Inconnues et variables

par M. BRUSTON

SOMMAIRE

Introduction

Considérons la phrase suivante :

"Calculer la primitive F de la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$
qui vérifie F(0) = 1/4"

Dans l'article précédent (paragraphes 20° b et 21° b), cette phrase a été analysée sous divers angles (complexité de la structure grammaticale, informations implicites, etc.).

A la suite de ces analyses, nous en avons proposé deux reformulations, dont la suivante :

"On considère la fonction suivante : $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$;
on appelle F celle de ses primitives qui vérifie F(0) = 1/4;
calculer l'expression de F(x)."

L'objectif de cet article est de poursuivre l'analyse de la phrase considérée (ainsi que de sa reformulation), et d'en tirer quelques conséquences :

— sur la notion de variable (et de paramètre) cachée ;
— sur la caractérisation des nombres (par des équations ou d'autres conditions) et la définition des ensembles "en compréhension" ;
— sur la notion d'inconnue, le passage de l'arithmétique à l'algèbre et le traitement algébrique des problèmes dits "concrets".

I - Les variables cachées

Considérons donc la phrase citée ci-dessus :

"Calculer la primitive F de la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$
qui vérifie F(0) = 1/4."

La reformulation que nous en avons proposée repose sur une *hypothèse*, à savoir que *"F"* désigne une fonction précise, unique : la solution de l'exercice. Ainsi, *"la primitive F"* signifie *"la primitive cherchée, désignée par F"*.

Cette hypothèse pose cependant quelques problèmes. Puisque la fonction *F* est la solution, il est évident qu'elle vérifie *F(0) = 1/4* ; cela fait partie de ses propriétés, par hypothèse. Mais, "a contrario", la fonction *F* est *la seule* à pouvoir vérifier *F(0) = 1/4* ; en effet, aucune autre fonction ne peut s'appeler aussi *"F"*. Comme on ne connaît pas *F*, l'énoncé comporte un cercle vicieux : une des primitives doit vérifier *F(0) = 1/4*, et c'est *celle-là* que l'on doit désigner par *F* ; or, pour qu'elle vérifie *F(0) = 1/4*, il faut *déjà* qu'elle soit appelée *F*. (1)

(1) Le cercle vicieux apparaît plus clairement si l'on modifie la phrase ainsi : *"celle de ses primitives qui vérifie F(0) = 1/4 est appelée F"*.

Pour sortir de ce cercle vicieux, considérons les phrases suivantes :
— *"Chercher le Pierre, français, qui vérifie : Pierre fait 2,20 m de hauteur"* ;
— *"Chercher la valeur de X, rationnel, qui vérifie : $3X - 2 = 1 - X$"* ;
(on présuppose dans chaque cas qu'il y a une solution unique)

Dans ces phrases, *"Pierre"* et *"X"* ne désignent pas la solution : ce sont des variables (parcourant respectivement l'ensemble des individus français prénommés Pierre, et $\mathbf{Q}$) ; la solution portera un autre nom (respectivement : *Pierre Machin* ; et X_0, ou r).

Il s'agit de chercher, parmi ***les Pierre français***, celui pour lequel est vraie la déclaration *Pierre fait 2,20 m de hauteur* (pour ***chaque*** *Pierre français*, cette déclaration est soit vraie, soit fausse). Il s'agit de chercher parmi ***les valeurs de X, rationnel,*** celle qui rend vraie l'égalité $3X - 2 = 1 - X$ (***chaque*** rationnel, s'il est assigné comme valeur à X, rend l'égalité soit vraie, soit fausse).

De même, dans *"la primitive F... qui vérifie $F(0) = 1/4$"*, la lettre F ne peut valablement être qu'une *variable* (parcourant l'ensemble des primitives de la fonction donnée).

Il s'agit de chercher, parmi ***les primitives F,*** celle qui vérifie $F(0) = 1/4$. Plus exactement, il s'agit de chercher, parmi les primitives (de la fonction donnée), celle qui, assignée comme valeur à la variable F, rend vraie l'égalité $F(0) = 1/4$. (2)

Ceci entre en contradiction avec notre hypothèse précédente (*"F"* désignant *la* solution). Alors, comment faut-il interpréter l'expression *"la primitive F"* ?
Ainsi :
*"la primitive cherchée, **désignée par F**"*
ou bien ainsi :
*"celle, parmi **les primitives assignables à la variable F**"* ?

La première interprétation, on l'a vu, conduit à un cercle vicieux ; mais la deuxième (avec *F* comme variable) est loin d'être évidente. Nous dirons que *F paraît* désigner la solution, mais est en réalité une *variable cachée*.

D'ailleurs, si l'on veut expliciter le présupposé qu'il y a une solution unique, il faut utiliser le quantificateur "$\exists !$", appliqué à F, ce qui prouve que F est une variable :

$$\exists ! F \, [F \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ et } \forall x \, [F'(x) = f(x)] \text{ et } F(0) = 1/4]$$

(2) *C'est parce que "$F(0) = 1/4$"* est une *caractérisation* de la primitive cherchée, que la lettre F doit être lue comme une variable. Au contraire, dans la phrase *"démontrer que la primitive F vérifie $F(0) = 1/4$"*, la lettre F ne peut désigner qu'une fonction précise, unique (et précédemment définie).

Si F désignait une fonction précise, l'affirmation de son unicité n'aurait tout simplement pas de sens.

La pratique mathématique courante joue en fait sur les deux interprétations sans se soucier du cercle vicieux ; elle utilise l'ambiguïté. On écrira par exemple :

$$F(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) + C$$

Or,

— si C est la constante précise, unique, que l'on cherche, alors la lettre F désigne la primitive cherchée ;

mais

— si C est un paramètre (dans **R**), la lettre F désigne une quelconque des primitives.

Et c'est la deuxième interprétation qui est sous-jacente à la première. Pour lever l'ambiguïté, il faudrait (*avant* de calculer C avec $F(0) = 1/4$) écrire ainsi :

— soit $\exists !\ C \in \mathbf{R}\ \ F(x) = \ldots + C$ (F désignant la primitive cherchée)
— soit $\forall\ C \in \mathbf{R}\ \ F(x) = \ldots + C$ (F désignant une primitive quelconque)

Or, c'est la validité de ces *deux* écritures (avec chacune sa signification particulière pour "F") qui fonde la validité de l'écriture ambiguë, sans quantificateurs. Et c'est la *deuxième* écriture (avec "$\forall C$") qui fonde la validité de la première (avec "$\exists ! C$"). Nous dirons que, dans l'écriture sans quantificateurs, "C" est un *paramètre caché.*

Nous faisons l'hypothèse que l'emploi de variables et paramètres cachés (avec ambiguïté entre valeur cherchée et lettre parcourant le référentiel dans lequel on cherche), bien que courante dans la pratique mathématique, rend difficile la compréhension de ce qui fonde cette pratique.

Nous proposons, pour lever l'ambiguïté,

— soit de considérer "F" comme désignant la solution unique :

"On désigne par F celle des primitives qui donne à 0 l'image 1/4"

— soit de considérer "F" comme une variable et de le signifier clairement en donnant un autre nom à la solution (par exemple F_0) :

"On désigne par F_0 celle des primitives F qui vérifie $F(0) = 1/4$"

Dans le deuxième cas, par exemple, l'énoncé global devient :

"On considère la fonction suivante : $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$;
celle de ses primitives F qui vérifie $F(0) = 1/4$ est désignée par F_0 ; calculer l'expression de $F_0(x)$."

Et la résolution utilisera les écritures suivantes :

$$\forall\, C \in \mathbf{R}\, [\forall x \in \mathbf{R}\, [F(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) + C] \Rightarrow F' = f]$$

$$\exists!\, C \in \mathbf{R}\, [\forall x \in \mathbf{R}\, [F_0(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) + C] \text{ et } F_0' = f \text{ et } F_0(0) = 1/4]$$

En assignant à x la valeur 0:

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\,.\,1 \quad + \frac{1}{2}\,.\,1 \quad + C$$

donc C = 0 et:

$$\forall x \in \mathbf{R}\; F_0(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

Remarque: Pour traduire l'énoncé global en symboles mathématiques, nous pourrions utiliser l'opérateur logique "ι" ("iota") qui signifie précisément : "l'unique assignation à la lettre... telle que..." (3)

Nous appuyant sur :

$$\exists!\, F \quad [F \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ et } \forall x\, [F'(x) = f(x)] \text{ et } F(0) = 1/4]$$

nous pourrions écrire :

$$F_0 = \iota F \quad [F \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ et } \forall x\, [F'(x) = f(x)] \text{ et } F(0) = 1/4]$$

II — Conséquences pour la caractérisation des nombres

1°) *Caractérisation d'un nombre unique*

Du travail précédent, nous pouvons conclure qu'il y a ambiguïté sur le statut de la lettre X dans la phrase suivante :

"Chercher le rationnel X qui vérifie : $3X - 2 = 1 - X$"

En effet, si *"X"* désigne la solution, alors il est clair que X vérifie l'égalité $3X - 2 = 1 - X$; le rationnel cherché est tout trouvé : c'est X !

Si l'on veut en savoir plus, il faut chercher *lequel*, parmi ***les** rationnels X*, vérifie $3X - 2 = 1 - X$; c'est-à-dire laquelle, parmi ***les** valeurs* possibles de *la variable X* parcourant $\mathbf{Q}$, vérifie $3X - 2 = 1 - X$.

Plus exactement encore, il faut chercher quel rationnel, s'il est *assigné* comme valeur à la variable X, rend vraie l'égalité $3X - 2 = 1 - X$.

Tout dépend de la façon dont on lit l'expression *"le rationnel X"* :

— soit *"**le** rationnel cherché, désigné par X"* ;
— soit *"celui, parmi **les** rationnels assignables à la variable X"*.

(3) Cet opérateur n'est utilisable que dans le cas où ladite assignation existe et est unique. Cf. KLEENE : "Logique Mathématique" (1971, A. Colin) p. 174-179.

Tout dépend aussi de la réponse que l'on attend de l'étudiant :

— soit *"$X = 3/4$"*, exprimant la valeur de X; X est donc le rationnel cherché, et de plus il est demandé de calculer sa valeur.

— soit *"$3/4$"* , exprimant le rationnel qui, assigné à X, rend vraie l'égalité ;
et l'on peut aussi écrire :
$\forall X \in \mathbf{Q}\ [3X - 2 = X - 1 \Leftrightarrow X = 3/4]$

La pratique mathématique joue en général sur ces différentes interprétations en les considérant en quelque sorte comme synonymes. Mais cela contribue sans aucun doute à embrouiller les étudiants.

2°) ***Caractérisation d'un ensemble de nombres***

L'ambiguïté entre inconnue et variable n'est acceptable que s'il y a *une solution unique*. Il serait absolument incorrect de dire :

*"Chercher **le** rationnel X qui vérifie $X^2 = 2$"*

ou

*"Chercher **le** rationnel X qui vérifie $X^2 - 5X + 6 > 0$"*

Il ne serait pas non plus correct de lire la phrase suivante en considérant la lettre X comme désignant les solutions :

*"Chercher **les deux** rationnels X qui vérifient $X^2 - 5X + 6 = 0$"*

La lettre X ne peut être ici qu'une variable, car *"X"* ne peut simultanément désigner plusieurs nombres distincts.

Il faut donc interpréter l'expression *"les deux rationnels X"* de la manière suivante :

"les deux, parmi les rationnels assignables à la variable X"

"les deux, parmi les valeurs assignables à la variable X parcourant **Q***"*

"les deux valeurs de X dans **Q***"*

ou bien *"les deux rationnels, parmi les réels assignables à la variable X"*

"les deux rationnels, parmi les assignations possibles (absolument quelconques) à la variable X"

Pour faciliter la lecture, il vaudrait mieux écrire :

"Montrer qu'il y a deux valeurs de X, dans **Q***, qui vérifient $X^2 - 5X + 6 = 0$"*

"Montrer qu'il y a deux rationnels qui, assignés à X, rendent vraie l'égalité..."

L'expression *"les rationnels X tels que $X^2 - 5X + 6 = 0$"* apparaît donc comme dangereuse, dans la mesure où la lettre *"X"* semble y désigner simultanément $(+2)$ et $(+3)$ (ou pire, l'ensemble $\{+2\ ;\ +3\}$).

L'interprétation correcte serait : *"ceux, parmi les rationnels assignables à la variable X"*, ou bien : *"les rationnels, parmi les assignations possibles à la variable X"*.

Nous faisons l'hypothèse que l'interprétation correcte est beaucoup trop difficile pour être faite spontanément par les étudiants ; mais que, par contre, la signification des mots *"assignable, assigné, assignation"* peut être comprise par eux.

Il suffit donc de reformuler l'expression : *"les rationnels X tels que $X^2 - 5X + 6 = 0$"* de manière à en expliciter l'interprétation correcte :

"les rationnels qui, assignés à X, vérifient $X^2 - 5X + 6 = 0$"

ou bien

"les rationnels qui, assignés à X, rendent vraie l'égalité..."

3°) ***Ecriture des ensembles définis en compréhension***

Le même problème se pose pour l'interprétation des suites de symboles ci-dessous :

"$\{X \in \mathbf{Q} \mid X^2 - 5X + 6 = 0\}$" ; "$\{X \mid X \in \mathbf{Q} \text{ et } X^2 - 5X + 6 = 0\}$"

La lecture classique : *"l'ensemble des X, rationnels, tels que $X^2 - 5X + 6 = 0$"* est dangereuse. Nous proposons, comme précédemment, de la reformuler de façon à en expliciter l'interprétation correcte :

"l'ensemble des rationnels qui, assignés à X, vérifient $X^2 - 5X + 6 = 0$"

ou bien, de façon moins claire mais plus proche de l'ordre d'écriture des symboles :

"l'ensemble des assignations à X dans **Q** *telles que $X^2 - 5X + 6 = 0$ (soit vraie)"*

Ainsi, la suite de symboles "$\{X \mid \ldots$" se lira *"l'ensemble des assignations à X..."* **(et non pas :** *"l'ensemble des X..."***).**

III — Conséquences pour la notion d'inconnue

1°) ***Inconnue et variable***

En réalité, pour comprendre pleinement la notion d'"inconnue", il faut avoir acquis préalablement celle de "variable". Une inconnue, en effet, est une variable à laquelle est imposée une ou plusieurs conditions fixant le domaine des valeurs *cherchées*, et non pas le domaine des valeurs *possibles* (le "référentiel", c'est-à-dire le domaine dans lequel on cherche).

Cela seul permet de comprendre des pratiques telles que :
— vérifier si une solution trouvée est correcte ou non ;
— essayer des nombres pour savoir s'ils sont, ou non, solutions ;
— chercher un ensemble contenant toutes les solutions éventuelles ;
— chercher des valeurs approchées d'une solution ;
— etc.

La seule pratique compréhensible sans la notion de variable est la résolution par des "techniques" algébriques (type "faire passer d'un membre dans l'autre", etc.) qui correspondent à des *équivalences logiques*. Mais la notion même d'équivalence logique, qui leur est sous-jacente, ne peut elle-même pas être comprise sans la notion de variable parcourant un certain ensemble, puisqu'elle signifie "égalités vraies simultanément, *et fausses simultanément*", ce qui nécessite que la lettre puisse prendre n'importe quelle valeur dans le référentiel. Ces techniques ne peuvent alors être assimilées que comme des procédés plus ou moins *automatiques*; les "précautions" à prendre dans certains cas (élévation au carré des deux membres, etc.) prennent un caractère quelque peu mystérieux.

2°) ***Le passage de l'arithmétique à l'algèbre***

Si l'on enseigne d'abord l'emploi des lettres comme inconnues, c'est en général parce que l'on veut introduire l'algèbre à propos de problèmes dits "concrets" : on appelle *"x"* (ou *"n"*, ou *"l"*, ou etc.) un nombre que l'on cherche, la mesure d'une grandeur que l'on ne peut trouver facilement par une technique arithmétique. Or, ceci, loin de favoriser une transition "souple" entre l'arithmétique et l'algèbre, produit en réalité une inutile rupture; rupture que l'on peut au contraire éviter en employant des variables.

En effet, avec de tels problèmes (du premier degré) et en particulier ceux qui sont clairement résolubles avec une seule inconnue, il peut être très intéressant de faire des "essais" en étudiant les conséquences d'un choix pour la grandeur que l'on cherche (par exemple, si l'inconnue est la longueur d'un rectangle, poser : *"si le rectangle fait 5 mètres de long, alors..."*). De tels essais permettent de s'approprier les informations de l'énoncé par un traitement *arithmétique*. Ils permettent aussi d'*expliciter* les "lois" des phénomènes, qui sont sous-jacentes au problème (par exemple : le périmètre d'un rectangle est égal à deux fois sa longueur plus deux fois sa largeur), et dont la prise en compte est nécessaire au traitement algébrique ultérieur.

Sauf chance extraordinaire, aucun des essais ne correspondra à la solution ; c'est-à-dire qu'aucun ne "collera" avec l'ensemble des informations et contraintes données par l'énoncé du problème. Mais la raison pour laquelle ils ne "colleront" pas correspond très exactement à ce que le traitement algébrique donnera comme *équation*. D'ailleurs, en comparant les résultats de plusieurs essais successifs, il est souvent possible de déterminer des essais meilleurs, c'est-à-dire plus proches du nombre cherché ; on peut ainsi trouver la solution exacte (s'il s'agit d'un entier) ou un encadrement de celle-ci (s'il s'agit d'un réel ou d'un décimal).

Au moment du traitement algébrique, plutôt que de dire :

"Soit x la longueur du rectangle, exprimée en mètres ; on a donc..."

il est préférable de généraliser le traitement arithmétique par essais, en disant :

"Si le rectangle fait x mètres de long, alors..."

Le traitement du problème peut ainsi être mené selon la même progression qu'un traitement arithmétique (où l'on connaîtrait la valeur de x) :

"... alors, la largeur faisant par hypothèse 3 mètres,
le périmètre fait $(x + 3)$ mètres;
la surface est de $(x \times 3)$ mètres carrés;
alors, etc.

Outre l'avantage qu'il y a à maintenir en algèbre la structure de la résolution arithmétique, il apparaît beaucoup plus clairement dans cette présentation que l'inconnue est un *nombre* (et non pas la grandeur elle-même), et qu'il faut donc choisir une *unité de mesure*. On évite ainsi l'erreur-type : *"soit x la longueur du rectangle"*. On peut aussi vérifier, au fur et à mesure, la cohérence des unités utilisées ; puis on peut montrer progressivement pourquoi (et à quelles conditions) il est possible de ne pas écrire ces unités. D'ailleurs, avec cette présentation, il est possible de choisir au départ des unités *incohérentes*, à condition d'effectuer en cours de route les conversions nécessaires :

"si le rectangle fait x mètres de long, alors
il fait 100x centimètres de long
et la largeur étant par hypothèse de 25 centimètres,
le périmètre fait $2(100x + 25)$ centimètres
la surface est de $(100x \times 25)$ centimètres carrés,
alors, etc.

De plus, dans cette présentation, la découverte finale de la valeur de x qui est solution du problème permet manifestement de trouver la valeur de *toutes* les autres grandeurs en jeu dans le problème. La résolution du problème ne se limite pas à trouver l'inconnue explicite (ou les inconnues), mais aussi toutes les inconnues *implicites*. Ceci peut d'ailleurs faire comprendre pourquoi il est souvent possible de choisir une seule inconnue, dans des problèmes où l'on demande explicitement de trouver la valeur de *plusieurs* grandeurs (et que cette inconnue ne doit même pas forcément être l'une des grandeurs cherchées). Ainsi, ce qui apparaît souvent comme une "astuce" plus ou moins sophistiquée devient un *élément naturel de la méthode.*

Il faut noter enfin que les remarques qui précèdent peuvent s'étendre à l'emploi de plusieurs inconnues, et à des problèmes qui ne sont pas du premier degré. Les seules modifications sont :

1°) que les valeurs trouvées sont les résultats d'*implications* successives, et ne sont donc pas forcément solutions du problème ; il reste à les "tester" (et à éliminer les solutions n'ayant pas de signification concrète : longueurs négatives, etc.) ;

2°) que la méthode par "essais", si elle conduit à des solutions, ne permet pas d'être certain que ce sont les *seules* solutions possibles.