2 variables.

Il en serait de même si l'on fixait le couple (a,b) . On remarquera que si on le choisit égal à $(3; 5)$, on obtient la fonction g ci-dessus.

- Enfin, considérons la fonction j de deux variables :

$$j \mid \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \\ ((a,b), (c,d)) \mapsto (a+b)(c+d) - 2(ab+cd) \end{array}$$

Cette fonction j est symétrique.

- Par un abus de langage, commode, on dit que : $(a+b)(c+d) - 2(ab+cd)$ n'est pas une fonction symétrique des 4 variables a,b,c,d , mais est une fonction symétrique des 2 variables a et b d'une part, des 2 variables c et d d'autre part, et enfin des deux variables (a,b) et (c,d) .

Ce qui précède explicite le dernier alinéa de VI-3.3 : A et B ont des rôles permutable, C et D aussi, $\{A,B\}$ et $\{C,D\}$ également.

On trouvera en VIII-3.1 un exemple de calcul sur une fonction symétrique de trois variables.

VI-4.4.

f étant une fonction de 2 variables,

f est *antisymétrique*

signifie

Chaque fois que (x,y) a une image, alors (y,x) en a une aussi et ces deux images sont opposées l'une de l'autre.

La représentation cartésienne d'une telle fonction, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) où $z = f(x,y)$, est une figure autosymétrique; dans le cas où le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la bissectrice des premier et troisième quadrants du plan xOy .

Exemples :

$(x,y) \mapsto x^2 - y^2$: en effet, (x,y) et (y,x) ont respectivement pour images $x^2 - y^2$ et $y^2 - x^2$, qui sont deux nombres opposés ;

$(x,y) \mapsto \sin(x-y)$: en effet, $\sin(x-y) = -\sin(y-x)$.

On peut aussi reprendre l'exemple des tableaux carrés, mais cette fois $a_{ij} = -a_{ji}$, et, en conséquence, $a_{ii} = 0$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

VI-4.5. La définition donnée en VI-4.3 s'étend à 3 variables, et davantage.

f étant une fonction de 3 variables,

f est *antisymétrique*

signifie :

Chaque fois que (x, y, z) a une image, alors les 5 autres triplets ayant pour composants x, y et z ont chacun une image, et deux triplets dont l'un résulte de l'autre par une transposition (voir VI-2.2) ont deux images opposées l'une de l'autre :

$$f(x, y, z) = -f(x, z, y) = f(z, x, y) = -f(z, y, x) = f(y, z, x) = -f(y, x, z)$$

Ainsi, les 3 triplets qui se déduisent de (x, y, z) par une permutation impaire ont pour image l'opposé de celle de (x, y, z) ; ceux qui s'en déduisent par une permutation paire ont même image que (x, y, z) .

Exemple : $(x, y, z) \mapsto (x - y)(y - z)(z - x)$.

On trouvera en VIII-3.2. un exemple de calcul sur une fonction antisymétrique de trois variables.

VI — 5. Fonctions paires et fonctions impaires

D'autres symétries du schéma cartésien d'une relation binaire peuvent être envisagées au lieu de celle de VI-3.1.

f étant une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$,

f est *paire*

signifie :

Chaque fois que x a une image, $-x$ en a une aussi, et c'est la même.

f étant une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$,

f est *impaire*

signifie :

Chaque fois que x a une image, $-x$ en a une aussi, et ces images sont opposées l'une de l'autre.

ERRATUM et COMPLÉMENT à MOTS VII

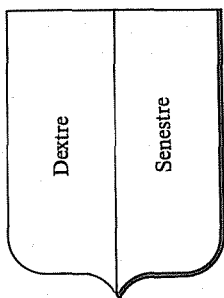
SYMÉTRIE, page 22, VII-1.1 : remplacer le début par :

“Supposons qu’un ensemble matériel admette une symétrie géométrique et que de plus deux parties quelconques géométriquement symétriques aient la même masse (ce qui se produit...)”.

Par ailleurs, la partie VII de la rubrique ORIENTATION a donné lieu aux remarques suivantes.

1) *Sur les appellations “droite” et “gauche” (VII-4.1).*

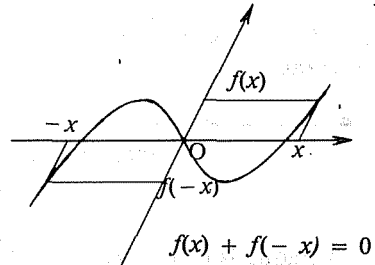
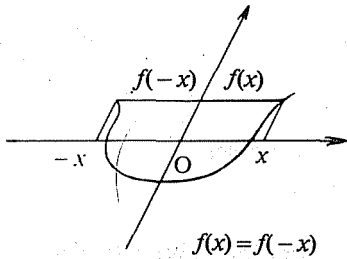
Les “évidentes raisons pratiques” grâce auxquelles “la position de l’observateur est connue ou imaginée d’avance” peuvent avoir varié suivant les époques. En héraldique, les appellations “dextre” et “senestre” pour les parties de l’écu sont celles qui sont indiquées ci-contre. Elles peuvent paraître paradoxales pour le lecteur moderne ou le visiteur d’un musée, qui se place en face de l’écu. Elles étaient naturelles pour l’homme médiéval, qui se plaçait derrière son écu pour se protéger.



2) *Sur les appellations “nord” et “sud” (VII-4.2).*

La petite histoire rapporte qu’une joyeuse confusion terminologique a régné à Houston en 1986 lors de la première exploitation des informations émises par Voyager 2 sur la planète Uranus. Qu’est-ce que l’axe sud-nord d’un corps planétaire ? Est-ce l’axe autour duquel le mouvement de rotation est direct, ou bien celui qui pointe vers l’hémisphère éclipstique boréal ? Dans la quasi-totalité des cas les deux définitions sont équivalentes et on ne songe même pas à distinguer entre elles. Mais dans le cas d’Uranus l’axe du mouvement direct pointe vers l’hémisphère éclipstique austral. Si l’on veut s’entendre, il faudra “normaliser”.

Dans le premier cas, la représentation cartésienne admet, par rapport à l'axe des ordonnées, une symétrie dont la direction est celle de l'axe des abscisses; dans le second cas, elle est symétrique par rapport à l'origine.



Exemple : en trigonométrie, la fonction *cosinus* est paire, les fonctions *sinus* et *tangente* sont impaires.

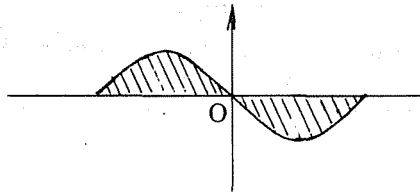
VII. SYMÉTRIES EN MÉCANIQUE ET EN PHYSIQUE

VII — 1. Ne considérons d'abord que des masses.

VII-1.1. Supposons qu'un ensemble matériel admette une symétrie géométrique et que de plus, pour toute paire de points symétriques, la masse ponctuelle, ou linéique, ou surfacique, ou volumique (voir MOTS — VI) soit la même en ces deux points (ce qui se produit certainement dans le cas particulier où l'ensemble matériel est homogène) : on peut alors dire que cet ensemble matériel admet une *symétrie mécanique*.

Exemples :

- l'arc de sinussoïde homogène ci-contre admet une symétrie mécanique par rapport à O ; et de même la surface hachurée, supposée elle aussi homogène.



- une plaque triangulaire homogène admet une symétrie mécanique par rapport à n'importe laquelle de ses médianes, un solide tétraédrique homogène en admet une par rapport à n'importe lequel de ses plans médians (voir IV-1.2) ;

• si les trois sommets d'un triangle ou les quatre sommets d'un tétraèdre ont la même masse ponctuelle, les ensembles matériels qu'ils constituent admettent les mêmes symétries que ci-dessus ; en revanche, le pourtour du triangle considéré comme une ligne matérielle homogène, la surface du tétraèdre considérée comme une surface matérielle homogène, n'admettent pas les symétries ci-dessus.

Dé la même façon, on parle de *symétrie mécanique d'ordre n* pour une plaque (par exemple polygonale) ou pour un solide (prismatique, pyramidal, etc).

Lorsqu'un cercle matériel est homogène, ou qu'un disque matériel est tel que la masse surfacique en un point ne dépend que de la distance de ce point au centre (en particulier, si le disque est homogène), le système matériel que constitue ce cercle ou ce disque est invariant par toute rotation autour de son axe ; on exprime cette propriété d'invariance en disant que le système admet une *symétrie mécanique de révolution*.

Dès lors, toute surface matérielle de révolution, tout solide matériel de révolution, dont les sections perpendiculaires à l'axe sont des cercles ou des disques du type précédent, admettent eux-mêmes une telle symétrie de révolution ; cette symétrie s'accompagne de symétries orthogonales par rapport à n'importe lequel des plans passant par l'axe (plans méridiens).

Enfin, lorsque, dans toute direction, la masse surfacique ou volumique en un point ne dépend que de la distance de ce point à un point fixe A, le solide matériel est invariant par toute rotation autour de toute droite passant par A ; on exprime cette propriété d'invariance en disant que le système admet une *symétrie mécanique sphérique* relativement à A ; cette symétrie s'accompagne de symétries orthogonales par rapport à toutes les droites qui passent par A et tous les plans qui passent par A.

VII-1.2. De telles symétries jouent un rôle important en astronomie.

On peut, en première approximation, attribuer à la Terre une symétrie sphérique ; avec une approximation meilleure, on peut considérer qu'elle est constituée de couches ellipsoïdales homogènes, concentriques, ayant en commun l'axe de révolution (ligne des pôles). Dès lors, elle admet, outre la symétrie mécanique de révolution et les symétries méridiennes qui lui sont liées, une symétrie par rapport au plan équatorial commun. On notera que ce résultat découle directement des hypothèses faites, sans qu'intervienne la loi de densité des couches internes, assez bien connue à présent, mais longtemps mal connue, pour ne pas dire ignorée.

Beaucoup d'astres ont vraisemblablement les mêmes symétries ; par contre un tel modèle serait médiocre pour la Lune qui, en première approximation, est un ellipsoïde, mais pas de révolution.

VII — 2. On peut évidemment considérer, au lieu de masses, d'autres grandeurs physiques, entre autres des champs de forces.

VII-2.1. Par exemple, le champ de gravitation créé par un point matériel A, ou par un ensemble matériel admettant la symétrie sphérique de centre A, admet lui-même cette symétrie.

VII-2.2. Ici encore, le cas de la Terre nous intéresse particulièrement. D'une part, son champ de gravitation, lié à sa constitution interne, admet à de très faibles écarts près (qui font l'objet de la gravimétrie) la symétrie de révolution et la symétrie équatoriale signalées en VII-1.2; d'autre part, tout point fixe par rapport à la Terre, donc entraîné par sa rotation, est soumis à une force d'inertie (la "force centrifuge") et ce champ de forces admet les mêmes symétries. Il découle de là que le champ de la pesanteur, qui est la résultante des deux champs précédents, admet lui aussi ces symétries.

Bien entendu, ces divers facteurs réagissent les uns sur les autres : l'équilibre des couches internes dépend à son tour du champ de pesanteur ; mais les symétries n'en sont pas affectées.

VII-2.3. Envisageons la surface d'une tige filetée, et supposons-la prolongée indéfiniment. On définit son pas p : c'est la longueur qui sépare, sur une génératrice du cylindre, deux spires consécutives.

Cette surface est invariante dans tout mouvement hélicoïdal dont l'axe et l'orientation (1) sont ceux de la tige filetée, dont la translation est de longueur l quelconque, et dont la phase (voir PHASE) est $\frac{l}{p}$ tours.

On exprime cette propriété d'invariance en disant que cette surface, et par extension la tige filetée elle-même, admettent une *symétrie hélicoïdale*.

Une onde électromagnétique plane, de lumière par exemple, est constituée par des vibrations transversales elliptiques, qui peuvent être décomposées en vibrations circulaires ; le champ auquel celles-ci sont liées admet donc une symétrie hélicoïdale : on peut se représenter la propagation d'un rayon lumineux comme celle d'un projectile qui se "visse" dans l'espace, avec un pas égal à la longueur d'onde ; le modèle obtenu, pour simpliste qu'il soit, est commode et fécond.

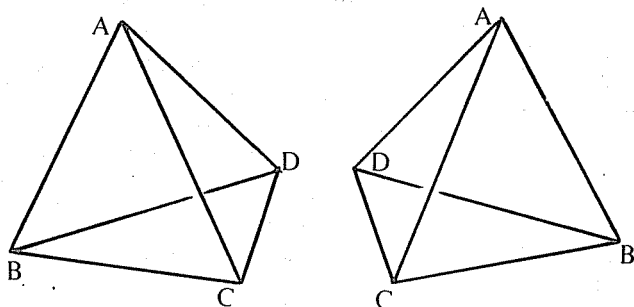
VII — 3. On passe à un autre ordre d'idées avec les corps énantiomères de la chimie organique.

La plupart des propriétés physiques et chimiques de ces isomères sont identiques, à tel point que pour les séparer on a parfois eu recours à des moisissures, plus subtiles que nous à cette échelle. Mais, à l'état

(1) Sur les deux orientations d'un filetage (vis à droite, vis à gauche), voir ORIENTATION (VII-4.3).

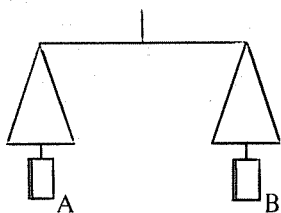
liquide ou en solution, ils font tourner dans des sens opposés le plan de polarisation d'une lumière polarisée rectilignement. On rend compte de ces faits en considérant que leurs molécules sont symétriques l'une de l'autre, au sens élargi du mot "symétrique" présenté en fin de II—? et explicité ci-dessous.

Une molécule constituée d'un atome de carbone (non dessiné ci-dessous) lié à quatre atomes ou radicaux, A,B,C,D, de natures distinctes, supposés placés aux sommets d'un tétraèdre ne présente ni plan, ni axe de symétrie (voir IV-1.2.), ni axe de symétrie ternaire (voir V — 2.); A,B,C,D peuvent avoir l'une ou l'autre des dispositions ci-dessous, qui sont, à la façon des deux mains, non superposables : chacune de ces molécules est dite *chirale* (du grec "kheir", main) (1).



Les quadruplets (A,B,C,D) de deux molécules *énantiomères* sont d'orientations opposées (Voir ORIENTATION, IV-1.8 et VI-2.3).

VII — 4. Citons enfin des emplois du mot *symétrie* dans des domaines étrangers à la géométrie, mais où se présentent des analogies avec les emplois antérieurs de ce mot.

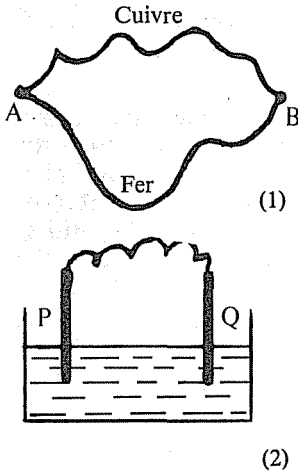


VII-4.1. La balance en équilibre dessinée ci-contre présente une symétrie mécanique par rapport à un plan.

Approchons un aimant de l'un des deux cylindres de fer A et B : l'équilibre est rompu. En introduisant un nouveau paramètre, le champ magnétique, qui n'agit pas de la même façon sur A et sur B, on a fait disparaître la *symétrie du système*.

(1) Un tel atome de carbone est dit *asymétrique* ; cette absence de symétrie concerne, bien sûr, non l'atome lui-même, mais ses liaisons avec A,B,C et D. Il faut donc lire "carbone asymétrique" comme une abréviation, d'ailleurs discutable.

VII-4.2. Le contact de deux conducteurs de natures chimiques distinctes crée une force-électromotrice.



Dans le montage (1) ci-contre, les forces-électromotrices aux *soudures* A et B se compensent ; on peut considérer que le circuit présente une *symétrie électrique*.

Dans le montage (2), si les électrodes P et Q sont de même nature chimique, leurs contacts avec le conducteur qui les joint, et avec l'électrolyte, qui les joint également, créent des forces-électromotrices qui se compensent ; là encore, on peut dire que le circuit présente une symétrie électrique.

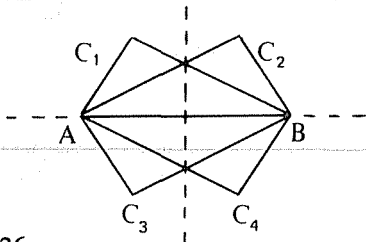
Dans ces circuits ne circule aucun courant : on est en présence d'un équilibre qui rappelle l'équilibre mécanique de la balance de VII-4.1. Par contre,

- si on porte les soudures A et B de (1) à des températures différentes, la symétrie électrique disparaît : un courant parcourt le circuit (effet thermo-électrique), dans un sens qui dépend des métaux utilisés et des températures de A et B ;
- si les électrodes P et Q de (2) sont de natures chimiques distinctes, la symétrie électrique disparaît : un courant parcourt le circuit dans un sens qui dépend de la nature de P et Q (on est en présence d'une pile chimique).

VIII. DU BON USAGE DE LA SYMETRIE

VIII — 1. Une aide et un moyen de contrôle

La solution d'un problème peut admettre des symétries qui n'apparaissent pas de façon évidente dans les données ; si par exemple on cherche dans le plan l'ensemble des points dont le rapport des distances à deux points A et B donnés est un nombre donné distinct de 1, on est sûr, à l'avance, que cet ensemble admettra la droite (AB) pour axe de symétrie, mais rien dans l'énoncé de la propriété ne permet de prévoir qu'il admet en outre une infinité d'autres symétries ; or cet ensemble est un cercle.



En revanche, si les données du problème admettent des symétries, il est certain que l'ensemble des solutions les admettra aussi. Par exemple, si l'on cherche à construire les triangles de côté [AB] donné, dont la hauteur et la médiane

relatives à $[AB]$ ont des longueurs respectives h et m ($h \leq m$), l'ensemble des solutions admet visiblement la droite (AB) et la médiatrice de $[AB]$ pour axes de symétrie, donc aussi le milieu de $[AB]$ pour centre de symétrie. On vérifiera aisément que cet ensemble, constitué de quatre triangles si $h < m$, de deux triangles si $h = m$, présente bien les symétries annoncées.

On dispose donc là d'un moyen efficace soit pour guider et parfois simplifier la recherche de l'ensemble des solutions, soit pour contrôler le résultat obtenu, voire le mémoriser si on y trouve intérêt (1).

VIII — 2. Un ancrage pour la mémoire

VIII-2.1. Nous avons indiqué dans MOTS VI (X — 1.) comment, grâce à des considérations d'homogénéité, on peut s'épargner des confusions entre les trois radicaux qui, dans un triangle ABC , donnent respectivement l'aire $\mathcal{A}$, le rayon r du cercle inscrit et la tangente du demi-angle en A : si on appelle respectivement a, b, c les côtés opposés à A, B, C et p le demi-périmètre, alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ r &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \\ \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\end{aligned}$$

Il est possible de doubler cette analyse, et même de l'affiner sur certains points, en utilisant la symétrie.

D'abord, le demi-périmètre p , égal à $\frac{a+b+c}{2}$, est fonction symétrique des trois côtés. De là résulte que les deux premiers radicaux sont eux-mêmes fonctions symétriques de a, b, c : or, cela était *nécessaire*, car ni l'aire d'un triangle, ni son cercle inscrit, ne dépendent de l'ordre dans lequel on considère les côtés. Au contraire, le troisième radical est fonction symétrique de b et c , mais pas de a , b et c ; la symétrie est rompue en ce qui concerne a : cela seul empêche et de le confondre avec les précédents radicaux, et de l'interpréter comme étant $\operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2}$ ou $\operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2}$. Toutefois, si l'on veut par exemple $\operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2}$, il suffit, dans l'égalité donnant $\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2}$, de remplacer A par B et d'échanger a et b .

(1) Par contre, il arrive que l'on voie une symétrie là où il n'y en a pas. Une figure et son image dans un miroir plan (par exemple un paysage et son reflet dans une eau calme) se correspondent dans une symétrie orthogonale par rapport à un plan ; mais la photographie qu'on peut en prendre ne présente pas de symétrie orthogonale par rapport à une droite (Voir p. 793-795, Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 336).

Faisons un pas de plus. Le radical $\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$ est, comme r , homogène à une longueur, laquelle est fonction symétrique de b et c , mais non de a, b, c : c'est le rayon r_a du cercle dit exinscrit dans le secteur A, tangent au segment [BC] et aux prolongements des côtés [AB] et [AC] au delà de B et C. Naturellement, on obtient le rayon r_b du cercle exinscrit dans le secteur B en échangeant a et b , et le rayon r_c du cercle exinscrit dans le secteur C en échangeant a et c .

Insistons à nouveau, comme dans MOTS VI, sur le fait que ce genre de raisonnement *ne démontre pas* que les égalités écrites sont vraies ; mais il constitue un excellent garde-fou contre certaines égalités fausses qu'on écrirait par inadvertance.

VIII-2.2. Il est permis d'ignorer ou d'avoir oublié ce que représente $\sin a \cos b + \cos a \sin b$. Mais écrire $\cos(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ dénoterait une absence de réflexion mathématique, par méconnaissance de la parité. Car si l'on remplace le couple (a, b) par le couple $(-a, -b)$, le premier membre ne change pas alors que le second est remplacé par son opposé.

En revanche, les considérations de parité ne s'opposent pas à ce que l'expression donnée soit celle de $\sin(a+b)$, ce qu'elle est en effet.

On peut estimer à volonté que les "formules" d'addition et de factorisation de la trigonométrie encombrant inutilement la mémoire (c'est vrai si on ne veut pas voir plus loin) ou qu'elles sont l'occasion d'une réflexion fructueuse, qui de surcroît facilite la mémorisation. En fait, il n'y a de mémoire scientifique qu'organisée.

VIII — 3. Un instrument de calcul

VIII-3.1. Soit A la fonction polynomiale à trois variables :

$$\begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y, z) \longmapsto (x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 \end{array}$$

Pour des calculateurs débutants, développer $A(x, y, z)$ risque d'être laborieux ; mais ce peut être l'occasion de découvertes pour des calculateurs plus avertis, qui s'apercevront que finalement il n'y a pratiquement *aucun* calcul à faire :

D'abord, si $z=0$, on constate que le polynôme s'annule (il n'est pas nécessaire de savoir développer un cube, il suffit de se rappeler que la fonction "cube" est impaire). S'annulant avec z , ce polynôme est divisible par z ; comme il est symétrique, il contient le facteur xyz ; enfin, comme il est homogène de degré 3, et qu'il en est de même de xyz , le seul facteur inconnu est nécessairement une constante, qu'un essai numérique suffit à déterminer : $A(1,1,1) = 24$.

Conclusion :

$$A(x, y, z) = 24xyz$$

VIII-3.2. Soit B la fonction polynomiale à trois variables :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) \end{aligned}$$

Développer $B(x, y, z)$ n'est pas difficile mais n'apporte guère d'information.

On constate, pratiquement sans calcul, que le polynôme s'annule si $y = z$, donc qu'il est divisible par $y - z$; de même, il est divisible par $x - y$ et par $z - x$; donc il contient le facteur $(x - y)(y - z)(z - x)$. Or, ce facteur est antisymétrique (voir VI-4.4) et homogène de degré 3; et B est antisymétrique, homogène de degré 4; le seul facteur inconnu est nécessairement symétrique, homogène de degré 1: ce ne peut être que $x + y + z$, à un multiplicateur constant près, qu'on trouve être -1 en donnant à x, y, z trois valeurs distinctes, par exemple 0, 1, 2.

Conclusion :

$$B(x, y, z) = -(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$$

VIII-3.3. Pour résoudre un système d'équations symétriques à deux inconnues (1), on a en général intérêt à passer par une étape intermédiaire: prendre pour inconnues les deux fonctions symétriques élémentaires que sont la somme et le produit de x et y .

Exemple: L'aire d'un triangle rectangle est 14 cm^2 ; la longueur de son hypoténuse est $\sqrt{65} \text{ cm}$; calculer les deux autres côtés.

Adoptant le centimètre pour unité, on appelle x et y les mesures de ces côtés; on obtient :

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 14 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} xy = 28 \\ (x + y)^2 - 2xy = 65 \end{cases}$$

c'est-à-dire, puisque x et y sont positifs: $\begin{cases} xy = 28 \\ x + y = 11 \end{cases}$

x et y sont donc les solutions de l'équation en Z : $Z^2 - 11Z + 28 = 0$, c'est-à-dire 4 et 7. Les longueurs cherchées sont 4 cm et 7 cm.

La banalité de cet exemple ne doit pas dissimuler le fait, d'une très grande portée, que la recherche des invariants — donc, en particulier, des symétries — n'a pas cessé d'être un des fondements de la théorie des équations, algébriques, différentielles ou autres.

VIII — 4. Quelques exemples mécaniques

VIII-4.1. La recherche des centres d'inertie se trouve facilitée quand il existe des symétries mécaniques. En effet, puisque l'ensemble matériel est invariant par la (ou les) symétrie(s) considérée(s), son centre

(1) Dire que l'équation $f(x, y) = 0$ est symétrique, c'est dire que f est une fonction symétrique de x et y .

d'inertie l'est aussi ; il appartient donc à l'ensemble (ou aux ensembles) des points invariants de cette (ou ces) symétrie(s) : centre, axe, ou plan.

Cette propriété est à peu près intuitive dans de nombreux cas : plaques polygonales, solides prismatiques ou pyramidaux, solides de révolution, etc. Elle se vérifie encore dans des cas comme ceux-ci : d'après VII-1.1, le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène est le point commun à ses trois médianes ; celui d'un solide tétraédrique homogène est le point commun à ses six plans médians, qui est aussi commun aux trois droites joignant les milieux d'arêtes opposées. Le triangle ou le tétraèdre réduits à leurs sommets ont encore les mêmes centres d'inertie pourvu que les masses ponctuelles des sommets soient les mêmes.

VIII-4.2. Même si on néglige en première approximation toutes les influences étrangères au champ de gravitation terrestre, l'étude du mouvement d'un satellite artificiel est complexe. Cependant, si le plan déterminé par le centre de la Terre, la position du satellite et son vecteur-vitesse au moment de sa mise en orbite, est soit un plan méridien, soit le plan équatorial de la Terre, les symétries du champ de gravitation permettent d'affirmer que l'orbite du satellite sera contenue dans ce plan fixe. Il y a tout de même une différence essentielle entre les deux cas : comme le lancement d'un satellite n'a jamais empêché la Terre de tourner, les méridiens terrestres défilent dans le plan de l'orbite dans le premier cas, tandis que, dans le second, le plan de l'équateur reste celui de l'orbite. C'est évidemment de ce second cas que relèvent les satellites géostationnaires.

IX. "PAR RAISON DE SYMETRIE"

Les cosmogonies primitives présentaient en général le ciel comme une voûte reposant sur la Terre ; et la Terre ? Parfois "sur les eaux" ; et les eaux ? Question sans réponse, bien entendu ; d'ailleurs, où s'arrêter ? C'est probablement Anaximandre (mais peu importe) qui émit l'idée que la Terre "demeure en place sans être soutenue par rien parce qu'elle est à égale distance de tout". Ultérieurement, ce géocentrisme deviendra un obstacle au progrès de l'astronomie ; mais comment ne pas reconnaître qu'à l'époque, six cents ans avant notre ère, ce recours à la symétrie mécanique permettait de franchir une étape décisive ?

Ce concept de symétrie, en s'imposant de proche en proche aux géomètres, aux astronomes, aux algébristes, aux physiciens, pour ne rien dire des biologistes et de quelques autres, aura sans doute été un moteur et un ferment de la pensée scientifique. Si une chose existe, quelle harmonie, quelle *summetria* la maintient en l'état ? Et aussi, pourquoi la chose opposée n'existerait-elle pas ? Les travaux les plus modernes sur les antiparticules et l'antimatière, les recherches sur la symétrie ou l'antisymétrie dans l'Univers manifestent la pérennité de cette interrogation.

ORIENTATION (84)

- I. Acceptions courantes et acceptions mathématiques
- II. Orientations en dimension 1
- III. Orientations en dimension 2
- IV. Orientations en dimension 3
- V. Orientations relatives
- VI. Conservation ou altération des orientations
- VII. Orientations concrètes et langage

N.B. - Les parties I à VI, sans être de mathématique pure, tentent une construction rationnelle du concept d'orientation. La partie VII, relativement indépendante du reste, propose un certain nombre d'exemples empruntés au monde matériel, auxquels le lecteur pourra trouver avantage à se reporter ; l'analyse du langage fait voir l'ambiguïté des relations entre le modèle mathématique et son utilisation dans les pratiques des diverses sciences et techniques.

I. ACCEPTIONS COURANTES ET ACCEPTIONS MATHÉMATIQUES

I — 1. L'origine du mot "orientation", dérivé de "orient", est astronomique et géographique : *s'orienter*, c'est (au sens strict) chercher la direction du Soleil levant, puis (plus généralement) d'autres directions remarquables ; l'ombre la plus courte du gnomon, l'Etoile Polaire, la boussole donnent le moyen de se repérer dans un paysage, de déterminer son chemin ou son cap. De là on passe à l'acception la plus courante : reconnaître sa voie, au propre ou au figuré, dans une ville, dans sa carrière, etc. Quant à *orienter*, c'est indiquer une telle voie — parfois de façon autoritaire ou insidieuse !

I — 2. Ces sens ont naturellement laissé des traces dans la langue technique. Certaines sont légitimes : ainsi on oriente une lunette, un télescope. D'autres prêtent à confusion, et ce risque est d'autant plus grave en mathématiques que le recours à l'intuition est, au stade élémentaire, pratiquement inévitable : une théorie abstraite de l'orientation fait en effet appel à des notions passablement élaborées et délicates.

De plus il faut distinguer, en géométrie, entre le nom *orientation* et le verbe *orienter*. En principe, le nom désigne un *objet*, comme dans "les deux orientations d'une droite", tandis que le verbe implique un *choix* entre ces deux objets : "orienter une droite". Mais, inévitablement, le nom prend aussi parfois une signification qui dérive de celle du verbe : l'*action* d'orienter. Par souci de clarté, nous éviterons, au cours de cette rubrique, d'employer le mot *orientation* dans ce dernier sens.

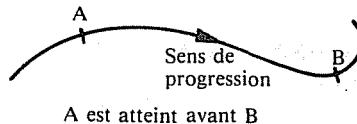
II. ORIENTATIONS EN DIMENSION 1

II — 1. Orientations sur une ligne non ramifiée

Le modèle intuitif serait celui d'un tube ne comportant ni croisement, ni bifurcation, et juste assez large pour qu'un ver de terre puisse y progresser. Quelle information apporte la présence de ce ver dans le tube ?

II-1.1. Une relation d'ordre total

La première réponse qui se présente à l'esprit est sans doute celle-ci : lorsque le ver progresse dans le tube, sa tête par exemple occupe des positions successives au cours du temps, ce qui suggère une relation d'ordre total (strict) ayant pour lien verbal "est atteint avant". Bien entendu, on obtiendrait la relation réciproque en plaçant le ver dans le tube de façon qu'il progresse dans l'autre sens.



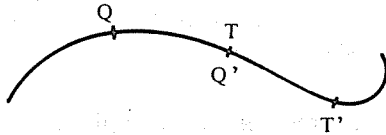
Il est de fait qu'en géométrie on recourt souvent à l'ordre pour orienter certaines lignes du type précédent. Malheureusement, pour les lignes qui se referment sur elles-mêmes, comme le cercle, le procédé cesse d'être applicable (si le ver de terre peut repasser plusieurs fois par la même position, on n'est plus capable de décider laquelle de deux positions est atteinte avant l'autre). De plus, le procédé fondé sur l'ordre n'est pas généralisable aux dimensions plus grandes que 1.

II-1.2. Emploi d'aboutements

Comme la nature n'a pas pourvu le lombric d'une marche arrière, le sens dans lequel il peut progresser dans le tube est déterminé dès qu'on sait distinguer la tête T de la queue Q de l'animal ; on peut alors choisir par exemple le couple (Q,T) pour représenter ce sens, le sens opposé étant représenté par (T,Q). Mais, supposé immobile, le ver ne peut plus transporter cette information ; à quoi reconnaîtra-t-on la cohérence des informations fournies par deux vers placés dans le même tube, orientés par les couples (Q,T) et (Q',T') ?

Si les vers sont contigus, la réponse est immédiate : c'est seulement si la tête de l'un, par exemple T, est en contact avec la queue Q' de

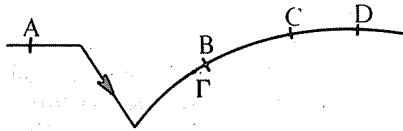
l'autre que les deux animaux sont aptes à progresser dans le même sens ; de plus, dans ce cas, on peut imaginer un grand ver de terre ayant sa



queue en Q et sa tête en T', et lui-même apte à progresser dans le même sens que les deux autres(*). (Sinon on aurait un monstre à deux têtes ou à deux queues pour lequel on ne saurait parler de sens queue-tête).

On dira en pareil cas que les vers orientés par les couples (Q,T), (Q',T'), et (Q,T') ont même orientation, et on vérifie sans peine qu'on est alors à même de décider si deux vers orientés quelconques placés dans le tube ont ou non la même orientation : il suffit d'utiliser de proche en proche des aboutements du type précédent, ce qui au fond est un autre aspect de la transitivité de la relation d'ordre.

II-1.3. Cherchons à traduire ce qui précède dans un langage plus mathématique, en renonçant toutefois à donner une définition rigoureuse des lignes sur lesquelles nous opérerons ; qu'il nous suffise de dire que leur image intuitive est conforme au tube de II-1.1. Soit Γ une telle ligne.



Appelons *bord* d'un arc AB (non réduit à un point) la paire {A,B}, et *bords orientés* de cet arc les couples (A,B) et (B,A). *Orienter* l'arc AB, c'est choisir pour cet arc l'un de ces deux bords orientés, par exemple (A,B) ; on peut encore dire que l'arc est orienté "de A vers B" : c'est l'orientation symbolisée sur la figure par une flèche. Si l'on choisit (B,A), on dira que l'orientation de l'arc est *opposée* à la précédente.

Etant donnés deux arcs orientés de Γ , on fait appel, pour les comparer, au critère suivant, qui rend compte de la cohérence évoquée en II-1.2.

Sont de même orientation :

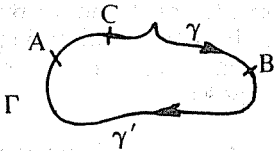
1) deux arcs dont les bords orientés sont tels que (A,B) et (B,C) si ces arcs sont contigus ;

(*) Une condition du même type se retrouve dans la disposition de deux aiguilles aimantées contiguës : c'est seulement si le pôle magnétique nord de l'une est en contact avec le pôle magnétique sud de l'autre que le système ainsi formé est stable et constitue un nouvel aimant, le sens de l'induction magnétique étant le même pour le grand aimant et les deux petits.

2) deux arcs dont les bords orientés sont tels que (A,B) et (A,C) si l'un des arcs est inclus dans l'autre ; de même pour (A,C) et (B,C) ;

3) deux arcs dont chacun est de même orientation qu'un troisième, par exemple les arcs ayant pour bords orientés (A,B) et (C,D) , chacun de même orientation que l'arc de bord orienté (B,C) .

Bien entendu, sur les lignes qui ne se referment pas, l'emploi de ce critère équivaut à l'emploi de la relation d'ordre dont le graphe contient les couples (A,B) , (B,C) , (A,C) , (C,D) , ... Mais on vérifie aisément que ce critère peut être mis en œuvre même si la ligne Γ se referme sur elle-même :



même : il suffit de la considérer comme la réunion d'un nombre arbitraire (au moins égal à 2) d'arcs contigus, par exemple les arcs γ et γ' de la figure, qui s'aboutent à la fois en A et en B : l'arc γ orienté par son bord (A,B) et l'arc γ' orienté par son bord (B,A) ont bien la

même orientation (tandis que (A,B) et (B,A) ne peuvent appartenir au graphe d'une même relation d'ordre, vu l'antisymétrie propre à une telle relation).

II-1.4. Sachant alors comparer les orientations de n'importe quels arcs orientés d'une ligne Γ (se refermant ou non), on peut répartir ceux-ci en deux classes, dont chacune est une *orientation* de Γ . Ces deux orientations sont dites *opposées* ; si l'on désigne l'une par α , il est commode de désigner l'autre par $-\alpha$ (voir à ce sujet la partie V).

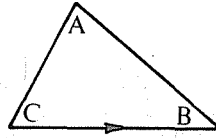
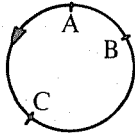
Orienter Γ , c'est choisir l'une des deux orientations. Ainsi (Γ, α) est une *ligne orientée*, et $(\Gamma, -\alpha)$ en est une autre.

Pour désigner l'orientation d'une ligne, on a recours, comme d'habitude en pareil cas, à l'un de ses représentants. En principe, cette désignation doit donc comporter un arc non réduit à un point et l'orientation de son bord ; mais elle peut revêtir divers aspects, comme on va le voir à présent.

II-1.5. Deux cas principaux sont à envisager :

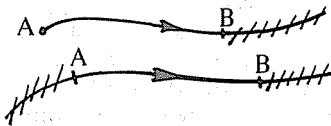
(a) Si la ligne se referme sur elle-même, on se retrouve dans la situation traitée en fin de II-1.3. : le bord orienté (A,B) ne suffit évidemment pas à indiquer lequel des deux arcs γ ou γ' est en jeu. Mais l'indication d'un point de cet arc, par exemple C sur γ , définit l'orientation sans ambiguïté ; en pratique, on la donne sous la forme du triplet (A,C,B) : parler de la ligne orientée $\Gamma_{(A,C,B)}$ est parfaitement clair.

On reconnaît là une situation assez fréquente en géométrie : orientation d'un cercle, orientation du pourtour d'un triangle de sommets A,B,C,...



On notera que les triplets (C,B,A) et (B,A,C) définissent la même orientation que (A,C,B) ; ce sont justement ceux qu'on déduit de (A,C,B) par des permutations "circulaires" des trois lettres, qui sont ici des permutations paires ; par contre les triplets (A,B,C), (B,C,A), (C,A,B), déduits des précédents par des permutations impaires, définissent l'orientation opposée (pour les permutations paires et impaires, voir SYMETRIE, VI-2.2.).

(b) Au contraire, si la ligne Γ ne se referme pas, une convention implicitement admise permet de se contenter de l'indication d'un bord orienté tel que (A,B). En effet, il n'y a qu'une partie de Γ qui soit un arc



(au sens habituel) ayant {A,B} pour bord ; la partie complémentaire (hachurée sur les figures) ou bien n'a pas {A,B} pour bord (figure du haut), ou bien n'est pas un arc (figure du bas).

Ce procédé s'applique en particulier aux droites ; la *droite orientée*



de la figure se note simplement $\Delta_{(A,B)}$. Mais, pour les droites, une notation vectorielle est également possible (voir ci-dessous II-3.2.).

De même, toute demi-droite peut être orientée par un couple de ses points. Mais le cas des demi-droites est un peu spécial : bien qu'elles ne



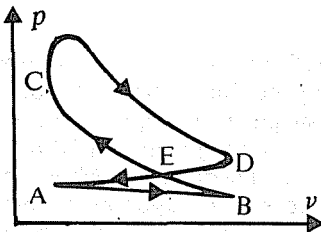
soient pas nécessairement des lignes orientées, on sous-entend habituellement que la demi-droite [AB] est orientée par le couple (A,B). Autrement dit, on confond l'origine de la demi-droite avec son premier élément, au sens de la relation d'ordre.

Naturellement, si la ligne a pour bord une paire $\{X, Y\}$, les couples (X, Y) et (Y, X) eux-mêmes peuvent être utilisés pour définir les orientations de cette ligne. Tel est en particulier le cas d'un *segment orienté* comme $[XY]_{(X, Y)}$ (qu'on a trop longtemps confondu avec le couple (X, Y) ou avec le vecteur $\overrightarrow{XY}$). Faisant encore appel à la relation d'ordre, on peut aussi considérer que X est le premier élément de ce segment, et dire "segment orienté $[XY]$ d'origine X ".

II — 2. Orientations d'une ligne croisée, d'un réseau de lignes

Que se passerait-il si l'on tentait d'appliquer le procédé par aboutement d'arcs à une ligne présentant un point multiple, ou plusieurs ?

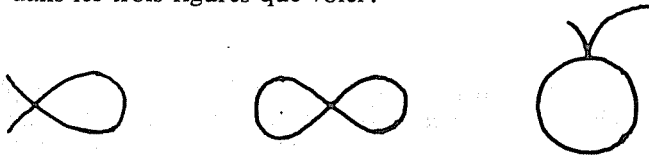
II-2.1. Voici un exemple classique de ligne croisée fermée : le diagramme de Watt d'un moteur à quatre temps.



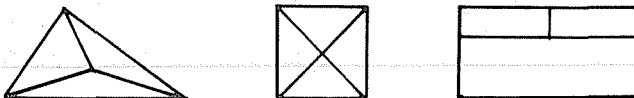
A chaque instant du cycle sont portés en abscisse le volume v de la chambre d'explosion, en ordonnée la pression p du gaz qui occupe la chambre.

L'origine physique du diagramme ne laisse place à aucune ambiguïté quant au chemin suivi ni au sens de parcours (indiqué par les flèches) : l'arc orienté AB figure le premier temps du cycle (admission), l'arc orienté BEC le deuxième (compression), l'arc orienté CD le troisième (explosion puis détente), enfin l'arc orienté DEA le quatrième (échappement).

II-2.2. On a pu orienter la ligne croisée fermée ABECDEA parce qu'on n'avait aucune hésitation sur les chemins à suivre au carrefour, ou point double, E. Au contraire, si l'on manque d'information sur le chemin à suivre après l'arrivée à un point multiple, le problème qui consiste à orienter les arcs d'un réseau se complique, nécessite des choix, comme dans les trois figures que voici :



Il est même parfois insoluble comme dans celles-ci :



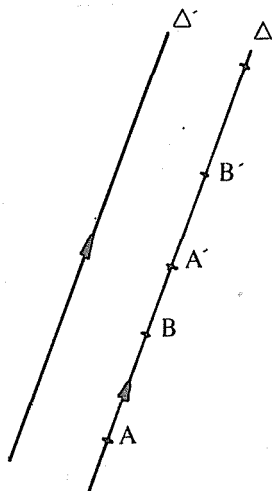
II — 3. Orientations d'une droite vectorielle

II-3.1. Par définition d'un vectoriel réel $\mathcal{D}$ de dimension 1, appelé aussi *droite vectorielle réelle*, tout vecteur v de $\mathcal{D}$ est le produit d'un vecteur u non nul de $\mathcal{D}$ par un réel λ ; par exemple l'ensemble des intensités de courant électrique peut être organisé en droite vectorielle réelle (sur ces questions, voir MOTS VI ; VIII-1).

Il est assez simple, ici (*), d'aboutir à une définition *algébrique* des orientations de $\mathcal{D}$. Il est possible de répartir les vecteurs non nuls de $\mathcal{D}$ en deux classes : appartiennent à une même classe tous les vecteurs dont les rapports deux à deux sont strictement positifs ; tout rapport d'un vecteur de l'une des classes à un vecteur de l'autre est strictement négatif. Le vecteur nul n'appartient à aucune de ces deux classes. Ces classes sont les deux *orientations* de $\mathcal{D}$.

Dès lors, *orienter* $\mathcal{D}$, c'est faire choix d'un vecteur non nul ω particulier ; alors $\mathcal{D}_\omega$ est une *droite vectorielle orientée* ; ω en est un *vecteur orienteur* ; $\mathcal{D}_{-\omega}$ est la droite vectorielle orientée d'orientation opposée.

II-3.2. Appliquons ce qui précède aux droites ponctuelles (droites en tant qu'ensembles de points). Soit $\Delta_{(A,B)}$ une droite orientée comme



en II-1.5 : tout couple (A', B') de ses points qui est de même vecteur(**) que le couple (A, B) définit la même orientation. Celle-ci est donc liée au vecteur $\vec{AB}$, qui peut être utilisé pour la désigner. Cette droite orientée peut se noter $\Delta_{\vec{AB}}$ et l'on dit encore que $\vec{AB}$ en est un vecteur orienteur.

On rappelle d'autre part que, dans le plan ou l'espace ponctuels, l'ensemble des droites parallèles à Δ est une *direction*. Soit Δ' une de ces droites : $\vec{AB}$ en est un vecteur directeur. On peut le choisir comme vecteur orienteur de Δ' et la droite orientée $\Delta'_{\vec{AB}}$ est dite de même orientation que $\Delta_{\vec{AB}}$. Si l'on oriente

de même toutes les droites de la direction par $\vec{AB}$, on obtient une *direction orientée*.

(*) Pour une définition algébrique des orientations dans un vectoriel de dimension plus grande que 1, voir les notes des paragraphes III-3.2. et IV-2.2.

(**) On dit aussi que le couple (A', B') est *équipollent* au couple (A, B) .

II — 4. Grandeurs orientées

Si à chacun des arcs d'une ligne orientée on sait attribuer une longueur, il est légitime, du fait qu'on distingue leurs orientations, de distinguer aussi des *longueurs orientées*. C'est ce qui permet d'envisager des longueurs positives et des longueurs négatives, comme en MOTS VI, III-7.2 et III-7.3.

De même, les vecteurs, en dimension 1, peuvent être tenus pour des grandeurs orientées ; c'est le cas des intensités de courant électrique évoquées en II-3.1.

III. ORIENTATIONS EN DIMENSION 2

III — 1. Orientations dans le plan

III-1.1. Ici le modèle intuitif serait une raie nageant dans un aquarium juste assez haut pour qu'elle puisse y évoluer sans pouvoir s'y retourner. Elle a parfaitement conscience qu'elle peut longer la paroi latérale de l'aquarium de deux façons ; quand elle se propulse dans le sens normal (celui qui va de sa queue vers sa tête), elle maintient au contact de cette paroi soit l'une, soit l'autre de ses deux ailes (disons son aile droite ou son aile gauche). Elle dispose donc d'un moyen qui lui est propre pour distinguer les deux orientations possibles de cette paroi (assimilée ici à une ligne). De plus, imaginons qu'elle soit transférée dans d'autres aquariums semblables au premier, dont les parois sont diversement orientées : si dans chacun d'eux elle longe la paroi dans le sens qui oriente celle-ci, elle sera capable de classer ces aquariums selon deux orientations, en fonction de l'orientation de chaque paroi.

Essayons d'abord de donner une description un peu plus mathématique, dans le plan Π , de la partie que matérialise l'aquarium. Deux propriétés sont à retenir pour la suite.

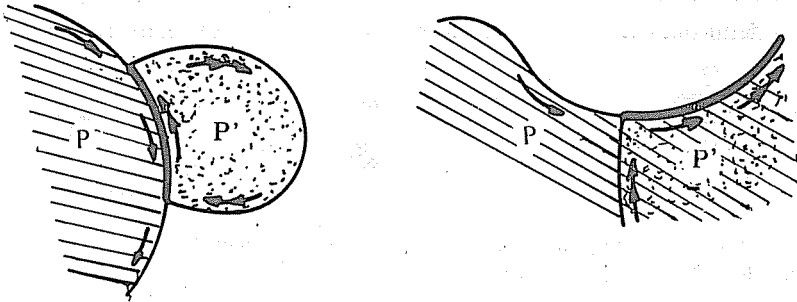
En premier lieu, on suppose que la ligne qui va servir de bord est une ligne non ramifiée qui sépare le plan en deux parties. Si elle est d'un seul tenant, elle est donc ou bien illimitée "des deux côtés" comme une parabole, une droite, une sinusoïde (une demi-droite ne conviendrait pas) ou bien refermée sur elle-même à la façon d'un cercle (un arc de cercle, un segment de droite sont à exclure). Mais nous verrons que cette hypothèse peut être élargie (voir III — 1.3, première remarque).

En second lieu, une fois qu'on a orienté cette ligne, il faut encore préciser laquelle des deux parties de Π tient le rôle de l'intérieur de l'aquarium. Cette exigence se traduira ici par un détail graphique : alors qu'en dimension 1 nous placions la flèche d'orientation sur la ligne, nous la mettrons désormais à côté de la ligne, dans la partie du plan qu'on désire orienter.

III-1.2. Supposons à présent qu'on interdise le transfert de la raie d'un aquarium dans un autre, de même qu'on interdisait la progression du ver de terre dans le tube en II-1.2 ; sur quoi pourra-t-on fonder la comparaison des orientations ? Adoptons en dimension 2 une démarche calquée sur les aboutements en dimension 1.

Soient P et P' deux parties du plan Π conformes à la description de III-1.1. Les cas de figure possibles sont assez nombreux. Examinons d'abord les cas où, l'intersection des bords étant une ligne γ non réduite à un point, ou bien P et P' sont contiguës le long de γ , ou bien l'une des parties est incluse dans l'autre. Dans ces deux cas, la cohérence des orientations de ces bords se reconnaît immédiatement.

Dans les schémas ci-dessous, la partie P est hachurée et son orientation figurée par une flèche simple, la partie P' est sablée et son orientation figurée par une flèche double ; la ligne γ commune aux deux bords est en trait fort.



P et P' sont contiguës : l'orientation du bord de $P \cup P'$ s'accorde avec les orientations des bords de P et de P' si et seulement si γ a des orientations *opposées* en tant que partie du bord de P et en tant que partie du bord de P' .

P' est incluse dans P : l'orientation du bord de P' s'accorde avec celle du bord de P si et seulement si γ a *même* orientation en tant que partie du bord de P et en tant que partie du bord de P' .

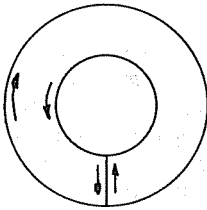
III-1.3. Cela nous amène à adopter le critère de comparaison suivant, tout à fait analogue à celui de II-1.3 :

Sont de même orientation :

- 1) deux parties contiguës le long d'une ligne γ , si γ a des orientations opposées en tant que partie du bord de l'une et en tant que partie du bord de l'autre ;
- 2) deux parties dont l'une est incluse dans l'autre et dont les bords ont en commun une ligne γ , si γ a même orientation en tant que partie du bord de l'une et en tant que partie du bord de l'autre ;
- 3) deux parties dont chacune a même orientation qu'une troisième.

Remarques :

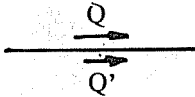
• On a raisonné jusqu'ici sur des bords "d'un seul tenant", mais on peut s'affranchir de cette hypothèse. Par exemple, le bord d'une



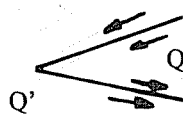
couronne circulaire est la réunion de deux cercles, et ces cercles sont disjoints ; pourtant on peut les orienter de façon cohérente (il suffit de "jeter un pont" entre eux) ; dès lors, ce bord, et du même coup la surface de la couronne, sont orientés.

• Une orientation du bord commun à deux parties contiguës du plan étant donnée, ces parties ont nécessairement des orientations opposées ; tel est le cas, par exemple,

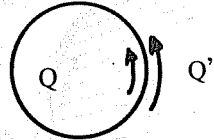
du demi-plan Q et
du demi-plan Q'



du saillant Q et
du rentrant Q'



du disque Q et
du plan troué Q'



• En fait, le critère de comparaison des orientations n'est guère employé tel qu'il a été formulé ci-dessus :

ou bien on vise à une construction mathématique : on a alors recours à un procédé algébrique (voir ci-dessous la note de III-3.2),

ou bien, plus élémentairement, on vise à un procédé intuitif (comme celui de la raie de III-1.1) pour comparer les orientations de deux parties du plan à bords orientés : on préfère alors adapter à la dimension 2 notre langage tridimensionnel. La convention implicite toujours admise en géométrie du plan est la suivante. On suppose le plan plongé dans l'espace habituel, ce qui permet de lui attribuer deux faces, et on se place par la pensée les pieds sur celle où on dessine : dès lors, des expressions comme "tourner à gauche", "laisser à droite", etc. ne sont pas ambiguës et permettent de comparer d'un simple coup d'œil deux orientations (*).

(*) Notre langage usuel fait constamment appel à des conventions de ce genre : parler de la droite ou de la gauche d'un tableau fixé au mur, de la droite ou de la gauche (voire du haut et du bas !) d'une feuille de papier posée sur une table, n'a de sens que moyennant des conventions implicites sur la position de l'observateur. Voir sur ces questions la partie VII de la présente rubrique.

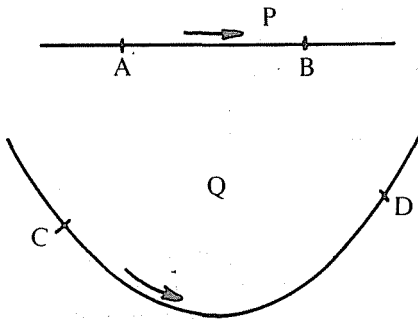
Bien entendu, ces divers procédés sont équivalents. Par exemple, dans les trois figures ci-dessus, un promeneur qui suit les flèches laisse à sa gauche la partie Q et à sa droite la partie Q'. De même, dans la couronne circulaire, il laisse constamment à sa droite la surface de la couronne.

III-1.4. Sachant comparer les orientations de deux parties du plan Π (sous réserve qu'elles soient conformes à la description de III-1.2), on peut les répartir en deux classes dont chacune est *une orientation* de Π ; ces deux orientations sont dites *opposées*. Si α est l'une d'elles, il est commode de désigner l'autre par $-\alpha$.

Orienter Π , c'est choisir l'une des deux orientations. Ainsi (Π, α) est un *plan orienté* ; $(\Pi, -\alpha)$ est l'autre.

De même qu'en dimension 1, on cherchera à caractériser une orientation du plan par celle d'une de ses parties. Il existe plusieurs variantes possibles, qui s'accompagnent en général de conventions tacites, comme nous allons le voir maintenant.

III-1.5. Supposons d'abord qu'on choisisse une partie du plan dont le bord est une ligne qui partage le plan en deux parties sans se refermer sur elle-même. Un couple de points de cette ligne suffit pour orienter celle-ci, donc aussi la partie du plan.

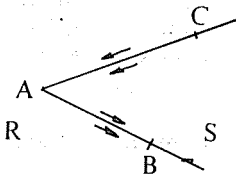


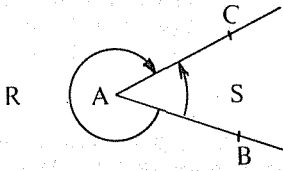
Exemples :

- le demi-plan P ayant pour bord une droite, elle-même orientée par le couple (A,B) ;

- la région Q intérieure à une parabole, celle-ci étant orientée par le couple (C,D).

III-1.6. Le cas des secteurs de plan peut être traité comme un cas particulier du précédent. Soient en effet les deux secteurs, S saillant, et R rentrant, de côtés [AB] et [AC] : le couple (C,B) définit une orientation de leur bord commun et, par là, les deux orientations (opposées l'une à l'autre) de S et de R.





Mais on a plutôt l'habitude de dire que chacun de ces secteurs est orienté *par le couple* $([AB], [AC])$ *de ses côtés*, ou encore *de* $[AB]$ *vers* $[AC]$. La première de ces deux tournures *sous-entend* que c'est le *premier côté* du secteur, la demi-droite $[AB]$, qui donne son orientation au bord. La seconde tournure, où $[AB]$ joue le rôle de *côté origine*, traduit l'idée qu'une demi-droite mobile d'origine A balaie S ou R à partir de la position $[AB]$. On vérifiera que les orientations définies pour S ou R par ces divers procédés sont les mêmes.

Franchissant un pas de plus, on dit aussi que *le plan* est orienté par la donnée d'un couple de demi-droites non portées par la même droite, tel que $([AB], [AC])$; c'est qu'on s'impose alors une *seconde convention*, à savoir qu'on utilise l'orientation de la partie *convexe* du plan (le saillant S et non le rentrant R).

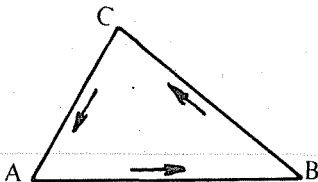
Sous cette réserve, la formulation ci-dessus n'est pas critiquable. Mais le danger, nullement imaginaire, est qu'on en tire argument pour "justifier" et entretenir la confusion entre "angle-de-saillants-orientés" (voir ci-dessous III-4.2) et "angle-de-couples" (voir cette rubrique, où la question est discutée au fond).

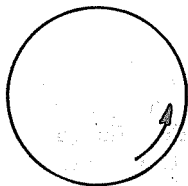
Remarque. Si la raie de III-1.1 sait reconnaître intuitivement les orientations de ses aquariums, c'est qu'elle transporte avec elle le couple (arrière-avant, droite-gauche) de directions orientées, de même que le ver de terre véhiculait le sens queue-tête en dimension 1.

III-1.7. Supposons qu'on choisisse une partie du plan dont le bord Γ se referme sur lui-même : un triplet (A, B, C) de ses points — qu'on peut toujours supposer non alignés — suffit à orienter Γ , et par conséquent la partie du plan considérée.

Dans beaucoup de cas usuels, Γ est le bord d'une partie *convexe* et l'on convient alors que c'est elle qui donne son orientation au plan. Avec cette convention, il devient loisible de dire que le plan peut être orienté par un triplet de points non alignés.

Un cas fréquent est celui où le triplet (A, B, C) oriente le pourtour, et par conséquent la surface, du triangle ABC. On constate aisément qu'il définit la même orientation du plan que le couple $([AB], [AC])$ de III-1.6. De plus, les triplets (B, C, A) et (C, A, B) ainsi que les couples $([BC], [BA])$ et $([CA], [CB])$ définissent aussi la même orientation.

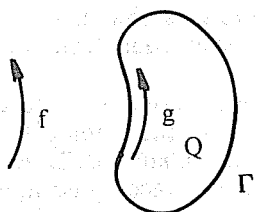




Un cas non moins usuel est celui où la ligne orientée est un cercle, qui oriente le disque intérieur. C'est avec cette acception qu'on peut dire que le cercle trigonométrique "oriente" le plan.

Rappelons que l'orientation habituelle du cercle trigonométrique est celle pour laquelle un mobile décrivant le cercle laisse le disque "à sa gauche" (voir dernière remarque de III-1.3)

On va même, en pratique, jusqu'à orienter le plan au moyen d'une simple flèche courbe comme f : cela nous ramène au cas précédent si

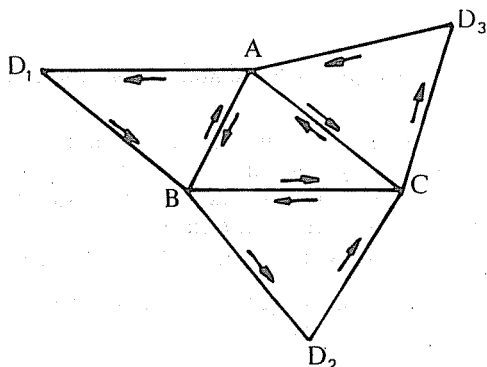


l'on interprète f comme une partie du bord orienté d'une région convexe ; mais on commettrait une erreur en l'interprétant comme le symbole g de l'orientation de la ligne Γ ci-contre et de sa région intérieure Q .

III — 2. Orientations de surfaces

Dans notre modèle aquatique, il importerait peu à la raie que le fond de son aquarium ne soit pas parfaitement plan : on peut donc prévoir la possibilité d'étendre ce qui précède au moins à certaines surfaces "simples" non croisées.

III-2.1. Parmi ces surfaces, certaines sont des surfaces polyédrales : surfaces prismatiques, surfaces de trièdres, de secteurs polyèdres, de prismes, de pyramides, etc. Comme ces surfaces sont constituées de

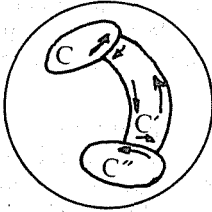


parties de plans, appliquons-leur le critère de comparaison de III-1.3, et vérifions sur l'exemple simple du tétraèdre que la cohérence est respectée : pour que la figure soit lisible, rabattons sur le plan de la face ABC les trois autres faces du tétraèdre ABCD en ABD_1 , BCD_2 , CAD_3 . Une fois choisie pour ABC l'orientation symbolisée par les flèches de la figure, les trois autres faces se trouvent orientées, et on constate bien que l'arête AD par exemple est

parties de plans, appliquons-leur le critère de comparaison de III-1.3, et vérifions sur l'exemple simple du tétraèdre que la cohérence est respectée : pour que la figure soit lisible, rabattons sur le plan de la face ABC les trois autres faces du

orientée de A vers D en tant que partie du bord de ABD, et de D vers A en tant que partie du bord de ACD.

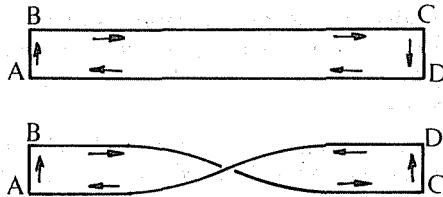
III-2.2. Toutefois le caractère polyédral n'a rien d'essentiel. Par



exemple, pour orienter une sphère, il suffit d'orienter une partie telle que C en orientant son bord. L'orientation des autres parties résulte de là (voir figure) suivant le même critère de comparaison que dans le plan.

Il en irait encore de même pour les surfaces cylindriques sans génératrice multiple, pour les tores sans points coniques, etc.

III-2.3. Nous n'aborderons pas le problème pour des surfaces quelconques. Signalons seulement qu'il existe des surfaces non orientables, par exemple le ruban de Möbius : prenant un ruban ABCD et plaçant (C,D) non sur (B,A) comme pour obtenir une surface cylindrique, mais sur (A,B), on voit que la partie commune du bord (AB et CD superposés) est orientée dans le même sens de part et d'autre, ce qui n'est pas conforme au critère de cohérence.



III — 3. Orientations d'un couple de vecteurs. Orientations d'un plan vectoriel.

III-3.1. Comme on l'a vu en III-1.7, une orientation de la surface du triangle ABC peut être obtenue à l'aide du couple $([AB], [AC])$. De plus, cette orientation n'est pas modifiée si le triangle est soumis à une translation quelconque. Finalement cette orientation est donc liée au couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ des vecteurs orienteurs des demi-droites $[AB]$ et $[AC]$.

Il est intéressant de noter au passage que le couple $(-\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AC})$ définit la même orientation que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

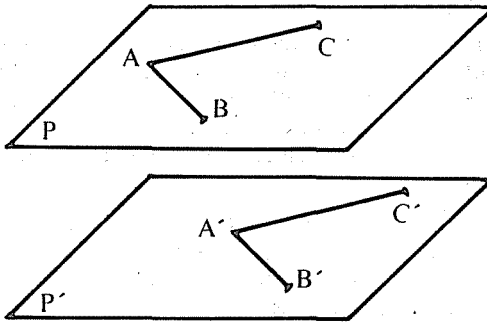
III-3.2. Dès lors on est à même de comparer les orientations des couples de vecteurs non nuls d'un vectoriel réel $\mathcal{V}$ de dimension 2 (*plan vectoriel réel*), pourvu du moins que dans chaque couple les deux vec-

teurs n'aient pas même direction (*). La classe des couples de même orientation qu'un couple donné est une *orientation* de $\mathcal{T}$; celle des couples d'orientation opposée est son orientation *opposée*.

Orienter $\mathcal{T}$, c'est faire choix d'un couple orientable (u, v) de vecteurs ; alors $\mathcal{T}_{(u, v)}$ est un *plan vectoriel orienté*.

De même qu'en dimension 1, cette ressource est souvent employée en géométrie pour orienter un plan ponctuel au moyen d'un couple de vecteurs $(\vec{OI}, \vec{OJ})$.

III-3.3. On rappelle que, dans l'espace ponctuel de dimension 3 l'ensemble des plans parallèles à un plan donné P est une *direction de plans*. Soit P' un de ces plans : si ABC est un triangle contenu dans P ,



on peut trouver dans P' des triangles $A'B'C'$ tels que $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ et $\vec{AC} = \vec{A'C'}$. Dès lors, ayant orienté P au moyen du couple $(\vec{AB}, \vec{AC})$ par exemple, on peut décider d'orienter P' au moyen du couple $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$ égal au précédent, et dire alors que les deux plans ont la même orientation.

Si l'on procède de même pour tous les plans parallèles à P , on obtient ainsi une *direction-de-plans orientée*.

Remarque : Pas plus qu'on ne peut comparer les sens de deux droites non parallèles, on ne saurait comparer les orientations de deux plans non parallèles.

(*) La modélisation algébrique de cette comparaison conduit à l'emploi des formes bilinéaires alternées. Soit f une application qui, à tout couple (u, v) de vecteurs de $\mathcal{T}$ associe un réel. Dire que f est une forme *bilinéaire*, c'est dire qu'elle est *linéaire en u* et *linéaire en v*, c'est-à-dire que, quels que soient les vecteurs u, u', v, v' , et le réel λ :

$$f(u + u', v) = f(u, v) + f(u', v) \text{ et } f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$$

$$f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v') \text{ et } f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$$

D'autre part, dire que f est *alternée* signifie que, pour tout couple (u, v) , $f(v, u) = -f(u, v)$; cela entraîne en particulier que $f(u, u) = 0$. L'opposition "positif-négatif" traduit l'opposition des deux orientations de $\mathcal{T}$; la nullité de $f(u, u)$ correspond au fait que les couples dont les vecteurs sont de même direction ne sont pas orientables.

III — 4. Grandeurs orientées

III-4.1. Dès lors qu'on sait attribuer une aire à certaines parties d'une surface orientable, il est légitime de parler d'*aires orientées*.

Un exemple intéressant est fourni par le diagramme de Watt de II-2.1. La ligne de ce diagramme étant croisée, on ne peut pas parler de région intérieure, ni dire qu'elle détermine une surface orientable. Mais chacune des deux boucles EABE et ECDE, étant orientée, renferme une surface orientable, et les deux orientations sont opposées. Or ces aires ont une interprétation physique. On sait que les produits p_v sont homogènes à une énergie (MOTS VI, X-5.2); ces aires permettent d'établir le bilan énergétique du moteur : l'aire non orientée CDE représente le gain d'énergie dû à la combustion du mélange gazeux, l'aire non orientée ABE (qui peut atteindre les trois centièmes de la précédente) représente la perte d'énergie subie au cours des autres phases. C'est la différence de ces deux aires, et par conséquent la somme des aires orientées, qui est liée au bilan énergétique.

III-4.2. *Et les angles orientés ?* Nous nous sommes efforcés dans MOTS V de respecter, autant qu'il était possible, une sorte de parallélisme entre la rubrique SEGMENT-LONGUEUR et la rubrique SECTEUR-ANGLE; à présent que nous avons associé aux segments orientés des longueurs orientées, sommes-nous aussi en mesure d'associer des "angles orientés" aux secteurs orientés ?

Sur le fond même, aucune objection ne se présente : on range dans une même classe tous les secteurs orientés du plan qui sont images par une translation ou une rotation (*) d'un secteur orienté donné, et cette classe détermine bien une orientation d'un certain angle-de-secteurs.

Malheureusement, l'expression "angles orientés" a été employée pendant des décennies pour désigner les "angles-de-couples" (voir cette rubrique), et cette regrettable habitude a laissé des traces qui créent un risque permanent de confusion. Pour l'éviter, nous préférons employer systématiquement l'expression "angle-de-secteurs-orientés" malgré sa lourdeur, et proscrire radicalement les prétendus "angles orientés".

III-4.3. Mentionnons enfin les phases (voir cette rubrique), en tant qu'elles aussi sont des "angles" (de rotations cinématiques). Ce sont visiblement des grandeurs orientées, puisqu'on peut tourner dans deux sens opposés autour d'un centre ou d'un axe.

(*) Les translations et les rotations sont, dans le plan, les seules isométries qui conservent les orientations (voir VI-3.2).

IV. ORIENTATIONS EN DIMENSION 3

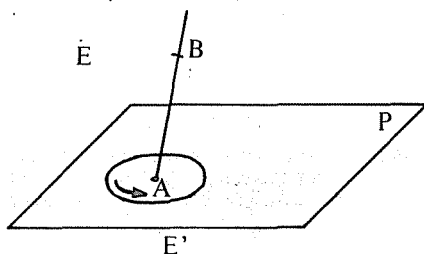
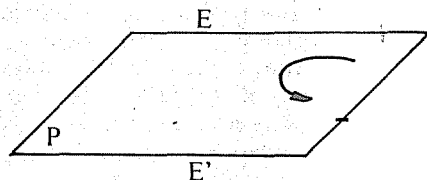
IV — 1. Orientations dans l'espace

IV-1.1. La situation est analogue à celle qu'on a rencontrée en dimension 2. On a le choix, pour comparer les orientations de parties de l'espace, entre des procédés au fond équivalents : soit un procédé algébrique (voir ci-dessous note de IV-2.2), soit le critère de III-1.3 où l'on remplace "ligne" par "surface", soit le recours à un modèle intuitif, désormais plus proche de l'*Homo erectus*. Disons que c'est le *bonhomme d'Ampère* qui, avant de parler de sa gauche et de sa droite, se préoccupe à juste titre de préciser la place de sa tête et de ses pieds, ainsi que le sens de son regard. Il transporte donc avec lui le triplet de directions orientées (pieds-tête, arrière-avant, droite-gauche). Ce modèle intuitif est couramment utilisé en astronomie, en mécanique, en électromagnétisme.

IV-1.2. Quel que soit le procédé de comparaison, il s'agit toujours de répartir en deux classes les parties orientables de l'espace Ω . La classe α de toutes les parties de Ω qui ont une même orientation, et la classe $-\alpha$ de celles qui ont l'orientation opposée à la précédente, sont les deux orientations de Ω . Orienter Ω , c'est choisir l'une des deux : (Ω, α) est un *espace orienté*, et $(\Omega, -\alpha)$ est l'autre.

Comme on l'a fait pour les dimensions inférieures, on cherche à caractériser une orientation de l'espace par celle d'une de ses parties. De même encore, plusieurs variantes sont possibles, assorties de conventions ad hoc.

IV-1.3. Tout plan P sépare l'espace Ω en deux demi-espaces E et E' . Une fois orienté leur bord commun P , ces deux demi-espaces ont des orientations opposées l'une à l'autre et il suffit de choisir l'un d'eux, par exemple E , pour orienter Ω .



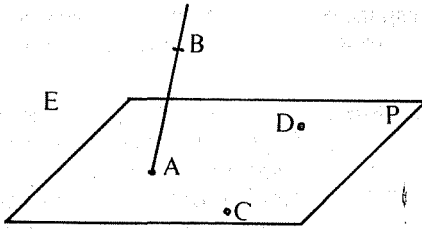
Un des moyens utilisés pour désigner cette orientation consiste à se donner une demi-droite $[AB]$ incluse dans E , dont l'origine A est un point de P , et, dans P , un disque orienté contenant A . Alors le bonhomme, placé sur la demi-droite les pieds en A , "voit" un mobile, décrivant le cerclé dans le sens choisi, tourner soit vers sa gauche, soit vers sa droite.

Il sait ainsi distinguer les deux orientations de Ω : on qualifie la première de *directe* (c'est celle de la figure avec les conventions habituelles du dessin) et la seconde de *rétrograde*.

En vertu des conventions formulées en III-1.3 (l'observateur debout sur le plan) et en III-1.7 (orientation traditionnelle du cercle trigonométrique), le *sens direct* dans le plan (celui qui s'accorde avec l'orientation directe de l'espace) coïncide avec le sens trigonométrique.

Par ailleurs, si l'on suppose $[AB]$ perpendiculaire au plan P , le dessin précédent schématise le procédé d'orientation utilisé en électromagnétisme sous le nom de *tire-bouchon de Maxwell* : on imagine un tire-bouchon (de type usuel) qui progresse de A vers B lorsqu'on le tourne dans le sens de la flèche. Par exemple, si ce sens est le sens du courant électrique qui circule dans une spire d'un fil conducteur, le champ magnétique créé est orienté dans le sens de la progression du tire-bouchon.

IV-1.4. Mais on peut aussi, au lieu du cercle de la figure précédente,

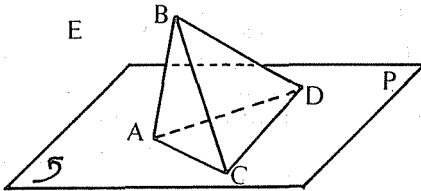


dépendante, utiliser un couple (C, D) de points du plan P tels que A, C, D ne soient pas alignés. On retrouve la même orientation que ci-dessus pour P , donc pour E et Ω , pourvu qu'on décide que c'est le couple $([AC], [AD])$ qui oriente le plan P . Avec cette convention, un couple de couples $((A, B), (C, D))$, tels que (AB) et (CD) ne soient pas coplanaires permet donc d'orienter l'espace (*).

D'autres lectures de la figure précédente sont possibles, qui définissent pour des parties convexes de l'espace telles que tétraèdres, trièdres, secteurs d'espace, une orientation cohérente avec celle de E , donc de Ω . Examinons-les.

(*) Prenant le problème dans l'autre sens, supposons que (C, D) symbolise une force agissant sur C , et qu'on veuille symboliser le moment de cette force au point A par un couple (A, B) : alors, par définition, on impose à (A, B) d'être orienté de façon que l'orientation $((A, B), (C, D))$ de l'espace soit *directe*.

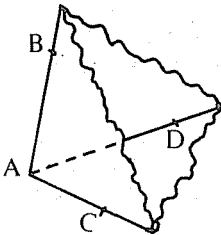
IV-1.5. Considérons le quadruplet (A, B, C, D) . Le solide convexe



dont le bord est la surface du tétraèdre $ABCD$ est inclus dans E ; la cohérence exige donc que l'orientation de sa face ACD soit la même que celle de P , à savoir (A, C, D) , et cela entraîne l'orientation (A, B, C) pour la face ABC (en conformité avec III-2.1).

D'où la convention: c'est le *premier triplet* extrait du quadruplet, à savoir (A, B, C) , qui oriente la surface tétraédrique et, par là, le solide convexe dont elle est le bord.

IV-1.6. Considérons le triplet $([AB], [AC], [AD])$ de demi-droites.

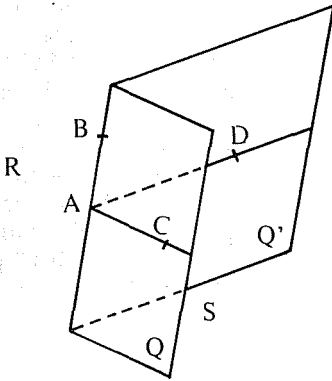


La partie convexe de l'espace dont le bord est la surface du trièdre inclut le solide tétraédrique précédent; la cohérence exige donc que l'orientation du saillant $[BAC]$ soit la même que ci-dessus, à savoir (A, B, C) .

D'où la convention: c'est le *premier couple* extrait du triplet, à savoir $([AB], [AC])$, qui oriente la surface du trièdre et, par là, la partie convexe de l'espace dont elle est le bord.

On reconnaît ici un autre procédé utilisé en électro-magnétisme, la règle dite *des trois doigts*: $[AB]$ symbolise le pouce, $[AC]$ l'index, $[AD]$ le médium; si ce sont les doigts de la main droite, l'orientation définie pour le trièdre est l'orientation directe; avec les doigts de la main gauche, elle est rétrograde.

IV-1.7. Considérons les demi-plans Q et Q' de bord (AB) qui contiennent respectivement les points C et D ; leur réunion QUQ' est le bord de deux secteurs d'espace, S (saillant) et R (rentrant).



Le secteur convexe, c'est-à-dire S , inclut les parties convexes considérées tant en IV-1.5 qu'en IV-1.6 ; la cohérence exige donc que le bord de Q soit orienté par (A,B) , de façon que ce demi-plan ait encore l'orientation (A,B,C) .

D'où la convention : étant donné le triplet $(Q,(A,B),Q')$, c'est la *première face*, Q , qui, orientée par son bord (A,B) , oriente à son tour la surface $Q \cup Q'$, et, par là, la partie *convexe* S dont $Q \cup Q'$ est le bord.

Naturellement, le secteur d'espace R a l'orientation opposée à celle de S .

On dit aussi que les secteurs d'espace, d'arête orientée par (A,B) sont orientés de Q vers Q' : on entend par là que le bonhomme ayant les pieds en A et la tête en B voit un demi-plan mobile autour de (AB) tourner de la position Q vers la position Q' dans un certain sens pour S (direct sur la figure) et dans l'autre sens pour R . Cela, qui revient à dire que le secteur plan $\widehat{CAD}$ est orienté de $[AC]$ vers $[AD]$, s'accorde bien avec l'orientation du plan P des figures IV-1.4 et IV-1.5.

IV-1.8. En résumé, à condition de convenir que ce sont toujours les parties *convexes* qui sont considérées et que le bord de chacune est orienté par sa *première face*, on peut définir l'orientation de l'espace, indifféremment,

- par un tétraèdre orienté au moyen du quadruplet (A,B,C,D) de ses sommets ou au moyen du couple de couples $((A,B),(C,D))$;
- par un trièdre orienté au moyen du triplet $([AB],[AC],[AD])$ de ses arêtes ;
- par un secteur orienté d'espace tel que $(Q,(A,B),Q')$.

On vérifiera que l'orientation ainsi définie est *altérée par toute permutation impaire des quatre lettres, et par conséquent conservée par toute permutation paire* (voir SYMETRIE, VI-2.2).

Entre autres conséquences signalons celles-ci :

1) Pour le tétraèdre, il y a douze quadruplets de même orientation (trois associés à chacune des quatre faces) et douze d'orientation contraire (attention ! ici les permutations "circulaires", comme celle qui fait passer de (A,B,C,D) à (B,C,D,A) , sont *impaires*).

2) Deux couples de couples comme $((A,B),(C,D))$ et $((C,D),(A,B))$ donnent la *même* orientation.

3) L'orientation d'un trièdre est *conservée* par permutation circulaire de ses trois arêtes.

4) L'orientation d'un secteur d'espace $(Q,(A,B),Q')$ est *altérée* quand on échange soit ses faces Q et Q' , soit les points A et B de son arête; on revient à l'orientation initiale si l'on oriente le secteur de Q' vers Q en même temps que l'arête de B vers A .

IV — 2. Orientations d'un triplet de vecteurs. Orientations d'un espace vectoriel de dimension 3.

IV-2.1. Comme on l'a vu en IV-1.6, une orientation d'un trièdre peut être obtenue grâce au triplet $([AB],[AC],[AD])$ de ses arêtes. De plus, cette orientation n'est pas modifiée si le trièdre est soumis à une translation quelconque. Finalement cette orientation est liée au triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de vecteurs orienteurs des arêtes.

Il est intéressant de noter que le triplet $(-\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{AD})$ est d'orientation opposée à la précédente, contrairement à ce qui se passe en dimension 2, mais pareillement à ce qui a lieu en dimension 1, où $\overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{AB}$ sont d'orientations opposées.

IV-2.2. Dès lors, on est à même de comparer les orientations des triplets de vecteurs d'un vectoriel réel $\mathcal{U}$ de dimension 3, pourvu que les trois vecteurs du triplet n'appartiennent pas à un même plan vectoriel (*).

Orienter $\mathcal{U}$, c'est faire choix d'un triplet (u, v, w) de vecteurs non coplanaires; alors $\mathcal{U}_{(u, v, w)}$ est une *espace vectoriel orienté*.

Ici encore, cette ressource est largement exploitée en géométrie pour orienter l'espace ponctuel au moyen d'un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

IV — 3. Grandeurs orientées

Dès lors qu'on sait attribuer un volume à certains solides, et que ceux-ci — du moins les plus simples — sont orientables, il est légitime de parler de *volumes orientés*.

De même, puisqu'on sait orienter des secteurs d'espace (voir IV-1.7), rien ne s'oppose à l'introduction de *dièdres-de-secteurs-orientés*; mais on aura pour l'expression "dièdres orientés" la même méfiance que pour "angles orientés".

(*) La modélisation algébrique de comparaison des orientations consisterait à employer les *formes trilinéaires alternées*, analogues aux formes bilinéaires alternées, signalées en note au paragraphe III-3.2, qui prennent des valeurs opposées chaque fois qu'on transpose deux vecteurs.

V. ORIENTATIONS RELATIVES

Quelle que soit la dimension, un même problème de vocabulaire est posé. Dans de nombreux cas, l'ensemble de référence — ligne, surface, espace, ensemble des phases, ensemble des intensités électriques, etc. — a été orienté une fois pour toutes ; comment alors qualifier les objets qui sont de même orientation que lui et ceux qui sont d'orientation opposée ?

Quand ces objets sont des grandeurs mesurables elles-mêmes orientées — longueur, aire, volume, phase, intensité, etc. — l'emploi des mots *positif* et *négalif* est naturel puisque le même qualificatif s'applique alors indifféremment à la grandeur et à sa mesure : car la grandeur prise pour unité a *par définition* la même orientation que l'ensemble de référence.

Dans le cas d'objets non mesurables — couples, triplets, quadruplets de points, de vecteurs, ..., sens d'un mouvement de rotation, d'un courant électrique, etc. — l'emploi des mots *positif* ou *négalif* pourrait sembler moins indiqué. En fait, cette extension de leur signification ne crée pas de difficultés graves ; au contraire, elle s'accorde avec nos habitudes de langage et d'écriture : c'est pourquoi nous n'avons pas hésité à désigner par $-\alpha$ l'orientation opposée à une orientation α en II-1.4, III-1.4 et IV-1.2.

Quant aux mots *direct* et *rétrograde*, il vaudrait mieux leur conserver en toutes circonstances la signification physique qui leur a été donnée en IV-1.3. Voir aussi VII.

VI. CONSERVATION OU ALTÉRATION DES ORIENTATIONS

VI — 1. Certaines bijections de la droite, du plan ou de l'espace sur eux-mêmes donnent de tout objet orienté une image de même orientation ; telles sont les translations ou les rotations. On peut dire qu'elles *conservent* l'orientation et les appeler des transformations *positives*.

D'autres bijections donnent de tout objet orienté une image d'orientation opposée. On peut dire qu'elles *altèrent* l'orientation et les appeler des transformations *négalives* (*).

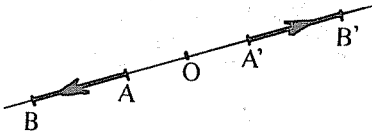
Nous allons voir des exemples des unes et des autres avec les symétries et les isométries.

(*) De même qu'en V, l'emploi de ces mots est commode : en particulier la composition de telles transformations obéit à la "règle des signes" de la multiplication. Mais on doit se garder de certaines confusions : toute homothétie de rapport positif est "positive" au sens présent, mais les homothéties de rapport négatif sont "positives" dans le plan et "négalives" sur la droite ou dans l'espace (parmi elles figurent d'ailleurs les symétries centrales ; voir le tableau de VI — 3).

VI — 2. Symétries

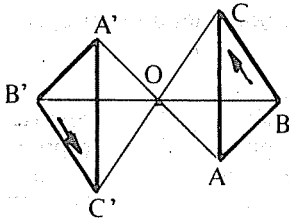
Les critères d'orientation utilisés au cours de la présente rubrique ne font appel ni aux longueurs ni à l'orthogonalité ; en conséquence, nous nous intéresserons ici aux symétries affines en général, dont les symétries orthogonales ne sont qu'un cas particulier (voir SYMÉTRIE, III — 3).

VI-2.1. Cas de la droite

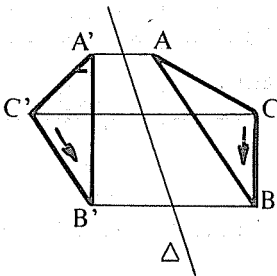


Un seul type de symétrie est à envisager, la symétrie par rapport à un point O : tout segment orienté a pour symétrique un segment d'orientation *opposée*.

VI-2.2. Cas du plan



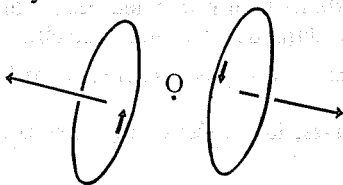
- La symétrie par rapport à un point O *conserve* l'orientation : tout triangle orienté a pour image un triangle d'*même* orientation ;



- la symétrie par rapport à une droite Δ *altère* l'orientation : tout triangle orienté a pour image un triangle d'orientation *opposée*.

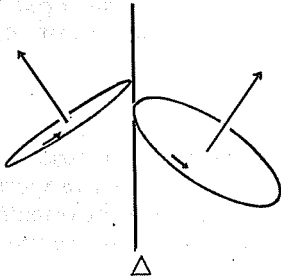
VI-2.3. Cas de l'espace

La figure la plus "parlante" est sans doute celle qu'on a introduite en IV-1.3, la réunion d'un disque et de son axe, tous deux orientés. Voyons comment elle est transformée par les symétries.

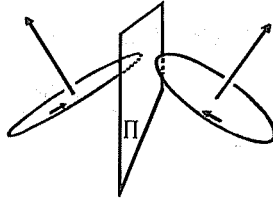


- La symétrie par rapport à un point O *altère* l'orientation ;

• la symétrie par rapport à une droite Δ *conserve* l'orientation ;



• la symétrie par rapport à un plan Π *altère* l'orientation : par exemple un objet et son image dans un miroir plan sont d'orientations opposées ; l'image de mon bras droit est le bras gauche de mon image.



VI-2.4. On voit qu'une symétrie de type donné ne peut être qualifiée de "positive" ou de "négative" au sens de VI — I sans qu'il soit fait référence à la dimension de l'ensemble ponctuel où l'on opère. On peut en effet dresser le tableau suivant :

	Symétrie par rapport à un point	Symétrie par rapport à une droite	Symétrie par rapport à un plan
Géométrie de la droite	négative (1)		
Géométrie du plan	positive	négative	
Géométrie de l'espace	négative	positive	négative

La lecture de ce tableau se fait, sur l'exemple de la case (1), de la façon suivante :

"La symétrie par rapport à un point, dans l'ensemble des points d'une droite, est négative, c'est-à-dire qu'elle altère l'orientation."

VI-2.5. Ce qui précède permet de préciser les passages de la rubrique SYMÉTRIE qui concernent la conservation de longueurs, d'aires ou de volumes. Dans cette rubrique, ces grandeurs sont non orientées ; si on les oriente, leur conservation n'a lieu que dans des cas plus restreints :

- sur la droite, les longueurs orientées ne sont pas conservées par la symétrie ;
- dans le plan, seule des deux symétries, la symétrie par rapport à un point conserve les aires orientées ;

• dans l'espace, seule des trois symétries, la symétrie par rapport à une droite conserve les volumes orientés.

VI — 3. Isométries

Les *isométries* sont les bijections de la droite, du plan, ou de l'espace sur eux-mêmes qui "conservent" les longueurs. Autrement dit, quels que soient deux points A et B, leurs images A' et B' par une isométrie sont telles que $A'B' = AB$. Mais qu'en est-il des orientations ?

VI-3.1. *Cas de la droite* : les isométries positives sont les translations ; les isométries négatives sont les symétries par rapport à un point.

VI-3.2. *Cas du plan* : les isométries positives sont les rotations (y compris les symétries centrales) et les translations (*); les isométries négatives sont les symétries orthogonales par rapport à une droite, et les composées d'une telle symétrie avec une isométrie positive.

VI-3.3. *Cas de l'espace* : les isométries positives sont les translations, les rotations (y compris les symétries orthogonales par rapport à une droite) et leurs composées ; les isométries négatives sont les symétries orthogonales par rapport à un plan, et les composées d'une telle symétrie avec une isométrie positive (parmi ces composées figurent les symétries centrales).

VI-3.4. Toute isométrie peut être obtenue par composition de symétries orthogonales

- par rapport à un point sur la droite
- par rapport à une droite dans le plan
- par rapport à un plan dans l'espace.

L'isométrie ainsi engendrée est positive si le nombre des symétries composantes est pair ; elle est négative si le nombre des symétries composantes est impair.

VII. ORIENTATIONS CONCRÈTES ET LANGAGE

VII — 1. Ainsi qu'on l'a dit dès le début de cette rubrique, notre but n'était pas une mathématisation rigoureuse de la notion d'orientation, et nous n'avons pas hésité à recourir à des démarches intuitives. Cependant il convient d'éviter toute confusion entre les deux domaines. Les mathématiciens sont capables de comparer entre elles deux orientations par des procédés algébriques, que ce soit en dimension 1 (II-3.1) ou en dimension 2 (note de III-3.2) ou en dimension 3 (note de IV-2.1), sans même exclure les dimensions supérieures. Mais il ne leur est pas possible

(*) Cela explique pourquoi en III-4.2 on s'est borné aux translations et rotations lorsqu'il s'est agi de ranger dans une même classe les secteurs de même orientation.

de définir une orientation de référence dans l'univers physique ; or c'est une nécessité qui s'impose en de nombreuses circonstances de la vie pratique ou de l'activité scientifique.

Reste donc un aspect important de la question : comment reconnaître l'orientation éventuelle d'un objet matériel et comment communiquer cette information si besoin est.

VII — 2. Orientations propres

Les objets matériels sont appréhendés dans un espace de dimension 3 ; mais cela ne fait pas obstacle au fait que certains d'entre eux ont une orientation propre de dimension 1, d'autres une orientation propre de dimension 2, d'autres une orientation propre de dimension 3. Naturellement, certains n'ont aucune orientation. Voici quelques exemples.

VII-2.1. *Orientations propres de dimension 1*

- Une voie ferrée n'est pas orientée par nature ; mais on sait dans quel sens doit être parcourue une voie ferrée munie de ses signaux.
- La plupart des lames de scie "mordent" le bois dans un certain sens, pas dans l'autre, ce qui oriente la lame.
- La pointe et l'empennage d'une flèche indiquent clairement dans quel sens l'archer doit l'utiliser ; à tel point que la flèche a fini par devenir un idéogramme propre à informer sur l'orientation en dimension 1 dans de nombreux domaines de la vie pratique.
- Une tige d'acier peut paraître non orientée ; mais on ne tarde pas à s'apercevoir du contraire si c'est une tige aimantée. C'est pour donner cette information qu'on bleuit habituellement l'une des pointes de l'aiguille d'une boussole. Ne pas confondre cette orientation, propre à l'aiguille, avec l'orientation qu'elle prend quand elle est soumise à un champ magnétique (du sud vers le nord s'il s'agit du champ magnétique terrestre, mais susceptible de varier si l'on approche un morceau de fer). Cette dernière acception est celle de I-1, celle qui nous occupe ici est celle de I-2.

VII-2.2. *Orientations propres de dimension 2*

- Un rond-point n'est pas orienté par nature ; mais la disposition de ses feux de circulation permet de l'orienter.
- Une lame de scie circulaire est orientée par le dessin de ses dents.
- On a vu en III-1.7 comment une flèche courbe peut être un idéogramme d'orientation en dimension 2.
- Une feuille de papier portant un texte sur une seule de ses faces est orientée par le couple des "sens de lecture" : le sens de lecture des caractères de chaque ligne, et le sens de lecture des lignes successives. La précision "sur une seule face" est indispensable : une feuille imprimée recto-verso n'oriente pas son plan, car la page recto et la page verso donnent au plan des orientations opposées.

• La situation est la même avec les cadrans d'horloge. Un cadran est orienté par le numérotage des heures ; mais l'ensemble constitué par deux horloges accolées dos à dos comme on en voit parfois sur les quais de gare n'oriente pas leur direction de plans, les deux graduations ayant des orientations opposées.

VII-2.3. Orientations propres de dimension 3

• Posons sur une table plusieurs de nos actuelles pièces de dix francs de façon que les inscriptions gravées sur la tranche soient toutes facilement lisibles : cela revient à dire que les disques plans matérialisés par les pièces sont tous de même orientation en dimension 2. On s'aperçoit alors que certaines des pièces (la moitié environ) présentent le côté "pile", les autres le côté "face" : autrement dit, le couple (pile, face)



Fig. 1a



Fig. 1b

donne l'une ou l'autre des deux orientations possibles aux axes des disques en dimension 1 ; on constate ainsi que les pièces elles-mêmes se répartissent en deux catégories suivant leur orientation propre en dimension 3 (figures 1a et 1b ci-contre ; à rapprocher aussi de la première figure de VI-2.3).

Naturellement les pièces pourraient être toutes posées sur la même face, mais alors c'est le sens de lecture sur la tranche qui changerait d'une pièce d'un type à une pièce de l'autre type (voir la figure de couverture de la présente brochure ; à rapprocher aussi de la troisième figure de VI-2.3).



Fig. 2a



Fig. 2b

• Une variante de cette dernière situation consiste à remplacer les pièces par des livres dont les couvertures jouent les rôles de pile et de face, et le dos celui de la tranche : le titre peut être porté sur le dos de deux façons, ce qui ne simplifie pas les rangements en bibliothèque (figures 2a et 2b).

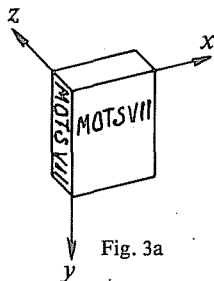


Fig. 3a

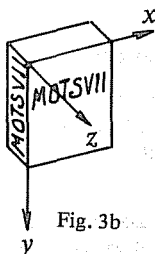


Fig. 3b

• Autre interprétation des figures 2a et 2b : considéré comme un parallélépipède, le livre est orienté par un triplet (x, y, z) des trois directions orientées de ses arêtes (figures 3a et 3b).

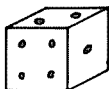


Fig. 4a

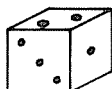


Fig. 4b

• On retrouve un schéma analogue avec les dés à jouer : les nombres portés sur deux faces opposées ayant pour somme 7, un triplet de droites orientées passant par les centres de faces opposées, par exemple le triplet $((1;6),(2;5),(3;4))$ peut avoir l'une ou l'autre des deux orientations de l'espace (figures 4a et 4b).

• Il existe des hélices circulaires de deux types, irréductibles l'un à l'autre : si deux tiges filetées de même rayon et de même pas sont d'orientations différentes, elles ne peuvent pénétrer dans le même écrou.

• Les roues à pales des éoliennes entrent dans le même schéma : si on les monte sur des axes parallèles, le vent les fait tourner, suivant la disposition des pales, les unes dans un sens, les autres en sens contraire.

VII — 3. De même le corps humain possède une orientation propre en dimension 3 qui résulte de sa physiologie. Une première droite orientée va par exemple de ses pieds vers sa tête ; une deuxième va par exemple "d'arrière en avant", c'est-à-dire de sa face dorsale vers sa face ventrale (sens de la marche, du regard) ; la troisième, allant par exemple de sa droite vers sa gauche, est liée à une certaine dissymétrie du corps (emplacements du foie et du cœur, rôles spécialisés des hémisphères cérébraux, etc.), qui peut présenter des variations individuelles plus ou moins accentuées (comme, de plus, la prise de conscience de cette dissymétrie se fait plus difficilement dans l'enfance, en raison de la symétrie apparente, l'acquisition des notions de droite et de gauche est plus malaisée).

Par définition, le triplet de droites orientées (pieds-tête, arrière-avant, droite-gauche) matérialise l'*orientation directe* ; mais celle-ci peut se traduire sous d'autres formes, comme on l'a vu sur les figures de IV-1.3 à IV-1.7, en particulier par l'expression "voir tourner de droite à gauche". L'*orientation rétrograde* est celle pour laquelle on "voit tourner de gauche à droite".

VII — 4. Désignations des orientations

Comment le sujet, ainsi muni de son orientation, va-t-il décrire dans son langage les orientations des objets extérieurs ? La réponse à cette question est multiple, elle dépend beaucoup des circonstances, et aussi des habitudes prises.

Mettons d'abord à part les objets aisément maniables dont l'orientation est de dimension 1 ou 2. Comme il existe toujours un déplacement

matériel susceptible d'amener un tel objet dans n'importe quelle position souhaitée par l'utilisateur, le besoin de qualifier ces orientations ne se fait même pas sentir : personne ne se soucie d'avoir des lames de scie "avant" ou "arrière", ni des scies circulaires "droites" ou "gauches" ; on les monte convenablement pour l'emploi, et c'est tout.

Le problème ne se pose donc vraiment que si l'objet orienté occupe une position imposée par quelque contrainte extérieure, ou si son orientation relève de la dimension 3, faute de pouvoir passer par une quatrième dimension.

VII-4.1. *Désignations en dimension 1*

On peut distinguer deux cas bien tranchés.

(a) Toutes les fois que la position de l'observateur est connue ou imaginée d'avance, la plupart du temps pour d'évidentes raisons pratiques, le sujet transfère spontanément, presque inconsciemment, son vocabulaire à l'objet. Quand on dit que les lignes d'un texte français sont orientées de gauche à droite, c'est de la gauche et de la droite d'un lecteur, placé normalement en face du texte, qu'il s'agit. Mieux même : dire que ce texte se lit de haut en bas fait appel à une double convention implicite : (1) le texte (fût-il posé sur une table) est imaginé placardé sur un mur vertical, et (2) ce texte est lisible pour un lecteur placé en face, debout sur ses pieds ; moyennant quoi, la confusion entre l'orientation haut-bas du champ de la pesanteur et l'orientation tête-pieds du sujet n'est même plus ressentie.

(b) Il n'en va plus de même s'il y a doute sur la position de l'observateur relativement à l'objet. Une porte coulissante est munie d'une orientation propre en dimension 1, par exemple le sens dans lequel elle coulisse lors de la fermeture. Bien entendu, on admet encore que l'utilisateur est normalement debout, face à la porte ; mais doit-il la faire coulisser vers sa droite ou vers sa gauche pour la fermer ? Nous sommes incapables de répondre à cette question en l'absence d'une information supplémentaire : de quel côté de la porte se trouve-t-il ?

Dans le même ordre d'idées, le rôle d'une boussole n'est pas d'indiquer la droite, la gauche, l'avant ou l'arrière ; mais, si l'on sait que je l'utilise en France, debout face au soleil levant, alors on peut affirmer que la pointe nord de l'aiguille indique ma gauche.

VII-4.2. *Désignations en dimension 2*

La situation est à peu près la même.

(a) Si l'on peut assurer dans quel demi-espace se trouve la tête de l'observateur par rapport à un plan orienté, on peut toujours :

- ou bien se ramener à la situation (a) de VII-4.1 et orienter les deux directions d'un couple de directions lié au plan, par exemple orienter une page de texte par les orientations gauche-droite des lignes et haut-bas des colonnes ;

• ou bien, le plus souvent, imaginer que l'observateur tout entier dans ce même demi-espace a les pieds sur le plan (même si cette position est inconfortable !): alors des expressions comme "tourner vers la droite", "tourner à gauche", etc. (*), empruntées à l'orientation propre de l'observateur, s'appliquent de façon commode et non ambiguë aux orientations de ce plan. Pour le géomètre qui dessine sur une feuille de papier, pour l'automobiliste qui roule sur une place circulaire, le sens trigonométrique traditionnel ainsi que le sens giratoire (du moins en France) consistent à tourner vers la gauche; un plateau d'électrophone, les aiguilles d'une horloge ou d'une montre tournent à droite. C'est avec la même convention implicite qu'on dira: pour augmenter le son, tourner le bouton "volume" vers la droite.

(b) Ce langage simple n'est plus de mise lorsque la tête de l'observateur peut se trouver dans l'un ou l'autre des demi-espaces qui ont pour bord le plan orienté. Imaginons un verrou posé sur une porte et commandé par deux boutons moletés: le verrouillage consistera à tourner ces boutons dans un sens qui, en dimension 2, est bien défini, mais qui est soit vers ma droite, soit vers ma gauche selon que je suis d'un côté ou de l'autre de la porte; sans cette information les mots "droite" et "gauche" n'ont pas de signification.

Toutefois, cela n'est vrai que pour un verrou encastré dans l'épaisseur de la porte; car, s'il est posé sur l'une des faces, on sait distinguer entre elles, comme dans la situation (a), et il ne serait plus abusif de dire par exemple que le verrouillage se fait vers la droite, entendant par là que c'est le sens pour l'utilisateur placé du côté où est posé le verrou.

Les astronomes ne procèdent pas autrement pour orienter le mouvement diurne. Dire que le Soleil tourne à droite est vrai en France, mais faux en Australie; sans aller si loin, je vois au cours de la nuit la Lune tourner "dans le sens des aiguilles d'une montre", et la Petite Ourse tourner "en sens contraire"; c'est simplement parce que pour regarder la Lune je me tourne vers le Sud et pour observer la Petite Ourse je me tourne vers le Nord. Il n'est pas possible de décrire l'orientation en dimension 2 du mouvement diurne sans introduire par une troisième dimension un observateur fictif dont l'orientation est conventionnelle. La mécanique céleste s'étant d'abord développée dans l'hémisphère boréal de la Terre, des raisons historiques font que cet observateur privilégié a la tête au pôle Nord et les pieds au pôle Sud; avec ce choix le mouvement diurne se fait vers la droite, c'est-à-dire est rétrograde. Le mouvement de rotation de la Terre qui se fait évidemment en sens inverse du mouvement diurne apparent est donc direct, ainsi d'ailleurs que la plupart des mouvements planétaires.

(*) La distinction entre "à" et "vers" n'a rien de fondamental; elle résulte surtout d'habitudes de langage. Si un automobiliste roule sur une place circulaire en tournant vers sa gauche, il tourne aussi de droite à gauche pour un observateur situé au centre de la place.

VII-4.3. Désignations en dimension 3

Cette fois, la situation est foncièrement différente des situations précédentes.

(a) En principe — mais en principe seulement — le seul problème est de nommer les deux orientations possibles de l'objet étudié (ce que nous savons déjà faire grâce aux mots "direct" et "rétrograde") et de dire à laquelle des deux classes il se rattache. La position de l'observateur ne joue aucun rôle.

Reprenons l'exemple des dés à jouer de VII-2.3 ; si l'on a décidé de les orienter par le triplet $((1;6),(2;5),(3;4))$, l'orientation du dé de la figure 4a est directe, celle du dé de la figure 4b est rétrograde. De même, si l'on oriente les pièces de dix francs des figures 1a et 1b de VII-2.3 par le couple (pile, face) de leur axe et par le sens de lecture de la tranche, on

obtient schématiquement les deux figures ci-contre ; celle de 5a est d'orientation directe, celle de 5b est d'orientation rétrograde. Mettre les dés ou les pièces sur une autre face ne change évidemment rien à ces orientations, même si certaines flèches (nécessairement en nombre pair) changent de sens pour l'observateur.

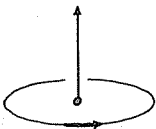


Fig. 5a

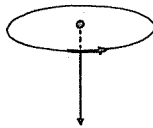


Fig. 5b

Cela nous amène à l'orientation des hélices et des courbes ou surfaces apparentées. Si le centre H d'un disque décrit une droite perpendiculaire à son plan, et que simultanément le disque tourne autour de cette

droite de façon que la phase (voir ce mot) du mouvement de rotation soit proportionnelle à la longueur orientée parcourue par H, chaque point A du bord du disque décrit une hélice circulaire. Or les flèches qui symbolisent ces deux mouvements sont exactement celles qui servaient à orienter les pièces de monnaie des figures 5a et 5b, et il est clair que chacune de ces orientations reste la

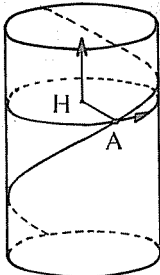


Fig. 6a

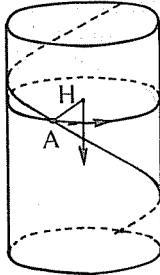


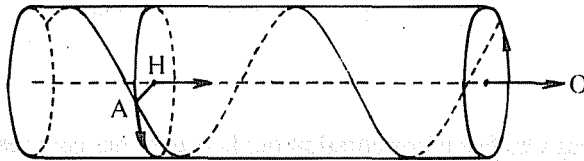
Fig. 6b

même au cours du mouvement ; ici encore, changer le sens du mouvement reviendrait à changer le sens des flèches, mais ne changerait rien aux orientations. On peut donc parler d'hélices d'orientation directe (comme celle de la figure 6a) et d'hélices d'orientation rétrograde (comme celle de la figure 6b). Les "bandes dessinées" constituées par les bas-reliefs de la colonne Trajane et de la colonne Vendôme sont des hélices d'orientation directe.

Ce qui précède s'applique à des objets fort divers. Citons, outre les phénomènes de polarisation en optique, les vis, boulons et écrous, les tire-bouchons, les escaliers "en colimaçon", les vrilles des technologistes et celles des botanistes, certains coquillages, les éoliennes, etc.

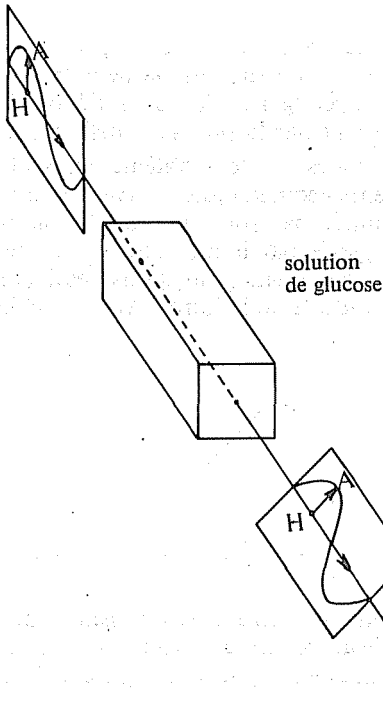
(b) En fait, justement parce que le champ d'application est très vaste, on ne peut éviter que ce vocabulaire objectif se heurte aux habitudes particulières de chaque profession. On a tendance, un peu partout, à réintroduire des observations ; en dépit des apparences, cette démarche ne ressemble pas à celle des astronomes de VII-4.2, elle s'y oppose plutôt. Les astronomes ne pouvaient éviter de passer en dimension 3 pour préciser le sens des mouvements célestes ; ici au contraire, de façon plus gratuite on préfère retrouver en dimension 3 la commodité — mais aussi l'ambiguïté — des mots familiers "gauche" et "droite" utilisés en dimension 2.

La lumière est une vibration transversale qu'on représente par un "vecteur de Fresnel" $\vec{HA}$ perpendiculaire au rayon lumineux. Lorsque



le point A décrit une hélice circulaire, on dit que la polarisation est circulaire ; si la demi-droite [HA) tourne de droite à gauche pour l'observateur O qui reçoit la lumière, on dit que cette lumière est *gauche* ou *sinistrorsum* (cas de la figure) ; sinon on parle de lumière *droite* ou *dextrorsum*.

Lorsque [HA] reste dans un plan fixe, dans lequel A décrit alors une sinusoïde, on dit que la lumière est polarisée rectilignement et le plan



fixe est appelé plan de polarisation. Quand une telle lumière traverse certaines substances, soit cristallines comme des quartz, soit en solution comme certains sucres, ce plan pivote autour du rayon lumineux. Si, pour l'observateur O, le plan a pivoté vers la gauche, on dit que la substance est *lévogyre*; s'il a pivoté vers la droite, on dit qu'elle est *dextrogyre* (cas de la figure).

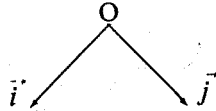
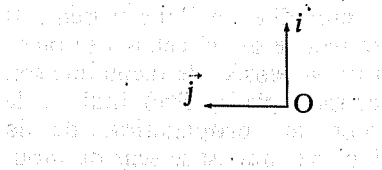
Ces diverses dénominations ont évidemment été dictées par la commodité de l'observateur. Il se trouve qu'ici celui-ci se place (par la pensée) de façon que son couple (pieds, tête) indique le sens de propagation de la lumière, qui est le sens du mouvement de H. Aussi les orientations apparentes qu'il qualifie de gauche et droite en dimension 2 coïncident-elles respectivement avec les orientations propres directe et rétrograde des hélices.

Au contraire, on appelle vis *à droite* celles dont le filet est d'orientation directe; ce sont celles qu'on visse en les faisant tourner vers la droite, geste normal de quelqu'un qui se trouve face à la tête de vis (la différence avec le cas de la lumière provient de ce que la lumière allait vers l'observateur, tandis que la vis s'éloigne de lui lors du vissage). Bien entendu, si je veux boulonner une plaque contre une porte avec un boulon à droite (donc un écrou à droite) en passant une de mes mains derrière la porte, cette main-là fera tourner l'écrou *vers ma gauche*, alors que celle qui travaille face à la porte fait tourner le boulon vers ma droite. On remarque la différence entre cette situation et celle de VII-4.2, où mes mains feraient tourner les deux boutons moletés du verrou dans le même sens relativement à moi (cette dernière précision est nécessaire, sans quoi l'expression "dans le même sens" est aussi ambiguë que les mots "droite" et "gauche").

Les tire-bouchons, mèches et vrilles sont habituellement à droite, c'est-à-dire qu'on les manie comme les vis à droite. Les botanistes qualifient de *dextres* les plantes volubiles de même orientation (directe) que

les vrilles de la technologie : par exemple, les liserons sont dextres ; naturellement, les plantes qui ont l'orientation rétrograde sont dites *senestres*. Les zoologistes adoptent le même vocabulaire pour leurs coquilles : la plupart des Gastéropodes sont dextres. Ces dénominations peuvent s'étendre aux câbles torsadés, etc.

Il est hors de question de condamner de telles habitudes, qui sont bien ancrées et pas totalement arbitraires. D'ailleurs, les mathématiciens ne sont pas au-dessus de tout soupçon à cet égard. Combien d'énoncés de problèmes de baccalauréat commencent par la phrase rituelle "Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct", alors que le problème demande par exemple la détermination des éléments géométriques — axes, foyers, asymptotes, etc. — d'une conique donnée par son équation ! Toutes questions où l'orientation du plan, suggérée par le mot *direct*, ne joue aucun rôle. S'agit-il d'un clin d'œil aux candidats pour qu'ils dessinent leur repère comme tout le monde a l'habitude de le faire ? Mais, s'ils le dessinent sous l'une des formes :



leur repère ne sera pas moins direct, et de toute façon cela n'a aucune importance. Alors ?

Bref, si les spécialistes se comprennent entre eux, on risque toujours le contresens si l'on n'est pas initié au vocabulaire (ou aux manies) de la spécialité. Ce manque de cohérence peut agacer le logicien, il ne surprendra pas le linguiste.

PHASE (84)

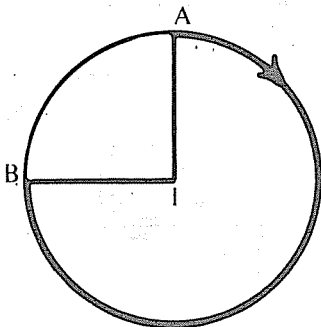
- I. Des coureurs qui resquillent
- II. Est-ce que les géomètres ne trichent pas un peu aussi ?
- III. A la recherche d'un vocabulaire honnête
- IV. Liens entre les phasages et les diverses sortes d'angles
- V. Fonctions trigonométriques
- VI. Synopsis

N.B. - Nous renvoyons :

- pour tout ce qui concerne les "angles", aux deux rubriques ANGLE-DE-COUPLES, et SECTEUR—ANGLE (MOTS V); bien que les expressions "angle-de-saillants" et "angle-de-rentrants" utilisées ici n'aient pas été employées dans cette dernière rubrique, le lecteur comprendra sans peine qu'elles désignent des cas particuliers de la notion "angle-de-secteurs";

- pour les grandeurs orientées, à la rubrique ORIENTATION.

I. DES COUREURS QUI RESQUILLEN



Une course de 1500 m se dispute sur une piste circulaire de centre I longue de 400 m ; le départ se fait au point A et l'arrivée est en B. Partant dans le sens de la flèche, un coureur X doit donc faire trois tours de piste, puis parcourir l'arc AB figuré en trait fort. Il est évident que le coureur Y qui se contenterait de parcourir ce dernier arc serait accusé de tricherie, non moins que le coureur Z qui, parti de A dans le sens opposé, irait simplement en B par le petit arc AB de 100 m. L'argument qu'invoqueraient les deux resquilleurs

“Partis de A, nous sommes arrivés en B ; que demande-t-on de plus ?” ne trouverait guère d’audience auprès des concurrents ni auprès des juges.

Traduisons. Une fois donné le point de départ A, le sens du parcours et la longueur du parcours, le couple (A,B) est déterminé ; au contraire la donnée du couple (A,B) ne détermine ni le sens ni la longueur du parcours. Tout ce qu’on peut dire alors, c’est que, le plan ayant été orienté par la flèche, les longueurs orientées effectivement parcourues sont de la forme $300\text{ m} + k \cdot 400\text{ m}$, où k est un élément de $\mathbb{Z}$; pour les coureurs honnêtes, $k=3$; pour le resquilleur Y, $k=0$; pour le resquilleur Z, $k=-1$. Sous une autre forme, équivalente à celle-ci, ces longueurs orientées sont congrues à 300 m modulo 400 m (MOTS III, CONGRUENCE).

II. EST-CE QUE LES GÉOMÈTRES NE TRICHENT PAS UN PEU AUSSI?

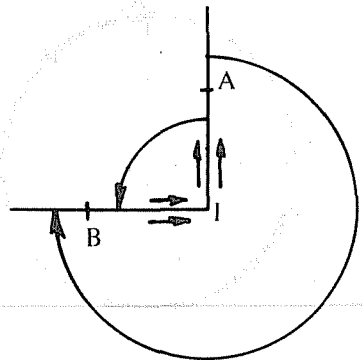
Considérer, au lieu des points A et B, les demi-droites [IA) et [IB), et transférer ainsi des “arcs” aux “angles” ce problème de détermination, ne le modifie pas fondamentalement. Mais, en introduisant des “angles”, les géomètres ne commettent-ils pas un abus de langage non moins fallacieux que l’argumentation des coureurs Y et Z ?

Nous référant aux rubriques mentionnées au début, que trouvons-nous ?

II — 1. L’angle-de-paires de demi-droites $\widehat{[IA), [IB)}$ peut être confondu sans inconvénient grave avec l’angle-de-saillants AIB ; un tel angle est compris entre 0° et 180° . Dans le cas présent, c’est le bon vieil angle droit ; il s’applique au coureur Z.

II — 2. L’angle-de-rentrants $\widehat{AIB}$ est compris entre 180° et 360° ; en l’occurrence, il est égal à 270° et concerne le coureur Y.

II — 3. Orientons chacun des deux secteurs $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIB}$ de [IA) vers [IB) ; ils sont d’orientations opposées. Si par ailleurs le plan est orienté par la flèche de la figure de la page 1, les angles de ces deux secteurs orientés sont respectivement -90° et $+270^\circ$.



Grâce à ces *angles-de-secteurs-orientés*(*), compris entre -360° et $+360^\circ$, on gagne, par rapport à II-1 et II-2, une information sur les sens de parcours mais on ne parvient pas à prendre en compte d'autres coureurs que les deux resquilleurs.

II — 4. *L'angle-de-couples* (*) de demi-droites ($\widehat{IA}, \widehat{IB}$) s'applique indistinctement à tous les coureurs, honnêtes ou tricheurs; l'employer reviendrait à justifier l'argumentation spécieuse de ces derniers sous les dehors d'un langage savant.

Il ne manque pas de situations en géométrie où la somme de deux "angles plats" est "l'angle nul", mais ce ne sont pas les "angles" de cette sorte qu'on rencontre sur les terrains de sport.

En conclusion, rien dans le vocabulaire inventorié ne peut être invoqué par les coureurs sérieux tels que X.

III. A LA RECHERCHE D'UN VOCABULAIRE HONNÊTE

III — 1. Tous les "angles" recensés de II-1 à II-4 sont attachés à des ensembles de points, des paires ou des couples de demi-droites, et ont donc un caractère strictement géométrique. Cela explique pourquoi ils sont si mal adaptés au cas des coureurs : la façon dont ceux-ci vont de A à B est au moins aussi importante que les points A et B eux-mêmes ou que les deux arcs AB ; le problème est de nature cinématique et le mot *phase*, d'origine mécanique, est beaucoup plus adéquat. Essayons d'en préciser la signification.

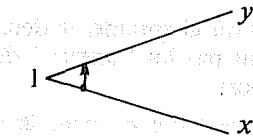
(*) L'attention du lecteur est spécialement attirée sur la différence entre les notions *angle-de-secteurs-orientés* et *angle-de-couples* (V.ORIENTATION, III-4.2 et ANGLE-DE-COUPLES).

III — 2. Nous adopterons une démarche qui rappelle celle qui a été suivie pour les *angles-de-couples* (géométrie du plan).

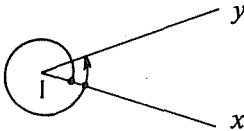
III-2.1. Soit dans le plan deux demi-droites fixes x et y , de même origine I , et une demi-droite z mobile d'origine I .

On considère comme équivalents les mouvements où la demi-droite z part de x et arrive en y en tournant toujours dans le même sens (*) et en occupant une position donnée (par exemple x) un nombre donné de fois (la différence entre deux mouvements équivalents porte sur la manière dont ils se déroulent dans le temps : durée, instants initial et final, comportement de la vitesse,...).

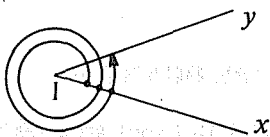
Ainsi on obtient :



• une classe d'équivalence dans le cas où z occupe une fois et une seule la position x (au départ),



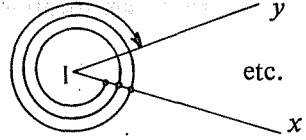
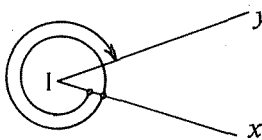
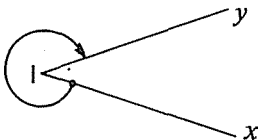
• une autre classe dans le cas où z occupe deux fois la position x ,



• une troisième classe dans le cas où z occupe trois fois la position x .

En continuant de la sorte, on obtient une infinité de classes d'équivalence.

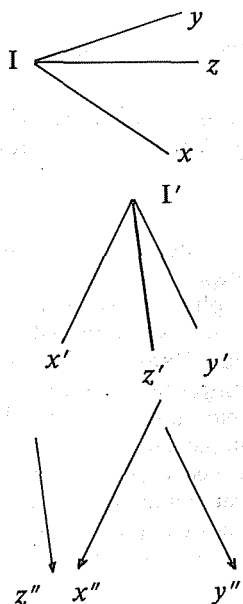
On en obtient à nouveau une infinité d'autres en changeant le sens des mouvements de rotation :



etc.

(*) Intuitivement, cette expression est claire ; si l'on veut la préciser mathématiquement, on peut dire que le couple constitué par la demi-droite z et par la direction orientée des vecteurs-vitesse de ses points garde au cours du temps une orientation constante.

III-2.2. Chaque classe d'équivalence peut être élargie de la façon suivante :



a) Soit K une isométrie *positive* quelconque ; elle transforme I, x, y respectivement en I', x', y' .

Soit M l'un des mouvements de z précédemment décrits.

Un mouvement M' de la demi-droite mobile z' sera déclaré équivalent à M si, à *chaque instant*, z' est l'image de z par K . Cela implique :

- que z' ait I' pour origine fixe,
- que z' parte de x' et arrive en y' ,
- que z' tourne toujours dans le même sens, celui dans lequel tourne z ,
- que z' occupe la position x' autant de fois que z occupe la position x .

b) Enfin, si une demi-droite mobile z'' , sans avoir une origine fixe, est telle que, à *tout instant*, z'' ait la même direction orientée que z' , le mouvement de z'' sera encore déclaré équivalent à M' et à M .

Dans ce paragraphe, on peut remplacer "demi-droite" par "flèche" dans l'acception de la note de I-3 de ANGLE-DE-COUPLES.

III-2.3. En définitive, les mouvements d'une même classe ont en commun :

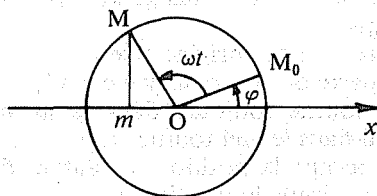
- le sens du mouvement de rotation,
- un *angle-de-couples* (dans les exemples ci-dessus, c'est $\widehat{(x,y)}$),
- le nombre de fois où la flèche variable prend une certaine direction orientée.

Une telle classe d'équivalence peut être appelée un *phasage*(*). Chaque phasage obtenu ci-dessus peut être dit, d'après III-2.1, un *phasage* du couple (x,y) et, d'après III-2.2, un *phasage* de l'*angle-de-couples* (x,y) .

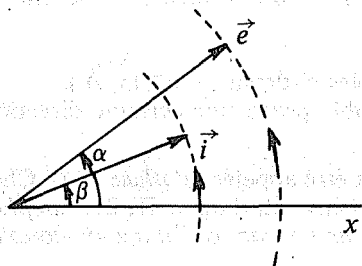
(*) Cette grandeur ne diffère pas de "l'angle-de-rotations-cinématiques" évoqué dans la brochure GRANDEUR-MESURE (MOTS VI, V-4.6) ; mais le mot *phasage*, outre qu'il est plus court, exclut toute confusion avec les nombreux autres "angles" de la géométrie. A vrai dire, le mot *rotation* comporte au moins autant de pièges que le mot *angle* ; l'ambiguïté réside dans le fait qu'on désigne par les mêmes mots — *translation*, *rotation* — des objets aussi différents que des isométries en géométrie et des mouvements en cinématique. Certes, ces objets sont dialectiquement liés ; mais la dialectique, si elle peut servir à transcender les différences, peut aussi servir à les camoufler.

Ainsi, dans l'exemple des coureurs, on pourra dire que, dans le plan orienté par la flèche de la figure de la page 1, le couple ([IA), [IB)) admet un phasage de 1350° (coureur X), un autre de 270° (coureur Y), un autre de -90° (coureur Z). Cette fois, la description est précise et fidèle.

Enfin, si la direction orientée de x est prise pour *origine des phases*, tout phasage de (x, y) sera, par définition, *une phase* de la direction orientée de y (*).



III-2.4. Ainsi qu'on l'a dit, le mot "phase" provient de la mécanique, plus précisément de l'étude des mouvements vibratoires simples. Dans un tel mouvement, d'amplitude R et de pulsation ω , l'élongation du mobile m est donnée en fonction du temps t par $R \cos(\omega t + \varphi)$, autrement dit, le mobile m est le projeté orthogonal, sur l'axe x d'origine O , d'un mobile M qui décrit le cercle de centre O et de rayon R avec la vitesse angulaire constante ω . Il est de règle dans ces questions de prendre le radian pour unité (voir ci-dessous III-4); le réel $\omega t + \varphi$ est la mesure de la phase de la demi-droite $[OM)$, et φ est celle de la phase de sa position $[OM_0)$ à la date prise pour origine des temps.



Une utilisation classique est la représentation géométrique du courant sinusoïdal en électricité : la tension est symbolisée par un vecteur tournant $\vec{e}$, et l'intensité du courant par un autre vecteur tournant $\vec{i}$. Soient, à un instant donné, α la phase de $\vec{e}$ et β celle de $\vec{i}$ à partir d'une demi-droite x ; alors $\beta - \alpha$ est un phasage de $(\vec{e}, \vec{i})$ au sens que nous avons donné à ce mot ;

son opposé $\alpha - \beta$ est le *déphasage* des électriciens, retard de l'intensité sur la tension.

(*) Nous avons introduit le mot *phasage* pour la clarté de l'exposé; dans la pratique, le mot *phase* est souvent employé avec le sens de *phasage*.

III — 3. Deux phasages sont dits de même orientation ou non selon que le sens des mouvements de rotation correspondants est le même ou non ; dès lors, l'ensemble des phasages est orientable ; le choix d'un phasage non nul détermine une orientation et fait de l'ensemble des phasages un ensemble orienté.

Comme beaucoup de grandeurs physiques orientées, les phasages, et par conséquent les phases, constituent un ensemble qui peut être organisé en vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 1 (MOTS VI, VIII-1). Dans la pratique, cela revient à dire qu'on peut les additionner ou les soustraire entre elles, ainsi que les multiplier par des réels, *sans limitation ni précaution d'aucune sorte*, ce qui accentue la différence entre ces grandeurs et les diverses espèces d'angles, dont aucune ne peut s'affranchir de telles sujétions.

Les phasages de l'*angle-de-couples* nul, $(\widehat{x, x})$, sont (voir III-2) :

- le *phasage nul* (la demi-droite z reste immobile en x , ou plus généralement la demi-droite mobile z'' conserve la même direction orientée au cours de son mouvement) ;
- les deux *tours* (la demi-droite mobile z balaye le plan une fois et une seule), un pour chaque sens de mouvement de rotation ;
- les produits de chaque tour par un naturel quelconque.

Les phasages (et les phases) ont été définis indépendamment de toute orientation du plan. Mais, dès qu'on a besoin d'une information numérique à leur sujet (comme dans l'exemple de III-2.3), il devient nécessaire d'orienter le plan ; on réserve alors la dénomination *tour* et surtout la notation "tr" à celui des deux tours précédents qui est associé au sens des flèches courbes indiquant l'orientation du plan. Les phasages de l'*angle-de-couples* nul sont alors les produits du tour par un entier quelconque.

III — 4. L'unité de phase la plus naturelle est le tour ; cela entraîne l'emploi du demi-tour, du quart de tour, etc. Les unités dites "unités d'angle" sont, en réalité, bien plus encore des unités de phase, puisque c'est seulement dans le cas des phases qu'on peut les manier sans aucune restriction : on dispose donc du degré, égal à $\frac{1}{360}$ tr, de la minute, de la seconde, et du radian, égal à $\frac{1}{2\pi}$ tr.

Le cas du radian est très particulier. Au fond, le radian relève plus de l'analyse que de la physique : c'est grâce à lui que la mesure d'une "petite phase" est équivalente à son sinus et à sa tangente(*) et, en con-

(*) En termes plus explicites : si x est la mesure d'une phase avec le radian pour unité, la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ est 1 et la limite en 0 de $\frac{\tan x}{x}$ est 1.

séquence, que la fonction *cosinus* est la dérivée de la fonction *sinus*. Cette commodité est trop évidente pour être contestée; et l'on va, de proche en proche, jusqu'à considérer que, l'unité radian "allant de soi", les phases sont des grandeurs "sans dimension", donc de simples réels. Cette question étant discutée au chapitre X-3.3 de MOTS VI, nous nous contentons d'y renvoyer le lecteur. Répétons seulement que toutes les conventions sont acceptables, surtout quand elles bénéficient d'un assentiment général; mais qu'elles comportent un danger, permanent pour la communication — donc pour l'enseignement — dès qu'on oublie ou qu'on masque leur caractère de conventions pour les transformer en dogmes.

IV. LIENS ENTRE LES PHASAGES ET LES DIVERSES SORTES D'ANGLES

IV — 1. Lien avec les angles-de-couples

IV-1.1. De la définition même des phasages résulte qu'il existe un lien entre eux et les *angles-de-couples*; mais aucune notation usuelle n'en rend compte. L'emploi de deux symboles comme $\succ$ (qu'on peut lire "angle-de-couples de") et $\lessdot$ (qu'on peut lire "ensemble des phasages de") nous paraît susceptible de combler cette lacune(*).

Convenons donc que

- l'*angle-de-couples* qui admet un phasage φ sera noté $\succ \varphi$;
- la classe modulo 360° des phasages d'un couple (x,y) , qui est également la classe des phasages de l'*angle-de-couples* $\widehat{(x,y)}$, sera notée indifféremment $\lessdot (x,y)$ ou $\lessdot \widehat{(x,y)}$.

Reprenant l'exemple de la figure de la page 1 avec le plan orienté par la flèche, on pourra donc écrire :

$$\succ 1350^\circ = \succ 270^\circ = \succ (-90^\circ) = \widehat{([IA], [IB])}$$

$$\lessdot ([IA], [IB]) = \lessdot \widehat{([IA], [IB])} = \{270^\circ + k.360^\circ; k \in \mathbb{Z}\}$$

(Cette dernière notation désigne l'ensemble des phasages qui peuvent être écrits sous la forme $270^\circ + k.360^\circ$ où k décrit $\mathbb{Z}$.)

Signalons (et admettons sans en donner de démonstration) les deux très importantes propriétés suivantes :

- pour tous phasages φ_1, φ_2 $\succ \varphi_1 + \succ \varphi_2 = \succ (\varphi_1 + \varphi_2)$
- pour tous *angles-de-couples* α_1, α_2 $\lessdot \alpha_1 + \lessdot \alpha_2 = \lessdot (\alpha_1 + \alpha_2)$

(*) Le symbole $\lessdot$ est une notation angulaire courante en de nombreux pays, notamment anglo-saxons. Par ailleurs les symboles $\succ$ (que nous introduisons) et $\lessdot$ suggèrent les notions d'*image directe* et d'*image réciproque* relativement à la relation "est un phasage de" de l'ensemble des phases vers l'ensemble des couples de directions orientées.

Dans cette dernière égalité, le premier membre désigne l'ensemble des phases obtenues en additionnant une phase quelconque de α_1 et une phase quelconque de α_2 (*). L'égalité elle-même traduit le fait que le phasage somme d'un phasage de α_1 et d'un phasage de α_2 est un phasage de l'*angle-de-couples* somme de α_1 et α_2 .

IV-1.2. On peut interpréter $\succ$ comme une application (surjective) de l'ensemble des phasages sur l'ensemble des *angles-de-couples*; cette fonction est périodique avec le tour pour période. Mais il n'en va pas de même avec $\prec$, qui ne saurait associer un phasage unique à un couple ou à un *angle-de-couples* donné.

Cet inconvénient peut être pallié par ce qu'on nommait naguère "détermination principale", appellation peu satisfaisante et d'ailleurs vague, qui s'appliquait, suivant les circonstances,

- tantôt au phasage compris entre -180° (exclu) et $+180^\circ$ (inclus), cela surtout dans les questions théoriques;

- tantôt au phasage compris entre 0° (inclus) et 360° (exclu) dans certaines applications pratiques (topographie, astronomie, ...).

Comme l'une et l'autre de ces notions sont utiles, on a intérêt à les conserver, en précisant toutefois le vocabulaire. Le plan ayant été orienté, nous désignerons la première par *phasage médian*, que nous noterons $\prec_m$, et la seconde par *plus petit phasage positif*, que nous noterons $\prec_p$.

Revenons encore à l'exemple des trois coureurs X, Y, Z; [IA] étant l'origine des phases et le plan étant orienté par la flèche de la figure de la partie I, la phase de chaque coureur à l'arrivée B s'écrit :

$$\text{pour X, } \prec_p((\text{IA}), (\text{IB})) + 3\text{tr} = \prec_m((\text{IA}), (\text{IB})) + 4\text{tr} = 1350^\circ$$

$$\text{pour Y, } \prec_p((\text{IA}), (\text{IB})) = \prec_m((\text{IA}), (\text{IB})) + 1\text{tr} = 270^\circ$$

$$\text{pour Z, } \prec_p((\text{IA}), (\text{IB})) - 1\text{tr} = \prec_m((\text{IA}), (\text{IB})) = -90^\circ$$

On trouvera d'autres exemples à la rubrique REPÉRAGE.

Grâce à l'une ou l'autre de ces deux notions, la difficulté signalée au paragraphe III-3 de la rubrique ANGLE-DE-COUPLES peut être levée de façon simple et cesse de faire obstacle au traitement numérique des *angles-de-couples*. S'il est déconseillé d'écrire $(x, y) = -80^\circ$, rien n'empêche d'écrire $\prec_m(x, y) = -80^\circ$ ou $\prec_p(x, y) = 280^\circ$.

(*) Plus généralement, étant donné un ensemble E muni d'une loi de composition notée +, on appelle *somme* de deux parties A et B de E (et on note A + B) la partie de E dont les éléments sont de la forme x + y, où x décrit A et où y décrit B.

Bien entendu, rien n'est changé quant au fond du problème : le gain réalisé par l'unicité du phasage l'est aux dépens de l'additivité. La dernière égalité de IV-1.1 prend l'une des formes suivantes :

$$\angle_m \alpha_1 + \angle_m \alpha_2 = \angle_m (\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{si } -180^\circ < \angle_m \alpha_1 + \angle_m \alpha_2 \leq 180^\circ$$

$$\angle_m \alpha_1 + \angle_m \alpha_2 = \angle_m (\alpha_1 + \alpha_2) + 360^\circ \quad \text{si } \angle_m \alpha_1 + \angle_m \alpha_2 > 180^\circ$$

$$\angle_m \alpha_1 + \angle_m \alpha_2 = \angle_m (\alpha_1 + \alpha_2) - 360^\circ \quad \text{si } \angle_m \alpha_1 + \angle_m \alpha_2 \leq -180^\circ$$

$$\angle_p \alpha_1 + \angle_p \alpha_2 = \angle_p (\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{si } \angle_p \alpha_1 + \angle_p \alpha_2 < 360^\circ$$

$$\angle_p \alpha_1 + \angle_p \alpha_2 = \angle_p (\alpha_1 + \alpha_2) + 360^\circ \quad \text{si } \angle_p \alpha_1 + \angle_p \alpha_2 \geq 360^\circ$$

Plus généralement, il conviendra d'écrire les congruences

$$\angle_m \alpha_1 + \angle_m \alpha_2 + \dots + \angle_m \alpha_n \equiv \angle_m (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \pmod{360^\circ}$$

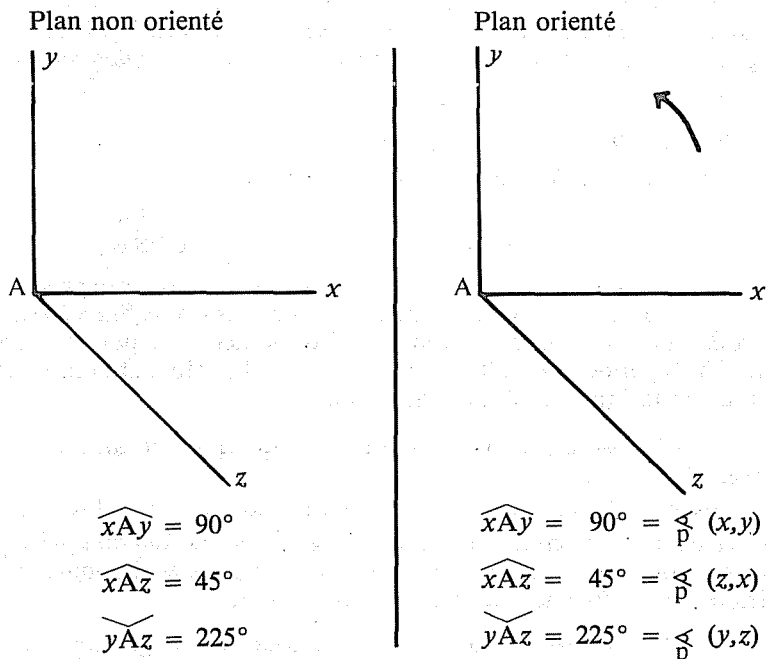
$$\angle_p \alpha_1 + \angle_p \alpha_2 + \dots + \angle_p \alpha_n \equiv \angle_p (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \pmod{360^\circ}$$

IV — 2. Lien avec les angles-de-secteurs. Le lien entre les phasages et les divers *angles-de-secteurs* est de tout autre nature. Un *angle-de-secteurs*, c'est, à certains égards, "de combien tourne" une demi-droite qui balaie le secteur d'un de ses côtés à l'autre : de ce point de vue, par conséquent, les ensembles d'*angles-de-secteurs* peuvent être assimilés à des parties de l'ensemble des phases. En particulier, dans le plan orienté :

• si x est le premier côté et y le second côté d'un saillant orienté, l'angle de ce saillant orienté est $\angle_m (x, y)$;

• si x et y sont les côtés d'un secteur non orienté, l'angle de ce secteur est, suivant les cas, $\angle_p (x, y)$ ou $\angle_p (y, x)$.

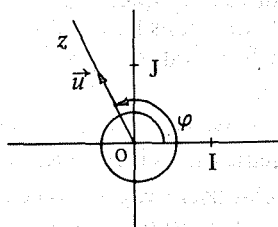
Exemple :



V. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

En toute rigueur il faudrait autant de fonctions *sinus*, *cosinus*, *tangente* qu'il existe d'ensembles de départ dont les éléments sont appelés "angles". Mais il serait peu réaliste d'envisager une telle prolifération des notations : on peut présumer que, les habitudes et la commodité aidant, les notations traditionnelles(*) continueront à être employées, mais cela au prix d'abus de langage dont il convient au moins d'être conscient. C'est dans cet esprit et sous ces réserves que nous utilisons dans cette partie V les écritures suivantes.

V — 1. Fonctions COS, SIN, TAN ; fonctions Cos, Sin, Tan.



Dans le plan muni d'un repère ortho-normé (O,I,J) considérons une demi-droite mobile z qui tourne autour de son origine O, et soit (a,b) le couple des coordonnées de son vecteur orienteur unitaire $\vec{u}$. Prenant [OI] comme origine des phases, le couple (a,b) peut être associé

- soit à la phase φ de la demi-droite z
- soit à l'angle α du couple ([OI], z).

(*) Pour la fonction *tangente*, la notation "tg" a été longtemps traditionnelle en France, mais la notation internationale est "tan".

Dans le premier cas, nous définissons ainsi deux applications COS et SIN de l'ensemble des phases vers $\mathbf{R}$; dans le second, deux autres applications Cos et Sin de l'ensemble des *angles-de-couples* vers $\mathbf{R}$:

$$\text{Cos } \alpha = \text{Cos } (\succ \varphi) = \text{COS } \varphi = a$$

$$\text{Sin } \alpha = \text{Sin } (\succ \varphi) = \text{SIN } \varphi = b$$

On déduit de là comme de coutume :

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Cos } \alpha} \qquad \text{TAN } \varphi = \frac{\text{SIN } \varphi}{\text{COS } \varphi}$$

Les fonctions Cos et COS sont paires; les fonctions Sin et SIN, les fonction Tan et TAN sont impaires. Les fonctions Cos et Sin *ne sont pas périodiques*, en revanche la fonction Tan admet pour période l'angle plat. Vu la périodicité de $\succ$, les fonctions COS et SIN ont pour période le tour, et la fonction TAN le demi-tour.

V — 2. Les fonctions cos, sin, tan de l'Analyse. Posant, pour tout x réel :

$\cos x = \text{COS } (x \text{ rad}); \sin x = \text{SIN } (x \text{ rad}); \tan x = \text{TAN } (x \text{ rad})$
on retrouve les fonctions classiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$: la fonction paire cos, les fonctions impaires sin et tan. Les fonctions cos et sin admettent la période 2π , la fonction tan admet la période π .

V — 3. Fonctions définies dans les ensembles d'angles-de-secteurs.
Vu la remarque faite en IV.2, les *restrictions* des fonctions COS, SIN, TAN à certaines parties de l'ensemble des phases peuvent être considérées comme des fonctions trigonométriques dont les ensembles de départ sont des ensembles d'*angles-de-secteurs* de divers types (ou, par extension, d'*angles-de-paires*). Ainsi on peut interpréter $\text{COS } 133^\circ$ comme le cosinus d'un *angle-de-saillants* (ou *de-paires*), $\text{SIN } 258^\circ$ comme le sinus d'un *angle-de-rentrants*, $\text{TAN } (-78^\circ)$ comme la tangente d'un *angle-de-saillants-orientés*, etc.

La notion de fonction paire ou impaire ne garde une signification que dans le cas des *angles-de-secteurs-orientés*; la notion de périodicité disparaît totalement.

V — 4. Les "formules de trigo". Les égalités classiques de la trigonométrie ne sont applicables en toute généralité que dans l'ensemble des phases ou dans $\mathbf{R}$; c'est ce qui fait l'intérêt des fonctions qui ont l'un de ces deux ensembles pour ensembles de départ.

Appliquer ces formules au cas des *angles-de-secteurs* s'accompagne en général de limitations. Ainsi, dans un problème où les inconnues $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont les angles d'un triangle, rien n'interdit d'utiliser l'expression classique de $\text{SIN}(\widehat{A} + \widehat{B})$, mais la condition d'inégalité $\text{SIN}(\widehat{A} + \widehat{B}) > 0$ ne doit pas être perdue de vue.

De même, appliquer ces formules aux *angles-de-couples* suppose que ceux-ci ne sont pas multipliés par un facteur non entier (en pratique le facteur $\frac{1}{2}$). Par exemple on ne saurait écrire :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

où le second membre n'est pas défini. En revanche, on peut écrire :

$$\cos (a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

VI. SYNOPSIS

Les tableaux 1 et 2 suivants présentent une vue d'ensemble des principales questions relatives à tous les objets "angulaires" (au sens le plus large et le plus vague du mot) de la géométrie du plan : nature, écriture, structure.

Afin d'alléger la rédaction et la présentation de ce tableau, nous faisons les conventions suivantes :

- x et y sont des demi-droites de même origine A ;
- X et Y sont des directions orientées admettant respectivement x et y pour représentants ; dans les notations, chacune des deux peut être remplacée par une de ses "flèches" (vecteurs, demi-droites, droites orientées, axes) ;
- le mot *opération* est pris ici dans le sens restrictif de "opération non partout définie", par opposition à *loi de composition*.

Noter que, dans le tableau 1, la définition donnée pour les saillants inclut les secteurs plats parmi les saillants ; mais elle a l'inconvénient d'y inclure aussi les secteurs pleins, lesquels sont plutôt un cas limite des rentrants.

Nous proposons de ne plus employer les vocables "écart angulaire" (voir SECTEUR-ANGLE, IV-2 et VIII), "angle orienté" (voir ANGLE-DE-COUPLES, II ; et ORIENTATION, III-4.2), "angle généralisé".

Tableau 1 : OBJETS LIÉS AUX PAIRES $\{x, y\}$

	ENSEMBLES DE POINTS		CLASSES D'ÉQUIVALENCE POUR LES ISOMÉTRIES (donc : ni ensembles de points, ni nombres)			
Nom	Saillant	Secteur Rentrant	Angle-de-secteurs Angle-de-saillants	Angle-de-rentnants	Angle-de-paires	
Définition	Partie du plan, de bord xUy , convexe		Classe de secteurs Classe de saillants		Classe de paires $\{X,Y\}$	
Notion analogue sur la droite	Segment		Longueur		Classe de paires de points également écartés	
Autres dénominations	Secteur de plan (au cas où il faut le distinguer du "secteur de disque" ou du "secteur d'espace")		Au niveau élémentaire, peut être abrégé en "angle"		Souvent confondu avec l'angle du saillant de bord xUy	
Notations	Saillant $x\bar{A}y$ Rentrant xAy ou, si l'on veut préciser : $\widehat{xAy}$ saillant fermé $\widehat{xAy}$ rentrant fermé $]xAy[$ saillant ouvert $]xAy[$ rentrant ouvert		$\widehat{xAy}$, $\widehat{BAC}$, $\hat{A}$		$\widehat{x\bar{A}y}$, $\widehat{B\bar{A}C}$, $\bar{\hat{A}}$	$\widehat{\{X,Y\}}$ $\overline{[AB]} , \overline{[CD]}$ etc.
	dans le plan orienté		$\angle_p(x,y)$ ou $\angle_p(y,x)$ suivant les cas			
Addition (+)			Opération (Voir Bornes)		Confondu avec l'ordre des angles-de-saillants	
Multiplication par un nombre ($\times k$)			Opération (Voir Bornes) pour k réel positif			
Ordre ($\leq$)			Total, compatible avec les opérations			
Bornes			0° à 360° 0° à 180° 180° à 360°			
					0° à 180° comme pour les angles-de-saillants	

Tableau 2 : OBJETS LIES AUX COUPLES (x,y)

	ENSEMBLES MUNIS D'UNE ORIENTATION	CLASSES D'ÉQUIVALENCE POUR LES ISOMÉTRIES POSITIVES (donc : ni ensembles de points, ni nombres)		
Nom	Secteur orienté saillant rentrant	Angle-de-secteurs-orientés saillants rentrants	Angle-de-couples	Phasage, ou, plus couramment : Phase
Définition	Partie orientée du plan, de bord xUy	Classe de secteurs orientés saillants rentrants	Classes de couples (X,Y)	Classe de mouvements de rotation de X vers Y
Notion analogue sur la droite	Segment orienté	Longueur orientée	Vecteur géométrique	Vecteur d'un mouvement rectiligne de translation
Autres dénominations			Angle-de- rotations-géométriques	Angle-de-rotations-cinématiques Elongation angulaire
Notations	dans le plan (orienté ou non)		$(\widehat{X,Y})$, $(\widehat{AB,CD})$, etc. $\triangleright \varphi$ si φ est un phasage de (X,Y)	Ensemble des phasages : $\angle (X,Y)$
	dans le plan orienté	$\angle_m(x,y)$ $\angle_p(x,y)$ ou $-\angle_p(x,y)$		Phasage médian : $\angle_m(X,Y)$ Plus petit phasage positif : $\angle_p(X,Y)$
Addition (+)		Opération (voir Bornes)	Loi de groupe commutatif	Loi de groupe commutatif
Multiplication par un nombre ($\times k$)		Opération (Voir Bornes) pour k réel	Loi, pour k entier	Loi, pour k réel
Ordre ($\leq$)		Total, compatible avec les opérations	Aucun ordre total compatible avec les lois	Total, compatible avec les lois
Bornes		-360° à 360° -180° à 180° -360° à -180° et 180° à 360°		L'ensemble des phases n'est pas borné

PHASE

Bernard PARZYSZ



MUSIQUE & MATHÉMATIQUE

Extrait du sommaire

- 1. Les échelles musicales*
- 2. Notre échelle tempérée*
- 3. Quelques procédés imitatifs du contrepoint*
- 4. Aperçus sur le XX^e siècle*

suivi de :

GAMMES NATURELLES
par yves Hellegouarch

Brochure n° 53

Prix et conditions de vente et d'expédition dans les pages vertes du Bulletin.

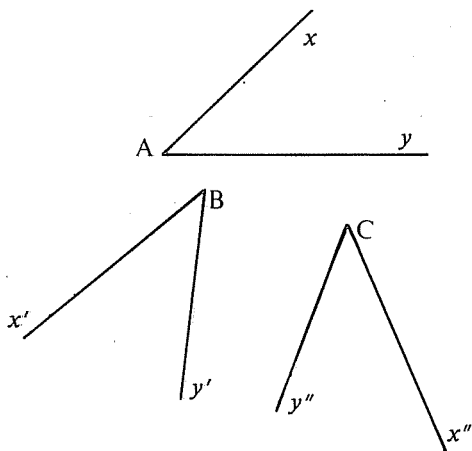
ANGLE-DE-COUPLES (84)

- I. Deux voies (presque) parallèles
- II. Où l'orientation provoque des ravages
- III. Lois de composition
- IV. Angles-de-couples-de-droites

Dans la rubrique SECTEUR-ANGLE (MOTS V), nous avons introduit l'*angle-de-paires de demi-droites* au paragraphe IV, nous contentant de signaler en note infrapaginale (page 11) l'existence d'*angles-de-couples de demi-droites*. Essayons à présent de présenter cette seconde notion suivant une démarche analogue à celle qui a servi pour la première.

I. DEUX VOIES (PRESQUE) PARALLELES

I — 1. Reprenons la figure de la page 11 de SECTEUR-ANGLE. Les paires de demi-droites $\{x, y\}$, $\{x', y'\}$, $\{x'', y''\}$ sont des représentants du même angle-de-paires $\widehat{[x, y]}$ parce qu'il existe des isométries qui



donnent de la paire $\{x, y\}$ les images $\{x', y'\}$ ou $\{x'', y''\}$. Peut-on dire à présent qu'il existe des isométries *positives* qui donnent du couple (x, y) les images (x', y') ou (x'', y'') ?

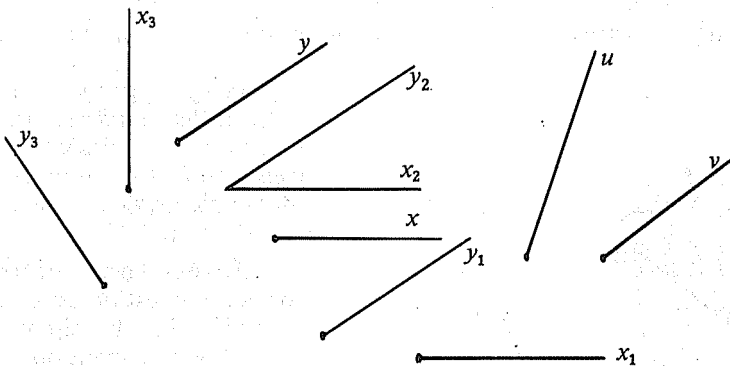
Posée sous cette forme, la question est mal formulée, car la réponse dépend de la dimension de l'espace. Dans l'espace de dimension 3, il suffit que les paires $\{x, y\}$ et $\{x', y'\}$ soient isométriques pour qu'il existe des isométries *positives* pour lesquelles

chacun des couples (x, y) , (y, x) , (x', y') , (y', x') est l'image d'un autre. Autrement dit, la notion d'angle-de-couples n'ajouterait rien à celle d'angle-de-paires.

Il en va tout autrement dans le plan. Il n'existe certainement pas d'isométrie positive par laquelle un couple (x,y) aurait pour image (y,x) , sauf dans le cas où x et y sont des demi-droites égales ou opposées ; et dans la figure ci-dessus, interprétée comme une figure plane, on constate qu'il est possible d'amener le couple (x,y) sur le couple (x'',y'') par un simple glissement, alors qu'il serait nécessaire de le "retourner" dans l'espace en quittant le plan avant de pouvoir le faire coïncider avec (x',y') .

Contrairement à la notion d'angle-de-paires, c'est donc seulement en géométrie du plan que la notion d'angle-de-couples présente quelque intérêt, et nous nous y cantonnerons strictement.

I — 2. A cette divergence près, nous pouvons procéder exactement comme on l'a fait en SECTEUR-ANGLE, IV-I.3. Un couple (x,y) de demi-droites étant donné, on place dans une même classe d'équivalence d'une part tous les couples $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots$ tels que $x_1, x_2, \dots$ et $y_1, y_2, \dots$ aient respectivement même direction orientée que x et y , d'autre part tous les couples qui sont images d'un des couples précédents par des isométries positives, par exemple (x_3,y_3) image de (x_1,y_1) .



Cette classe d'équivalence s'appelle *angle-de-couples* et se note $\widehat{(x,y)}$, ou $\widehat{(x_1,y_1)}$, ou $\widehat{(x_2,y_2)}, \dots$

En revanche, $\widehat{(u, v)}$ est un angle-de-couples *distinct* du précédent, car aucune isométrie positive ne peut transformer (u, v) en un couple de la classe précédente (*) ; pour les angles-de-paires au contraire, on avait $\widehat{u, v} = \widehat{x, y}$.

I — 3. Pour la commodité du discours et du dessin, nous n'avons considéré jusqu'ici que des demi-droites. Mais ce qui précède montre clairement que seules interviennent en réalité les directions orientées. C'est ce que nous sous-entendrons désormais quand nous dirons "angle-de-couples" ; et, dans les notations du type $\widehat{(x, y)}$, x ou y ou les deux peuvent être soit ces directions orientées, soit n'importe lequel de leurs indicateurs : droite orientée, demi-droite, axe, vecteur orienteur (**).

II. OÙ L'ORIENTATION PROVOQUE DES RAVAGES

Toujours dans SECTEUR-ANGLE, IV-1, on a associé à tout *angle-de-paires* un *angle-de-saillants* et un seul ; cela permet, en général sans inconvénient grave, d'utiliser une notation du type $\widehat{xAy}$ pour désigner l'angle d'une paire de demi-droites de même origine A, voire d'écrire des égalités comme $\widehat{x, y} = 80^\circ$.

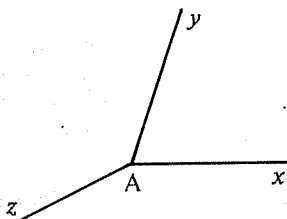
Comme on peut de même associer à tout *angle-de-couples* un *angle-de-saillants-orientés* et un seul, il semble naturel de tirer de là des conséquences analogues aux précédentes. C'est bien ce qu'on a fait pendant des décennies, hélas ! en baptisant "angles orientés" les *angles-de-couples* ; et les séquelles de cet abus se font encore sentir. Un exemple suffira à mettre en évidence leur nocivité.

(*) On verra ci-dessous que $\widehat{(u, v)}$ peut être dit *opposé* à $\widehat{(x, y)}$.

(**) On a proposé le mot *flèche* pour englober ces diverses notions lorsqu'elles ne prennent en compte que direction et sens : direction orientée, droite orientée, axe, demi-droite, vecteur.

Considérons (figures ci-dessous) trois demi-droites x, y, z de même origine A.

*Cas des angles-de-paires
(donc sans orientation)*

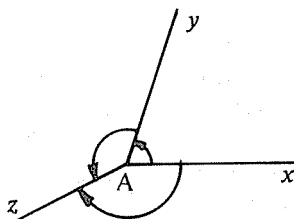


Il est clair que l'angle-de-saillants $\widehat{xAz}$ n'est pas la somme des angles-de-saillants $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAz}$.

Si l'on assimile ces angles-de-saillants à des angles-de-paires, il est donc impossible de considérer $\widehat{x,z}$ comme la somme de $\widehat{x,y}$ et de $\widehat{y,z}$.

Or, cette impossibilité n'a *aucune importance*, car il n'existe pas de situation où l'on ait à considérer la somme de deux angles-de-paires.

*Cas des angles-de-couples
(malencontreusement dits
orientés)*



Il est clair que l'angle du saillant xAz orienté de x vers z n'est pas la somme des angles du saillant xAy orienté de x vers y et du saillant yAz orienté de y vers z .

Si l'on assimile ces angles-de-saillants-orientés à des angles-de-couples, il est donc impossible de considérer $\widehat{x,z}$ comme la somme de $\widehat{x,y}$ et de $\widehat{y,z}$.

Or, l'égalité dite de Chasles (*) $\widehat{(x,y)} + \widehat{(y,z)} = \widehat{(x,z)}$, vraie quelles que soient les demi-droites x, y, z , sert de définition à une addition dont le rôle est *primordial* dans nombre de questions de géométrie plane.

Ainsi, de situations en apparence analogues découlent des conclusions opposées.

Finalement, quand on appelle "angles orientés" les angles-de-couples, on s'enferme dans le dilemme suivant :

• Ou bien on donne au mot *orienté* la signification qui a été étudiée dans la rubrique ORIENTATION : alors on ne peut pas dire que la somme des "angles orientés" $\widehat{(x,y)}$ et $\widehat{(y,z)}$ est "l'angle orienté" $\widehat{(x,z)}$, ni

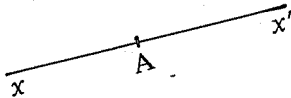
(*) Par analogie avec l'égalité de même structure entre vecteurs $\vec{XY} + \vec{YZ} = \vec{XZ}$.

même dire que la somme de deux angles “de même orientation” est un angle “de même orientation” qu’eux ; *on détruit ainsi une structure capitale en géométrie, le groupe des rotations planes.*

• Ou bien — ce qui est plus vraisemblable — on veut seulement dire que l’angle-de-couples $(\widehat{x,y})$ est distinct de l’angle-de-couples $(\widehat{y,x})$. Mais cette idée est déjà implicitement contenue dans le mot *couple* ; en tout cas, si l’on tient à l’expliciter par un adjectif, on n’a pas le droit de dévoyer à cet usage le mot *orienté*, qui s’applique de façon générale et avec une signification précise à de nombreux objets de la géométrie.

III. LOIS DE COMPOSITION

III — 1. Addition. L’addition dans l’ensemble $\mathcal{A}$ des angles-de-couples est définie par l’égalité de Chasles rappelée ci-dessus ; c’est une loi associative, commutative, qui admet pour élément neutre la classe $(\widehat{x,x})$, dite *angle nul* (que nous noterons $\hat{0}$), et pour laquelle tout élément $(\widehat{x,y})$ admet un *opposé*, qui est $(\widehat{y,x})$. Ces propriétés confèrent à $(\mathcal{A}, +)$ la structure de groupe commutatif.



On notera qu’il existe, en dehors de l’angle nul, un élément qui est son propre opposé, à savoir l’angle plat $(\widehat{x,x'})$.

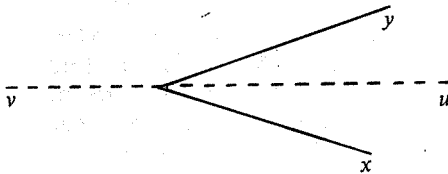
Comme tout ensemble, $\mathcal{A}$ peut être ordonné ; *mais il n’existe aucun ordre total qui soit compatible avec l’addition* : autrement dit, on ne peut faire de $(\mathcal{A}, +)$ un groupe ordonné. Pour prendre l’exemple le plus simple, on peut toujours convenir que l’angle nul est strictement inférieur à l’angle plat ; mais, en ajoutant l’angle plat à chaque membre, on déduirait que l’angle plat est strictement inférieur à l’angle nul.

III — 2. Multiplication externe. Quel que soit l’angle-de-couples a , et quel que soit l’entier n , on définit le produit na comme suit :

- si n est un naturel non nul, na est la somme de n termes égaux à a ; naturellement on pose $1a = a$;
- si n est l’entier strictement négatif $-n'$, alors na est l’opposé de $n'a$;
- enfin $0a$ est l’angle nul.

Cette loi externe est pseudo-associative, et distributive aussi bien sur l’addition dans $\mathbb{Z}$ que sur l’addition dans $\mathcal{A}$ (voir à ce sujet MOTS VI, pages 20 et 21).

Il n'est pas possible d'étendre cette multiplication au cas où le multiplicateur serait un rationnel non entier. Par exemple, pour définir le produit de $\widehat{(x,y)}$ par $\frac{1}{2}$, il faudrait que l'équation d'inconnue a :



$2a = \widehat{(x,y)}$ ait une solution et une seule. Or cette équation a deux solutions, car il existe deux demi-droites u et v telles que $2\widehat{(x,u)} = \widehat{(x,y)}$ et $2\widehat{(x,v)} = \widehat{(x,y)}$.

De même l'équation $3a = \widehat{(x,y)}$ admet trois solutions et, plus généralement, pour tout naturel n non nul, l'équation $na = \widehat{(x,y)}$ admet n solutions. Le produit de $\widehat{(x,y)}$ par $\frac{1}{n}$ n'est donc déterminé que dans le cas trivial $n = 1$.

Quant à multiplier un angle-de-couples par un irrationnel, cela est absolument dénué de sens.

III — 3. Il résulte de ce qui précède une sérieuse difficulté pratique quand on souhaite faire entrer les angles-de-couples dans un calcul numérique. *En fait, il n'existe pas d'unité d'angles-de-couples.* Si l'on considèrerait par exemple le radian comme tel, écrire que l'angle plat est égal à π rad serait un non-sens, puisque π est irrationnel ; et, pour faire bonne mesure (si l'on ose dire), on arriverait à $\pi + \pi = 0$. Dans le même ordre d'idées, si on voulait définir le degré d'angles-de-couples, noté par exemple d , il faudrait résoudre l'équation $360 d = \hat{0}$; or elle a 360 solutions !

Bien entendu, on rencontre et on continuera à rencontrer des écritures du type $\widehat{(x,y)} = -80^\circ$; le moins qu'on peut en dire est qu'elles comportent toujours des risques, dont l'utilisateur doit être conscient. Le seul moyen de contourner cet obstacle est de recourir aux phases (voir PHASE, IV-1.2).

IV. ANGLES-DE-COUPLES-DE-DROITES

Egalement en géométrie du plan, on a parfois à considérer des couples de droites (ou, plus généralement, de directions non orientées). En rangeant dans une même classe les couples qui sont images de l'un d'eux par une isométrie positive, on obtient des classes qui sont des *angles-de-couples-de-droites* et possèdent des propriétés assez semblables à celles qui ont été vues ici.

REPÉRAGE (84)

- I. En promenade
- II. Un peu de sport
- III. Navigation côtière
- IV. En haute mer
- V. Repérer, pourquoi ?
- VI. Repérage polaire
- VII. Repérages bipolaires
- VIII. Repérage sphérique
- IX. Repérage et lignes de graduation
- X. Repérage cartésien
- XI. Coordonnées cartésiennes
- XII. Repérage cartésien et sciences expérimentales
- XIII. Repérage cartésien et langage vectoriel

I. EN PROMENADE

I — 1. Voici un extrait d'un guide destiné à l'amateur de randonnées pédestres.

“... Monter jusqu'au hameau de Tiéménil. En face du premier bâtiment agricole, s'engager dans le chemin à gauche et, à la dernière maison habitée, descendre à droite au fond d'un vallon ombragé où coule un ruisseau, le traverser, s'élever à flanc de coteau. Laisser à gauche la ferme de Vaubourdon pour prendre à droite jusqu'au hameau de la Moissonnière...”

Voici maintenant des indications sur le chemin à suivre pour visiter le centre de Rouen (le texte est amputé de son aspect touristique).

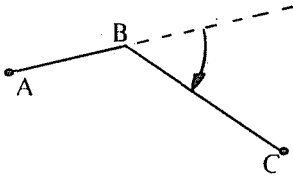
“... suivre la rue Saint Romain [...] pour gagner l'église Saint Maclou [...], prendre à gauche la rue Damiette, poursuivre tout droit et gagner l'église Saint-Ouen, [...], prendre ensuite la rue de l'Hôpital, tourner à gauche dans la rue des Carmes puis à droite dans la rue aux Juifs...”

I — 2. Dans l'un et l'autre de ces extraits, les indications fournies au promeneur se répartissent en deux catégories :

- des points de repère : un hameau, un bâtiment agricole, une église, etc.
- des changements de direction : s'engager à gauche, descendre à droite, prendre à gauche, etc.

I — 3. Le principe de ce repérage pratiqué couramment par tout un chacun est le suivant :

- Partant du point A, dirigez-vous vers le point B.
- Arrivé en B, identifiez le point C, qui est suffisamment caractéristique pour être aisément reconnu.



Cette identification est encore facilitée par la consigne "tournez à droite", par exemple. Cette consigne doit être interprétée comme suit : arrivé en B et tournant le dos à A, vous devez apercevoir C sur votre droite.

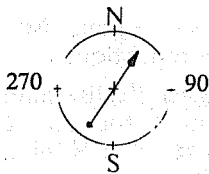
- Dirigez-vous vers C.
- Et ainsi de suite.

Dans une région où les points de repère sont abondants, ces indications suffisent pour guider le promeneur.

II. UN PEU DE SPORT

II — 1. Le parcours d'orientation est une activité sportive qui repose en partie sur le principe précédent, mais qui utilise des consignes plus précises.

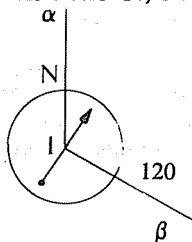
C'est une course dont l'itinéraire est jalonné par des balises. D'une balise on ne peut pas apercevoir la suivante.



Une forêt, par exemple, est un terrain idéal pour cette course. Chaque coureur est muni d'une boussole ; celle-ci est graduée en degrés, dans le sens de l'horloge (le trait de graduation qui devrait porter soit 0, soit 360, porte en fait la lettre N, initiale de *Nord* ; de même, au lieu de 180, on lit S, initiale de *Sud*). L'aiguille aimantée indique la direction (*) du Nord magnétique.

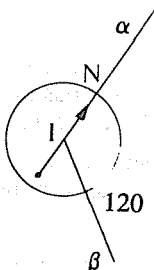
(*) Ici, il s'agit évidemment de direction et sens de demi-droites et non de direction de droites.

Au moment de prendre le départ en A, le coureur reçoit le message suivant : 120°N, 340 m.



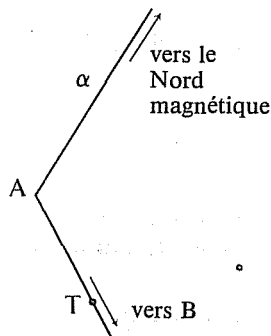
Voici comment il doit l'utiliser.

- Les graduations N et 120 de la boussole déterminent deux demi-droites α et β d'origine I, centre de la boussole.



- Le coureur, qui est en A, dispose sa boussole de façon que, le centre I de la boussole étant supposé coïncider avec A, la demi-droite α coïncide avec la direction du Nord magnétique (pratiquement, il suffit de faire pivoter la boussole jusqu'à ce que son aiguille aimantée pointe vers la lettre N).

- D'après le message, la balise B à atteindre est située à 340 m de A sur β .



- Il reste au coureur à concrétiser β sur le terrain (il peut choisir un arbre T, par exemple, placé sur β) et à gagner la balise B le plus rapidement possible.

De façon plus dépouillée, l'indication 120°N portée sur le message peut être interprétée comme la donnée de l'angle du couple (α, β) . Il s'agit de concrétiser cette information sur le terrain.

Vu que la demi-droite α est déterminée par l'aiguille aimantée, la demi-droite [AT] est déterminée par l'égalité

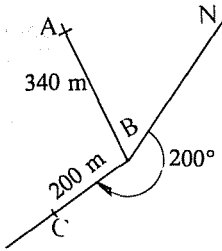
$$(\alpha, \beta) = (\alpha, [AT])$$

Pratiquement, ce report s'effectue à l'aide de la boussole à condition que soient respectées les contraintes suivantes :

- l'auteur et l'utilisateur du message doivent utiliser des boussoles graduées de la même façon (*),

(*) En soi, le mode de graduation, y compris le sens de celle-ci, n'a pas d'importance. Mais il est évidemment commode que les boussoles du commerce destinées au parcours d'orientation soient toutes graduées de la même façon : en degrés et dans le sens de l'horloge (voir ci-dessous V-2).

- le centre I de la boussole doit être placé au point de départ A,
- l'aiguille aimantée doit pointer vers le N de la boussole.



Arrivé en B, le coureur reçoit une nouvelle consigne, par exemple 200°N, 200 m, qui lui permet de gagner la deuxième balise C, et ainsi de suite de proche en proche jusqu'à l'arrivée.

II — 2. La différence entre cette situation et celle de la partie I réside essentiellement dans le fait que d'une balise on ne voit pas la suivante. Pour pouvoir suivre l'itinéraire imposé, il faut donc recourir

- à un fait : en chaque point A de la Terre on peut déterminer, grâce à une aiguille aimantée, la demi-droite d'origine A qui indique la direction du Nord magnétique ;
- à une notion géométrique : celle d'angle-de-couples (voir ce mot).
- à un outil : la boussole qui,
 - d'une part, fournit la direction du Nord magnétique,
 - d'autre part, permet le report des angles.

III. NAVIGATION CÔTIÈRE

III — 1. A proximité des côtes, la présence d'écueils et de hauts fonds rend la navigation dangereuse. Le souci constant du marin est donc de connaître sa position.

Un fait d'expérience s'impose : l'évaluation des distances est, en mer, très imprécise.

On pourrait alors penser utiliser la vitesse du bateau par rapport à l'eau ; malheureusement, la dérive due au jeu combiné du vent et des courants ne permet pas d'en déduire la vitesse du bateau par rapport au fond.

Contraint d'abandonner l'utilisation des distances, le marin n'utilise que des angles-de-couples.

III — 2. Voici comment il procède.

A bord de chaque bateau, la direction du Nord magnétique est donnée par la rose du compas, qui est solidaire d'un barreau aimanté.

Par ailleurs, le marin dispose d'une carte de la côte qu'il aborde. La direction du Nord magnétique est portée sur toutes les cartes.

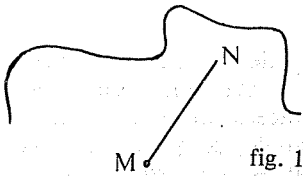


fig. 1

Désignons par M la position du bateau à un instant donné et par $[MN)$ la demi-droite d'origine M qui indique le Nord magnétique. (fig. 1)

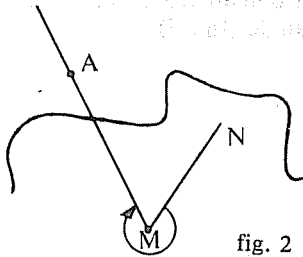


fig. 2

Pour se situer, le marin identifie, sur la côte et sur la carte, un point de repère fixe A (clocher, phare, château d'eau, balise, etc.). Il vise A à l'aide d'un *compas de relèvement* qui lui fournit l'angle du couple $([MN), [MA))$ (fig. 2).

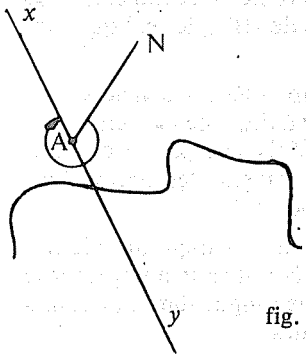


fig. 3

À l'aide d'un rapporteur(*), il trace sur sa carte (fig. 3) la demi-droite $[Ax)$ telle que $([AN), [Ax)) = ([MN), [MA))$. Il sait alors que sa position sur la carte est quelque part sur la demi-droite $[Ay)$ opposée à $[Ax)$.

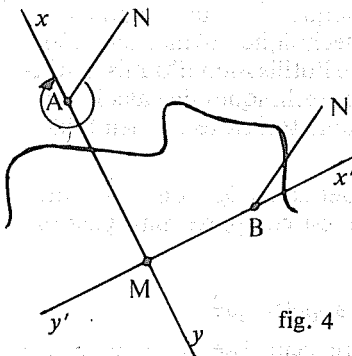


fig. 4

Il lui reste à recommencer la même opération en utilisant un autre point de repère B. Les deux demi-droites $[Ay)$ et $[By')$ tracées sur la carte se coupent en un point M qui — aux erreurs de mesure près — est sensiblement la position du bateau (fig. 4).

(*) De même qu'en II-1, la seule condition qui importe vraiment est que le compas de relèvement et le rapporteur portent des graduations qui se ramènent aisément l'une à l'autre. Là encore, c'est la graduation usuelle en degrés qui réalise pratiquement cette condition (voir ci-dessous V-2).

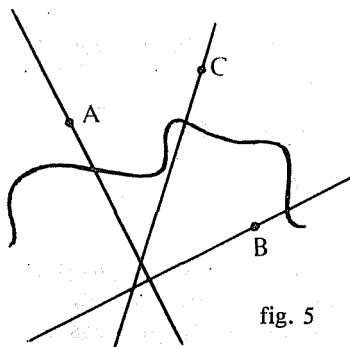


fig. 5

Pour plus de sécurité, le marin effectue trois relèvements. Les trois demi-droites tracées sur la carte déterminent un triangle, ce qui est dû aux erreurs inévitables. On estime que la position M du bateau est à l'intérieur de ce petit triangle (fig. 5).

IV. EN HAUTE MER

IV — 1. La situation est radicalement différente en ce qui concerne la navigation hauturière. Cette fois, des repères de III-2, le seul qui subsiste est la direction du Nord magnétique.

Depuis quelques années, les marins, y compris les plaisanciers, disposent à bord d'un appareil qui, relié par radio à des satellites en orbite terrestre, affiche le point automatiquement. Mais une panne est toujours possible ; et ce n'est pas d'hier qu'on traverse les océans. En l'absence d'un tel appareil, comment faire le point ?

Puisque la terre est hors de vue et que l'océan, élément mobile par excellence, se refuse à fournir des points de repère, il reste à implorer le ciel qui, dans sa bienveillance, nous a ménagé de longue date des points de repère : le Soleil et, accessoirement, les étoiles.

IV — 2. Il n'est pas possible ici d'expliquer en détail comment on fait le point en haute mer. C'est une tâche technique raffinée qui repose sur des notions d'astronomie et qui nécessite l'utilisation d'outils mathématiques (trigonométrie plane et sphérique, techniques de calcul, entre autres) et d'instruments de précision (chronomètre, cartes, éphémérides, etc.).

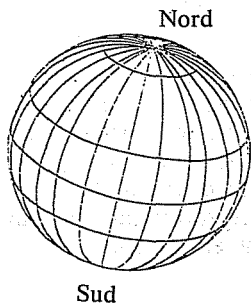
Le lecteur curieux consultera un manuel de navigation et — pour quoi pas — un livre d'astronomie. Le sujet est complexe mais passionnant.

IV — 3. Nous nous contenterons de rappeler que

- en première approximation, la Terre peut être assimilée à une sphère,
- la Terre tourne autour de la ligne des pôles géographiques avec une période très proche de 23 h 56 min par rapport aux étoiles (jour sidéral),

• la direction du Nord magnétique est soumise à des variations lentes assez bien prévisibles.

Le repérage des points de la sphère terrestre utilise un quadrillage de sa surface par des parallèles et des méridiens.



Les parallèles sont les cercles dont les plans sont perpendiculaires à la ligne des pôles géographiques. L'équateur est le parallèle dont le plan passe par le centre de la sphère terrestre.

Les méridiens sont les demi-cercles dont les extrémités sont les pôles géographiques.

Ainsi, par n'importe quel point de la sphère terrestre, autre que les pôles, il passe un seul parallèle et un seul méridien.

Inversement, un parallèle et un méridien donnés ont un seul point commun.

Nous verrons ci-dessous en VIII comment

- le choix d'un parallèle de référence (l'équateur) permet d'associer à chaque parallèle un angle-de-coups,
- le choix d'un méridien de référence (le méridien de Greenwich) permet d'associer à chaque méridien un angle-de-coups.

En définitive, chaque point de la sphère terrestre (autre que les pôles) est associé à deux angles-de-coups.

V. REPÉRER, POURQUOI ?

V — 1. Dans chacune des situations évoquées ci-dessus, le même problème est posé : il s'agit de guider quelqu'un (touriste, coureur ou marin). Dans chaque cas, nous avons décrit un moyen d'y parvenir : le repérage de points ou de directions remarquables.

Néanmoins, ce sont les caractéristiques de chaque situation qui ont déterminé le choix du repérage adopté.

En I et II, le type de repérage utilisé est le même. La compétition de II exige seulement des informations plus précises qu'en I où les informations fournies, bien que floues, sont suffisantes pour le but poursuivi.

En III, on conjugue deux repérages du même type que celui de II.

Le problème posé en IV est nettement plus difficile à résoudre ; une étude approfondie de la situation a permis de mettre au point un type de repérage autre que celui de II.

Le géomètre, le topographe, le géographe, le cartographe, mais aussi le physicien et le mathématicien utilisent les repérages de II, III et IV.

V — 2. Dans tous les cas, la circulation des informations entre les différents intéressés requiert en pratique un codage numérique, grâce au choix d'unités convenables. Pour les longueurs, le procédé est bien connu ; pour les angles-de-couples, le mieux est de se ramener systématiquement aux phases. On rappelle que le choix d'une unité de phase — degré, radian ou autre — sous-entend une orientation du plan (sur ces questions, voir PHASE, IV-1 et ANGLE-DE-COUPLES, III-3).

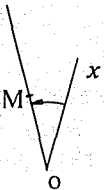
VI. REPÉRAGE POLAIRE

VI — 1. Reprenons la situation de la partie II dans l'esprit du géomètre, c'est-à-dire avec l'intention de présenter un modèle théorique offrant des outils pour la résolution de problèmes pratiques.

On choisit dans le plan



- un point O,
- une demi-droite x d'origine O, prise pour origine des phases,
- et, pour transmettre les informations, une unité de *phase* (donc une orientation du plan, indiquée ci-contre par la flèche) et une unité de longueur.

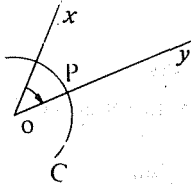


Alors à n'importe quel point M autre que O on peut associer

- la longueur OM,
- l'angle du couple $(x, [OM])$, en général donné par une phase φ de $[OM]$, par exemple $\angle(x, [OM])$.

Sur le dessin ci-dessus, $OM = 1 \text{ cm}$, $\varphi = -30^\circ$.

Inversement, il suffit de se donner une longueur l non nulle et une phase θ (par exemple $l = 0,75 \text{ cm}$, $\theta = 45^\circ$) pour déterminer dans le plan orienté un certain point P autre que O.



En effet, P se trouve

- sur le cercle C de centre O et de rayon l ,
- sur la demi-droite y dont θ est une phase.

C et y ont un seul point commun, qui est le point P.

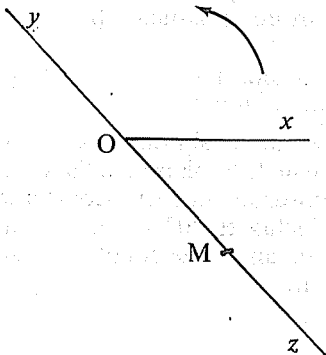
VI — 2. Le procédé qui vient d'être décrit réalise une bijection du plan privé de O vers l'ensemble des couples dont le premier composant est une longueur non nulle et dont le second composant est un angle-de-couples (en général donné par une de ses phases dans le plan orienté).

Ce procédé s'appelle un *repérage polaire* du plan.

(O, x) est un *repère polaire* du plan, dont O est le *pôle* et x la *demi-droite origine*.

Reprenons à titre d'exemple le parcours d'orientation de II-1. Pour le coureur situé en A, le repère polaire est (A, α) ; d'autre part, les conventions de ce genre d'épreuves consistent à prendre le mètre pour unité de longueur, et le degré pour unité de phase, le plan étant orienté dans le sens de l'horloge. Alors le point B est déterminé par le couple $(340 \text{ m}, 120^\circ)$. De même, pour le coureur situé en B, pour le repère $(B, [BN])$ le point C est déterminé par le couple $(200 \text{ m}, 200^\circ)$.

VI — 3. Dans les problèmes d'origine théorique, il est souvent plus commode d'adopter des conventions un peu différentes. Non seulement la phase médiane de la demi-droite $[OM)$ peut être remplacée par n'importe laquelle de ses phases — en particulier par sa plus petite phase positive $\angle_p(x, [OM))$ — mais il arrive aussi que l'on considère



- une demi-droite déterminée par l'une de ses phases,
- et, sur l'axe qu'elle définit, la *longueur orientée* OM.

Ainsi, sur la figure ci-contre le point M peut être déterminé non seulement par $(2 \text{ cm}, 315^\circ)$, $(2 \text{ cm}, -45^\circ)$, $(2 \text{ cm}, -405^\circ)$, etc. si on a choisi la demi-droite z , mais aussi par $(-2 \text{ cm}, -225^\circ)$, $(-2 \text{ cm}, 135^\circ)$, etc. si on a choisi la demi-droite y .

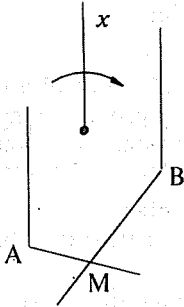
VII. REPÉRAGES BIPOLAIRES

VII — 1. Repérage bipolaire par angles-de-couples

En III, on a utilisé un repérage dont voici le principe :

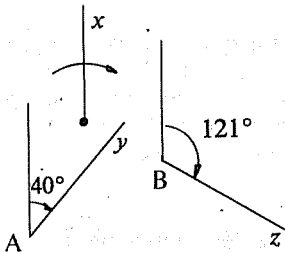
On choisit dans le plan

- deux points A et B, dits "pôles"
- une demi-droite x prise pour origine des phases
- et, pour transmettre les informations, une unité de phase (donc une orientation du plan).



Alors, à n'importe quel point M autre que A ou B on peut associer les angles des couples $(x, [AM])$ et $(x, [BM])$, en général donnés, le premier par une phase φ_1 de $[AM]$, le second par une phase φ_2 de $[BM]$, par exemple les plus petites phases positives.

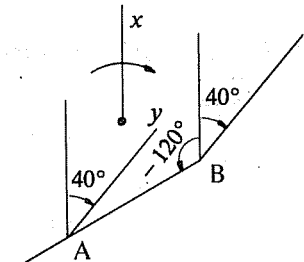
Sur le dessin ci-contre, $\varphi_1 = 100^\circ$ et $\varphi_2 = 230^\circ$.



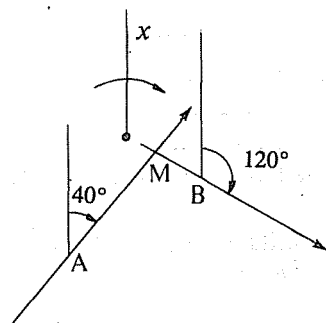
Inversement, la donnée de deux phases dans le plan orienté permet-elle de déterminer un point de ce plan ? Contrairement à ce qu'on a vu en VI-1, ici on n'est pas assuré de l'existence d'un tel point. Voici un exemple.

- Une première phase, 40° , détermine la demi-droite y issue de A.
- Une seconde phase, 121° , détermine la demi-droite z issue de B.

Or, on constate que y et z n'ont pas de point en commun.



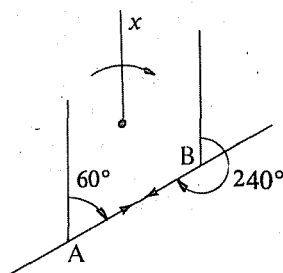
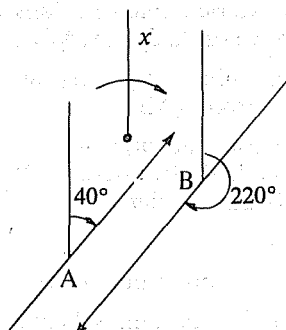
Dans cet exemple, si l'on conserve la première phase 40° , la phase médiane de la seconde demi-droite doit être comprise entre -120° inclus et 40° exclu si l'on veut que les deux angles-de-couples déterminent un point.



On pourrait améliorer ce type de repérage en utilisant des axes passant par A et B au lieu de demi-droites d'origines A et B. Dans ces conditions, les données de l'exemple précédent déterminent un point M.

Mais on n'échappe pas au fait que les deux angles-de-couples doivent encore être soumis à des contraintes qui dépendent de A, de B et de x si l'on veut éviter que les 2 axes aient

- soit des supports parallèles,
- soit un support commun (la droite AB).



Ces contraintes, qu'on ne peut pas éviter, font que ce type de repérage est rarement utilisé en géométrie.

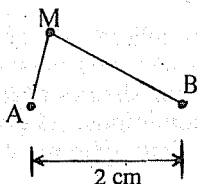
Les marins, les topographes, les astronomes, qui l'utilisent couramment, échappent à la difficulté qu'on vient de signaler car ils repèrent des objets matériels, c'est-à-dire des objets dont l'existence ne fait aucun doute.

VII — 2. Repérage bipolaire par distances.

Voici une variante du repérage précédent.

On considère un plan dans lequel on choisit deux points A et B et une unité u de longueur.

A n'importe quel point M, on peut associer les mesures des longueurs AM et BM.



Sur le dessin ci-contre

- à A, on associe 0 et 2,
- à B, on associe 2 et 0,
- à M, on associe 1 et 2,
- au milieu de [AB], on associe 1 et 1.

Inversement, donnons-nous deux réels positifs a et b . Existe-t-il un point M du plan tel que $AM = au$ et $BM = bu$?

Si un tel point existe, il se trouve à la fois

- sur le cercle de centre A et de rayon au ,
- sur le cercle de centre B et de rayon bu .

Par conséquent, trois éventualités se présentent :

- ces 2 cercles ne se coupent pas ; dans ce cas, a et b ne déterminent aucun point ;
- ces 2 cercles sont tangents (intérieurement ou extérieurement) ; dans ce cas, a et b déterminent un seul point, qui se trouve sur la droite (AB) ;
- ces 2 cercles se coupent ; dans ce cas, a et b déterminent 2 points, qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite (AB).

Il en résulte que le procédé précédent réalise une bijection de l'ensemble des points de l'un des demi-plans fermés de frontière (AB) vers l'ensemble des couples (a, b) de réels positifs qui vérifient

$$|a - b|u \leq AB \leq (a + b)u$$

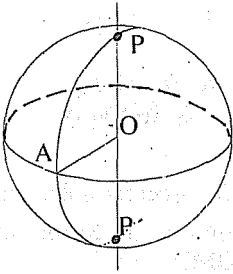
Mais cette bijection ne peut pas être étendue au plan tout entier.

L'emploi de ce type de repérage est délicat, mais plus commode que celui du repérage présenté en VII-1. C'est ainsi qu'on le rencontre en géométrie à propos de

- l'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$: c'est la médiatrice de [AB] ;
- l'ensemble des points M du plan tels que $MA = k MB$ où k désigne un réel positif autre que 1 : c'est un cercle centré sur (AB) ;
- l'ensemble des points M du plan tels que $MA + MB = 2du$ où d est un réel positif tel que $AB < 2du$: c'est une ellipse de foyers A et B ;
- etc.

VIII. REPÉRAGE SPHÉRIQUE

VIII — 1. En IV, il s'agit de repérer les points d'une sphère. Le modèle théorique suivant, inspiré de la géographie, est souvent utilisé. Il consiste à choisir



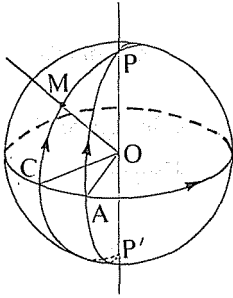
- un diamètre de la sphère ; il rencontre celle-ci en P et P' (qu'on appelle les pôles),
- un méridien, demi-cercle d'extrémités P et P',
- le parallèle dont le plan est le plan médiateur de [PP'] ; ce parallèle, dit *équateur*, coupe le méridien choisi en A.

Appelons O le centre de la sphère.

Soit alors M un point quelconque de la sphère, autre que P ou P', et soit C le point où son méridien coupe l'équateur.

Pour transmettre les informations,

- d'une part, on oriente l'équateur, et dans son plan on choisit [OA) comme origine des phases ;
- d'autre part, on oriente de P' vers P chacun des méridiens, et dans le plan méridien de M on choisit [OC) comme origine des phases.



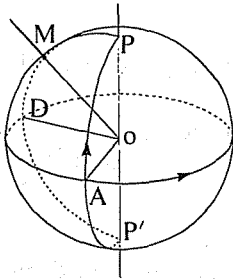
Dans ces conditions, à n'importe quel point M de la sphère autre que P ou P' on sait associer deux phases :

- suivant les utilisateurs, la plus petite phase positive $\angle_p$ ([OA), [OC)) ou la phase médiane $\angle_m$ ([OA), [OC)) de [OC), qu'on appelle *longitude* de M ;

- la phase médiane $\angle_m$ ([OC), [OM)) de [OM), qu'on appelle *latitude* de M.

Sur le dessin ci-contre, la latitude de M est 45° et sa longitude est -20° . S'il s'agit de la sphère terrestre, où P est traditionnellement le pôle Nord, on dit plus couramment que la latitude de M est 45° Nord et que sa longitude est 20° Ouest.

Inversement, une longitude L et une latitude φ déterminent un point M de la sphère, puisque

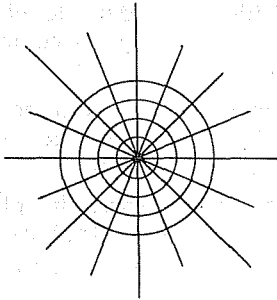


- L détermine le point D de l'équateur tel que, suivant les cas, $\angle_m ([OA], [OD]) = L$ ou $\angle_m ([OA], [OD]) = L$;
- D détermine un demi-cercle méridien ;
- φ détermine le point M de ce méridien tel que $\angle_m ([OD], [OM]) = \varphi$.

VIII — 2. Ce procédé peut être étendu à l'espace tout entier. Il suffit d'ajouter aux informations précédentes la longueur OM .

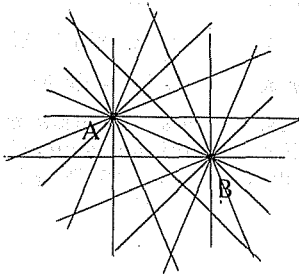
Par ailleurs, il existe d'autres types de repérage sphérique.

IX. REPÉRAGE ET LIGNES DE GRADUATION



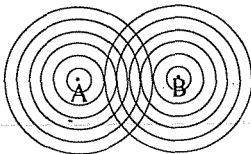
IX — 1. Dans le plan, un repérage polaire utilise

- l'ensemble des cercles de centre O ,
- l'ensemble des demi-droites d'origine O .



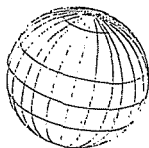
IX — 2. Dans le plan, un repérage bipolaire par angles-de-couples utilise

- l'ensemble des demi-droites d'origine A ,
- l'ensemble des demi-droites d'origine B .



IX — 3. Dans le plan, un repérage bipolaire par distances utilise

- l'ensemble des cercles de centre A ,
- l'ensemble des cercles de centre B .



IX — 4. Sur la sphère, le repérage géographique utilise

- l'ensemble des parallèles,
- l'ensemble des méridiens.

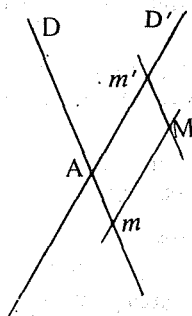
IX — 5. Le principe commun à ces divers repérages, ainsi qu'au repérage cartésien que nous allons introduire en X, consiste à utiliser deux ensembles de lignes de façon que tout point puisse être envisagé comme commun à une certaine ligne du premier ensemble et à une certaine ligne du deuxième ensemble; toutefois, on ne peut pas toujours éviter que certains points échappent à cette règle.

Les illustrations jointes au texte montrent quelques-unes de ces lignes organisées en réseaux réguliers. Chacun de ces dessins donne dès le premier coup d'œil une idée assez nette du fonctionnement du repérage en question. En outre, ces lignes permettent d'obtenir facilement des évaluations des "coordonnées" d'un point ou, inversement, de placer rapidement et sans trop d'erreur un point dont on connaît les coordonnées. Au fond, ces lignes jouent un rôle analogue à celui des traits de graduation d'une règle graduée ou d'un rapporteur.

X. REPÉRAGE CARTÉSIEN

Les types de repérage évoqués précédemment et couramment utilisés ont l'inconvénient de faire intervenir des angles-de-couples dont le maniement réclame un peu de soin. Voici un type de repérage(*) qui ne fait intervenir que des longueurs orientées.

X — 1. Dans un plan P on choisit deux droites sécantes D et D' ; soit A leur point commun.

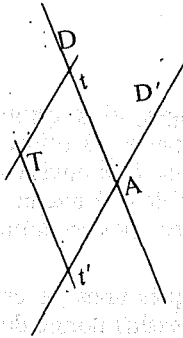


A n'importe quel point M du plan on associe

- le point m projeté de M sur D parallèlement à D',
- le point m' projeté de M sur D' parallèlement à D.

(*) dit *cartésien*, du nom de Descartes.

Réciproquement, la donnée d'un point t de D et d'un point t' de D' détermine un certain point T du plan.

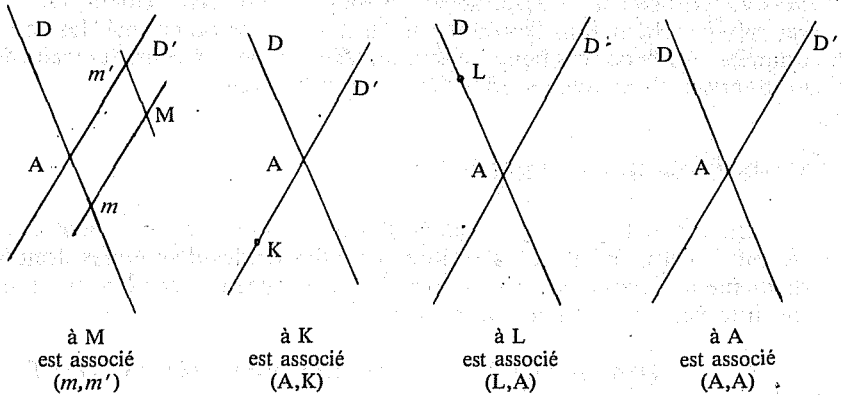


En effet, puisque D et D' sont sécantes,

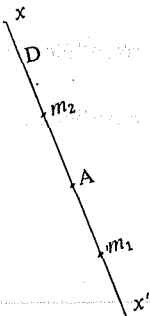
- la parallèle à D' passant par t ,
- la parallèle à D passant par t'

se coupent ; leur point commun est le point T cherché.

On a ainsi introduit une bijection de P vers $D \times D'$:



X — 2. Examinons maintenant la droite D munie d'un point origine A .



A n'importe quel point m de D , on peut associer la longueur Am . Mais cette longueur à elle seule ne caractérise pas le point m .

En effet, choisissons une longueur ℓ non nulle. Il existe deux points m_1 et m_2 de D tels que

$$Am_1 = \ell \quad \text{et} \quad Am_2 = \ell.$$

Pour éviter cette ambiguïté, on utilise le fait que le point A détermine deux demi-droites $]Ax)$ et $]Ax')$ de support D et on décide d'associer

- une longueur strictement positive (*) aux points de l'une des demi-droites, $]Ax)$ par exemple,
- la longueur nulle au point A,
- une longueur strictement négative (*) aux points de l'autre demi-droite $]Ax')$.

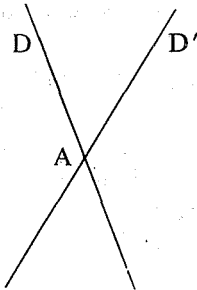
On a ainsi orienté la droite D (voir ORIENTATION).

Cette décision étant prise,

- à n'importe quel point m de D il correspond une et une seule longueur orientée μ ;
- réciproquement, à n'importe quelle longueur orientée μ , il correspond un et un seul point m de D.

En d'autres termes, on a ainsi introduit une bijection de D vers l'ensemble des longueurs orientées.

X — 3. Revenons à la situation de X-1.



Si on décide d'adopter la convention de X-2 à propos de D et de D', alors à n'importe quel point M du plan P il correspond un et un seul couple (μ, μ') de longueurs orientées et réciproquement.

La décision précédente permet donc d'introduire une bijection de P vers l'ensemble des couples de longueurs orientées.

XI. COORDONNÉES CARTÉSIENNES

XI — 1. Il est loisible de choisir une longueur unité U pour mesurer les segments de la droite D.



U est visualisée par un segment $[AI]$.

On peut alors mesurer les segments orientés $[Am]$ d'origine A et obtenir ainsi des réels.

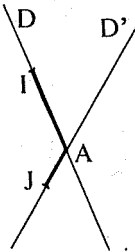
Le choix des points A et I de la droite D permet d'introduire une bijection de D vers $\mathbb{R}$ de la façon suivante.

(*) Voir MOTS VI, page 23.

Au point m de D on associe la longueur orientée μ du segment orienté $[Am]$ d'origine A et à la longueur orientée μ on associe le réel a tel que $\mu = aU$.

(A, I) est un *repère cartésien* de la droite D , dont A est l'*origine*; le réel a est appelé l'*abscisse* de m pour le repère (A, I) .

XI — 2. Dans le cas du plan P , on peut choisir



- une longueur unité U pour mesurer les segments orientés de D ,
- une longueur unité U' pour mesurer les segments orientés de D' .

Comme en XI-1, on visualise U par un segment $[AI]$ de D et U' par un segment $[AJ]$ de D' .

Le choix des points A, I et J permet d'introduire une bijection de P vers $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de la façon suivante.

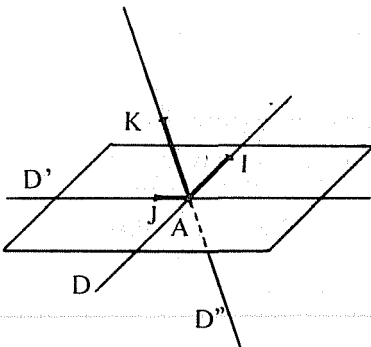
Au point M de P on associe (voir X-3) le couple (μ, μ') , et au couple (μ, μ') on associe le couple (a, a') de réels tels que $\mu = aU$ et $\mu' = a'U'$.

(A, I, J) est un *repère cartésien* de P , dont A est l'*origine*; (a, a') est appelé le *couple des coordonnées* de M pour le repère (A, I, J) .

Le premier composant a est appelé l'*abscisse* de M .

Le second composant a' est appelé l'*ordonnée* de M .

XI — 3. Ce procédé s'étend à l'espace à condition de choisir une troisième droite D'' passant par A et non incluse dans le plan déterminé par D et D' , et de choisir une unité de longueur U'' (visualisée ci-dessous par le segment $[AK]$) pour mesurer les segments orientés de D'' .



Dès lors le choix des points A, I, J, K permet d'introduire une bijection de l'espace vers $\mathbf{R}^3$.

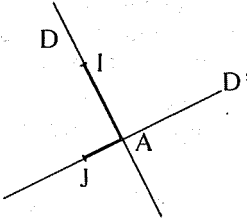
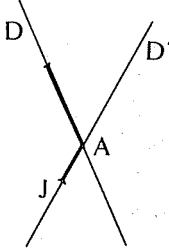
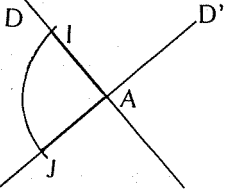
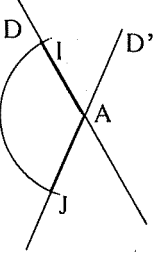
Au point M est associé le triplet de réels (a, a', a'') appelé *triplet des coordonnées* de M .

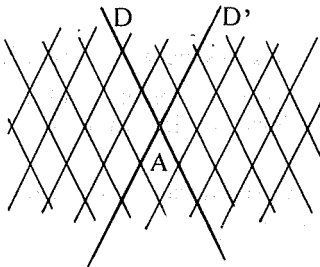
(A, I, J, K) est un *repère cartésien* de l'espace dont A est l'*origine*; a est appelé l'*abscisse* de M ; a' est appelé l'*ordonnée* de M ; a'' est appelé la *cote* de M .

XI — 4. En XI-2 nous avons choisi des longueurs U et U' sans leur imposer d'être égales.

Nous aurions pu tout aussi bien choisir la même longueur unité sur D et sur D' .

Par ailleurs, nous aurions pu choisir D et D' perpendiculaires. La combinaison de ces deux choix conduit à quatre types de repères du plan.

	D est perpendiculaire à D'	D n'est pas perpendiculaire à D'
$AI \neq AJ$	 repère <i>orthogonal</i>	 repère ni orthogonal ni normé
$AI = AJ$	 repère <i>orthonormé</i>	 repère <i>normé</i>



XI — 5. Dans le plan, un repérage cartésien utilise

- l'ensemble des droites parallèles à D
- l'ensemble des droites parallèles à D'

Mais, à ce propos, il importe de ne pas confondre deux activités apparentées :

- le repérage des points d'un plan,
- la désignation des cases ou des nœuds d'un quadrillage (cases d'un damier ou d'un échiquier, nœuds d'un go-ban^(*)).

Dans le second cas, les cases ou les nœuds sont matérialisés, faciles à distinguer les uns des autres, leur ensemble est fini (voir CARDINAL MOTS IV), et leur disposition fait que cet ensemble est déjà organisé de façon apparente en produit cartésien ; c'est cette organisation préalable qui fonde le principe de leur désignation.

Sur un échiquier, par exemple, dès que l'on est convenu de désigner les colonnes par a, b, c, d, e, f, g, h et les lignes par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il est naturel de désigner chaque case par le nom de sa colonne et le nom de sa ligne (parler de la case d7 est parfaitement clair).

Le repérage des points d'un plan relève d'une tout autre démarche : on est obligé d'introduire, avec un certain arbitraire, des droites, des orientations, des unités de longueur.

Autrement dit, sans avoir aucune idée du repérage cartésien on peut fort bien utiliser — voire imaginer — le procédé ci-dessus permettant de désigner les cases ou les nœuds d'un quadrillage. Ce procédé est bien un cas particulier du repérage cartésien, mais il n'apparaît comme tel que si l'on est déjà familiarisé avec celui-ci.

Remarquons enfin qu'en exploitant l'expérience des promeneurs, des marins ou des astronomes, on a été conduit plus haut à des repérages polaires, bipolaires, sphériques,..., mais pas à un repérage cartésien. Ce dernier est né et a évolué dans le cadre strict de la géométrie.

XII. REPÉRAGE CARTÉSIEN ET SCIENCES EXPÉRIMENTALES

XII — 1. Lorsqu'un courant électrique circule dans un conducteur, la température de ce dernier s'élève. Le physicien ne se contente pas d'une constatation aussi vague. Son effort consiste à recenser les grandeurs qui interviennent dans un tel phénomène puis à préciser les relations entre ces grandeurs.

Sur ce thème, voici une activité proposée à des élèves de Première.

On fait passer un courant continu d'intensité I dans un conducteur plongé dans un calorimètre. On mesure l'élévation de température — notée h — due au passage du courant.

Dans toutes les expériences, la température initiale du calorimètre est la même, la durée du passage du courant aussi.

(*) Au jeu de go, on pose les "pierres" sur les nœuds d'un go-ban.

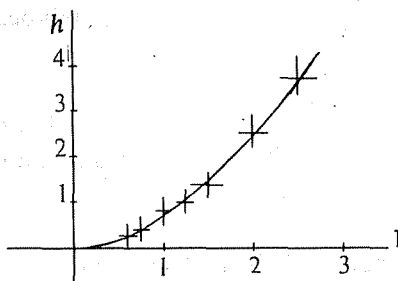
XII — 2. Voici un relevé des mesures qui ont été effectuées.

$\frac{I}{A}$ (*)	$\frac{h}{K}$ (*)
0,60	0,22
0,75	0,40
1,00	0,80
1,25	1,00
1,50	1,40
2,00	2,60
2,50	3,80

Ce tableau ne parle pas à l'imagination qui cherche une relation entre I et h .

Pour y voir plus clair, l'expérimentateur (élève ou physicien) visualise ces résultats à l'aide de la représentation graphique suivante :

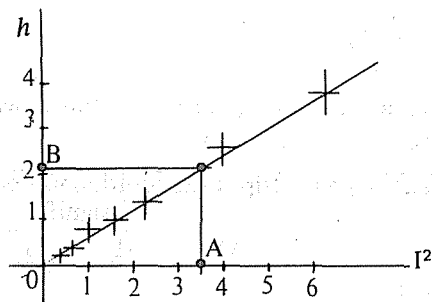
Le plan est repéré.
A chaque couple (I, h)
correspond un point du plan.



Le dessin ci-contre suggère une relation du type $h = \alpha I^2$ dans laquelle α désigne une grandeur constante à déterminer.

On est donc conduit à calculer les différentes valeurs de I^2 , qui permettront de construire une nouvelle courbe.

$\frac{I^2}{A^2}$ (**)	$\frac{h}{K}$
0,36	0,22
0,56	0,40
1,00	0,80
1,56	1,00
2,25	1,40
4,00	2,60
6,25	3,80



(*) K et A sont les symboles normalisés du kelvin et de l'ampère.

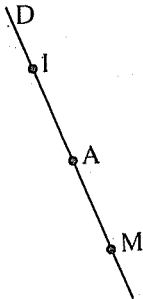
(**) Pour les notations I^2 et A^2 , voir MOTS VI.

On constate que les points obtenus se situent à peu près sur une droite. Cela confirme la relation $h = \alpha I^2$ et permet d'évaluer α à l'aide de $\frac{OB}{OA}$. On trouve $\alpha \approx 1,5 \text{ KA}^{-2}$.

Dans ce qui précède, le repérage des points du plan est un outil particulièrement commode pour enregistrer, organiser et exploiter des informations d'origine expérimentale (voir REPRESENTATIONS GRAPHIQUES, MOTS II).

XIII. REPÉRAGE CARTÉSIEN ET LANGAGE VECTORIEL

XIII — 1. Nous avons vu en X-2. et XI-1. que le choix d'un repère (A,I) d'une droite D détermine une bijection de D vers $\mathbb{R}$ qui à n'importe quel point M de D associe un réel a (abscisse de M pour le repère (A,I)).



Ce fait peut se traduire en langage vectoriel par

$$\overrightarrow{AM} = a \overrightarrow{AI}$$

La bijection de D vers $\mathbb{R}$ évoquée ci-dessus est également déterminée par le couple (A, $\overrightarrow{AI}$).

XIII — 2. Il en va de même

- dans le cas du plan muni d'un repère (A,I,J) ou aussi bien du repère (A, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$) ;

(a, a') est le couple des coordonnées de M pour le repère (A,I,J)

$$\overrightarrow{AM} \xrightarrow{\text{signifie}} a \overrightarrow{AI} + a' \overrightarrow{AJ}$$

(Voir XI-2)

- dans le cas de l'espace muni d'un repère (A,I,J,K) ou aussi bien du repère (A, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$) ;

(a, a', a'') est le triplet des coordonnées de M pour le repère (A,I,J,K)

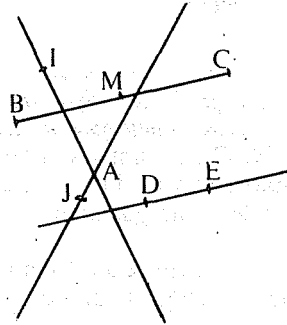
$$\overrightarrow{AM} \xrightarrow{\text{signifie}} a \overrightarrow{AI} + a' \overrightarrow{AJ} + a'' \overrightarrow{AK}$$

(Voir XI-3)

XIII — 3. Comme toute cette rubrique le fait ressortir, les diverses sortes de repérage permettent une traduction entre des informations portant sur des points et des informations portant sur des nombres. C'est ainsi qu'en XII-2 on a visualisé un ensemble de couples de nombres par des ensembles de points. Inversement, des propriétés géométriques peuvent être traduites numériquement ; dans beaucoup de cas le repérage cartésien est bien adapté à cette traduction, que favorise encore l'emploi du langage vectoriel.

En voici deux exemples : on suppose que dans le plan rapporté au repère (A,I,J)

le point B a pour coordonnées (b, b')
 le point C a pour coordonnées (c, c')
 le point D a pour coordonnées (d, d')
 le point E a pour coordonnées (e, e')
 le point M a pour coordonnées (m, m')



	Langage usuel	Langage vectoriel	Langage numérique
Exemple 1	M est le milieu de (B,C)	$\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ $2 \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$	$\begin{cases} 2m = b + c \\ 2m' = b' + c' \end{cases}$
Exemple 2	(BC) est parallèle à (DE)	$\vec{BC}$ et $\vec{DE}$ sont colinéaires - il existe un réel k tel que $\vec{BC} = k \vec{DE}$	- il existe un réel k tel que $\begin{cases} c - b = k(e - d) \\ c' - b' = k(e' - d') \end{cases}$ $(c - b)(e' - d') = (c' - b')(e - d)$

Plus généralement, n'importe quel repère peut, a priori, convenir ; dans la pratique, on choisit un repère qui concilie au mieux facilité de traduction et facilité de calcul.

Aides pédagogiques pour le cycle moyen Géométrie par une équipe d'animateurs d'IREM

Prix : 31,20 F (port compris) - 25 F (sans le port)

115 pages

Cette brochure présente une palette d'activités géométriques illustrant les objectifs de l'enseignement de la géométrie en cycle moyen ; elle s'adresse en premier lieu aux maîtres de l'enseignement élémentaire enseignant au CM. Cependant les collègues des classes de 6^e et 5^e peuvent y puiser la matière de dessins ou de constructions géométriques sur lesquels développer leur enseignement.

Cette brochure a été réalisée par des collègues travaillant au sein de groupes d'IREM et son contenu s'appuie sur l'observation de classes.

ON Y TROUVE :

- Quelques réflexions sur l'enseignement de la géométrie
- La relation plus ou moins détaillée d'activités en classe
- Des commentaires sur les objectifs, les prolongements ou les adaptations des activités présentées.
- Quelques commentaires plus théoriques à l'usage des enseignants
- Environ 200 figures

LES THÈMES ABORDÉS SONT

- Utilisation de jeux de construction
- Reconnaissance description et constructions de solides
- Lignes et surfaces
- Activités de géométrie planes : (repérage, pavage, puzzle, constructions reproductions de dessin, utilisation des instruments)
- Constructions de boîtes
- Plans
- Point de vue.

INDEX TERMINOLOGIQUE

commun aux brochures I(1974), II(1975), III(1976),
IV(1978), V(1980) et VII(1984). De plus, "GM" renvoie à Mots VI
(Grandeur-Mesure) dont l'index spécifique indique la page.

Abréviations des rubriques :

A	: ANGLE
AC	: ANGLE-DE-COUPLES
AF	: APPLICATION, FONCTION, BIJECTION
AL	: APPLICATIONS LINÉAIRES
AP	: APPROXIMATION
AS	: ASSOCIATIVITÉ
CA	: CARDINAL
CG	: CONGRUENCES
CM	: COMMUTATIVITÉ
CO	: COUPLE
DE	: DIVISION EUCLIDIENNE
DI	: DIVISION
DS	: DISTRIBUTIVITÉ
DT	: DIVISIBILITÉ
E	: ENSEMBLE
EG	: ÉGALITÉ
EI	: ÉQUATION, INÉQUATION
EL	: ÉLÉMENTS REMARQUABLES POUR UNE LOI DE COMPOSITION
EN	: ENSEMBLES DE NOMBRES
EP	: EXPOSANT, PUISSANCE
ER	: ENTIERS ET RATIONNELS
EX	: EXEMPLE, CONTRE-EXEMPLE
FR	: FRACTION
ND	: NOMBRE DÉCIMAL, NOMBRE A VIRGULE
NN	: NOMBRE NATUREL
NU	: NUMÉRATION
OM	: OPÉRATEURS MULTIPLICATIFS
OP	: OPÉRATION, LOI DE COMPOSITION
OR	: ORDRE
OT	: ORIENTATION
OU	: COMPARAISON DES ORDRES USUELS DANS LE DICTION- NAIRE, DANS N, DANS D^2
PA	: PARTAGES
PE	: PARTITION, ÉQUIVALENCE
PEC	: POURCENTAGES, ÉCHELLES ...
PH	: PHASE
PL	: PARALLÈLE
PO	: PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS
PR	: PRÉORDRE
PT	: PROPORTIONNALITÉ
RB	: RELATION BINAIRE

RE : PROPRIÉTÉS DES RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE
 RG : REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES
 RP : REPÉRAGE
 S : SOLIDES
 SA : SECTEUR, ANGLE
 SL : SEGMENT, LONGUEUR
 SY : SYMÉTRIE
 VG : VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE
 VH : VERTICAL, HORIZONTAL

Le signe * placé à côté d'une abréviation de rubrique indique qu'on trouvera dans cette rubrique des indications plus ou moins complètes sur le sens du mot considéré.

Certains mots se retrouvent dans presque toutes les rubriques : **contre-exemple, couple, définition, écriture, égalité, élément, énoncé, ensemble, exemple, naturel, nombre, notation, nul, partie, représentation, représenter, situation, sous-ensemble, zéro, ...** Nous n'avons laissé dans l'index que l'indication des rubriques "à astérisque" éventuelles les concernant.

Nous avons supprimé des mots comme : **collection, construction, démontrer, dessin, figure, formule, généralisation, hypothèse, notion, objet, propriété, tableau, théorème.**

abatement PEC
 aboutement OT
 abrégé entier AP*
 abscisse EI — RE* — GM
 absorbant EL* — CG — E
 abus de langage FR — OM
 accolades E
 addition EN — ER — OP — CM — AS — DS — EL — CG — AL — OM —
 EI — E — CA — SL — SA
 addition modulo p CG*
 additionner FR — EI
 adjacent SL* — S
 adjoindre ER
 affine (application—) AL
 affine (symétrie—) SY*
 aigu RG — SA* — VG
 aimant OT
 aire RG — OP — AL — PT — OM — AP — VG — EP — S — SY — OT — GM
 algèbre RG — EI — E — GM*
 alignés (points) VG*
 alphabétique (ordre—) PR — OU*
 altitude VH
 amplitude PH
 analyse EI
 angle RG — VH — VG — A* — SY — PH — GM
 angle (de secteurs — de paires de demi-droites — d'une demi-droite et d'un
 plan) SA* — OT — AC — PH
 angle-de-couples OT — AC* — PH — RP
 angles-de-couples-de-droites AC

angle de rotations cinématiques OT — PH
 angle de rotations géométriques PH
 angle au sommet PL
 anneau EN
 année de lumière EP* — SL
 antécédent RB* — AF — PE — PA — EI
 antipode VH
 antiréflexive OR* — RE* — SY
 antisymétrie (relation antisymétrique) OR* — RE* — PR — SY — OT
 appartenance PR
 applications AF* — PE — DE — DT — PA — DI — PR — AL — OM — EI
 SL — SA — EP
 application-identité RE*
 approché, valeur approchée à tant près AP* — OP
 approximation AF — DI — AL — AP* — SL — SA — EP
 arbre RG
 arc VG* — PL — OT — GM
 arête AL — CA — S* — SA* — VG — EP — SY
 arithmétique NU* — OP
 arrivée (ensemble d'—) RB* — OM
 arrondi automatique entier AP*
 ascendant (vertical) VG
 associativité EN* — ER — EX — AS* — PO — CG — AL — E — EP — SY —
 GM
 attribut RG
 autant que NN* — CA*
 automatisme OP
 autosymétrie, autosymétrique SY*
 axe EI — E — SA — PL — VG* — SY* — AC — PH
 axe (de révolution) S*
 axe (d'un disque, d'un cercle) S* — SY
 axes (d'une ellipse) S
 babylonienne (numération—) NU
 bande (de plan) SA — VH
 base VH
 base de numération EG — ND — FR — EN — NU* — CG — OU — AP
 base (de logarithmes) EP*
 base (de cône, de cylindre, de pyramide, de prisme) S*
 bénéfice PEC
 bijection AF* — NN — EN — AL — CA — SL — SA — EP — SY — OT — RP
 billion NU
 binaire (nombre—) EN — AP
 binaire (relation—) Voir "relation"
 bipolaire (repérage—) RP*
 bipyramide triangulaire S*
 bissecteur (d'un dièdre) SA*
 bissectrice SA* — VH — VG — SY
 bonhomme d'Ampère OT*
 bord OT
 borne, borné S — PH
 boucle (élément—) RB* — RE*
 boule VG* — S* — SL

boussole OT — RP
 Briggs EP
 but RB* — AF
 calcul, calculer OP*
 Cantor CA
 capable (arc) VG*
 capacité S
 Cardan EI
 cardinal AF* — NN* — EX — EN — CA* — GM
 carré EG — RG — OP — AL — PT — CA — AP — VH — VG — S
 carré (d'un nombre—) AF — AL — PT — AP
 cartésien (produit—) RB*
 cartésien (repérage—) RP*
 cartésien (schéma—) Voir "schéma cartésien"
 case RP
 centaine NU
 centimètre SL
 centre EI — VG* — VH — PL — S — SY*
 centre de gravité S*
 centre d'inertie SY
 cercle PE — RG — AL — PT — EI — E — PL — VG* — SL — VH
 cercle-point PL
 cercle trigonométrique OP
 chaîne OM
 champ (de forces, de gravitation, de pesanteur, magnétique) SY — OT
 changement (d'unités) SL* — SA*
 Chasles (égalité de) AC
 chat RE
 Chéops (pyramide de) S
 chiffre, chiffrer CO — NN — FR — EN — DI — NU* — OU — EI — E — AP
 — VG
 chiffres décimaux (suite des—) OU*
 chirale (molécule—) SY
 circonférence VG* — PL
 circonscrit RG
 classe d'équivalence PE* — ER — PA — CG — OR — PR — OM — SL — SA
 — VG — AC — PH
 classement, classer OR — NN — DT
 classification RG — OR
 cm EG
 codage, coder FR — NU
 coefficient AL* — PT* — OM — PEC — EI
 colinéaire RP
 colonne RB — DT — OM — VH* — SY
 commutativité EN* — EX — ER — DT — CM* — DS — PO — CG — AL —
 E — PH — GM
 comparable, comparaison, comparer NN — OR* — OU* — PR — OM* — GM
 compatibilité, compatible CG*
 complément EI
 complémentaire E* — SA
 complexe (nombre) EI
 composant OP* — AS — EI

composants (d'un couple, d'un n-uplet) CO* — ND — AF — DE — DI — RE
 — OU
 composé, composition ER — OP* — CM — AS — PT — OM — SA
 composé (naturel—) DT*
 compris entre EX
 compter OP
 comptine CA
 concave (non croisé) VG
 concentrique PL — VG
 concourir S
 concours (point de) S
 conducteur SY
 cône S* — SY
 congru PE* — CG* — PH
 congruence EG — PE — DE — CG*
 conique (point) OT
 conique (surface) S* — PL
 consécutifs (sommets, côtés) VG*
 constance PL
 constant(e) PT — S — GM
 constante (application—) EI — EP
 contact (point de) VH — PL
 contenant ER
 contexte EG — EN
 continu (puissance du—) CA*
 continue (fonction—) EI
 contre-exemple EX*
 contrôle (par 9...) CG*
 convention AS
 conversion SL* — SA*
 convexe, convexité S* — SA* — VG — SY — OT
 coordonnées (d'un point) AL — EI — VG — RP*
 coordonnées (d'un n-uplet) CO*
 coplanaire PL
 corde EI — VG — SL
 corps EN
 correction AP*
 correspondance un-à-un, correspondance terme à terme NN* — PR — OU — CA
 cosinus SA — SY — PH — GM
 cote RP*
 côté EG* — RG — PE — AL — PT — CA — AP — VG* — SA* — VH — S
 couple CO*
 courant électrique SY — OT — RP — GM
 courbe PL — EP — S — RP
 courbe représentative AF* — RG
 couronne (circulaire) OT
 critère (de divisibilité) DI
 croisé S
 croissance, croissante (application—) (strictement) PT — EI*
 croissant (ordre—) OU*
 croix OP — E*
 cube RG — AL — CA — SY

cube (d'un nombre) EP* — SY
 cylindre S* — SY — OT
 cylindrique (surface) S* — PL
 damier RG
 décimal ND* — EN* — EG — FR — ER — AF — DI — OU — OM — EI —
 CA — AP — EP
 décimal (d'ordre n) DI* — AP*
 décimale AL — AP
 décomposition EI
 décrire PL — S
 décroissante (application—) (strictement) EI*
 décroître VH
 défaut (par—) DI — AP* — EP
 degré SA* — VH — PH — RP
 degré (d'un polynome, d'une équation) EI* — SY
 demi-droite CA — SL* — SA — PL — VG — S — OT — PH — RP — GM
 demi-espace EI — S* — OT
 demi-plan EI — SA* — S — OT — RP
 demi-somme EI
 démonstration EX
 démonstration de type exhaustif EX*
 démonstration de type déductif EX*
 dénombrable EN* — CA*
 dénombrement RG — E — CA*
 dénominateur FR* — EN — PEC
 départ (ensemble de—) RB* — OM
 déphasage PH*
 descendant (vertical) VG
 désignation, désigner EG — ER — OP
 déterminé (nombre—) EG
 déterminer, détermination RB* — AL
 développement décimal AP
 développer EI — SY
 dextre OT*
 dextrogyre OT*
 dextrorbum OT*
 diagonal (plan—) SY
 diagonale RE — PR — CM — VG* — VH — SY
 diagramme RG
 diamètre AL — VG* — VH — RP — GM
 diamétrale (droite) S
 dictionnaire (ordre du—) OU*
 dièdre SA* — SY
 différence ER — OP* — CM — AS — AP
 différent EG — EN
 dimension DT — AP — VG*
 directe (orientation—) OT*
 direction VG* — SA — VH — S — SY — RP — GM
 direction (de plan) VG* — VH — S — SY — OT
 direction orientée OT* — AC — PH
 directrice S*
 discernable PA*

disjoint E — CA
 disposition (d'un calcul) OP
 disque AL — AP — VG* — SL — SA — S
 distance PEC — EI — SL* — SA — VH — PL — VG
 distinct PA — OR — OU — CA
 distributivité EN* — DS* — PO — CG — AL — OM — E — GM
 dividende DE* — DT — DI — OP*
 diviser DT — CA
 diviseur DE* — DT* — DI — RB — AF — RG — OP* — OR — PR
 divisible, divisibilité DT* — RG — DI — DE — SY
 divisif (opérateur—) OM*
 division DI* — EG — ER — OP — AS — EL — PO — CG — EI — AP
 division euclidienne DE* — PE — DT — DI — PA — NU — OP — CG
 dizaine NU
 dm EG
 dodécaèdre (régulier) S*
 double NN — RB — AL
 douzaine NU
 droit VH
 droit (angle) SA* — VH — VG
 droite EG — RG — AL — OM — EI — E — CA — SL — SA — PL — VH —
 VG — S
 droite (orientée) SA — OT* — AC — PH
 droite vectorielle OT — GM
 duodécimal (système—) NU*
 écart OP* — CM — CG — EI
 écart (angulaire) SA*
 échelle PEC* — EI — GM
 écriture à virgule EN — ND
 effectuer OP*
 égal, égalier EG*
 égalité EG* — SL — SA — GM
 électrique (symétrie—) SY
 électrode, électrolyte SY — GM
 élément E*
 élément remarquable (pour une loi de composition) EL*
 ellipse S — RP
 ellipsoïde (de révolution) S* — SY
 élongation angulaire PH*
 énantiomorphe SY
 encadrement EI — AP* — EP
 encombrement S
 énergie OT — GM
 engendré S
 ensemble E*
 ensemble des antécédents AF*
 ensemble d'existence AF*
 ensemble quotient PE* — PR
 ensemble des solutions EN* — DT — EI*
 entier EN* — ER* — FR — PR — OM — EI — E — CA — AP — EP
 entière (partie) ND — OU*
 entraîne ND

enveloppe (convexe) S*
 équateur SA — VH — RP
 équation EG — FR — ER — EI* — E — EP
 équidistant SA
 équilatéral SA — VG — S — SY
 équipollent OT
 équipotent CA*
 équivalence (relation d'—) PE* — EG — FR — ER — CG — PR — OM —
 SL — SA — PL — VG
 équivalent PE* — EG — FR — ER — PT — OM — SA
 erreur DI — AP*
 escompte PEC
 espace RG — EI — SL — SA — S — OT
 espace vectoriel OT
 et OP
 étalon SL
 étiquette EG — E
 étoilé SY
 étranger ER — SY
 être mathématique EX — FR — EN — ER
 euclidien DE*
 euclidienne Voir "division euclidienne"
 Euler (égalité d') S*
 évaluation EI — CA — AP* — EP — GM
 exact AP
 excès CM*
 excès (par—) DI — AP* — EP
 exemple EX*
 exinscrit (cercle—) SY
 existe (il existe au moins un...) EX
 existentiel (énoncé—) EX*
 existentiel (d'une fonction) AF* — OM
 exponentiation CM — EL
 exponentielle (fonction) EP* — GM
 exposant EP*
 extrémité SL* — VG — S
 face (d'un solide) S* — SA* — SY
 facette S*
 facteur DT — SY
 factorielle AF* — OU*
 faire OP
 faux EG — EX — RB — ER — EI
 fermé (disque) VG*
 fermé (secteur) SA*
 fermé (segment) SL*
 fermé (courbe) S
 file OR
 filet, filetée (tige—) SY — OT
 fin (préordre plus—) PR
 fini (ensemble—) NN* — EX — EN — AF — OP — CG — EI — CA*
 flèche OT* — AC — PH
 fléché (schéma—) RB* — OR

fois OP
 fonction AF* — RG — OP — OM — EI — E — SL — SA — SY
 fonction (symétrique, antisymétrique) SY*
 fonction (paire, impaire) SY* — PH
 fonction polynomiale SY
 fonction (être fonction de) AF
 fonctionnelle (notation—) AF*
 fonctionnelle (relation—) AF*
 force OT — GM
 force centrifuge SY
 force électromotrice SY — GM
 formaliser OR
 forme (bi, tri—) linéaire alternée OT*
 formule (de résolution) EI*
 fraction, fractionnaire FR* — EN* — ER — OP — ND — PE — PT — OM —
 PEC — EP — GM
 Fresnel (vecteur de—) OT
 frontière EI — S — SA* — VG

 Galois EI
 Gauss AP
 génératrice S* — SY — OT
 générique (élément) OM
 géométrie RG — VH — VG
 géométrie (plane) SA — PL
 géométrie (dans l'espace) SA — VG — S
 géométrique (angle) SA*
 grade SA*
 graduée (droite) VG*
 graduer VG* — RP
 grandeur PT — AP — SL — GM*
 grandeur orientée OT* — RP
 graphe RB* — PE — AF — OR — RE — PR — AL — OM — EI — PEC —
 SY — OT
 graphique (représentation—) AF — OM — EI
 grecque (numération—) NU
 grosse NU
 groupe EN — SY* — AC — PH
 groupe (symétrique, alterné) SY*
 harmonique (quadruplet—) SY*
 hauteur RG — VG — VH — S
 hélicoïdal(e) (mouvement, symétrie) SY — OT
 hexaèdre S
 hexagone S — SY
 hexagone (régulier) SA — VG — SY
 histogramme AF* — RG
 homogène (ensemble matériel) SY — GM
 homogène (grandeur) SY — OT — GM*
 homogène (polynome) SY
 horizon VH*
 horizontal VH* — SA
 hypoténuse VG — SY

icosaèdre (régulier) S*
 identifier, identification ER
 identité EG — RG
 identité (transformation—) SY
 illimité S
 illimité (quadrillage—) OP
 illimitée (écriture—) ND*
 illustration EX
 image RB* — AF — PE — CM — AL — PT — OM — PEC — EI — CA — SL
 SA — S — SY — PH — AC
 impair EX — AF — S — EP
 impossible EI
 incertitude DI* — AP* — GM
 inch SL
 incidence (angle d') SA
 incliné (plan) SA
 inclus, inclusion EN — RG — OR* — RE — OM — EI — E* — SA — VG — S
 SL — OT
 inconnu, inconnue EG — DT — EI* — EP
 indéterminé EI
 indice SA
 indice (d'un radical) EI — EP
 indiscernable PA*
 inégalité EX — SL — SA
 inéquation EI* — CA
 inf OP* — DS — EL
 inférieur NN* — AP
 infini (ensemble—) NN* — AF — OP — OM — EI — CA*
 infinité EX — ER — OU — EI — E — CA*
 inscrit(e) (cercle, sphère) S — SY — GM
 intensité électrique PH — RP — GM
 intercaler OR — OU*
 intérêts composés EP*
 intérieure (région) S
 interpolation linéaire EI*
 intersection CO — OP — AS — DS — EL — OM — E* — CA — SA — VH —
 PL — S — OT
 intervalle EI — AP
 invariance, invariant SY*
 inverse ER* — EL* — AL — PT — OM — EP
 inversement proportionnel PT*
 inversible EL*
 irrationnel EN* — AP
 irréductible FR* — ER — OP
 isocèle (triangle—) PE — VG — VH — S
 isomère SY
 isométrie VG — SA — SL* — SY — OT* — AC — PH
 isométrique PE* — SL* — SA* — VG* — S
 issu SL*
 justifier EX*
 k-aire ND*

langage RG
 langage ensembliste E
 langage mathématique FR — VG
 large (ordre—) OR* — PR
 largeur AF — AP — VG*
 latérale (surface, arête) S*
 latitude SA — VH — PL — RP*
 lecture EG — NN
 légende RG
 lévogyre OT*
 lien verbal RB* — PE — AF — DT — PR — PT — OM
 ligne RB — DT — PT — CA — E — VG — OT
 ligne (de graduation) RP*
 ligne (de niveau) VH*
 ligne (de pente) VH*
 ligne (d'un tableau) VH* — SY
 linéaire (application—, fonction—), linéarité AL* — PT — OM* — PEC — GM
 littérale (écriture) EI
 logarithme EP*
 logarithme décimal AF* — OP — EP*
 loi de composition EN* — ER — OP* — CM — AS — DS — EL — CG —
 EI — E — AC — PH
 longitude RP*
 longueur EG — PE — AL — PT — OM — PEC — EI — CA — VG* — SL* —
 SA — PL — S — EP — SY — OT — PH — RP — GM
 losange PE — VH
 machine OM
 masse AL — PT — SY — GM
 masse volumique, surfacique, linéique AL — SY — GM
 mathématisation OR
 matrice SY
 mécanique (symétrie) SY*
 médiane (plan—) SY*
 médiane GV — S — SY
 médiateur (plan) EI*
 médiatrice EI* — SY — RP
 meilleure approximation entière AP*
 membre SL
 méridien SL — RP*
 méridien (plan—) SY*
 mesurage EG — GM*
 mesure, mesurer EG — AF — OP — PR — AL — OM — EI — AP — SA* —
 SL* — VG — EP — GM*
 mètre SL*
 milieu RG — OP — EI — SL* — S — RP
 mille, million, milliard NU
 minute (d'angle) SA*
 mise en équations EI*
 mobile PT
 Möbius (ruban de—) OT
 modèle DT — PA — OU
 module, modulo PE* — CG*

module (Z—) PH
 moins deux (base—) NU*
 moins que NN* — CA
 moitié RB — SL — SA — VG
 moment (d'une force) OT — GM*
 monoïde EN
 mot OU
 moule EI
 mouvement de rotation PH
 mouvement diurne OT
 mouvement uniforme PT — GM
 mouvement vibratoire simple PH
 multiple DT* — EX — RB — DE — DI — NU — CG — OR — OM — EI —
 CA — SL
 multiplicande, multiplicateur CM — SY
 multiplicatif (opérateur—) OM*
 multiplication EN — ER — DT — OP — CM — AS — DS — EL — CG —
 AL — PT — OM — EL — E — EP
 multiplication modulo p CG*
 nappe S*
 naturel NN* — EN* — NU*
 négatif ER* — ND — FR — EN — DI — EI — CA — AP — EP — OT
 Neper EP
 neutre (élément—) EN* — ER — EL* — PO — CG — E — SY — GM
 neuvaïne NU
 nœud EI — RP
 nom EG
 nombre (d'éléments) CA*
 nombre fini OU
 normale PL*
 normé (repère—) RP*
 notation FR*
 noue VH*
 nul (angle, secteur) SA*
 nul (segment) SL*
 nulle (application—) AL*
 nulle (longueur) SL* - GM
 numérateur FR* - PEC
 numération (système de numération) EG — ND — FR — NN — NU* — CG —
 OU — CA — AP — EP
 numérique (relation—) RB*
 numérique (ensemble—) (non—) CA
 n-uplet CO* — AF — OU — E
 oblique VH* — PL
 obtus SA*
 octaèdre (régulier) S*
 octal EN
 onde électromagnétique SY
 opérateur FR — OM* — PEC — VG
 opération EX — EN — ER — DE — DI — OP* — PO — CG — OM — EI —
 SL — SY — PH — GM

opposé ER* — EL* — PR
 opposés (côtés, sommets) VG* — SL* — SA* — S
 opposés (diamétralement) PL
 opposés (par le sommet) SA*
 or (nombre d'—) SY*
 ordinal CA
 ordonné (ensemble—) OR — PR — OU
 ordonnée EI — RP*
 ordonner PR — OU
 ordre CO
 ordre de grandeur OP — PT — AP
 ordre (d'une approximation décimale) AF
 ordre (relation d'—) EN — ER — OR* — PR — SL — SA — VG — PH
 ordre-produit OU*
 ordres usuels OU*
 organigramme RG
 orientation, orienter OT*
 origine AL — OM — E — SL* — SA — VG — RP*
 orthocentre RG* — S
 orthogonal VH* — VG* — RP
 orthogonal (repère—) RP*
 orthogonale (symétrie—) SY*
 orthogonalité SY
 orthonormé (repère—) SY — RP*
 ouvert (disque) VG*
 ouvert (secteur) SA*
 ouvert (segment) SL*
 pair NN — EN — RG — AF — NU — OR — EP — S
 paire CO* — NU — OR — PR — SL — SA — PL — VG — AC
 parabole PL — OT
 parallèle RE — EI — CA — PL* — VG* — SA — VH — S — RP*
 parallélipède S* — OT — GM
 parallélisme PL* — SY
 parallélogramme PE — RG — VG — S — SY
 parenthèses FR — AS*
 parité AP
 partage PA*
 partage d'un naturel PA*
 partie E*
 partie entière ND — AP*
 partiel (ordre—) OR*
 partition PE* — PA — DT — CG — OR — PR
 pas SY
 patate RG — E
 pavé S*
 pentaèdre S
 pentagone (régulier) SA — S — SY
 pente VH* — GM*
 périmètre AL — PT — SY — GM
 périodicité EI — PH — GM
 permutation (paire, impaire) SY* — OT
 perpendiculaire RE — EI — VH* — SA — PL — VG — S — SY

perpendiculaire commune VG* — SY
 pgdc OP — AS
 phasage, phase PH* — SY — AC — RP
 phasage médian PH* — RP
 phasage (plus petit—positif) PH* — RP
 phrase (mathématique) EG — EX — FR — RB
 pi(nombre—) AP* — SA — VG
 plan PE — OP — EI — E — SL — SA — VH — PL — VG — S
 plan PEC
 plan vertical OT
 plat (angle, secteur) SA*
 Platon S
 plein (secteur) SA*
 plus grand que, plus petit que NN*
 plus que NN* — CA
 poids PT
 point EI — E — CA — AP — SL — VH — PL — VG — S
 point PEC* — GM
 point (représentatif) RG — OM — EI
 points de suspension) AP
 polaire (repérage—) RP*
 polarisation SY — OT
 pôles PL — OT — RP
 polyèdre S* — SA — OT
 polygonal RG — VG
 polygone VG — SA — S — SY
 polynome FR — OP — EI — SL — SY
 ponctuel OT
 poser OP
 positif ER* — ND — FR — EN — RG — DI — OU — EI — AP — SL — SA —
 EP — OT
 position (numération de—) NU*
 pourcent PEC*
 pourcentage PEC* — GM
 ppmc OP — AS — EL — OM
 précédent NN*
 précision AP
 précéssseur NN*
 préfixes (système international d'unités) EP*
 premier (naturel—) DT* — EX — EN — DI — OR*
 premiers entre eux ER
 préordre PR*
 pression PT — GM
 preuve RG — CG*
 preuve par 9 DE — CG*
 prismatique (surface) S*
 prisme S* — SA — SY — OT
 prisme (droit, oblique) S*
 produit FR — ER — DI — OP* — CM — CG — PT — OM — PEC — EI — AP
 produit cartésien RB* — OP — OR — RE — OU — EI — E* — SY — GM
 projeté orthogonal SA — VH — SY — PH — RP
 prolonger EN* — ER*
 proportion PT*

proportionnel, proportionnalité PT* — OM — PEC — VG — GM*
 proportionnellement PA
 puissance NN — ND — FR — EN — AF — DI — CG — PEC — AP — EP*
 puissance (d'un ensemble) CA*
 pulsation PH
 pyramide (surface) S*
 pyramide S* — SY — OT
 quadrant SA* — SY
 quadrilatère PE — RG — VG* — S
 quadrillage OP — EI
 quadruplet CO* — OM — E — VG — SY — OT
 quatrième proportionnelle OM
 quatuor NU
 quel que soit EG* — ND
 quotient DE* — DI* — FR — ER — AF — NU — OP — CM — AS — AL —
 PT — AP — EP
 raccourci (flèche—) RE
 racine carrée positive OP
 racine, radical (carré(e), cubique) OP — EI — AP — EP* — SY — GM
 radian SA* — AC — PH — GM
 rangement, ranger OR — PR
 rationnel EN* — ER* — PE* — EG — ND — AF — DI — OM — EI — E —
 AP — EP — GM
 rayon PT — EI — VG* — SA — VH — PL
 rebroussement PL
 réciproque (couple—) PR*
 réciproque (relation—) RB* — EN — AF — DT — RE — AL — PT — OM —
 SL — SY — OT
 réciproquement CO — OM
 rectangle PE — VH — VG — S
 rectangle (triangle—) PE — RG — VG — S — SY
 rectiligne PL — SL
 rectiligne (d'un dièdre) SA*
 réduction, réduire (au même dénominateur) FR — ER
 réduction PEC
 réel EN* — DI — PT — EI — AP — AL — EP
 référentiel, référence (ensemble de—) EX* — OP — EI*
 réflexivité (relation réflexive) EG* — PE — OR* — RE* — PR* — VG — SY
 règle de trois OM*
 régulier (polyèdre) S*
 relatif EN*
 relation, relation binaire RB* — AF — PE — PA — DT — OR — PR — PT —
 CA — OM — SA — SY
 relation dans un ensemble RB* — PE — SY
 relation n -aire SY*
 rentrant SA* — OT — PH
 répartir, répartition PE* — PA*
 repérage CO — RP*
 repère (du plan) VG — SY — RP*
 répétition d'ordre n SY*
 représentant SA
 représentation graphique d'une fonction AF* — EP — SY — RP

représenter, représentation RG* — RB*
 résoluble EI*
 résolution, résoudre ER — DT — EI*
 reste DE* — PE — DT — DI — NU — OP — CG
 restriction EN*
 rétrograde (orientation—) OT*
 réunion RG — OP — AS — OS — EL — E* — CA — SA — VG — S
 révolution PL — SY
 révolution (solide de) S*
 romaine (numération) NU
 rotation SL — SA — PL — SY — OT — AC — PH
 sagittal (schéma—) Voir "schéma sagittal"
 saillant SA* — OT — AC — PH
 satellite SY
 satisfaire EI*
 schéma EG — RG — AL
 schéma cartésien RB* — AF — DT — PR — OM — SY
 schéma sagittal RB* — RG — AF — PE — RE
 schéma fléché RB*
 sécant SA — VG
 seconde (d'angle) SA*
 secteur SA* — S — OT — PH
 secteur circulaire SA*
 secteur d'espace OT
 secteur polyèdre S*
 segment (de droite) EG — RG — EI — CA — AP — SL* — SA — PL — VG —
 S — GM
 segment orienté OT* — RP
 segment (de disque, de sphère) SL*
 semblables (triangles) VG
 semestre OT*
 sens SL — SA — VG*
 sens de rotation SA — PL
 sexagésimale (numération) SA
 si... alors EX
 signe EG — FR — ND — OP* — SL — SA
 signe opératoire ER — OP*
 signifiant, signifié OU — NU
 significatif (chiffre) EP
 similitude VG
 simplifier (une fraction) OP
 singleton EI — SL — SA
 sinistrorsum OT*
 sinus SY — PH — GM
 sinusoïde SY — OT
 solide S*
 solution ER* — EN — DT — DI — EI* — E — CA — EP
 somme EN — FR — ER — OP* — CM — CG — AL — QM — EI — AP — PH
 somme des chiffres NU* — CG
 sommet RG — PE — S* — SA* — VG*
 source RB* — AF — PE
 sous-ensemble E*
 sous-jacent DT — DI

sous-multiple SL
 soustraction ER — OP — AS — EL — PO — OM — EI
 sphère EI — VG* — VH — PL — SY — OT — GM
 sphérique (repérage—) RP*
 spirale logarithmique SY*
 spire SY
 statistique PA*
 strict (ordre—) OR*
 strictement (positif...) EN* — ER* — VG — EP
 structure EN — ER — OM
 successeur NN*
 suite NN — AF — DI — OU
 suite vide OU
 suites proportionnelles PT* — OM
 suivant NN*
 sup OP* — DS — EL
 superficie DI
 supérieur NN* — AP
 supérieur (cardinal—) EN
 superposable SL — SA — VG — SY — GM
 support E — SL — SA — VG
 surface PL — VG — S — OT
 symbole EG — FR — PA
 symétrie EI — SL — SA — VH — VG — SY* — OT
 symétrie positive, négative SY*
 symétrie (relation symétrique) RB — PE — RE* — PR — EG* — VG — SY
 symétriques (éléments—) EL* — SY
 symétriques (points, figures—) RG — CM — SY*
 symétrisable EL*
 symétrisé ER*
 synonyme, synonymie EG — FR — ER — OU
 système Voir "numération"
 système (d'équations) SY
 table AF* — RG — DT — OP* — CM — CG — AP
 table de logarithmes EP*
 table (d'une application) PT — OM
 table traçante EI
 tangent (plan) PL
 tangente E — PL — VH — VG
 tangente (trigonométrique) SY — PH — GM
 taux PEC — EP — GM
 taux d'incertitude AP* — GM
 technique (d'une opération) DI — NU — OP*
 tension électrique PH — GM
 terme OP*
 terme (d'un couple, d'un n-uplet) CO* — RB — PT — CA — VG
 terme (d'une matrice) SY
 terme (d'une somme) PA — AP
 ternaire ND* — SY
 terrestre (sphère—) RP
 test EX
 tétraèdre S* — SA — VG — SY — OT
 théorie des ensembles E

Timée S
 tire-bouchon de Maxwell OT*
 tore S* — OT
 total (ordre—) OR* — OU — SL — SA — OT — PH — GM
 tour PH
 traduction EG
 trait de fraction FR*
 transformation géométrique SL — SA — SY — OT
 transitivité (relation transitive) EG* — PE — OR* — RE* — PR* — PT — VG
 — GM
 trajectoire PL
 translation SL — SA — SY — OT — PH
 transposition SY*
 trapèze PE
 triade NU
 triangle PE — RG — VG* — SA — VH — S — SY — OT
 triangulaire (inégalité) SL* — S
 triangulation VG
 trièdre (secteur) S* — OT — GM
 trigonométrie EI — SA — VG — SY — PH
 trigonométrique (fonction, rapport—) PH* — GM
 trillion NU
 triplet CO* — DS — E — VG — SY — OT — RP
 tronc (de cône, de cylindre, de prisme, de pyramide) S*
 type RE
 un NN* — EN
 uniforme (mouvement—) PT
 unitaire (prix—) AL
 unité EG — NU — AL — PEC — EI — SL* — SA* — VG — EP — RP — GM*
 universel (énoncé—) EX
 valeur EX
 valeur absolue AP
 valeur (approchée) AP*
 variable SY
 variation (sens de—) EI
 vecteur OP — E — SL — SA — OT — RP — GM
 vecteur directeur E
 vecteur orienteur OT* — AC — PH
 vecteur unitaire E
 vectoriel OT — PH — GM*
 vérifié EX — EI*
 vertical VH* — SA — PL — VG — OT
 vibration SY
 vide (ensemble—) NN* — CO — RB — PE — PA — EI — E* — SL — SA — PL
 virgule, nombre à virgule ND* — EN — DI — OU — OM — AP
 vis OT
 vitesse PT — GM
 vitesse angulaire PH — GM*
 volume AL — PT — S — EP — SY — OT — GM
 vrai, vérité EG — EX — RB — ER — EI
 Watt (diagramme de—) OT
 zéro NN* — NU*

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

**Secrétariat : 13, rue du Jura, 75013 Paris
Tél. (1) 331.34.05**

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'A.P.M.E.P. est une association, fondée en 1909, qui regroupe tous les enseignants concernés par l'enseignement des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université". L'A.P.M.E.P. est un lieu d'échanges, pédagogiques et scientifiques, pour tous les enseignants de mathématiques.

Les Régionales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. avec, très souvent, des sections départementales, voire locales. En effet, à la dispersion géographique de ses adhérents, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres, qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par-dessus les barrières officielles des divers degrés d'enseignement.

Les Journées Nationales

L'A.P.M.E.P. organise chaque année des Journées Nationales qui sont, pour les membres de l'Association, l'occasion de se retrouver. Elles ont, ces dernières années, regroupé de 500 à 800 participants autour de thèmes divers.

Les Publications

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique, et qui rapporte la vie de l'association, tant régionale que nationale. On y trouve notamment les rubriques suivantes : études, études didactiques, dans nos classes, mathématiques et société, examens et concours, manuels scolaires, évaluation, interdisciplinarité, formation des maîtres, informatique, audio-visuel, problèmes, jeux et maths, matériaux pour une documentation, un coin du ciel ...

Elle édite aussi un Supplément au Bulletin.

De plus, l'A.P.M.E.P. publie toute une série de brochures. Ces brochures permettent de répondre à des demandes plus spécifiques de telle ou telle catégorie d'adhérents. La liste des brochures figure dans le Bulletin.

Le Présent

L'A.P.M.E.P., association représentative des enseignants de mathématiques, agit comme telle vis-à-vis des syndicats, des associations d'enseignants d'autres disciplines, des associations de parents d'élèves, ainsi que des Ministères de l'Education et de l'Université. Par exemple, actions à propos des programmes, ... ; intervention de novembre 1979 auprès du Ministère de l'Education (ce qui a permis d'obtenir une heure de travaux dirigés pour toutes les Secondes "Indifférenciées" de la rentrée 1981, alors qu'aucune n'était prévue).

L'Avenir

Après avoir obtenu la création des IREM (puis lutté pour leur maintien), l'A.P.M.E.P. est à la pointe du combat pour une véritable formation permanente, dont elle a défini les principes dans son Texte d'Orientation 1978 (caractère non obligatoire ; formation intégrée dans le service des enseignants ; large indépendance vis-à-vis de la hiérarchie ; ...).

Texte d'Orientation

Après les Chartes de Chambéry (avril 1968) et de Caen (mai 1972), l'A.P.M.E.P. a actualisé ses positions fondamentales par son Texte d'Orientation (1978). Les principales préoccupations des enseignants de mathématiques y sont abordées et de nombreuses propositions, à court et à long terme, sont faites, permettant une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. [On peut se le procurer gratuitement, en écrivant au Secrétariat de l'A.P.M.E.P. (adresse ci-dessus)]

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques, depuis les premières initiations jusqu'aux études supérieures, sans oublier la formation permanente des non-enseignants et des enseignants. Aussi ne pouvez-vous vous désintéresser de l'A.P.M.E.P. et des possibilités d'action qu'elle vous offre.

L'A.P.M.E.P. a besoin des forces, de l'expérience et de l'action du plus grand nombre d'enseignants de mathématiques. Son efficacité, les services qu'elle vous rend ou pourrait vous rendre, tiennent au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.