

Note sur la Question des Nombres

**Analyse des représentations mentales des étudiants de
“bas niveau” à propos des distinctions**

- entre mesures de grandeurs, et nombres “purs”
- entre nombres entiers ou décimaux, et nombres “réels”

par M. BRUSTON

SOMMAIRE

1°) Première analyse

a) Le rôle des supports dits “concrets”	75
b) Les effets classiques de l’absence de support concret	76
c) Les seuls nombres “purs”	77
d) Conclusion	78

2°) Deuxième analyse

a) Le passage des mesures de grandeurs aux nombres “purs” ...	78
b) Le passage des nombres décimaux aux nombres réels	79
c) Conclusion	80

3°) Conséquences

a) La définition des opérations	80
b) Les procédures de calcul	81

4°) Remarques	81
---------------------	----

L'objectif de ce court article est d'analyser les difficultés que les étudiants de "bas niveau" ont à passer de l'emploi des *nombre entiers ou décimaux* à l'emploi des *nombre réels* dans le cadre du calcul algébrique élémentaire.

1°) Première analyse

a) *Le rôle des supports dits "concrets"*

Dans les problèmes de l'école primaire, où les calculs portent toujours sur des grandeurs et sont toujours exprimés par des nombres ayant une unité (nombre de *pièces*, nombre de *mètres*, nombre d'*heures*, etc.), ces nombres sont soit *entiers* (pièces) soit *décimaux* (mètres), ou parfois sexagésimaux (heures).

Dans le cas de grandeurs *discontinues*, d'unités indivisibles (pièces), le calcul "doit tomber juste" : s'il se présente une extraction de racine carrée, ce ne peut être que celle d'un carré parfait ; les dividendes sont obligatoirement des multiples de leurs diviseurs ; etc.

Il en reste chez les étudiants de "bas niveau" une réticence devant des nombres comme $\frac{1}{4}$ et $\sqrt{3}$, et l'impression de s'être trompés s'il s'agit d'un résultat.

Dans le cas de grandeurs *continues*, d'unités indéfiniment divisibles (mètres), le calcul "doit" cette fois mener à une solution décimale. L'écriture " $\frac{1}{4}$ " est alors comprise comme une opération à effectuer dont le résultat est 0,25 ; de même $\frac{2}{3}$ est automatiquement remplacé par 0,66, $\sqrt{3}$ par 1,732 et π par 3,14 ; et ceci sans même que soit connue ou reconnue la différence entre le premier cas et les trois suivants ($\frac{1}{4}$ et 0,25 sont exactement égaux, tandis que $\frac{2}{3}$ et 0,66 ne sont qu'approximativement égaux, et de même pour $\sqrt{3}$ et 1,732, pour π et 3,14).

Il en reste l'habitude de "donner des valeurs" décimales à tous les nombres non entiers sans se préoccuper d'exactitude ou d'approximation.

Ainsi, le traitement du calcul est dépendant du type de grandeur dont il est question, au niveau des résultats attendus et de leur présentation, avec des effets même sur les résultats intermédiaires.

De plus, l'existence d'un support dit "concret", ou du moins familier (sauf s'il est purement scolaire), matérialisé par l'utilisation d'unités, rend au moins un peu familier le calcul lui-même.

Même quand l'algèbre succède à l'arithmétique, x , y et z restent dans les équations des nombres *de pièces*, *de mètres* ou *d'heures*, ou etc. ; nombres que l'on cherche certes, donc "inconnus", mais malgré tout pas entièrement inconnus puisque l'on sait au moins *de quoi* il s'agit.

Ainsi, le fait qu'il s'agisse de grandeurs imaginables intervient dans le calcul, comme support du raisonnement et guide du calcul. On peut même parler d'un substitut partiel au raisonnement abstrait. (On prétend ajouter des longueurs, ou multiplier des vitesses et des temps, alors qu'en réalité on n'opère que sur les nombres qui les expriment dans des unités cohérentes).

En résumé, l'existence d'un support familial, représentable dans l'imagination, joue un rôle en algèbre, et de deux manières : comme guide du calcul et comme restriction des résultats aux nombres entiers, ou décimaux, ou parfois sexagésimaux.

b) *Les effets classiques de l'absence de support "concret"*

Dans le maniement des lettres représentant des nombres ("inconnues" ou "variables"), l'absence de référence à des grandeurs familières, à des unités, joue comme une perte de tout support solide, sûr.

A propos des équations, cela se traduit

— dans le traitement du calcul : "où va-t-on ? qu'est-on en train de faire ? que s'agit-il de faire ?". Ainsi, on peut écrire une "solution" du genre :

$$x = \sqrt{\frac{2x-1}{2}} \quad \text{à l'équation} \quad 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

— dans la présentation des résultats numériques : "que doit-on en faire ?" Ainsi, on peut vouloir tout ramener aux nombres décimaux bien sûr ($\frac{8}{3} = 8 : 3 = 2,6$), mais aussi aux entiers par des "transformations" du genre suivant :

$$\frac{8}{3} = 8.3 = 24$$

Les contraintes exercées par le support familial sur le mode de calcul et son résultat sont au mieux remplacées par une fidélité à toute épreuve à des règles de calcul inexpliquées et par une imitation intelligente des procédures utilisées par les enseignants, pour les problèmes trop différents de ceux qu'ils ont traités. On comprend que les étudiants soient, bonne volonté ou pas, rares à combiner ces deux "qualités" quelque peu contradictoires, et que beaucoup par contre soient en général perdus devant la simple question de savoir ce que l'on attend d'eux dans tout problème quelque peu nouveau.

A propos des relations, et de leurs cas particuliers les fonctions, cela se traduit

— d'abord (et pour mémoire) par des automatismes dus aux systèmes d'équations ; par la volonté, par exemple, de calculer x et y à partir de la seule condition " $2y - 3x + 5 = 0$ ".

- ensuite, par la difficulté à passer de " t (secondes) $\longrightarrow$ d (mètres parcourus)" à " $x \longrightarrow 3x$ ", même après un exemple $d = 3t$ où 3 représente une vitesse de 3 m/s (et justement à cause de ces " m/s "). La représentation graphique, si elle peut jouer le rôle de support de représentation, est en fait un obstacle à la compréhension si elle vient trop tôt (par exemple elle conduit à tracer une droite avec une valeur de x et la valeur correspondante de y , reportées comme deux points, sur les axes).
- enfin, les variables se trouvent réduites à leurs valeurs entières ou, à la rigueur, décimales simples. Le cas $x = \sqrt{3}$, s'il est proposé par l'enseignant, est automatiquement remplacé par 1,732. Là encore, la représentation graphique, forcément approximative, est un obstacle à la compréhension si elle est utilisée trop tôt.

c) Les seuls nombres "purs"

Les seuls nombres "abstraits" et pourtant familiers semblent être les entiers (à l'exception peut-être de π et de quelques fractions). Encore sont-ils utilisés essentiellement dans des formules portant sur des grandeurs géométriques ou, avec le même rôle, dans des formules algébriques paraissant apparentées :

— Comme coefficient, par exemple dans " $D = 2R$ " ou " $L = 2\pi R$ " ou " $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ "; et par suite dans " $y = 2x$ ", " $2x = -\frac{4}{3}y = 0$ ",...

Le fait que ces "coefficients" soient en géométrie des rapports de grandeurs de même espèce n'est ni connu ni reconnu.

Par suite, leur transfert à l'algèbre se fait par mimétisme et non par un processus rendant ces rapports indépendants de leur origine et utilisables comme nombres "abstraits". Ainsi n'est pas assimilée la possibilité de donner aux lettres x, y des valeurs telles que π ou $\frac{4}{3}$.

De plus, l'utilisation concrète de la géométrie, avec les approximations qu'elle nécessite, renforce toujours la pseudo-évidence de la "valeur" décimale des nombres.

— Comme exposants, par exemple dans " $S = L^2$ " ou " $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ " et par suite en algèbre " $y = x^2$ " ou, en combinant avec des coefficients, dans " $4x^2 - 3x + 1 = 0$ ".

Mais ces exposants sont compris comme "symboles d'élévation à une puissance" (alors qu'en fait il n'y a pas de symbole pour la puissance, celle-ci étant symbolisée par la position exponentielle du nombre). Bien qu'en pratique le rapport entre élévation à une puissance (entière) et multiplication soit souvent "oublié" (ce qui rend difficile l'assimilation des règles), l'idée de puissance est très loin de l'idée d'opération entre deux nombres, et l'exposant n'est donc pas compris comme un nombre.

L'introduction d'exposants négatifs, puis fractionnaires, n'est comprise (difficilement) que comme complexification des notations symboliques, et ne permet nullement une meilleure compréhension du nombre négatif ou fractionnaire (" $x^{4/3}$ " c'est " $\sqrt[3]{x^4}$ "; pour aller plus loin, il faudrait justement comprendre $\frac{4}{3}$ comme nombre et " $x^{4/3}$ " comme opération entre x et $\frac{4}{3}$).

L'introduction des exponentielles (et logarithmes) en est rendue évidemment impossible (sauf appel au concept de fonction définie, continue et dérivable, beaucoup plus complexe, et dont la compréhension nécessite l'acquisition complète de la notion de nombre réel...).

De ce fait, ces nombres ne sont pas vraiment assimilés comme abstractions, manipulables dans d'autres contextes que leur origine comptable ou géométrique et leurs utilisations concrètes. Sauf pour les entiers, l'approximation décimale va de soi.

d) Conclusion

On peut constater que les étudiants de "bas niveau" rencontrent deux difficultés en même temps :

- passer des nombres comme *mesures* des grandeurs (dans une unité), aux nombres "*abstrait*", "*purs*";
- passer des nombres *entiers ou décimaux* aux nombres *réels*.

2°) Deuxième analyse

Le fait que ces deux difficultés se superposent ne signifie pas qu'il s'agisse de deux facettes du même problème. En réalité, en se superposant, elles se masquent l'une l'autre; et pour les traiter, nous faisons l'hypothèse qu'il y a avantage à les distinguer.

a) Le passage des mesures de grandeurs aux nombres "purs"

— Le problème des nombres "purs" n'est qu'un prolongement du problème de la *construction du concept de nombre* comme abstraction à partir du concret.

Il s'agit ici de faire accéder au processus abstrait sous-jacent *même* au traitement des calculs sur les grandeurs (les unités sont "pensées", mais non écrites, en cours de calcul: pourquoi et comment cela fonctionne-t-il?).

Pour la résolution de ce problème, la seule distinction opératoire est celle entre entiers (grandeurs discontinues, décompte d'objets indivisibles) et nombres réels quelconques (grandeurs continues, rapports de grandeurs de même espèce). Le premier cas ne suppose comme abstraction que l'idée d'"unité" indépendante de la nature de l'objet; la

deuxième cas suppose l'abstraction géométrique : le rapport des côtés d'un carré est 1 exactement, même si la mesure réelle comporte une incertitude.

On pourrait même imaginer de ne pas parler des grandeurs discontinues et d'introduire le concept de nombre uniquement à partir des rapports de grandeurs continues, les entiers n'en étant que des cas particuliers. Ce ne serait pourtant pas très pédagogique car les entiers jouent un rôle à part dans la numérotation (ordinaux) et le comptage (cardinaux), et de plus ils jouent un rôle essentiel dans le deuxième problème : la classification des nombres, la notation symbolique des nombres réels non transendants, et l'écriture décimale infinie de tous les réels.

b) Le passage des nombres décimaux aux nombres réels

— *Le problème des nombres entiers, décimaux ou réels* n'est qu'une partie du problème de la *classification des nombres réels* en sous-ensembles "emboîtés" depuis $\mathbf{N}$ jusqu'à $\mathbf{R}^+$, en passant par $\mathbf{D}^+$ et $\mathbf{Q}^+$. (*)

Il s'agit *premièrement* de situer l'écriture décimale des entiers comme une écriture symbolique particulière caractérisée par :

- une *base* qui est de plus *régulière* : dix (par comparaison, l'écriture romaine est à base irrégulière : cinq et deux ; d'où les symboles particuliers pour cinq : V ; dix : X ; cinquante : L ; etc. ; mais on peut facilement imaginer un principe qui rendrait sa base régulière à dix : CLXVII = CXXXXXXIIIIII)
- une notation à la fois
- *additive et multiplicative* (par comparaison, l'écriture romaine originelle est seulement additive : CCCLXXI = C + C + C + L + X + X + I ; mais on peut facilement imaginer un principe qui la rendrait multiplicative : CCCXXI = III $\times$ C + II $\times$ X + I = IIIICIIXI)
- *positionnelle* : 321 = 3 cent. + 7 diz. + 1 ; d'où l'importance d'un symbole pour l'"absence" (d'unité, de dizaine, de centaine, etc.) conduisant à l'invention du zéro comme nombre (abstraction issue des progrès de la numération, et non pas directement d'une pratique comme les nombres sont issus du comptage (**).

(*) La résolution de ce problème nécessite, en préalable, la définition des opérations élémentaires (addition et multiplication des réels, division des entiers) ; en effet, c'est nécessaire pour définir l'écriture décimale des entiers et des décimaux, l'écriture fractionnaire des rationnels, l'écriture décimale infinie des réels.

(**) Par comparaison, on peut étudier le langage *parlé* correspondant, c'est-à-dire la manière dont sont dits (ou lus) *en français* les entiers ainsi écrits :

— le principe positionnel est supprimé : au lieu de dire la suite des chiffres, on intercale le plus souvent les mots "mille", "cent" et "dix" (qui est intégré dans les mots "onze", "douze"... "seize" et séparé dans "dix-sept", etc.). C'est pourquoi le zéro n'est pas dit. — il reste des traces de numérations à base irrégulière : six et dix ("soixante-dix", au lieu de "septante" en Suisse), à base vingt ("vingt", "quatre-vingt", "quatre-vingt-dix"...) et à base mille ("mille", "million", "milliard" ; ce qui dans l'écriture elle-même se retrouve par l'habitude de regrouper les chiffres par trois pour *faciliter la lecture*).

Il s'agit *deuxièmement* de situer l'écriture décimale avec virgule comme une écriture symbolique particulière (reposant sur la même base, et les mêmes principes de notation, par adjonction d'un symbole — la virgule — par rapport à laquelle les positions sont repérées), et dont le champ est limité à une certaine catégorie de nombres réels. La notion d'"écriture décimale infinie" peut permettre de donner tout son sens à l'approximation décimale et à l'encadrement décimal des nombres réels.

Il s'agit *troisièmement* de situer l'écriture fractionnaire comme une écriture symbolique particulière, et dont le champ est lui aussi limité à une certaine catégorie de nombres réels (bien que cette catégorie soit plus vaste que la précédente): les rapports d'entiers (le nombre par lequel il faut multiplier un entier pour trouver un autre entier). Là encore la notion d'"écriture décimale infinie" peut être utile car elle permet de situer les irrationnels, par rapport aux rationnels (en s'appuyant sur la périodicité du développement décimal dans le cas des rationnels et la non-périodicité dans le cas des irrationnels). Ainsi, peut être introduite la nécessité d'une écriture symbolique appropriée aux irrationnels, à l'aide de radicaux quand c'est possible, et d'une désignation littérale quand ça ne l'est pas.

c) *Conclusions*

En résumé, le premier problème est celui de *l'existence de l'abstraction* et de la symbolique mathématiques, et cela dès les nombres entiers (pourtant dits "naturels"). Le deuxième problème est celui de la nécessité de *symbolismes adaptés* à chaque catégorie de nombres.

3°) **Conséquences**

L'importance de cette distinction (qui sur le plan pédagogique n'implique pas obligatoirement une successivité, mais une articulation permanente) se retrouve dans le traitement de la question des opérations sur les nombres.

a) *La définition des opérations*

Les nombres (entiers ou réels) pouvant être représentés par des lettres, la résolution du *premier* problème peut conduire à la *définition* de chaque opération élémentaire (addition, soustraction, multiplication, division), sur les entiers *puis* sur les réels positifs (et il faut alors montrer que les deux définitions sont cohérentes dans le cas des entiers).

L'emploi de symboles pour désigner ces opérations peut être justifié, ainsi que la nécessité du symbole "parenthèses".

A partir de là, les propriétés de ces opérations peuvent être étudiées, indépendamment des cas particuliers par lesquels on prétend souvent les "vérifier". Et c'est heureux, car ces opérations et leurs propriétés sont

nécessaires pour introduire le *deuxième problème*, celui des symbolismes adaptés à chaque catégorie de nombres (puisque ceux-ci utilisent des notations additives, multiplicatives, et fractionnaires — on pourrait dire “divisives” ; et ce sont ces symbolismes que l’on utilise pour effectuer des “vérifications”).

b) *Les procédures de calcul*

L’introduction des symbolismes adaptés à chaque catégorie de nombres, à l’aide de ces opérations, peut dans un deuxième temps conduire aux *procédures* de calcul correspondant à *chacune des catégories*, dans son *symbolisme particulier* :

- procédures pour “poser” les opérations sur les *nombres entiers* en notation décimale, puis sur les *nombres décimaux* ; intérêt de connaître au moins des “tables” d’addition et de multiplication sur les chiffres (et méthodes pour les établir ou les vérifier) ;
- procédures sur les fractions (donc sur les *nombres rationnels*) puis sur les rapports en général (donc sur les *nombres réels*).

4°) **Remarques**

Il paraît important de traiter à part deux types de problèmes :

— L’introduction des *nombres négatifs*. Il peut paraître commode de les “justifier” par des cas “concrets” (variations de température, altitude, etc.), mais tout support simple de ce genre se révèle à l’usage largement mystificateur, car ces grandeurs “négatives” ne se multiplient pas entre elles. Il semble plus intéressant de les présenter en deux temps, correspondant aux deux périodes historiques :

- comme commodité de calcul, dans des problèmes d’algèbre portant en dernier ressort sur des nombres positifs, d’où découlent immédiatement les règles des signes.
- comme nombres abstraits introduits à partir de cette pratique mathématique elle-même (comme le zéro s’introduit à partir de la numération positionnelle), par des considérations théoriques cohérentes aux règles précédemment édictées.

— Les deux opérations d’extraction de *racine* et d’élévation à une *puissance* qui sont définies séparément, dans un premier temps, à partir de la multiplication des nombres réels et doivent dans un deuxième temps être considérées comme des opérations entre un nombre réel et un nombre entier.

L’articulation explicite de ces deux points de vue peut seule permettre par la suite l’extension de l’ensemble des exposants à $\mathbf{Q}^+$ d’une part (ce qui réunit les deux opérations en une seule), et à $\mathbf{Z}$ d’autre part ; puis à $\mathbf{Q}$ par combinaison et enfin $\mathbf{R}$ par passage à la limite.