Utilisation des schémas d'opérateurs en Algèbre élémentaire

par
Claude ROUXEL

SOMMAIRE

Introduction

L'objet de cet article est de présenter les principaux schémas que nous utilisons, leurs conditions d'emploi, leur intérêt spécifique comparativement à l'écriture algébrique, et leurs limites.

Le point de départ de notre réflexion est le constat des difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'acquisition de l'écriture symbolique.

Le principal intérêt à utiliser une telle écriture est de traduire les concepts en un minimum de symboles afin de mécaniser leur traitement. Cette mécanisation, si elle nous paraît souhaitable, ne doit cependant pas se traduire par une compréhension superficielle des processus mathématiques sous-jacents et transformer ces processus en un simple jeu d'écriture (1).

L'emploi des opérateurs nous a paru intéressant à plusieurs titres :

— **Séparation des difficultés conceptuelles et des difficultés de transcription ;**

— **Utilisation d'une écriture reflétant les structures mathématiques étudiées ; par exemple, des objets de nature différente sont représentés par des symboles différents ; l'ordre de traitement est conforme à l'ordre de l'écriture ;**

— **Emploi d'un langage déjà formalisé, intermédiaire entre l'arithmétique et l'algèbre.**

Le choix des thèmes abordés dans cet article n'est pas exhaustif mais répond

— d'une part à la volonté d'articuler les thèmes entre eux (ensembles de nombres, équations, fonctions), de façon à convaincre le formateur que l'emploi des opérateurs ne s'accompagne pas nécessairement d'une perte de temps ;

— d'autre part au souci de situer à chaque fois l'intérêt spécifique d'une écriture par opérateurs comparativement à l'écriture algébrique, le choix de ces supports correspondant à des stades d'évolution différents.

(1) *Cf. "Hypothèses et propositions pédagogiques" par Michel BRUSTON, dans cette même brochure.*

Description des opérateurs

I - Opérateurs élémentaires

1) ***Opérateurs du 1er degré***

Addition d'une constante et son réciproque : $\square \xrightarrow{+A} \square$ $\square \xrightarrow{-A} \square$

Multiplication et division par une constante : $\square \xrightarrow{\times A} \square$ $\square \xrightarrow{:A} \square$

Bien qu'ils soient présentables comme des cas particuliers de multiplication par *(+1)* et par *(−1)*, les opérateurs suivants permettent une bonne représentation de certaines situations :

Opérateur identique : $\square \xrightarrow{I} \square$ *qui est son propre réciproque*

Opérateur opposé (ou changement de signe) : $\square \xrightarrow{+/-} \square$ *qui est son propre réciproque*

Opérateur valeur absolue : $\underset{\mathbf{R}}{\square} \xrightarrow{|\ |} \underset{\mathbf{R}^+}{\square}$ *et ses réciproques* $\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{I} \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \\ \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{+/-} \underset{\mathbf{R}^-}{\square} \end{array} \right.$

2) ***Opérateurs entrant dans la composition des fonctions polynomes et fractions rationnelles***

Opérateur carré : $\underset{\mathbf{R}}{\square} \xrightarrow{\overset{2}{*}} \underset{\mathbf{R}^+}{\square}$ *et ses réciproques* $\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \\ \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{-\sqrt{\ }} \underset{\mathbf{R}^-}{\square} \end{array} \right.$

Opérateur puissance et son réciproque : $\underset{\mathbf{R}}{\square} \xrightarrow{\overset{n}{*}} \underset{\mathbf{R}^+}{\square}$ $\underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{\overset{1/n}{*}} \underset{\mathbf{R}^+}{\square}$

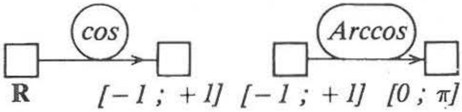
Opérateur inverse : $\square \xrightarrow{\frac{1}{\ }} \square$ *qui est son propre réciproque*

3) *Autres opérateurs fonctionnels*

Parmi ceux que nous utilisons le plus souvent, citons :

Logarithmes et exponentielles :

Les opérateurs trigonométriques et leur réciproques :



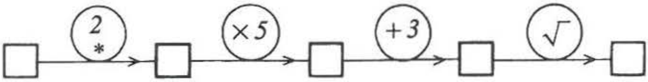
II - Composition des opérateurs

Selon le mode de composition des opérateurs élémentaires, les problèmes d'algèbre et de trigonométrie rencontrés présentent deux grands types de structures :

1) *Groupement des opérateurs en CHAINE*

C'est le cas des équations sous forme canonique, des fonctions composées, des changements de variable.

Exemple :
$x \longmapsto \sqrt{5x^2+3}$



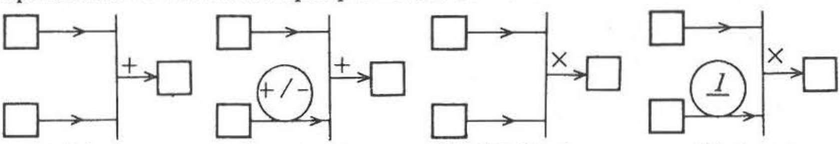
2) *Opérateurs comportant des ENTRÉES MULTIPLES*

On rencontre cette situation lors de la résolution des systèmes d'équations, ou de l'étude des polynomes de degré supérieur à un, par exemple.

Exemple :

additionneur *soustracteur*

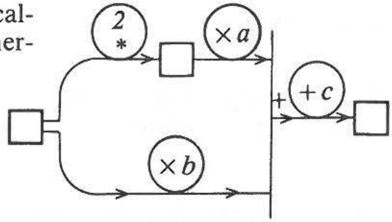
Ce dernier cas d'opérateur, à entrées non symétriques, montre l'intérêt de limiter progressivement l'usage de ce type d'opérateurs. Les quatre opérateurs de l'arithmétique peuvent s'écrire :



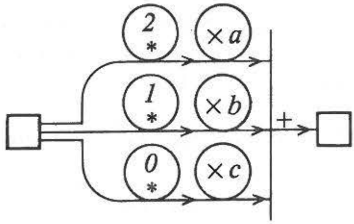
Additionneur *Soustracteur* *Multiplicateur* *Diviseur*

Le choix d'un schéma est généralement dicté par des considérations pédagogiques ; aussi, un polynome du second degré *"ax^2+bx+c"* peut être représenté par différents schémas selon les difficultés à traiter :

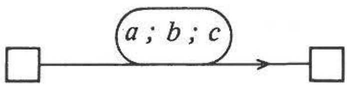
Ce schéma convient si l'objectif est le calcul numérique d'expression ou la recherche d'une canonisation :



On utilisera plutôt ce schéma pour insister sur la décomposition en monomes de degrés différents :



Ce schéma donne la priorité à la structuration en espace vectoriel des polynomes du second degré :



Remarque : Les schémas d'opérateurs sont applicables à des ensembles non numériques : vecteurs, fonctions (avec notamment l'opérateur de dérivation), etc.

Cette brève description des types d'opérateurs les plus usuels est liée à l'emploi que nous en faisons dans les différents niveaux d'enseignement.

Leur utilisation nous paraît intéressante à un double point de vue :

En premier lieu, les difficultés d'apprentissage de nouveaux concepts sont dissociées des difficultés d'écriture et de lecture.

Ceci nous paraît d'autant plus important que le niveau d'enseignement est bas : le support écrit utilisé pour démontrer ou énoncer une propriété doit être adapté aux capacités de l'étudiant ; l'écriture algébrique, si commode pour les calculs et si familière à l'enseignant, fourmille de pièges pour le débutant (2) :

— ordre de calcul et de lecture souvent inversés ;

— priorités à connaître entre opérations ;

— absence de symbole (multiplication par exemple) ;

(2) *Cf. "Hypothèses et propositions pédagogiques", paragraphes 13 à 17.*

— symbole d'égalité désignant tantôt une identité et tantôt une équation ;
— conventions implicites dans le choix des lettres, par exemple : *"a"* pour un coefficient, *"m"* pour un paramètre, *"x"* pour une variable, *"n"* pour un entier, etc.

La difficulté de raisonner sans ce support familier apparaît à l'enseignant qui commence à utiliser les opérateurs ; le formé qui n'est habitué à aucune écriture mathématique sera évidemment tenté de recourir à un certain nombre d'automatismes dès qu'il utilise un langage conventionnel ; il nous paraît essentiel que ces automatismes, malgré leur utilité, ne soient pas dissociés des raisonnements qui les légitiment.

En second lieu, l'emploi des opérateurs amène l'enseignant à reconsidérer la présentation de son enseignement.

Alors que les programmes d'algèbre sont plutôt pensés à partir de la notion de degré par exemple, l'utilisation des opérateurs conduit plutôt à une présentation pensée en fonction de la structure des questions à étudier : problèmes traitables à l'aide d'un opérateur, puis à l'aide d'une chaîne d'opérateurs élémentaires, et enfin questions faisant intervenir plusieurs chaînes d'opérateurs.

Utilisation des opérateurs

Nous avons choisi ces quelques exemples d'utilisation des opérateurs afin de comparer, lors de l'apprentissage d'un concept, les supports que constituent l'écriture algébrique traditionnelle et l'écriture par schéma d'opérateurs, et de mieux cerner leurs intérêts respectifs.

I - Concept d'équation

1) Considérons une équation du 1[er] degré réduite, s'écrivant

$$-3x + 15 = 0$$

en écriture algébrique

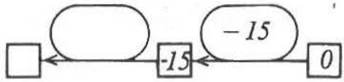
$$\square \xrightarrow{\times(-3)} \square \xrightarrow{+15} \boxed{0}$$

en schéma d'opérateurs.

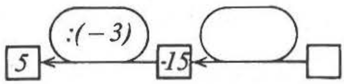
Trois différences importantes apparaissent ; dans le schéma d'opérateurs, on observe :
— l'absence de lettre pour désigner l'inconnue : nous en verrons l'importance sur d'autres exemples ;
— l'absence du signe de l'égalité donc la *disparition de la notion de membres* ;
— la présence explicite du symbole de multiplication.

La compréhension du mécanisme de résolution suppose la connaissance des transformations d'équations : ici soustraction, puis division par un nombre. Examinons comment se présentent les transformations dans l'exemple :

$-3x = -15 \longrightarrow$



$x = \dfrac{-15}{-3} = 5 \longrightarrow$

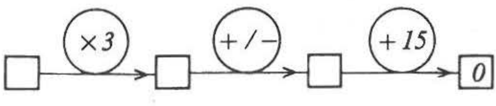


Même si l'enseignant insiste sur la justification des étapes, nous faisons l'hypothèse que l'étudiant retient essentiellement la trace écrite visualisée sur le tableau.

Le schéma d'opérateurs permet d'éviter les erreurs-types, provoquées par la visualisation d'un modèle dont les justifications sont souvent oubliées. L'étudiant aura, par exemple, retenu qu'un nombre qui "change de membre" change de signe, et aura oublié que ce modèle ne fonctionne pas pour la multiplication...

A ce propos, la multiplication par un négatif est souvent source d'erreurs (équations et surtout inéquations) : "$-3x$" apparaît davantage comme *l'opposé de* "$3x$" que comme le produit de "x" par "(-3)". Autrement dit, il y a en fait deux étapes dans la multiplication par "-3" : la multiplication par "3" puis le changement de signe.

Si cette difficulté apparaît, on peut utiliser le schéma :



Il est surtout important que le schéma soit le plus proche possible de la façon dont l'élève lit "$-3x+15$" quand il veut calculer cette expression pour une valeur de x.

Enfin, signalons un autre intérêt du schéma lorsqu'il se présente sous la forme de chaîne :

Le procédé de résolution est intégré au schéma ; l'ordre des étapes, les opérations à effectuer, sont suggérées par le schéma lui-même.

Exemple : Pour résoudre l'équation $9(\frac{1}{x} - 2) = -15$, l'élève s'inspirant de modèles aura souvent tendance à développer et réduire au même dénominateur, alourdissant ainsi la résolution.

L'écriture de cette équation sous forme de chaîne

$$\square \xrightarrow{\underline{1}} \square \xrightarrow{-2} \square \xrightarrow{\times 9} \boxed{-15}$$

fournit les étapes de sa résolution :

$$\square \xleftarrow{\underline{1}} \square \xleftarrow{+2} \square \xleftarrow{:9} \boxed{-15}$$

On a ainsi opéré, sans soulever la question, un changement d'inconnue ($\frac{1}{x} = u$). Notons au passage que toute chaîne d'opérateurs peut être considérée comme une succession de changements de variable :

$$\boxed{x} \xrightarrow{f} \boxed{u} \xrightarrow{g} \boxed{v} \xrightarrow{h} \boxed{y}$$

Les variables et inconnues n'étant pas nécessairement désignées par des lettres, on peut travailler sur des changements de variable sans alourdir les notations, à un moment de l'enseignement où cette technique n'est pas encore maîtrisée en tant que telle.

2) Nous n'avons examiné jusqu'à maintenant que des chaînes d'opérateurs, c'est-à-dire des expressions algébriques ne comportant qu'une fois l'inconnue (formes canoniques).

Dans les autres cas, l'écriture algébrique reprend alors tout son intérêt ; cela n'a rien d'étonnant puisque certaines règles d'écriture (comme la priorité de la multiplication sur l'addition, et l'absence de symbole pour la multiplication) ont probablement été adoptées pour faciliter les calculs.

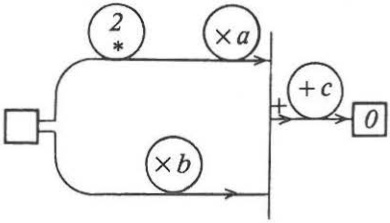
Mais dès que l'on travaille sur un concept nouveau, l'écriture par schéma d'opérateurs présente un intérêt, dans la mesure où elle respecte les difficultés conceptuelles.

Exemple : la résolution de l'équation du second degré "$ax^2 + bx + c = 0$" amène souvent l'étudiant qui la découvre à procéder comme pour le premier degré, c'est-à-dire "*isoler x dans un membre*" puis "*tirer x*"

$$ax^2 + bx = -c \ldots x(ax + b) = -c \ldots x = \frac{-c}{ax+b}$$

Ceci dans le meilleur des cas ; une autre erreur fréquente consiste à grouper coûte que coûte les termes en "x".

Le schéma d'opérateur correspondant



montre bien la nature du problème : les entrées d'un additionneur ne peuvent être déterminées à l'aide de la seule sortie.

La difficulté de passer du 1er degré au 2d degré *n'est donc pas seulement une question de degré :*

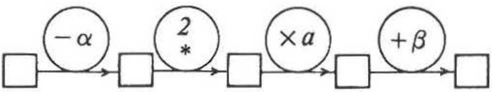
L'opérateur carré fait bien apparaître deux ou zéro solutions, situation nouvelle par rapport au 1er degré, mais l'important est que **la présentation en polynome développé** *"ax^2+bx+c"* **n'est plus une forme canonique comme l'était** *"$ax+b$"*.

Notons au passage la priorité accordée traditionnellement aux formes développées comme point de départ. Suivant la nature des problèmes à étudier, on peut partir d'une des trois formes :

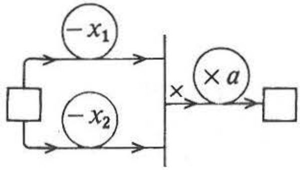
$ax^2 + bx + c$	$a(x-\alpha)^2 + \beta$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
forme développée	*forme canonique*	*forme factorisée*

La simplicité apparente de la forme développée n'est due qu'aux conventions d'écriture : 5 opérations pour la forme développée, contre 4 aux deux autres.

Les schémas d'opérateurs reflètent bien ces différences de structure :



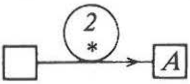
forme canonique



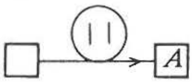
forme factorisée

3) Sans en développer l'analyse, citons quelques cas d'équations où les opérateurs apportent une clarification, ou permettent d'aborder autrement les difficultés classiques :

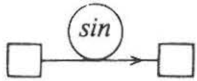
— *équations où l'opérateur réciproque n'est pas unique :*



ou encore

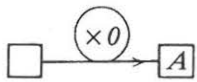


(du point de vue conceptuel il s'agit du même problème ; un travail préalable dans le sens direct facilite l'étude des opérateurs réciproques et de leur existentiel) et encore :



— *équations conduisant à "impossibilité" ou "indétermination"*, notamment lorsque, par l'algèbre classique, la lettre désignant l'inconnue "disparaît" en cours de calcul (1^er^ degré). Par exemple :

Etude du schéma :



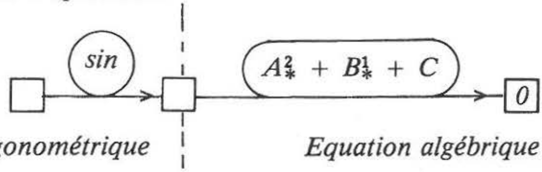
Le faux raisonnement *il n'y a plus d'"x", donc* $S = \phi$ (ou encore $x = \phi$) ne peut plus être tenu.

Ce faux raisonnement (qui aboutit souvent à un résultat juste !) fait ressortir la confusion entre les valeurs attribuables à une lettre et la lettre elle-même. On retrouve cette confusion lors de l'écriture de l'opposé d'une expression (où "– A" est assimilé à un nombre négatif). De ce point de vue, le remplacement d'une lettre par une case vide fournit une écriture plus proche du concept de variable ou d'inconnue, même si on y perd — provisoirement — en commodité.

— *équations nécessitant un changement de variable*

L'équation $A \sin^2(x) + B \sin(x) + C = 0$

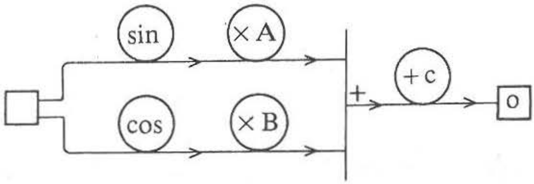
s'écrit en schéma d'opérateurs



Ceci fait apparaître deux problèmes distincts (un problème algébrique et un problème trigonométrique) dont la séparation correspond au changement de variable $\sin(x) = X$.

Même lorsque le changement de variable n'est pas aussi évident, le schéma d'opérateurs peut justifier une telle recherche.

Ainsi l'équation *"Asin(x) + Bcos(x) = C"* fait apparaître un additionneur :



La recherche d'une solution s'oriente vers la transformation de *"sinus"* et *"cosinus"* en une même variable; les deux principales transformations utilisées ont alors pour effet :

— soit de "canoniser" l'équation avec séparation en questions d'algèbre et de trigo $[A\sin(x) + B\cos(x) = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(x + \varphi)]$;

— soit de la transformer en un problème d'algèbre connu $[tg\,(\frac{x}{2}) = t]$.

L'élève apprend donc à reconnaître les structures de problèmes nécessitant de telles transformations (ici, présence d'un additionneur) plutôt qu'à retenir le changement de variable lui-même.

II - Présentation de nouveaux ensembles de nombres Extension de règles

Le problème pédagogique abordé maintenant est celui de l'enseignement de "règles" de calcul en évitant :

— d'une part le détour de la démarche axiomatique, surtout satisfaisante du point de vue de la rigueur des mathématiques;

— d'autre part, le "parachutage" de règles et définitions dont l'aspect arbitraire risque de gêner ultérieurement l'élève.

Nous avons choisi deux exemples : le calcul dans **Z** et les puissances à exposant négatif.

1) Les quatre opérations dans **Z**

Deux types de difficultés surgissent lorsqu'on procède à des extensions d'ensemble de nombres (**N, Z, Q, R, C**,...) :

— Comprendre ce que sont les nouveaux nombres sur lesquels porte l'extension (cas typique : extension de **Q** à **R**);

— Comprendre comment s'étendent les règles d'opérations sur les nouveaux ensembles. Exemples : extension de **N** à **Z** avec les fameuses Règles des Signes; ou encore extension de **N** à $\mathbf{Q}^+$ avec les règles sur les fractions.

Nous avons cherché à utiliser les opérateurs pour traiter cette seconde difficulté dans le cas de l'extension de **N** à **Z**.

a) Construction de **Z**

Les supports familiers pour présenter **Z** (températures, altitudes, comptes bancaires, etc.) s'appuient sur la nécessité de *compter à rebours,* et de se donner la possibilité de *remonter au-delà de zéro.*

Le public auquel nous enseignons ne connaît pas de difficultés pour comprendre ce point de vue.

b) Addition et soustraction dans **Z**

L'étude des opérateurs $\xrightarrow{+A}$ et $\xrightarrow{-A}$ dans **N** conduit à une propriété simple, très utilisée, connue des étudiants, mais qu'il est important d'expliciter :

Ces opérateurs transforment une suite arithmétique de nombres en une suite arithmétique de même raison.

L'extension envisagée de **N** *à* **Z** *doit conserver cette propriété.*

Concrètement :

$$\square \xrightarrow{+17} \square \qquad\qquad \square \xrightarrow{-15} \square$$

dans **N**	2	19	dans **N**	17	2
	1	18		16	1
	0	17		15	0
Extension à **Z**	−1	16	dans **Z**	14	−1
	−2	15		13	−2
	...	...		...	...
	−17	0		0	−15
	−18	−1		−1	−16

Remarque : ce point acquis, il est important de travailler sur l'équivalence entre $\xrightarrow{+(-A)}$ et $\xrightarrow{-A}$ avec $A \in \mathbf{Z}$, et sur la présentation en additionneur, avec entrées dans **Z**, qui schématise bien la commutativité de l'addition dans **Z**.

c) Multiplication et division dans **Z**

Jusqu'ici, cette présentation est très proche d'une présentation avec les températures, par exemple. Un premier intérêt du schéma d'opérateur sera de faciliter le passage des nombres aux lettres.

Le second intérêt est que les supports familiers ne résistent pas à l'introduction de l'opération de multiplication; en effet, dès qu'il ne s'agit plus d'entiers positifs, l'idée même de multiplication n'est plus définissable comme une addition répétée.

Un opérateur multiplicatif est caractérisable par la propriété :

L'opérateur $\xrightarrow{\times A}$ *transforme une suite arithmétique de raison 1 en une suite arithmétique de raison A. Il y a correspondance des zéros.*

La conservation de cette propriété permet de traiter le cas de la multiplication d'un élément de **Z** par un entier positif :

Exemple

$$\begin{array}{ccc} \square & \xrightarrow{\times 3} & \square \\ 2 & & 6 \\ 1 & & 3 \\ 0 & & 0 \\ -1 & & -3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Multiplication par un négatif

Pour définir cette multiplication, nous pouvons observer que l'opérateur $\xrightarrow{+/-}$ possède la propriété caractéristique des opérateurs multiplicatifs :

— *une suite arithmétique est transformée en suite arithmétique,*

— *il y a correspondance des zéros ;*
MAIS une suite croissante est transformée en suite décroissante.

Poser l'identité entre opérateurs $\xrightarrow{+/-}$ et $\xrightarrow{\times(-1)}$ conserve, en outre, la commutativité de la multiplication.

Remarques :

1) La multiplication par $(-n)$ se décompose en multiplications par (-1) et par n.

2) $\xrightarrow{+/-}$ est son propre réciproque : ceci permet d'étendre la règle des signes à la division et de traiter une source de nombreuses erreurs.

3) $\xrightarrow{+/- \quad +/-}$ équivaut à l'opérateur identique $\xrightarrow{I}$

4) L'identité entre $\xrightarrow{+/-}$ et $\xrightarrow{\times(-1)}$ entre dans de nombreuses questions : symétrie, changement de sens, orientations de droite, plan, cercle.

2) *Puissance à exposant négatif*

La comparaison des progressions "à rebours" entre *l'opérateur des puissances* et *celui des exposants* permet une définition de a^{-n} par un schéma qui insiste sur la correspondance entre MULTIPLICATION des puissances et ADDITION des exposants.

Extension aux exposants négatifs avec $a \neq 0$

$$\boxed{a^3} \xrightarrow{:a} \boxed{a^2} \xrightarrow{:a} \boxed{a} \xrightarrow{:a} \boxed{1} \xrightarrow{:a} \boxed{1/a} \xrightarrow{:a} \boxed{1/a^2}$$

Opérateur de progression des puissances

$$\boxed{3} \xrightarrow{-1} \boxed{2} \xrightarrow{-1} \boxed{1} \xrightarrow{-1} \boxed{0} \xrightarrow{-1} \boxed{-1} \xrightarrow{-1} \boxed{-2}$$

Opérateur de progression des exposants

Par cohérence des écritures, on obtient les définitions

$$a^0 = 1 \qquad\qquad a^{-n} = 1/a^n$$

Remarque : Il reste évidemment à vérifier le prolongement des règles aux exposants négatifs.

Prolongement : La notion de logarithme à base a, pour des valeurs entières du logarithme, est sous-jacente :

$a^n \xrightarrow{\bigcirc} n$ définit la fonction $\xrightarrow{\quad Log_a \quad}$

III - Ecriture de formules - Distributivité

Nous examinons maintenant quel intérêt peut présenter un schéma d'opérateurs lors de l'écriture d'une formule ou d'une identité.

Le terme de "Formule" doit être pris au sens large ; citons quelques exemples :

Volume de la sphère : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ et formule inverse : $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Identité algébrique : $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

Formule de dérivation : $(uv)' = u'v + uv'$

Là encore, l'écriture algébrique est particulièrement commode pour les calculs. Un schéma d'opérateurs peut être intéressant chaque fois qu'on observe des difficultés dans l'utilisation de la formule.

Remarquons que les "formules" comprennent généralement un premier et un second membre : le choix de l'ordre des membres correspond implicitement à une perspective d'utilisation.

Il n'est pas rare, par exemple, de voir dans un ouvrage les identités "remarquables" données dans le sens du *développement*,

pour $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

et pour $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

mais dans le sens de la *factorisation* pour

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ce choix n'est pas neutre, mais l'étudiant le retient sans en comprendre nécessairement les raisons.

1) ***Distributivité***

Pour compléter les paragraphes précédents sur les équations, et les règles des signes, nous examinerons dans ce qui suit le cas de la DISTRIBUTIVITE d'une opération par rapport à une autre.

Citons quelques types d'erreurs classiques :

$(a+b)^2$	transformé en	a^2+b^2
$(a-b)^2$	transformé en	a^2-b^2
a^m+a^n	transformé en	a^{m+n}
$\frac{a}{b}\times\frac{c}{b}$	transformé en	$\frac{a\times c}{b}$ (3)
$7x.3x$	transformé en	$21x$

Dans tous ces exemples la transformation est effectuée comme si la distributivité s'appliquait. Cependant, l'erreur inverse existe aussi :

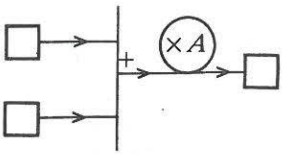
$\frac{a^2}{b^2}$ *transformé en* $\frac{a}{b}$, alors que la distributivité est applicable.

L'origine de ces erreurs ne provient donc pas d'une fausse application de la distributivité comme pourraient le laisser penser les premiers exemples, mais plutôt d'un apprentissage visuel de certaines transformations : suivant l'écriture adoptée, en ligne (comme "*7x.3x*") ou en

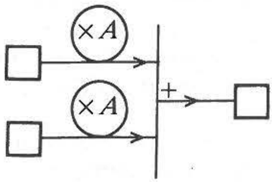
(3) Ce dernier cas s'observe souvent sur des exemples numériques quand l'élève réduit deux fractions au même dénominateur avant de les multiplier (extrapolation de la règle d'addition).

colonne (comme "$\frac{a^2}{b^2}$"), on rencontre des erreurs "mathématiquement" différentes.

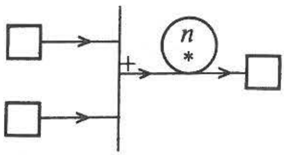
Voyons maintenant comment se présente une formule de distributivité en schéma d'opérateurs :

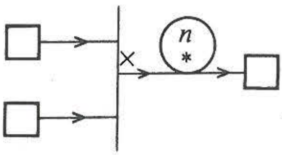


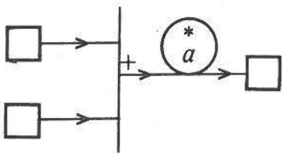
est identique à

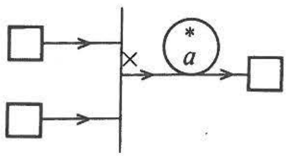


Considérons les schémas suivants faisant intervenir un opérateur "puissance" et une des deux opérations "addition, multiplication".









Quels sont ceux qui sont transformables par distributivité ?

Quels sont ceux qui sont transformables par d'autres formules ? Lesquelles ?

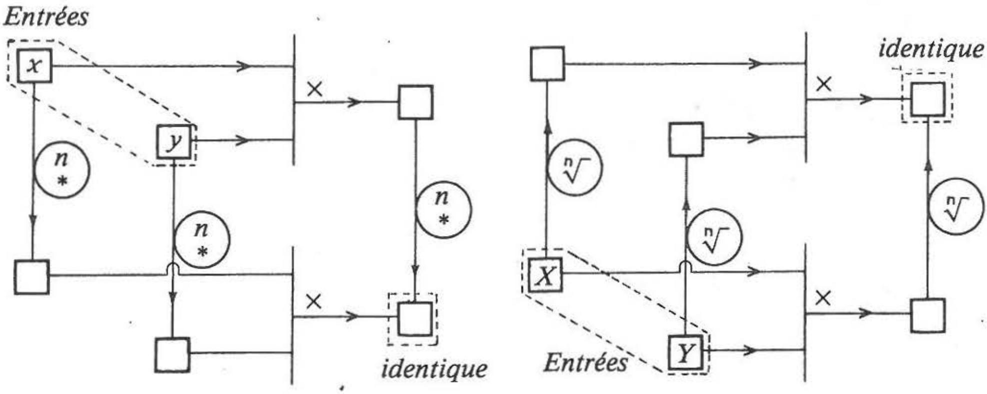
La difficulté de transformer de tels schémas, si l'on s'interdit d'utiliser l'écriture algébrique, montre bien la difficulté de manipulation du concept de "puissance", et explique la tentation de recourir à des automatismes.

La présentation en opérateurs montre également la difficulté de "démontrer" ce type d'identités ; la commodité de l'écriture algébrique n'est qu'apparente. A défaut de démonstration rigoureuse, on peut cependant procéder à des *vérifications* en entrant des nombres dans les cases des schémas, alors que la présentation algébrique incite plutôt à procéder par *visualisation* de mécanismes.

2) Donnons maintenant un exemple où le schéma d'opérateurs permet de *trouver l'itinéraire de démonstration*.

La démonstration de l'identité $\sqrt[n]{X} \, . \, \sqrt[n]{Y} = \sqrt[n]{X.Y}$ par l'écriture algébrique comprend deux difficultés : en premier lieu il faut connaître les deux membres dont on veut s'assurer l'identité, donc se douter du résultat, et en second lieu il faut penser à élever les deux membres à la puissance "*n*ième".

En schéma d'opérateurs, l'inversion des opérateurs puissances (possible dans $\mathbf{R}^+$) transforme l'identité sur les puissances en identité sur les radicaux :



IV - Etude de fonctions

L'emploi d'une écriture par schéma d'opérateurs pour l'étude des fonctions permet d'aborder sous un angle nouveau les concepts suivants :

— Ensemble de définition ;

— Variations ;

— Etude des limites ;

— Période.

L'examen de ces différents concepts nous a amené à réviser l'ordre de présentation des fonctions. On peut, par exemple, étudier la croissance ou la décroissance d'une fonction sans utiliser nécessairement la dérivée ; le plan d'étude peut être différencié selon la structure de la fonction.

Nous distinguerons :

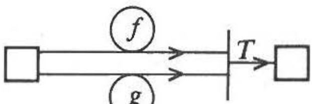
— les fonctions élémentaires à un seul opérateur :

$$\square \xrightarrow{\ f\ } \square$$

— les fonctions composées caractérisées par une chaîne d'opérateurs élémentaires :

$$\square \xrightarrow{\ f\ } \xrightarrow{\ g\ } \xrightarrow{\ h\ } \square$$

— les schémas comprenant des opérateurs à entrées multiples (additionneurs, multiplicateurs) :



Ensemble de définition

Parmi les fonctions élémentaires ayant un ensemble de définition différent de **R**, citons essentiellement :

$$\xrightarrow[D=\mathbf{R}^*]{\ 1/\ } \qquad \xrightarrow[D=\mathbf{R}^+]{\ \sqrt{\ }\ } \qquad \xrightarrow[D=\mathbf{R}^{+*}]{\ Log\ }$$

La recherche d'un ensemble de définition suppose deux phases :

— le repérage des opérateurs définis sur une partie de **R** seulement ;

— la résolution d'une équation ou d'une inéquation pour chacun de ces opérateurs.

L'oubli de cette deuxième phase est fréquent (un dénominateur $D(x)$ non nul est par exemple traduit par *"x non nul"*).

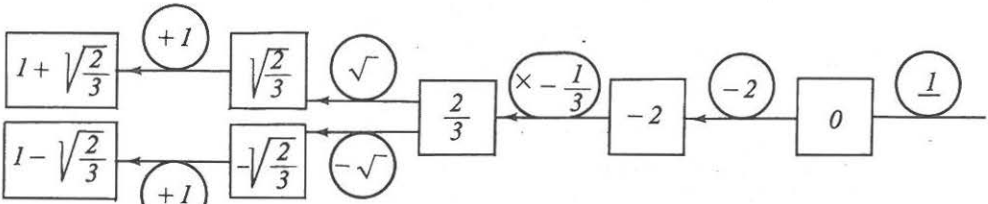
L'écriture par schéma d'opérateurs, où la lettre x n'est pas nécessairement présente, facilite la mise en é&nPgb Kb xKnn&bn Kb YJPpar schéma d'opérateurs, où la lettre x n'est pas nécessairement présente, facilite la mise en équation en mettant en évidence l'opération qui fait problème.

Exemple : $$x \xmapsto{\ f\ } f(x) = \frac{+2}{2 - 3(x-1)^2} + 5$$

En opérateurs, cette fonction s'écrit :

$$\square \xrightarrow{\ -1 \quad \overset{2}{*} \quad \times(-3) \quad +2\ } \square \xrightarrow{\ 1/ \quad \times 2 \quad +5\ } \square$$

On voit que seul l'opérateur $\xrightarrow{1/}$ pose un problème. L'ensemble de non-définition peut s'obtenir en remontant la chaîne d'opérateurs à partir de la *case d'entrée* de $\xrightarrow{1/}$



Cette étude peut être menée bien avant l'enseignement de la méthode de résolution des équations du second degré.

Variations d'une fonction

L'étude de la croissance d'une fonction peut être poussée assez loin sans l'étude de la dérivée dès qu'il s'agit :

d'opérateurs élémentaires
d'opérateurs en chaîne

Etude des opérateurs élémentaires

$\xrightarrow{+A}$ croissant quelle que soit l'entrée ; de plus, les variations d'entrées et de sorties sont égales $(\triangle x = \triangle y)$

$\xrightarrow{\times A}$ croissant si $A>0$
décroissant si $A<0$
constant si $A=0$

$\xrightarrow{\overset{2}{*}}$ croissant pour les entrées positives
décroissant pour les entrées négatives.

$\xrightarrow{1/}$ décroissant pour les entrées positives
décroissant pour les entrées négatives

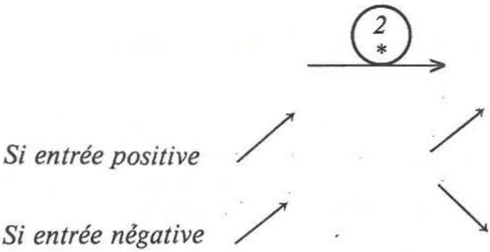
$\xrightarrow{Log}$ croissant (dans l'ensemble de définition)

$\xrightarrow{\overset{*}{e}}$ croissant (De façon générale un opérateur et son réciproque sont croissants ou décroissants simultanément).

Reprenons l'exemple précédent :

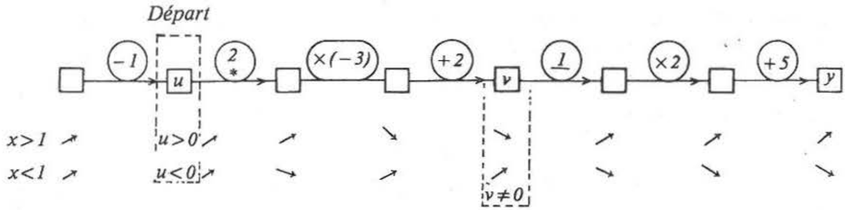
La présence de l'opérateur carré implique de distinguer deux cas, selon le signe de sa variable d'entrée.

Le schéma suivant traduit cette situation.



Les flèches indiquent la corrélation entre les variations de l'entrée et celles de la sortie.

En partant de *la case d'entrée de l'opérateur carré*, et en examinant la chaîne opérateur par opérateur, on obtient les variations de $f(x)$ par rapport à celle de $u = x + 1$.



Ensuite le premier opérateur est "*remonté*" à partir de la case de la variable u .

Finalement : si $x>1$ la fonction est croissante
si $x<1$ la fonction est décroissante
si $x=1$ la fonction présente un minimum.

Le calcul de la dérivée permet évidemment d'obtenir directement ce résultat, mais l'utilisation des opérateurs permet :

— de travailler sur cette notion de croissance indépendamment de celle de dérivée et ceci dans des cas pas trop simples ;

— de *présenter la dérivée à partir de la notion de croissance* et de voir son intérêt dans les cas où la démarche précédente n'aboutit pas : fonction nécessitant des opérateurs à entrées multiples ;

— de mieux cerner le rôle de chaque opérateur.

Ainsi dans l'exemple ci-dessus :

$\xrightarrow{\overset{2}{*}}$ fournit la symétrie et la séparation en deux intervalles de croissance opposée ;

$\xrightarrow{\underline{1}}$ fait apparaître les discontinuités et les asymptotes correspondantes ;

$\xrightarrow{-1}\xrightarrow{+2}\xrightarrow{+5}$ sont des translations : la première de *(+ 1)* le long des abscisses, la troisième de *(+5)* le long des ordonnées : elles n'affectent pas la forme de la courbe ; la seconde par contre, du fait de son *insertion entre les opérateurs carré et inverse*, est importante : elle fournit deux zéros à l'entrée de $\xrightarrow{\underline{1}}$;

$\xrightarrow{\times 2}$ est une homothétie de rapport *2* et n'affecte pas la forme de la courbe ;

$\xrightarrow{\times(-3)}$ est une homothétie de rapport *3* composée avec une symétrie par rapport aux abscisses.

Remarque : Si on ne s'intéresse qu'à l'allure de la courbe représentative, on obtient une courbe de même nature en abandonnant les homothéties et les translations le long des axes.

Par exemple :

$$\square \xrightarrow{\overset{2}{*}} \xrightarrow{-1} \xrightarrow{\underline{1}} \square$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Dans le même esprit, il peut être intéressant de constater qu'un pôle double s'obtient en permutant les opérateurs "Inverse" et "Carré".

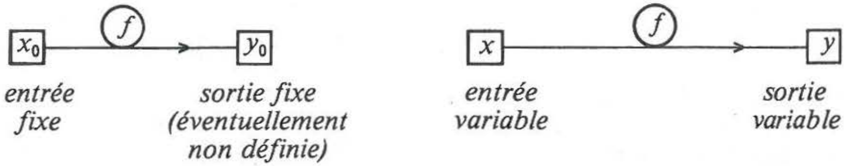
Chaque fois que la désignation de variables par des lettres pose problème, le schéma d'opérateurs facilite la manipulation du concept.

C'est le cas lorsqu'on travaille sur la composition des fonctions, sur l'étude d'une fonction réciproque ou sur une famille de fonctions paramétrées.

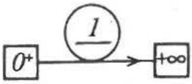
Limites et dérivées

Les schémas d'opérateurs sont susceptibles d'apporter une clarification conceptuelle chaque fois qu'il y a risque de confusion sur les variables, notamment à propos des limites et des dérivées (dans ce deuxième cas, la variable devient, provisoirement, l'élément différentiel *"dx"* pour une valeur fixée de la variable *"x"*).

Schéma de base sur les limites



Exemple d'écriture de théorème :



L'opérateur d'inversion étant son propre réciproque, on a également :

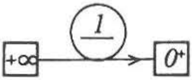
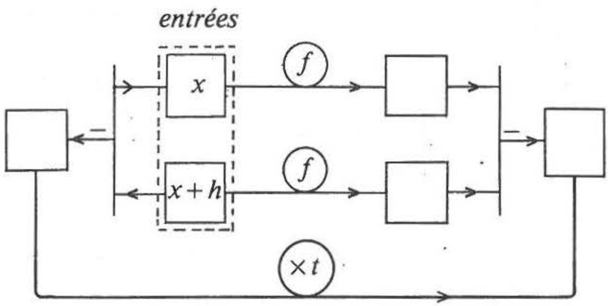


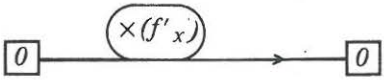
Schéma de base sur les dérivées

On peut grouper en un seul schéma le calcul du taux d'accroissement d'une fonction f entre (x) et $(x+h)$:



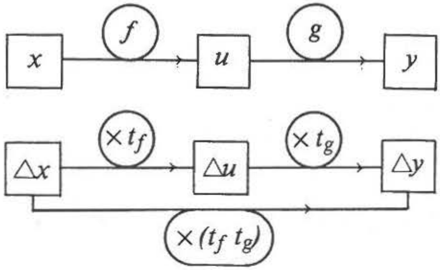
t est le nombre à déterminer.

Le schéma de dérivation de f s'en déduit par passage à la limite :



Un tel schéma présente l'intérêt de fournir la démarche complète du calcul du taux d'accroissement. On voit également que pour la fonction réciproque, en échangeant entrées et sorties on remonte le coefficient multiplicatif ; le taux de la fonction réciproque est donc l'inverse de celui de la fonction directe et **ceci est établi sans nommer les variables.**

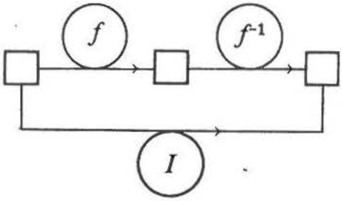
Fonction composée et fonction réciproque



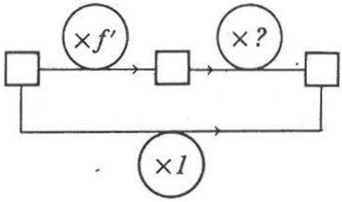
Au schéma de composition des fonctions $g \circ f$ correspond le schéma de multiplication des accroissements, et la multiplication des *nombres dérivés*.

Dans le cas de la dérivée d'une fonction réciproque, on a là aussi intérêt à travailler sur les *nombres dérivés en tant que coefficients multiplicatifs* entre accroissements, plutôt que sur les fonctions dérivées elles-mêmes.

Schéma général

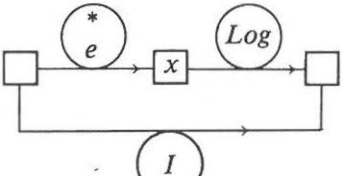


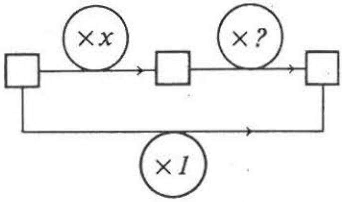
sur les fonctions



sur les nombres dérivés

Exemple : on veut calculer la dérivée de $x \longmapsto Log\ x$ connaissant celle de $x \longmapsto e^x$.





Sur le schéma des fonctions, on peut nommer x la variable d'entrée de la fonction dont on cherche la dérivée.

On connaît le 1er coefficient multiplicatif *(x)* ; on en déduit le second *(1/x)*.

V - Algébrisation de problèmes

Nous avons commencé par utiliser des schémas d'opérateurs pour aborder les difficultés de traitement mathématique de problèmes à supports familiers.

Ces difficultés sont de plusieurs ordres :

— le traitement mathématique lui-même ;
— la mise en relation du problème à traiter avec les chapitres du cours concernés ;
— le repérage des *données et relations implicites* figurant dans les énoncés ; citons aussi les effets supposés implicitement négligeables, essentiellement parce que leur prise en compte rendrait impossible le traitement mathématique exact !
— la *maîtrise supposée de l'écriture mathématique* elle-même, de la part d'un public qui éprouve déjà des difficultés dans le domaine de la lecture : on observe le plus souvent que la plus grande difficulté se situe au départ, lors du choix des inconnues et de la mise en équations.

1er exemple : Etudions les difficultés de résolution du problème suivant :

Quand j'avais l'âge que vous avez, mon âge était le double du vôtre.
Quand vous aurez mon âge, nous totaliserons 63 ans.
Quels sont nos âges respectifs ?

Analyse des difficultés rencontrées

• La première réside dans la désignation des inconnues. On observe fréquemment : *soit "x" l'âge du plus vieux et "y" l'âge du plus jeune*, sans précision sur l'époque choisie.

Tout se passe comme si *x* et *y* étaient des *variables affectées* à des personnes (4) **et non des inconnues précises mesurées en nombre d'années.**

Ceci est particulièrement évident quand il faut écrire que l'âge du plus vieux était égal à *"y"* ou que celui du plus jeune sera égal à *"x"*.

La mise en équation se traduit alors le plus souvent par

$$\begin{cases} x = 2y \\ x+y = 63 \end{cases}$$

• Une seconde difficulté est d'écrire la loi, *implicite* dans l'énoncé, selon laquelle la *différence d'âge est constante*. L'expérience montre que beaucoup d'étudiants n'y pensent pas, probablement parce qu'elle ne figure pas dans l'énoncé.

• Enfin, toute l'attention est portée sur le traitement mathématique ; ainsi on observe le plus souvent une séparation complète entre ce traitement et le support initial : le "concret" n'aide pas au raisonnement, "raisonnement" réduit ici au mécanisme de résolution des systèmes d'équations.

Notons encore que l'énoncé suggère qu'il s'agit d'un problème à deux inconnues, puisqu'il y a deux nombres à trouver.

(4) *Cf. "Inconnues et Variables" de M. BRUSTON, dans cette même brochure.*

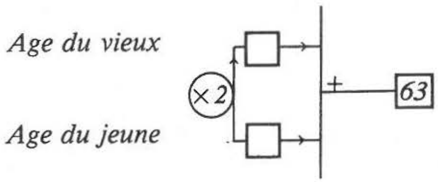
Suivant le point de vue adopté, on peut pourtant le présenter en problème à 7 inconnues (les âges des deux personnes aux trois époques et leur différence d'âge), ou à une seule inconnue (à condition de bien choisir entre les sept inconnues précédentes), auquel cas le problème est aisément résoluble par l'arithmétique.

Analyse du traitement par opérateur

La difficulté essentielle est de trouver une structure qui traduise le problème.

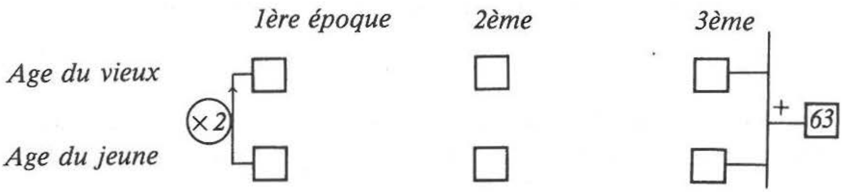
Pour savoir si un schéma convient, une technique simple consiste à procéder par essais successifs et systématiques en entrant des nombres dans les cases.

La structure suivante basée sur l'idée d'une case affectée à chaque personne ne résiste pas aux essais :



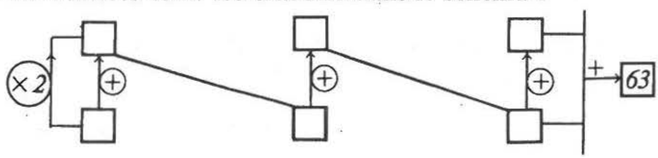
Les étudiants découvrent d'eux-mêmes que le schéma ne tient pas compte des différentes époques.

La structure ci-dessous permet par contre, en entrant un nombre dans une case, de découvrir toutes les relations entre cases, et notamment la nécessité d'*introduire la différence d'âge constante* dans le temps :



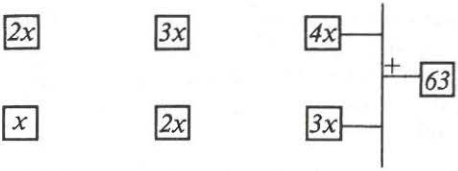
Proposer *20*, par exemple, comme âge actuel du plus jeune conduit à une différence d'âge de *10* (1ère époque) et permet alors de remplir toutes les cases pour constater que cette proposition était trop forte.

Ce travail met en évidence une *structure de raisonnement* permettant d'utiliser toutes les données et de les traduire dans le schéma :



On se rend compte alors qu'on peut le traiter en problème à une seule inconnue ; en poussant plus loin l'examen, on observe également que le choix le plus simple est d'appeler *"x"* le nombre d'années du plus jeune à la première époque.

Les cases se remplissent ainsi :



La résolution est immédiate.

Remarque : La forme de la question posée, "Quels sont nos âges respectifs ?", suggère d'en faire un problème à deux inconnues : il serait intéressant de comparer les comportements des étudiants devant des questions du type "Quel est mon âge ?", ou encore devant une question demandant de fournir les sept inconnues du problème.

2ème exemple : Examinons ce classique problème de robinets :

> *Un premier robinet remplit un bassin en 5 heures ;*
> *Un second robinet remplit ce bassin en 7 heures ;*
> *En combien de temps les robinets remplissent-ils le bassin en coulant ensemble ?*

Analyse des difficultés

• La désignation des débits comme inconnues est difficile à dégager. On observe très souvent des formulations du type *"soit x le premier robinet"*.

L'embarras devant un choix d'unité de débit traduit d'ailleurs souvent la nécessité de préciser cette notion (5).

• Cette précision étant apportée, une deuxième difficulté surgit au moment du choix d'une unité de volume, l'énoncé étant muet sur ce point. La plupart des étudiants oublie qu'une formule n'est valable que dans un système d'unités donné.

• Une troisième difficulté réside dans le fait que le volume du bassin n'est pas calculable à partir des données de l'énoncé : dans la phase algébrique, cela se traduit par un système comportant une inconnue de plus que d'équations (équations homogènes), ce qui augmente les difficultés de traitement.

(5) Il est bien connu que les problèmes de robinets ont mauvaise réputation : n'est-ce pas précisément que la notion de débit est peu familière ou, du moins, peu utilisée de façon quantitative ?

• Enfin, signalons que l'énoncé suppose implicitement l'addition des débits, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans la réalité (le réseau d'alimentation des robinets a un débit limité).

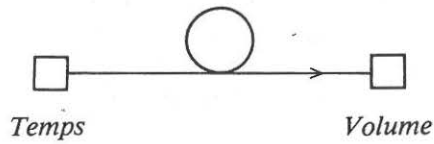
Généralement, ces difficultés conduisent à un traitement au moins partiellement arithmétique.

Parmi les réponses erronées mais provenant d'un raisonnement, les plus fréquentes reposent sur l'idée de faire une *moyenne arithmétique* (au lieu d'une moyenne harmonique). On trouve alors *6h* ou, si l'on tient compte de l'addition des débits, *3h* : moyenne entre *2h30* et *3h30*, nombres obtenus en supposant successivement les deux robinets semblables au premier puis au second.

Parmi les raisonnements corrects, le plus fréquent est celui qui consiste à comparer les volumes remplis dans une même unité de temps (ici *1h*) et à assigner au volume du bassin un nombre arbitraire de m^3 ou à le désigner par une variable.

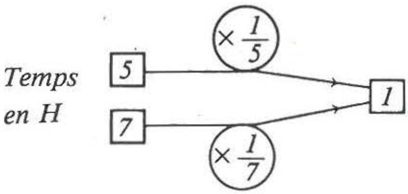
Traitement par schémas d'opérateurs

Là encore, tout l'effort porte sur l'écriture d'un schéma traduisant la relation implicite du problème (ici Temps-Volume).

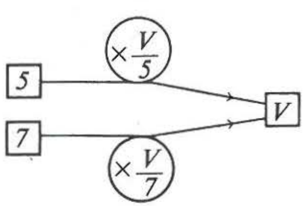


L'opérateur doit être un *multiplicateur* : en effet, il est caractérisable par le fait que si l'entrée double, triple,... la sortie double, triple...

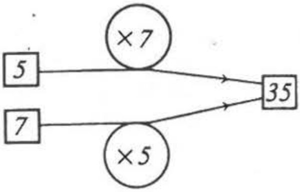
La traduction des deux premières données de l'énoncé peut alors conduire à trois schémas :



si on prend comme unité de volume celui du bassin



en choisissant comme unité de volume le m^3 (ou le *litre*) et appelant *V* le volume du bassin.

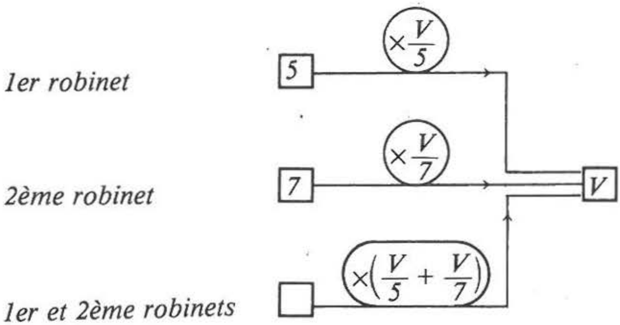


en adoptant une unité de volume adaptée au problème.

Il reste à voir que l'association des deux robinets conduit bien à additionner les opérateurs multiplicatifs.

Ceci peut être fait en *testant cette structure*, en associant par exemple des robinets à débits égaux ou encore en entrant des temps égaux.

La structure complète du problème peut être schématisée ainsi, si l'on désigne par une lettre le volume du bassin :



La difficulté de calcul est réduite à un calcul de fractions (qu'on évite en grande partie en adoptant V = *35 unités de volume*).

Remarque concernant les problèmes du 1^er^ degré à deux inconnues

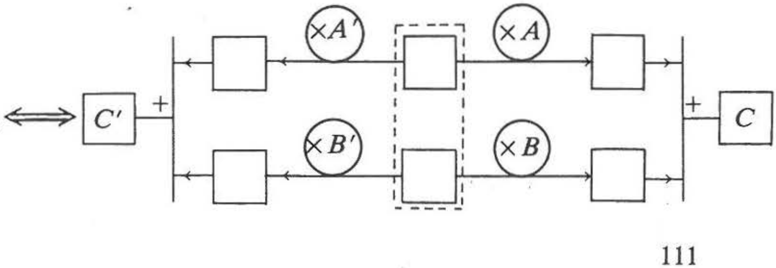
A la suite de ces exemples, deux questions se posent :

Peut-on toujours ramener les problèmes de ce type à des problèmes à une inconnue ?

Si oui, dans quelle mesure est-ce intéressant ?

Un système du 1^er^ degré à deux inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases} \Longleftrightarrow$$



Le principal intérêt du schéma d'opérateurs est que *le lien entre les deux équations* figure au niveau de la structure : on peut "partir" d'une case quelconque en y entrant une lettre, "tourner" dans les deux sens, pour finalement "boucler" sur n'importe quelle autre case (ou même dans celle de départ) : l'égalité des expressions obtenues fournit une équation à une inconnue. Sa résolution donne la valeur de la case choisie comme "départ", donc celles de toutes les autres cases, et en particulier celles correspondant aux deux inconnues.

Cependant l'écriture algébrique reprend ses droits dès qu'on augmente le nombre d'inconnues ; la complexité d'un schéma d'opérateurs de 3 équations à 3 inconnues reflète la difficulté de calcul et rend nécessaire le recours à une démarche plus mécanique. **Le schéma d'opérateurs ne peut être qu'un outil de transition de l'arithmétique vers l'algèbre.**