

Hypothèses et propositions pédagogiques pour l'enseignement des mathématiques

par
Michel BRUSTON

SOMMAIRE

Hypothèses fondamentales

1°) Sur les méthodes en pédagogie	7
2°) Sur l'attitude vis-à-vis des mathématiques	8
3°) Sur le temps nécessaire	10

Hypothèses pour l'organisation de la formation

4°) Sur le programme, la démarche, le niveau visé	11
5°) Sur l'ordre de traitement des problèmes	12
6°) Sur la rigueur dans le cours	16

Hypothèses pour l'enseignement de la logique mathématique

7°) Sur le vrai et le faux	20
8°) Sur l'apprentissage de la logique mathématique	22
9°) Sur la présentation des résultats	25

Hypothèses pour l'enseignement de l'écriture symbolique

10°) Sur les automatismes	29
11°) Sur le statut des lettres en algèbre	31
12°) Sur l'introduction des conventions d'écriture	32

Hypothèses pour l'analyse des difficultés d'écriture

13°) Sur l'écriture "f(x)" et l'écriture des fonctions usuelles ..	34
14°) Sur la distinction entre "image" et "fonction"	38
15°) Sur la différence entre l'oral et l'écrit	40
16°) Sur une utilisation des "schémas d'opérateurs"	48
17°) Sur la différence entre calcul et opération	49

Hypothèses pour la rédaction des documents

18°) Sur le vocabulaire utilisé (concepts et mots ambigus)	51
19°) Sur l'acte de désignation	54
20°) Sur la grammaire utilisée	56
21°) Sur les présupposés	59

Hypothèses fondamentales

1°) *Sur les méthodes en pédagogie*

La mise au point de méthodes nouvelles en pédagogie des mathématiques présente un grand intérêt. Cependant, l'emploi d'une méthode, quelle qu'elle soit, présente aussi un risque : celui de figer le moment pédagogique, d'en exclure l'inattendu.

Or, le formateur a tout intérêt à saisir "au bond" les questions, remarques, perplexités, et même (on pourrait dire surtout) les objections des étudiants. Pour cela, au besoin, il peut en favoriser l'expression ; il est en tout cas essentiel qu'il ne la "bloque" pas.

On pourrait dire que tout "blocage" des étudiants devant les mathématiques est d'abord un blocage de leur expression à propos des mathématiques (ou, plus précisément, *en* mathématiques).

Justes ou faux, intuitifs ou argumentés, leurs opinions et jugements sont le signe de leur réflexion propre. Ils expriment la forme spécifique de leur raisonnement. Si illogiques qu'elles puissent paraître parfois, leurs raisons sont la manifestation de *leur* logique, et c'est pourquoi il est si important de leur faire expliciter celles-ci le plus complètement possible.

La nécessité d'explicitier, de communiquer avec autrui, peut d'ailleurs faire comprendre aux étudiants l'intérêt de mettre en forme leurs raisons et raisonnements, de les codifier. De plus, ces derniers, une fois exprimés et au besoin écrits, deviennent extérieurs à eux, donc susceptibles d'être étudiés, évalués, vérifiés par eux-mêmes ; leur attention devient disponible pour un raisonnement *sur* la logique de leurs raisonnements (pour une logique au deuxième degré en quelque sorte).

Si cette logique (au premier degré) est incorrecte, elle peut bloquer la suite de l'apprentissage. Il faut prendre le temps de la faire mettre en défaut par l'étudiant lui-même. C'est nécessaire pour qu'il soit convaincu de son erreur. C'est aussi une condition essentielle pour ne pas le dévaloriser à ses propres yeux : s'il arrive lui-même à la conclusion qu'il se trompait, il prouve sa capacité à raisonner juste, au deuxième degré. C'est enfin indispensable pour qu'il cherche à comprendre où, comment, pourquoi, il faisait erreur ; ce qui d'une part mobilise et exerce sa capacité à raisonner correctement, et d'autre part diminue notablement le risque d'un renouvellement systématique de la même erreur.

Par contre, si cette logique est correcte, elle peut favoriser la suite de l'apprentissage. La faire préciser et vérifier, par l'étudiant lui-même, exerce dans ce cas-là aussi sa capacité de raisonnement. Mais surtout, le formateur peut saisir l'occasion pour présenter le problème en cours sous l'angle ainsi proposé. Et cela, même s'il s'agit d'un angle inattendu, ou si cela anticipe sur la suite de la progression (ou même conduit à faire un "petit tour" aux marges du programme).

Dans les deux cas, cela peut signifier un détour, mais cela peut aussi accélérer ensuite la progression des étudiants. Et, de toutes manières, si le formateur ne prend pas au sérieux la façon dont les étudiants expriment leurs réactions en mathématiques, comment ceux-ci pourraient-ils conserver ou reprendre confiance dans leur capacité à faire des mathématiques ? Comment pourraient-ils appliquer cette capacité à résoudre les problèmes proposés par le formateur ?

Il est très important que ce dernier, tout en ne perdant pas de vue l'objectif qu'il s'est fixé, se montre très libre par rapport à tout cadre pré-établi. Et notamment qu'il ne se sente pas tenu par un modèle fixant une voie pour atteindre cet objectif. Il vaut mieux, pour l'efficacité de l'apprentissage, qu'il suive un moment une approche suggérée par les remarques d'un étudiant, plutôt que de s'en tenir "mordicus" à une progression balisée d'avance. Et cela, même si l'expérience a montré l'efficacité de cette progression dans d'autres circonstances.

Ainsi, notre première hypothèse fondamentale vis-à-vis de toute méthode (y compris les propositions pédagogiques qui font l'objet de cet article) est paradoxale qu'il faut aussi savoir s'en distancier, pour que les étudiants occupent pleinement la place centrale qui est la leur dans l'acte d'apprentissage.

2°) *Sur l'attitude vis-à-vis des mathématiques*

Afin que les difficultés particulières de chaque étudiant puissent être traitées, un travail très individualisé est nécessaire, même si le formateur favorise l'étude par petits groupes. Surtout à propos des exercices, l'enseignant doit prendre le temps de s'occuper de chacun, de décortiquer chaque difficulté, avant de reprendre l'ensemble sous forme de corrigé-synthèse.

Dans cette optique, il apparaît essentiel de favoriser au maximum l'expression en mathématiques des étudiants, même quand ils sont peu sûrs de la justesse de leurs raisonnements et de leurs calculs. Il s'agit de leur faire perdre (ou de leur éviter de prendre) cette habitude — scolaire — d'écrire seulement ce dont ils sont sûrs, pour leur enlever l'angoisse de l'erreur.

Toute écriture mathématique, juste ou non, est en effet un objet sur lequel il est non seulement *possible* de raisonner, mais même sur lequel il s'agit *précisément* de raisonner ; car c'est précisément la spécificité des mathématiques d'être un travail sur des objets symboliques (et non sur du concret), travail lui-même commandé par une certaine logique (et non par des "lois" ou le seul bon sens). (1)

(1) *Concret* : situation considérée dans toute sa complexité (en tenant compte de tous les paramètres en jeu et de leurs variations réelles, y compris celles qui peuvent rendre la situation intraitable mathématiquement à un niveau donné de connaissances). Si la réalité est simplifiée dans le but unique d'en faire un support à la pédagogie des mathématiques, il s'agit d'un *pseudo-concret*. L'exercice élimine les caractéristiques essentielles de

Notre deuxième hypothèse fondamentale est que la possibilité de susciter semblable attitude chez les étudiants est conditionnée par l'attitude du formateur lui-même par rapport aux mathématiques :

— attitude "dogmatique" et évaluative, ou attitude réflexive pouvant le conduire à un auto-questionnement sur ses propres connaissances ?

— attitude "capitalisante" sur un ensemble de savoirs et de méthodes, ou attitude de recherche sur un ensemble non clos de problèmes plus ou moins difficilement solubles (ou même non résolus à ce jour) ?

L'attitude du formateur nous semble par ailleurs largement liée à la possibilité, qui lui est ou non offerte,

— d'élargir le champ de référence de sa réflexion pédagogique : à l'histoire des mathématiques, à celle de la logique, aux recherches en linguistique notamment, ainsi qu'aux recherches en didactique des mathématiques,

— de travailler en équipe avec d'autres formateurs confrontés aux mêmes problèmes.

toute étude mathématisée du réel : définition des grandeurs à mesurer, procédures de mesure, approximations, modélisation, vérification de la validité de la méthode par ses résultats.

Cf. M. BRUSTON : "L'articulation entre l'enseignement de la physique et l'enseignement des mathématiques" (diffusé par le Centre de Formation de Formateurs du C.N.A.M.)

Si les simplifications entrent en contradiction avec la connaissance concrète qu'ont les étudiants de cette réalité (ou s'ils n'en ont aucune connaissance), l'exercice est pour eux totalement abstrait, irréel, incompréhensible. Ces simplifications abusives peuvent conduire à une pédagogie absurde ou même désastreuse.

Cf. St. BARUK : "Echec et Maths" (Ed. Seuil)

J. ADDA : "A propos des évaluations en mathématiques : du questionnement à l'interprétation et au diagnostic" (UER de Didactique des Disciplines, Paris VII) et autres articles.

Objet symbolique : 1°) — Objet concret mais porteur d'une symbolique claire et familière aux étudiants, permettant de faire abstraction, "dans le jeu", de certains paramètres matériels (exemples : cartes, dés, pièces, etc.). La familiarité est indispensable avant toute tentative de résolution de problèmes utilisant de tels objets. Or, elle dépend étroitement de la culture des étudiants concernés. S'ils ne la possèdent pas au départ, il faut prendre le temps qu'elle se constitue, si l'on ne veut pas provoquer malentendus ou incompréhensions.

Cf. WHEELER : "Mathématiques pour l'enseignement élémentaire" (Ed. OCLD)

B. DUMONT : "L'influence du langage et du contexte dans les épreuves de type logique" (thèse à l'Université Paris VII, diffusée par l'IREM de Paris-Sud)

2°) — Réalisation matérielle d'un symbole sous forme de sons (mots, phrases, ...) ou de graphismes (caractères, tableaux, schémas, graphiques, ...) construits et disposés d'une certaine manière. La matérialité de ces "objets symboliques" en fait le support de divers processus (association d'idées, construction d'images mentales, maniement automatique, ...) qui font partie intégrante de la pratique mathématique, mais qui peuvent aussi empêcher l'apprentissage s'il n'en est pas tenu compte au niveau pédagogique.

Cf. St. BARUK : "Fabrique ou l'école des mathématiques" (Ed. Seuil)

M. BRUSTON : "Expressions mathématiques et expression en mathématiques" (Education Permanente - n° 47) et ci-dessous, paragraphes 10°, et 13° à 17°.

3°) *Sur le temps nécessaire*

La pratique systématique de l'attitude réflexive peut poser au départ un problème : cette forme de travail prend du temps, et ce temps ne semble profiter qu'aux étudiants qui ont des difficultés ; les autres semblent freinés dans leurs possibilités de progression.

Pour répondre à ce problème, le formateur peut parfois organiser, pour les étudiants qui ont le plus de difficultés, des séances de "soutien" pendant lesquelles l'attitude réflexive est profitable à tous les présents. Une solution plus facilement généralisable est de proposer aux étudiants des exercices à deux niveaux, les plus rapides pouvant travailler sur des exercices d'approfondissement pendant que les autres ont le temps nécessaire au traitement approfondi de leurs difficultés d'assimilation.

La deuxième solution, à défaut de la première, permettra au formateur d'expérimenter cette pédagogie centrée sur la pratique des étudiants en mathématiques, et d'en tirer le maximum de bénéfices avec ceux pour lesquels elle est indispensable. C'est ainsi que nous avons nous-mêmes procédé au début. Cela nous a permis de faire les constatations suivantes :

— Les étudiants les plus faibles, après une période de perplexité, entrent tout à fait dans l'esprit de cette forme de travail, commencent à s'exprimer plus facilement, même au tableau, manifestent peu à peu des capacités intellectuelles certaines et progressent alors beaucoup plus vite.

— Les étudiants plus à l'aise au départ peuvent également tirer profit de cette forme de travail, pour passer de l'application "automatique" de règles et de modèles de raisonnement à la compréhension de ce qui fonde ces règles et ces modèles.

— Le travail au tableau, même avec un seul étudiant "bloqué", est suivi attentivement par l'ensemble du groupe, qui s'aperçoit qu'il peut en tirer profit d'une manière ou d'une autre, les difficultés des uns ayant, semble-t-il, toujours quelque rapport avec celles des autres.

— Lorsqu'un certain nombre de difficultés ont été résolues, la progression du groupe cesse d'être ralentie par les fréquents retours en arrière qu'elles occasionnaient. L'assimilation de modes de raisonnement abstraits crée une ouverture d'esprit et suscite un auto-contrôle permanent chez les étudiants. Le temps apparemment perdu au départ se trouve largement rattrapé par la suite.

Nous avons pu faire des constatations du même ordre par rapport à chacune des hypothèses pédagogiques que nous formulons dans la suite de cet article : leur prise en compte nécessite du temps, mais ce temps est rentabilisé par les effets obtenus. Au total, les acquis des étudiants se trouvent renforcés, et la quantité de programme traitée sur une longue période (plusieurs mois) n'est pas diminuée, par un mode de travail qui ne vise pas la rentabilité à très court terme.

Nous affirmons donc, et ce sera notre troisième hypothèse fondamentale, que le formateur ne doit pas hésiter à investir du temps de formation en tenant compte des propositions pédagogiques qui sont faites ici, car au bout du compte, l'efficacité de son enseignement en sera augmentée en qualité, sans être diminuée en quantité.

Hypothèses pour l'organisation de la formation

4°) *Sur le programme, la démarche, le niveau visé*

Même s'il est connu des étudiants, le programme de mathématiques prévu dans une formation est le plus souvent incompréhensible pour eux. Il est rédigé dans des termes mathématiques dont les étudiants ne connaissent pas le sens au départ : ils le découvrent au fur et à mesure de l'avancement de la formation. Ils peuvent donc savoir ce qu'ils ont fait, non ce qu'ils vont faire.

De plus, dans un programme, les titres de chapitre ne précisent ni le point jusqu'auquel l'étude théorique sera poussée, ni le genre de problèmes que les étudiants sont censés savoir résoudre à partir de cette théorie, ni le niveau de complexité qu'ils pourront rencontrer dans les calculs nécessaires à ces problèmes.

Enfin, la démarche qui sera suivie pour traiter le programme ne leur est en général pas communiquée. Quand il leur est proposé un exercice, ils ne connaissent pas l'objectif poursuivi par le formateur.

Programme, démarche, niveau visé ne sont donc connus que du seul formateur, surtout s'il n'y a pas de livre de référence (ou bien si le formateur ne suit pas la progression du livre).

L'ignorance dans laquelle sont les étudiants ne leur permet pas de situer leurs efforts et leurs résultats par rapport à l'ensemble de la formation. Nous faisons l'hypothèse que, si cela leur était permis, l'effort soutenu qui leur est demandé dans une formation de longue durée en mathématique en serait facilité.

Nous proposons pour cela de leur fournir, en sus du programme, un document comprenant :

— la liste des "capacités terminales" visées : ce qu'ils doivent être capables de faire à la fin de chaque grande étape de la formation ou de sa totalité ; c'est-à-dire les objectifs de la formation ;

— la liste des "capacités intermédiaires" nécessaires : ce dont les étudiants doivent devenir capables, au fur et à mesure de l'avancement de la formation, et qui leur sera nécessaire pour atteindre les "capacités terminales".

A l'inverse du caractère elliptique des programmes, ces listes doivent être rédigées de manière très détaillée, et préciser à la fois les types de pro-

blèmes qui seront posés aux évaluations et le niveau maximal des difficultés dans les calculs correspondants.

Toutefois, ceci ne sera vraiment utile aux étudiants que si ces capacités leur sont directement compréhensibles. Par exemple: "résoudre une équation du premier degré à coefficients entiers donnés" (ou rationnels donnés, ou etc.), n'est pas forcément explicite et compréhensible au départ pour eux, même si c'est plus précis que "équation du premier degré" (avec quel type de coefficients ? avec ou sans paramètre ? résoudre ou discuter ?). La compréhension des objectifs globaux d'une formation n'est pas toujours possible à l'avance.

C'est pourquoi nous proposons au moins, avec chaque problème ou groupe d'exercices posé au cours de la formation, de fournir des explications sur l'objectif poursuivi. Celui-ci peut être un entraînement à une technique, ou l'approfondissement d'un point déjà traité, ou encore l'exploration d'un problème général nouveau dans un cas particulier. Les termes utilisés pour formuler cet objectif peuvent et doivent être assez familiers aux étudiants pour leur permettre de se rendre compte de ce dont il s'agit.

Tout ceci nécessite bien sûr que tous ces objectifs soient clairs ou qu'ils soient préalablement clarifiés, ce qui n'est pas forcément un travail bref ni facile. Il faut noter cependant que c'est aussi une condition pour la cohérence de la formation, du point de vue du formateur (qui pourra éliminer l'inutile) autant que du point de vue du formé, qui saisira mieux les liens entre les différents moments de sa formation.

5°) Sur l'ordre de traitement des problèmes

Il arrive très souvent qu'à un problème relativement simple, corresponde un problème "réciproque" plus complexe.

Ainsi, il est assez simple de remplacer "a" par " $\sqrt{2}x$ ", et "b" par "1", dans les expressions suivantes :

$$(a^2 - b^2) \quad , \quad (a + b)(a - b)$$

et d'obtenir : $(2x^2 - 1) \quad , \quad (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)$

C'est en tout cas plus simple que de reconnaître dans $(2x^2 - 1)$ une différence de deux carrés, permettant de factoriser.

L'identification d'un cas "particulier" à une forme générale (ici : $a^2 - b^2$) est donc le problème réciproque, correspondant au remplacement des lettres par des expressions particulières dans une forme générale. (Voir aussi paragraphe b) ci-dessous)

De même, calculer la valeur de l'expression $(x^3 + x^2 + 1)$ pour $x = -3$ et obtenir -17 , est plus simple que trouver s'il existe des valeurs de x pour lesquelles cette expression vaut -17 , et si oui, les calculer — ce qu'on appelle, de manière condensée, résoudre l'équation $x^3 + x^2 + 1 = -17$.

La *résolution des équations* est donc le problème réciproque, correspondant à l'utilisation des expressions comme des *fonctions* (au sens où, à une valeur de x correspond une valeur de l'expression).

a) *Les cas simples*

Dans bien des cas (les plus simples en tout cas), le problème "direct" est celui où il suffit de mettre en œuvre une *technique* de calcul. Il a forcément une solution, unique. Le problème réciproque est moins automatique. Il n'a pas a priori une solution, et fait appel à une ou des *méthodes* plus complexes (2).

Ainsi, développer un produit de plusieurs polynômes (du premier ou du deuxième degré) est toujours réalisable effectivement ; tandis que mettre en produit de facteurs (du premier ou deuxième degré) un polynôme donné ne l'est pas toujours, du moins en pratique.

Du point de vue du mathématicien, c'est le problème réciproque qui est le plus intéressant, justement parce qu'il ne se résout pas à tout coup par l'application d'une technique immuable, parce qu'il peut être le sujet d'une recherche, d'un problème.

Du point de vue pédagogique, il devrait pourtant être évident que l'on ne peut comprendre le problème réciproque et sa résolution tant que l'on ne maîtrise pas le problème direct.

De plus, nous faisons l'hypothèse que :

— l'étude du problème direct permet d'analyser avec les étudiants les *difficultés* du problème réciproque ;

— la présentation du problème réciproque dans sa généralité permet de leur faire comprendre la distinction entre :

• *d'une part, les objectifs*. [Parmi les objectifs possibles, on peut en distinguer de plus ou moins importants :

- trouver s'il y a ou non des solutions (ou dans quels cas il y en a)
- trouver le nombre de solutions (quand il y en a)
- trouver une de ces (ou toutes ces) solutions de manière approchée
- trouver une de ces (ou toutes ces) solutions de manière exacte.]

• *d'autre part, les moyens d'atteindre chacun de ces objectifs : les méthodes*. [Il peut y en avoir plusieurs ou ne pas y en avoir ; on peut les distinguer suivant les cas, et suivant celui des objectifs que l'on veut atteindre.]

Il est par exemple utile d'expliquer que (contrairement aux craintes des étudiants) il n'y a pas une hiérarchie infiniment croissante de difficultés dans les méthodes de résolution, au fur et à mesure que croît le degré d'une équation. Cela peut les "rassurer" d'apprendre qu'il y a en réalité une rupture qualitative entre les degrés 1 et 2 d'une part (pour *chacun* des-

(2) *Méthode* : ensemble complexe d'opérations, supposant la mise en œuvre d'outils pour réaliser une production.

Outil, technique : ensemble précis d'opérations pour traiter un objet.

quels existe une méthode générale *exacte*), et les degrés 3,4,5,6, etc. d'autre part, pour lesquels n'existe qu'une méthode générale *approchée*, bien que certains cas particuliers puissent être résolus exactement (avec le cas spécial des degrés 3 et 4 pour lesquels des méthodes exactes existent mais sont trop complexes pour être utilisables). Cela situe leurs acquisitions dans un cadre limité et maîtrisable.

b) Un exemple simple

Pour utiliser les identités ("remarquables" ou non), les formules générales, les "règles", etc., il faut savoir identifier, "reconnaître" dans une écriture donnée, un cas possible d'une écriture comportant des paramètres.

Ces identifications comportent en général un certain nombre de difficultés qui sont de trois types principaux. Par exemple :

<i>identifier, dans l'écriture donnée ci-dessous</i>	<i>un cas de la forme générale ci-dessous</i>
(A) $(2x^2 + x)^2$ -----	} $(a + b)^2$
(B) $[\sin(2x) + 1]^2$ -----	
(C) $(a + b + c)^2$ -----	
(D) $x^2 - 5x + \dots$ -----	} $a^2 + 2ab + \dots$
(E) $x^2 - \frac{b}{a}x + \dots$ -----	
(F) $-x^3 + x - 2$ -----	$ax^3 + bx^2 + cx + d$
(G) $2x^2 - 1$ -----	$a^2 - b^2$
(H) $(x - \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ -----	$(a^2 - b^2)$ ou $(a^2 + b^2)$

Premier type de difficulté : (A), (B), (C), (H) utilisent des expressions plus ou moins complexes dans le rôle de "a" et "b" : $2x^2$; $\sin(2x)$; $(a + b)$ ou $(b + c)$; $(x - \frac{b}{2a})$; etc.

Deuxième type de difficulté : (D), (E), (F), (G) utilisent pour "a" et "b" des symboles qui n'apparaissent pas dans l'écriture donnée : $-\frac{5}{2}$; $-\frac{b}{2a}$; -1 ; 0 ; $+1$; $+(-2)$; $\sqrt{2}$; etc.

Troisième type de difficulté : (C), (E), (H) utilisent, dans le rôle de "a" et "b", des expressions contenant elles-mêmes a et b : $(b + c)$ dans le rôle de "b" [ou $(a + b)$ et c dans les rôles de "a" et "b"]; $-b/2a$ dans le rôle de "b"; etc.
On ne peut donc pas dire que l'on a donné à b la valeur "b + c" ou "- b/2a"...

Pour les étudiants, il s'agit de véritables difficultés (surtout celles du troisième type).

On peut cependant les diminuer, si l'on part des formes générales et que l'on y fait divers *remplacements* (ici de a, b, \dots , par des nombres, des lettres, des expressions), de façon à faire apparaître les différents cas possibles. Les difficultés du processus réciproque (l'identification) peuvent *ensuite* être analysées et traitées, en référence au processus direct du remplacement.

c) *Un exemple plus complexe*

Dans certaines méthodes, il est nécessaire de combiner la résolution de plusieurs problèmes, directs ou réciproques. Par exemple, dans l'étude des fonctions, on utilise :

— premier problème (direct) : avec une fonction explicite, obtenir sa dérivée explicitement. [*Le problème réciproque serait : avec une fonction explicite, obtenir ses primitives explicitement.*]

— deuxième problème (réciproque) : avec le tableau des signes d'une dérivée, obtenir le tableau de variations de la fonction. [*Le problème direct est : avec les variations d'une fonction, obtenir le tableau des signes de sa dérivée.*]

— troisième problème (réciproque) : avec le tableau de variations d'une fonction, obtenir le graphique de la fonction. [*Le problème direct est : avec le graphique d'une fonction, obtenir son tableau de variations.*]

Pour savoir étudier une fonction, il est évidemment nécessaire de maîtriser ces trois étapes. Ceci nécessite la maîtrise des trois problèmes directs, plus celle des deuxième et troisième problèmes réciproques. Un entraînement spécifique sur le deuxième et le troisième problèmes *directs* est donc bénéfique pour l'apprentissage de l'étude des fonctions ; et ceci indépendamment du calcul explicite des dérivées. (3)

Mais surtout, pour comprendre la méthode d'étude, il est nécessaire d'aller du troisième problème au deuxième puis au premier :

— le troisième montre l'intérêt d'un tableau de variations (*et la place seulement complémentaire qu'occupe un tableau de valeurs, forcément fini*) ;

— le deuxième en déduit l'utilité d'un tableau des signes de la dérivée ;

— le premier fournit alors la technique de calcul de cette dérivée.

(3) Seul, le premier problème réciproque est inutile : le calcul explicite des primitives. On peut cependant remarquer que le deuxième problème *réciproque* relève déjà de l'intégration : des *signes* d'une dérivée f' , on doit déduire les *variations* de la fonction f (c'est-à-dire d'une primitive de f'). Il peut donc être intéressant de traiter simultanément la dérivation et l'intégration, du moins qualitativement ou de façon numérique. Cf. le cours "M.A.10" organisé par le C.U.E.E.P. (préparation à l'E.S.E.U. par unités capitalisables, Université de Lille I).

Quel que soit le moment choisi par le formateur pour présenter les choses ainsi, cela ne peut qu'aider les étudiants à se faire une idée synthétique de la méthode, à se l'approprier.

Remarque 1 : Cela peut aussi les aider à situer l'intérêt et les limites de cette méthode :

— d'abord, par rapport à l'objectif global : avec une fonction explicite, obtenir un graphique. [*Ils pourront noter que dans certains cas simples, la méthode complète est inutile, les variations pouvant être trouvées par une analyse directe de la fonction (une composition de fonctions monotones par exemple)*];

— ensuite, par rapport à une des principales difficultés : étudier le signe de la dérivée. [*Ce n'est pas forcément facile, surtout si son expression est assez complexe. Ils pourront apprendre que, pour étudier le signe d'une expression, ici la dérivée, il est possible d'étudier cette expression (ou chacun de ses éventuels facteurs) comme une fonction, le graphique donnant le signe (quatrième problème)*];

— enfin, par rapport au problème réciproque global : avec un graphique, obtenir une fonction explicite. [*Il sera possible de leur expliquer que cela requiert des techniques entièrement différentes, et ne peut être réalisé que de manière approchée (sauf si le graphe de la fonction est défini géométriquement ; auquel cas il y a une solution unique, exacte, et la méthode relève de la géométrie analytique)*].

Remarque 2 : Le troisième problème *direct* soulève des questions essentielles à propos de la représentation graphique. En effet, un dessin étant forcément de dimensions finies, il ne représente qu'une partie de la fonction. Un tableau de variations, au contraire, symbolise la totalité de la fonction. Un dessin ne peut suffire pour obtenir un tableau de variations complet, à moins que :

— soit l'on ne s'intéresse qu'à la partie de la fonction effectivement représentée [*cas fréquent dans l'utilisation des fonctions pour modéliser le réel : en sciences expérimentales, économie, etc.*];

— soit l'on symbolise sur le graphique les parties illimitées de la courbe, qui ne peuvent être effectivement dessinées. Et c'est le rôle des asymptotes : permettre d'"imaginer" ce qui est "hors dessin".

Ainsi, dans le troisième problème réciproque (des variations au graphique), les étudiants verront mieux l'utilité de la représentation graphique des limites : les branches infinies.

6°) *Sur la rigueur dans le cours*

En mathématiques, la notion de "démonstration" occupe une place centrale. Cela ne signifie pas pour autant que cette notion soit claire, d'emblée, aux yeux des étudiants. Une démonstration peut être probante

pour le formateur ; elle n'est souvent, pour les étudiants, guère plus convaincante que le résultat lui-même.

Il faut noter, d'ailleurs, qu'une rigueur totale serait impossible dans les enseignements dont il est ici question. La mise au point d'un corpus entièrement déductif des mathématiques a été réalisée par des mathématiciens du plus haut niveau, et il serait ridicule de tenter de les enseigner ainsi. (4)

Certains concepts sont donc introduits de façon plus ou moins intuitive ; or leur caractère "intuitif" n'a, en général, rien d'évident. Le concept de "nombre réel" et celui de "limite", notamment, sont particulièrement complexes. (La preuve est historique : les mathématiciens ont éprouvé les plus grandes difficultés à leur donner un statut rigoureux)

Pour que se constitue chez les étudiants une certaine "compréhension intuitive" de ces concepts, pour que ce soient au moins pour eux des "notions" claires, il est nécessaire de les aborder par des exercices spécifiques. A partir de là, il est possible de passer un certain temps à leur fournir des explications complémentaires, de type qualitatif. **Nous faisons l'hypothèse qu'il est plus facile pour les étudiants d'accepter ce qui s'annonce explicitement comme une information non démontrée en cours, que ce qui est accompagné d'une démonstration non convaincante — à condition que ce qui est admis soit expliqué (et discuté au besoin) de façon que la signification en devienne claire pour eux.**

Ceci ne veut évidemment pas dire qu'il faut admettre tous les théorèmes importants et n'en démontrer que des conséquences immédiates ou triviales (Idem si l'on part d'axiomes). Notamment, il est inutile de "démontrer" un théorème s'il a été admis précédemment sous une forme différente, comme axiome ou théorème (faire passer cela pour une démonstration peut même relever de la mystification ; il vaut mieux montrer que : l'admettre sous une forme revient à l'admettre sous une autre ; c'est tout aussi rigoureux, et plus conforme à l'esprit de l'axiomatique).

Il faut se rappeler que dans le mot *démontrer*, il y a *montrer*, c'est-à-dire donner à voir, emporter la conviction. (A l'origine des progrès de la logique, il y a d'ailleurs toujours eu l'étude des raisonnements qui emportent la conviction (5)).

(4) Quiconque en doute, est convié :

— à s'excuser (comme le fait Bourbaki) d'utiliser des documents aux pages numérotées, avant d'avoir défini les entiers...

— à s'excuser (ce que ne fait même pas Bourbaki) de tenir des raisonnements avant d'avoir présenté les "axiomes logiques" sur lesquels il s'appuie, et déduit de ces axiomes chacun des "théorèmes logiques" qu'il compte utiliser... (cf. note 5 sur l'axiomatisation de la logique).

(5) De là vient qu'il puisse y avoir débat entre logiciens (mathématiciens et/ou philosophes). Le dernier de ces débats, qui a été très vif dans la première moitié de ce siècle, porte sur les fondements des mathématiques. Comme il est encore actuel, et que les recherches qu'il a suscitées ont eu d'énormes conséquences (invention des langages-machines ; étude de la classe des fonctions de N dans N effectivement calculables ; création de l'axiomatique mathématique actuelle ; etc.), nous en dirons quelques mots ci-dessous.

Une démonstration qui n'emporte pas la conviction des étudiants, parce qu'elle est trop complexe par rapport à leurs connaissances en logique, est inutile (Il en est de même pour une déduction immédiate à partir d'un théorème admis — ou d'un axiome — dont la signification n'est pas claire pour eux). Si, de plus, une telle démonstration est pour le formateur une preuve indiscutable, suffisante, alors les étudiants sont conduits à "admettre" la démonstration, en même temps que sa conclusion ; tout au plus poseront-ils des questions sur les étapes les plus difficiles pour eux. Mais cela risque de leur enlever la possibilité d'exprimer leurs questions sur la signification du résultat obtenu, voire même leurs objections sur sa validité, et sur la validité de ses conséquences.

Or, si un formateur veut mettre en cause le raisonnement d'un étudiant, comment va-t-il s'y prendre ? Avant de lui montrer (ou de lui faire chercher) son erreur, ne peut-il lui faire d'abord découvrir qu'il y a erreur, en mettant en cause le résultat obtenu ? Par exemple, en lui opposant un contre-exemple ? ou en lui montrant que l'on pourrait tirer de ce résultat des conséquences clairement fausses ? (cf. *exemple au paragraphe 7° ci-dessous*). Pourquoi les étudiants ne pourraient-ils faire de même, ne serait-ce que pour mieux comprendre, s'ils ne sont pas pleinement convaincus par un raisonnement du formateur ?

Ceci est d'ailleurs également valable dans les cas où la démonstration est convaincante si, par contre, sa conclusion étonne. Dans un tel cas,

Ce débat (et ces recherches) ont été déclenchées par la découverte, dans la "théorie des ensembles" de Cantor, de contradictions internes appelées "paradoxes logiques" (paradoxes de Russell, de Cantor, de Burali-Forti, etc.). Pour éliminer de tels risques de contradiction, deux directions ont été proposées et deux courants se sont constitués : les "formalistes", et les "intuitionnistes" (ou "constructivistes").

Les intuitionnistes (à la suite de Brouwer) ont considéré notamment que : l'existence d'un élément (ou d'une fonction) ne peut être prouvée qu'à la condition de construire une *procédure effective et explicite* permettant de calculer, en un nombre *fini* d'étapes, cet élément (ou l'image, par la fonction, d'un élément de départ donné). Il ne suffit donc pas de prouver que l'hypothèse d'inexistence conduit à une contradiction. Ainsi, le raisonnement par l'absurde est exclu des raisonnements qui emportent la conviction. Par contre, les formalistes (à la suite de Hilbert) acceptent le raisonnement par l'absurde et les démonstrations d'existence qui en découlent.

Ces deux courants règlent les raisonnements acceptables en *axiomatisant* non seulement les mathématiques (comme Euclide pensait l'avoir fait pour la géométrie) mais aussi la *logique*, en choisissant des *axiomes logiques* et des *règles de déduction* ; on obtient des *théorèmes logiques*. Ces derniers sont considérés comme les raisonnements qui emportent la conviction parce que : leur déduction est une suite *finie* d'énoncés, qui soit sont des axiomes, soit en découlent par application *mécanique* des règles de déduction. Le choix des axiomes logiques [par exemple : " $(A \text{ et } B) \text{ implique } B$ "] et des règles de déduction [par exemple : de " A " et " $A \text{ implique } B$ " on peut déduire " B "], correspond à ce qui est considéré comme raisonnement élémentaire intuitivement convaincant. Ainsi, pour les formalistes, "*(non non A) implique A*" est un axiome. Les intuitionnistes se limitent à un axiome moins fort.

Les formalistes utilisent aussi les tables de vérité. Les intuitionnistes ne peuvent que les refuser puisque pour eux : "*non A*" faux, prouve : "*non non A*" vrai, mais ne suffit pas à prouver : "*A*" vrai.

Pour plus de détails, nous renvoyons à :

S.C. KLEENE : "*Logique mathématique*" (Ed. A. Colin) p. 194-206.

tout mathématicien cherchera des preuves annexes, vérifiera sur des cas particuliers ou en tirant des conséquences vérifiables, etc. Ceci parce que, toujours, le risque d'une erreur de raisonnement existe (il y a eu, dans l'histoire, de fausses démonstrations du théorème des accroissements finis ; cf. aussi les contradictions de la théorie des ensembles). Mais aussi parce qu'un résultat étonnant oblige à modifier l'idée que l'on se fait des objets mathématiques que l'on manipule (leur *représentation* mentale). Il en est de même pour les étudiants, à leur niveau ; c'est pourquoi il est essentiel qu'ils puissent mettre en question, "tester", ce qu'ils apprennent.

Si ces questions et objections, toujours essentielles pour eux, n'ont pas la possibilité de s'exprimer et d'obtenir réponse, elle restent comme un "hiatus" dans leur esprit. Et ceci, même s'ils tentent de les oublier et cherchent à appliquer "automatiquement" les résultats. Quand toute leur attention se trouve concentrée sur l'utilisation correcte de la "règle" qu'ils ont admise sans la comprendre, ils ne se trompent en général pas. Mais dès qu'il s'agit de l'utiliser dans un autre contexte, où l'intérêt se porte sur un autre objectif, l'application automatique de la règle se trouve mise en défaut : l'erreur dite "d'inattention" vient régulièrement signaler que quelque chose fait toujours problème.

L'exigence d'une grande rigueur formelle dans la progression d'un cours réduit les étudiants à "l'acte de foi". Ceci ne favorise pas le développement de leurs capacités de raisonnement. On obtient ainsi le contraire de ce que l'on cherchait : la rigueur de l'enseignement entraîne le manque de rigueur de l'apprentissage (même si, par ailleurs, elle suscite un certain sentiment de sécurité : "*les maths, c'est rigoureux*").

Nous faisons donc l'hypothèse que la progression de la formation peut avantageusement être organisée en fonction de considérations principalement pédagogiques (à condition que cette organisation soit assez cohérente pour que les étudiants se sentent sur un "terrain" solide, sûr (non-insécurisant)).

En particulier, nous proposons que certains problèmes généraux soient abordés par l'étude de cas particuliers "typiques". Ceux-ci doivent être choisis suffisamment complexes pour que leur étude mette en évidence les différentes situations que l'on peut rencontrer dans le cas général. Il est alors commode d'admettre certains résultats n'ayant qu'un rapport lointain avec l'objectif visé, de façon à concentrer l'attention sur ce dernier, et à y consacrer tout le temps disponible.

Des moments de synthèse peuvent être prévus à quelques grandes étapes de la formation, pour une reprise des résultats accumulés et leur réorganisation dans un cadre plus déductif.

Ceci suppose évidemment que, à ces moments, les formés aient acquis une certaine connaissance des règles de logique, et en aient compris l'intérêt.

Hypothèses pour l'enseignement de la logique mathématique

7°) Sur le vrai et le faux

En examinant les travaux réalisés par les étudiants, le formateur est généralement à même de juger très rapidement si leurs résultats sont justes ou non (sans parler des cas où il connaît d'avance le résultat juste). Les étudiants se trouvent ainsi placés sous un regard extérieur qui sépare le vrai du faux, sans qu'eux-mêmes sachent comment. Ils sont dessais de tout contrôle sur leur propre travail.

Certes, ils savent en général que les formateurs aussi peuvent se tromper (car cela leur arrive pendant les cours). Mais ils ignorent que ces derniers possèdent des méthodes pour contrôler la validité de leurs résultats, retrouver les erreurs éventuelles, les corriger.

Ainsi, se constitue le mythe d'une mathématique sans faute, incarnée peu ou prou par les formateurs qui jugent en dernier ressort (y compris leurs propres erreurs). Et ce mythe creuse un fossé infranchissable entre les formés, qui se trompent, et les mathématiques.

Il est pourtant clair que des techniques de vérification peuvent être enseignées, au même titre que celles de calcul et de raisonnement. C'est en utilisant ces techniques que l'on apprend à repérer les impossibilités, les contradictions, et que l'on forme son regard aux "évidences" (ce mot si allègrement brandi devant des étudiants qui "n'en peuvent mais" et se feront traiter d'aveugles : points d'exclamation dans la marge des copies, "oh !" et autres onomatopées qui n'en apprendront pas plus à la victime).

De plus, si un résultat est faux, les techniques de vérification peuvent aider à repérer le lieu de l'erreur, et à trouver le résultat correct sans tout recommencer. Alors qu'en recommençant tout, il arrive fréquemment que l'on reproduise la même erreur.

Nous faisons l'hypothèse que, plutôt que de dire lui-même si un résultat est juste ou faux, le formateur doit fournir aux étudiants les moyens de le déterminer eux-mêmes, et (si le résultat se révèle être faux) de repérer le lieu de l'erreur.

L'autonomie de ces étudiants s'en trouvera augmentée ; et l'exigence de rigueur se manifestera concrètement par un travail sur le matériau mathématique qu'ils auront produit, ce qui est une vision plus correcte des mathématiques.

Analyse d'un exemple

Considérons l'égalité suivante, que bien des étudiants estiment vraie au premier abord :

$$\frac{a + c}{b + c} = \frac{a}{b}$$

Pour un étudiant habitué à “*raier le même nombre en haut et en bas*” en guise de méthode de simplification des fractions, le “*c*” appelle irrésistiblement le coup de crayon.

Ne rejetons cependant pas trop vite cette “recette”, elle contient une information importante, le mot *nombre* : elle suppose admis que la lettre *c* représente un nombre. Il est donc possible de se mettre d'accord sur le statut des lettres *a*, *b*, *c* : elles représentent des nombres, n'importe quels nombres. Dire que cette égalité est vraie, c'est affirmer qu'elle l'est avec n'importe quelles valeurs numériques de *a*, *b*, *c*.

A partir de là, pourquoi ne pas proposer de s'en assurer dans quelques cas particuliers, choisis par les étudiants ? Une telle vérification est une démarche qui relève directement de la logique “concrète” des étudiants. Obtenir un résultat négatif est une démonstration de leur erreur qui leur est immédiatement accessible. Or la probabilité d'un choix “heureux” (pour eux, c'est-à-dire rendant l'égalité vraie) est faible ; avec plusieurs choix différents, on peut la considérer comme nulle.

L'analyse d'un cas rendant l'égalité fausse, la comparaison avec une simplification correcte, permettent alors de tirer des conclusions : le nombre par lequel on “simplifie” doit être en facteur au numérateur et au dénominateur.

Mais la leçon principale n'est pas là : elle est dans la méthode qui a permis de prouver la fausseté de l'égalité : un seul cas particulier y suffit.

Ce n'est pas fini cependant, car deux erreurs (logiquement équivalentes d'ailleurs) peuvent encore découler de tout ce travail :

- croire qu'il suffit d'un cas particulier pour prouver la vérité d'une égalité ;
- croire qu'une égalité qui est fausse dans un cas est fausse dans tous les cas.

La question de départ (l'égalité est-elle vraie, c'est-à-dire toujours vraie ?) peut être retournée : l'égalité est-elle toujours fausse ?

Quelle que soit la méthode (recherche par essais choisis ou proposés, ou bien calcul algébrique), la découverte de cas où l'égalité est vraie permet de traiter simultanément les deux risques d'erreur :

— il y a des cas où l'égalité est vraie, et pourtant, elle ne l'est pas toujours ; un cas suffit à prouver la fausseté, mais un cas ne saurait suffire à prouver la vérité. Même de nombreux cas n'y suffisent pas. C'est le problème de la démonstration des identités.

— il y a des égalités qui sont fausses dans certains cas, mais vraies dans d'autres. C'est le problème de la résolution des équations.

Ainsi, le vrai et le faux trouvent leur statut à l'intérieur des mathématiques (ce qui est le début de la logique) et à l'intérieur du travail des étudiants, ce qui est le début de la pratique de cette logique.

8°) Sur l'apprentissage de la logique mathématique

La logique mathématique est quelque chose qui s'apprend, notamment au fur et à mesure de l'apprentissage des mathématiques.

C'est aussi quelque chose qui s'enseigne. Même les formes dites "élémentaires" du raisonnement déductif présentent une certaine complexité (et certains types de déduction — raisonnements par l'absurde, par récurrence — présentent des difficultés particulières).

Pour en favoriser l'apprentissage, nous faisons l'hypothèse qu'il est préférable de distinguer les difficultés d'ordre logique des difficultés de maniement des symboles (calcul algébrique par exemple), et de les traiter différemment au cours de la formation.

Analyse d'un exemple

Considérons une équation à une inconnue x , dont le référentiel est \mathbf{R} . Ce pourrait être l'une des équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} & 2x - 6 = 0 \quad (\text{A}) \\ \text{ou bien} & 4x^5 + x^3 = 5 \quad (\text{B}) \\ \text{ou bien} & \sqrt{1-x} = x - 1 \quad (\text{C}) \\ \text{ou bien} & |8x^2 - 5| = 5 - 16x \quad (6) \quad (\text{D}) \\ \text{ou bien} & \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = 0 \quad (\text{E}) \end{array}$$

(On pourrait tout aussi bien se servir d'une inéquation, même du premier degré à une inconnue. Ce serait au formateur désirant utiliser la suite de ce paragraphe avec ses étudiants de construire un exemple adapté à leur niveau, et de le traiter en tenant compte de leurs connaissances mathématiques)

L'équation considérée peut faire l'objet de traitements divers ; notamment :

— voir immédiatement une solution très simple, ou un ensemble de telles solutions ;

— essayer une liste de nombres pour savoir s'ils sont ou non solutions ;

(6) Remarque sur "la valeur absolue de a " : " $|a|$ " ; on la calcule indifféremment de l'une des quatre manières suivantes :

$|a| = d(0, a) =$ distance (sur l'axe des réels) entre les points représentant "0" et " a ";

$|a| = \sup(a; -a) =$ le plus grand des deux nombres " a " et " $-a$ ";

$|a| = \sqrt{a^2} =$ la racine carrée positive ou nulle de " a^2 ";

$|a| =$ soit " $+a$ " (si a est positif), soit " $-a$ " (si a est négatif), soit "0" (si a est nul).

La valeur absolue d'un nombre n'est donc *jamais négative*. Mais il serait faux de dire qu'elle est toujours positive, puisqu'elle peut être nulle.

— chercher un ensemble contenant *toutes* les solutions éventuelles [cet ensemble peut être fini (une liste) ou infini (une demi-droite, un intervalle, ...)]. (7)

La distinction entre ces trois traitements est d'ordre purement *logique*, et totalement indépendante des difficultés de leur mise en œuvre :

- le premier conduit à une affirmation du type suivant :
a: "si x appartient à tel ensemble, alors l'égalité est vraie"
- le deuxième conduit à une affirmation du type a , pour certains nombres, et pour d'autres à une affirmation du type suivant :
b: "si x appartient à tel ensemble, alors l'égalité est fausse"
- le troisième conduit à deux affirmations des types suivants :
c: "si x n'appartient pas à tel ensemble, alors l'égalité est fausse"
d: "si l'égalité est vraie, alors x appartient à tel ensemble"

(Avec une inéquation, il suffirait de remplacer le mot "égalité" par "inégalité").

(7) Le deuxième et le troisième des traitements proposés ici supposent, explicitement ou non, que l'inconnue x est en réalité une *variable* (variable à laquelle est imposée une condition fixant le domaine des valeurs cherchées, et non pas le domaine des valeurs *possibles* : ce dernier reste le "référentiel" de l'équation, c'est-à-dire le domaine dans lequel on cherche).

Premier traitement :

Pour A: $\{+3\}$; B: $\{+1\}$; C: $\{+1\}$; D: $\{0\}$; E: $\{0; +2\}$ mais il y a erreur pour $+2$ car le dénominateur aussi s'annule pour $x = +2$.

Deuxième traitement :

On essaie souvent les premiers entiers dans les équations polynomiales à coefficients entiers. On peut essayer les solutions "vues" — au premier traitement — par prudence (cf. E : on peut "voir" $+2$, qui pourtant n'est pas solution). On peut essayer les nombres trouvés au troisième traitement, s'il s'agit d'un ensemble *fini*; on peut en essayer certains s'il s'agit d'un ensemble *infini*. Les techniques d'approximation nécessitent l'essai de nombres de plus en plus proches des solutions cherchées. Etc.

Troisième traitement :

Pour A: $\{3\}$, obtenu par calcul algébrique.

Pour B: $]0, +\infty[$, car il est clair qu'il n'y a aucune solution négative ou nulle;

$[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}]$, obtenu en utilisant la majoration suivante :

les solutions de " $\sum_0^n a_k x^k = 0$ " vérifient : $|x| \leq \sup (1; \frac{1}{|a_n|} \cdot \sum_0^{n-1} |a_k|)$;

$\{\pm 1; \pm 5; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{5}{2}; \pm \frac{5}{4}\}$, si l'on cherche spécifiquement les solutions rationnelles.

Pour C: $\{1\}$, obtenu par des considérations de signes ($1-x \geq 0$; $x-1 \geq 0$);

$\{0; 1\}$, obtenu par "suppression" du radical.

Pour D: $] -\infty, -5/16[$, obtenu par des considérations de signes ($5-16x \geq 0$);

$\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 0; 2\}$, obtenu par "suppression" de la valeur absolue.

Pour E: $\mathbf{R} - \{2; 3\}$, car une solution ne doit pas annuler le dénominateur;

$\{0; 2\}$, obtenu par "suppression" du dénominateur.

L'examen de ces affirmations, leur comparaison, peut conduire aux notions d'implication ($a ; b ; c ; d$) et d'implications contraposées (c et d). Et l'on peut faire établir les implications contraposées de a et b .

En changeant les ensembles cités (ou avec E et les solutions "vues" $\{0 ; +2\}$) on peut encore faire apparaître qu'il y a des implications *vraies* et des implications *fausses* (et qu'une implication est fautive, s'il y a un cas où le "si..." est *vrai*, et où le "alors..." est *faux*).

Et en considérant ces affirmations indépendamment de leur véracité, on peut introduire enfin la notion d'implications réciproques l'une de l'autre (d'une part d , d'autre part a , avec le même ensemble), et celle d'équivalence logique (" d et a ", avec le même ensemble).

L'exigence de rigueur dans la résolution d'une équation (ou d'une inéquation) peut alors être analysée : il s'agit d'établir une équivalence logique du type " d et a " vrai (ou " a et c " vrai) pour le même ensemble. Celle-ci pouvant d'ailleurs être comprise de deux manières un peu (très peu) différentes :

- $\left\{ \begin{array}{l} a : \text{ tous les nombres trouvés sont solutions ;} \\ c : \text{ il n'y a pas d'autres solutions ;} \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} d : \text{ on a trouvé des nombres, qui sont les seuls susceptibles d'être} \\ \text{ solutions ;} \\ a : \text{ tous ces nombres sont effectivement solutions.} \end{array} \right.$

En résumé, une équation (ou une inéquation) à une inconnue peut conduire à des considérations logiques, à condition de laisser de côté l'apprentissage des méthodes de résolution, et des techniques de calcul correspondantes.

Remarque 1 : Les conclusions peuvent ensuite être utilisées pour analyser les diverses méthodes connues de résolution, ou en présenter de nouvelles :

- résolution par *implications successives* jusqu'à obtenir une liste de nombres (d) ; puis *essai* de chaque nombre de cette liste (soit a , soit b pour chacun) ;
- résolution par *découverte* immédiate d'un nombre de solutions (a) correspondant au nombre *maximum* possible (c) ;
- résolution par *encadrement* (d) puis *approximations* successives (a , mais avec des valeurs approchées) ;
- résolution par *équivalences logiques* successives (d et a simultanés), moyennant certaines *précautions* (pour les dénominateurs, radi-

caux, valeurs absolues, ...) (8);

— etc.

Remarque 2: Les conclusions d'ordre logique permettent également d'analyser d'autres aspects des mathématiques. On peut notamment distinguer les théorèmes avec implication ("si..., alors...") de ceux avec équivalence logique ("...si et seulement si...").

9°) Sur la présentation des résultats

Les techniques de vérification dont il a été question plus haut (*paragraphe 7°*) trouvent tout naturellement leur place dans l'apprentissage de la logique.

D'abord, la vérification des résultats trouvés en résolvant une équation peut être considérée comme le deuxième des trois traitements que nous avons analysés (essayer une liste de nombres pour savoir s'ils sont ou non solutions). Elle est logiquement nécessaire après un début de résolution par implications successives.

Ensuite, cette vérification est utile, y compris dans les cas où la résolution a été faite par équivalences logiques successives (et où, par conséquent, ce n'est pas une nécessité logique qui l'impose). Le risque d'erreurs dans ladite résolution, à lui seul, la justifie; c'est déjà une première raison.

Il y en a une deuxième: c'est que toute vérification met *directement* en rapport les résultats trouvés et l'énoncé du problème. Et ceci présente un intérêt dans l'apprentissage de la logique, à un autre niveau.

Les processus plus ou moins mécaniques de démonstration ou de calcul peuvent en effet finir par cacher qu'une conclusion est valable seulement par rapport aux hypothèses choisies.

Ils peuvent aussi cacher qu'une conclusion est réutilisable dans tous les cas où les hypothèses correspondantes sont remplies.

(8) Pour comprendre la nécessité de ces *précautions* (et leur choix), il faut préalablement avoir constaté, notamment sur des exemples, que sinon, on peut obtenir des nombres qui ne sont pas solutions; il faut aussi avoir vu un intérêt à ne pas devoir trier les nombres obtenus en essayant chacun (rapidité, cas d'une infinité de solutions, cas avec paramètres, généralisation...); et il faut surtout avoir analysé les raisons pour lesquelles il n'y a pas équivalence logique.

Par exemple, avec l'équation (C) ci-dessus: $\sqrt{I-x} = x-1$, on peut analyser les effets de la pseudo-solution (0) [obtenue par élévation au carré (sans précautions) des deux membres de l'égalité]:

$$\sqrt{I} = -1 \qquad I = (-1)^2$$

Contrairement à ce que l'on pourrait attendre (par analogie avec l'existential des fonctions), le problème ne vient pas d'un $(I-x)$ négatif sous le radical. Il vient d'une valeur négative de $(x-1)$, qui donne cependant le "bon" carré, car elle est trouvée à partir de:

$$I-x = (x-1)^2$$

Ainsi, l'on peut faire comprendre que la "précaution" à prendre, pour n'obtenir *que* les solutions, est $x-1 \geq 0$.

Nous faisons donc l'hypothèse que la présentation des résultats doit mettre directement en rapport les conclusions ou résultats obtenus avec les hypothèses ou données utilisées.

Nous verrons, à propos des exemples qui suivent, ce que cette hypothèse signifie, et quelles autres conséquences en découlent.

a) *Premier exemple*

Une solution d'équation à une inconnue n'a ni sens ni intérêt si elle est isolée de l'équation elle-même. Il est impossible de s'en servir. Le véritable résultat n'est pas non plus l'ensemble des solutions, mais une équivalence logique : entre l'équation et l'appartenance de l'inconnue à cet ensemble.

Considérons par exemple un problème de nombre de solutions d'une équation du deuxième degré en x , avec un paramètre m . La résolution de " $\Delta(m) = 0$ " n'a pas pour résultat un ensemble de valeurs de m ; cela donnerait l'impression d'en avoir fini avec le problème (au mieux, on ne saurait qu'en faire). Le résultat est :

$$\Delta(m) = 0 \iff m \in \{ \dots \}$$

De ce résultat, ainsi présenté, il est possible de tirer d'autres conclusions, notamment :

$$\Delta(m) \neq 0 \iff m \notin \{ \dots \}$$

et il est possible de revenir au problème posé (l'étude du signe de $\Delta(m)$).

b) *Deuxième exemple*

De même, une expression algébrique obtenue par des transformations d'écriture (développement, mise en produit de facteurs, etc.) n'a ni sens ni intérêt si elle est isolée de l'expression de laquelle on est parti. Le résultat est une égalité : entre l'expression de départ et celle trouvée à la fin.

Considérons, par exemple, un problème d'étude de signe d'un polynôme du deuxième degré en x , donné sous forme développée. La mise en facteurs n'a pas pour résultat un produit, mais l'égalité entre l'expression développée et le produit :

$$\dots x^2 + \dots x + \dots = \dots(x - \dots)(x - \dots)$$

De ce résultat, ainsi présenté, il est possible de tirer d'autres conclusions, notamment :

$$\dots x^2 + \dots x + \dots = 0 \iff x \in \{ \dots ; \dots \}$$

et de revenir au problème posé (l'étude du signe du polynôme).

Remarque : L'égalité obtenue n'est utile que parce qu'elle est vraie *pour toute valeur de x dans \mathbf{R}* . Pour que cela soit clairement indiqué dans l'écriture, il est utile de se servir du symbole " \forall " :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \dots x^2 + \dots x + \dots = \dots(x - \dots)(x - \dots)$$

La signification de l'égalité est ainsi plus évidente, et les techniques de vérification plus faciles à imaginer (remplacer "x" par des réels judicieusement choisis). La question du nombre de tels remplacements, suffisant pour être certain de l'égalité, peut alors être posée. De plus, avec cette présentation, il est signifié que la variable "x" peut être remplacée aussi par toute variable ou expression *représentant* des nombres réels. On peut donc en tirer d'autres conclusions :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbf{R} & \quad \dots y^2 + \dots y + \dots = \dots (y - \dots) (y - \dots) \\ \forall m \in \mathbf{R} & \quad \dots m^6 + \dots m^3 + \dots = \dots (m^3 - \dots) (m^3 - \dots) \\ \forall \alpha \in \mathbf{R} & \quad \dots \cos^2(\alpha) + \dots \cos(\alpha) + \dots = \dots [\cos(\alpha) - \dots] [\cos(\alpha) - \dots] \end{aligned}$$

c) Troisième exemple

On peut faire une analyse semblable avec les implications et les équivalences logiques. Considérons celles qui portent sur les limites. L'écriture suivante, isolée, n'a aucun sens :

$$\frac{1}{2x} \longrightarrow + \infty$$

Les écritures suivantes sont déjà meilleures :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} & \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} + \infty \\ 2x & \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+ \iff \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} + \infty \end{aligned}$$

Cependant, ce résultat est surtout utile pour des études de limites où c'est par exemple $x-3$ qui tend vers 0^+ (et non pas $2x$). Il est donc préférable d'indiquer clairement cette possibilité de remplacer $2x$ par $x-3$ (ou toute autre fonction à valeur dans \mathbf{R}), à l'aide du symbole \forall :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) [f \longrightarrow 0^+ \iff \frac{1}{f} \longrightarrow + \infty]$$

En effet, comme " $\forall x \in \mathbf{R}$ " signifie "pour n'importe quelle valeur de x dans \mathbf{R} (ou : expression à valeur dans \mathbf{R})", de même " $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ " signifie : "pour n'importe quelle fonction (ou : expression de fonction) à valeurs dans \mathbf{R} ". Il indique le champ de réutilisation de l'implication.

C'est là le rôle fondamental du symbole \forall . Nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire de l'enseigner et de le faire utiliser. Chaque écriture complète où il y a des variables (identité, inégalité, implication, équivalence logique) peut et devrait être précédée de ce symbole. (9)

C'est à chaque formateur de choisir le moment d'introduire le symbole \forall , et de faire apprendre sa manipulation. Il est certain que, dès ce moment, les étudiants comprendront mieux comment se servir d'un théorème ou d'une formule, et comprendront (pour la première fois probablement) qu'une méthode ou un résultat particulier peut en réalité servir à une famille de problèmes.

(9) Cf. J. ADDA : "L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques" (NICO, 1975).

Ainsi, l'utilisation du symbole \forall peut amener les étudiants à une meilleure compréhension de l'équivalence logique et de l'implication (et éventuellement servir d'introduction aux tables de vérité). (10)

Hypothèses pour l'enseignement de l'écriture symbolique

Le travail mathématique s'effectue depuis quelques siècles à l'aide d'écritures symboliques qui présentent d'énormes avantages (11). A ces avantages correspondent cependant un certain nombre de difficultés d'ordre pédagogique, qu'il s'agit de pallier.

10°) *Sur les automatismes*

Le premier avantage de l'écriture symbolique est de condenser en un petit nombre de signes des significations complexes, et de permettre un traitement quasi "automatique" de ces signes.

Ces jeux d'écriture laissent cependant au second plan la compréhension des processus mathématiques sous-jacents. Une certaine "mécanique" peut se constituer... et déborder son champ de validité.

Pour éviter la constitution de ces mécanismes totalement automatiques (ou bien pour remédier à ceux déjà constitués chez les étudiants), il est nécessaire de rétablir l'exigence d'une signification mathématique claire pour toute manipulation des symboles.

Pour cela, nous faisons l'hypothèse qu'il y a avantage à briser le monopole de l'écriture algébrique, en jouant sur plusieurs modes de représentation plus ou moins formalisés (12). En particulier, nous proposons au formateur d'utiliser ce que nous appelons les schémas d'opérateurs. Ils peuvent en effet jouer le rôle de langage intermédiaire entre le français (13), l'arithmétique (12), la manipulation des calculatrices programmables (14), et l'écriture algébrique. (14)

(10) Pour l'utilisation pédagogique des tables de vérité, cf. J. ADDA: "Initiation au langage mathématique: analyse d'une expérience d'enseignement" (diffusé par l'A.P.M.E.P.).

(11) Quiconque douterait des avantages de l'emploi des symboles est convié à résoudre l'équation $x^2 + 3x - 2 = 0$ par la mise en forme canonique (comme on l'apprend au lycée), mais en effectuant tout avec des mots. Nous lui donnons l'équation traduite en mots: le carré de l'inconnue, plus trois fois l'inconnue, moins deux, égale zéro.

(12) Cf. E. LOOSFELT et D. POISSON: "Mathématiques pour la formation d'adultes" (diffusé par l'A.P.M.E.P.).

(13) Cf. paragraphe 15° sur la transcription du français (oral, notamment) en schémas d'opérateurs.

(14) Cf. R. DIDI et M. FERRAND: coll. "Thèmes mathématiques et calculatrices" (éd. Bordas).

Cl. ROUXEL: "Rapport sur l'utilisation des calculatrices programmables" (diffusé par le Centre de formation de formateurs du C.N.A.M.).

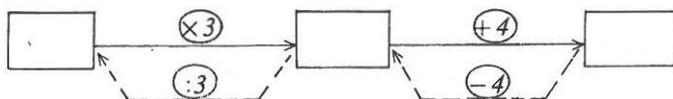
"Utilisation des schémas d'opérateurs en algèbre élémentaire" (dans cette brochure).

Analyse d'un exemple

Considérons (dans \mathbf{R}) le schéma suivant, à deux opérateurs arithmétiques :



On peut compléter ce schéma avec les opérateurs arithmétiques réciproques :

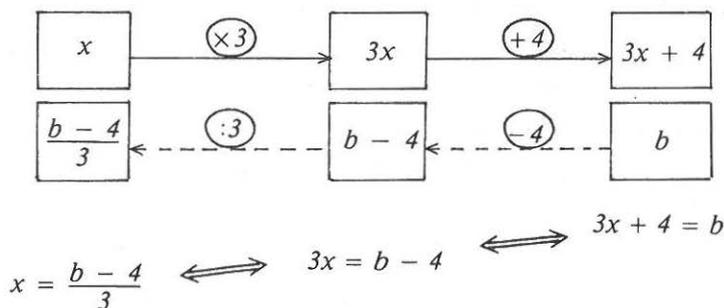


Si l'on choisit une entrée (6, par exemple), on trouve une sortie (22) ; c'est l'aspect "fonction".

Si l'on appelle l'entrée "x", la sortie s'écrira : " $3x + 4$ "; le mode de correspondance s'écrira : $x \longmapsto 3x + 4$; on obtient ainsi l'écriture symbolique des fonctions.

Si l'on choisit une sortie (5, par exemple), on peut trouver une entrée ($1/3$) ; c'est l'aspect "équation". (On peut noter que l'inconnue, comme la variable, est représentée par l'entrée ; on ne change que le sens de lecture du schéma).

Si l'on appelle la sortie "b", l'entrée s'écrira : " $\frac{b-4}{3}$ "; en mettant ceci en rapport avec les résultats précédents, on obtient l'écriture symbolique des équations, et de leur résolution algébrique :



Conclusion : Des règles du calcul algébrique sont ici traduites par l'utilisation des opérateurs réciproques. Elles ne sont donc pas de pures manipulations de signes.

Remarque : L'entrée peut aussi être appelée "y", "t" ou autrement ; et l'on peut faire aussi entrer " $-x$ ", " $x + 2\pi$ " ou " $\pi - x$ ". Ceci présente

de nombreux avantages, dans la composition des fonctions, la recherche d'une fonction réciproque, l'étude des symétries et des périodes, et toute occasion où un changement de variable est utile ; et aussi pour la physique, où les variables portent dans chaque cas des noms correspondants à leur signification ("t" pour le temps, "v" pour la vitesse, "I" pour l'intensité, etc.).

On remarquera aussi que l'on peut appeler X la case *intermédiaire*, et faire ainsi le changement d'inconnue (ou de variable) $X = 3x$. Dans ce cas précis, cela ne présente pas grand intérêt pratique ; mais c'est sur de tels schémas que l'on peut faire comprendre le "pourquoi" et le "comment" de cette technique.

11°) *Sur le statut des lettres en algèbre*

Dès que l'on manipule non seulement des nombres, mais aussi des lettres, celles-ci posent un problème : selon les circonstances ce sont des inconnues, ou bien des variables, ou bien des paramètres. Le traitement de ces lettres (et des écritures qui les contiennent) dépend étroitement de leur statut.

Si ce statut n'est pas précisé explicitement par le formateur, si les différents cas possibles ne sont pas distingués par les étudiants, ceux-ci ne peuvent que s'embrouiller... ou appliquer mécaniquement des procédés appris. Leur faculté d'analyse des écritures mathématiques, leur autonomie de réflexion ne peuvent qu'en être amoindries.

Nous faisons l'hypothèse qu'il ne faut pas attendre le moment où ils se trouveront confrontés avec le problème de plusieurs lettres ayant des statuts différents pour leur fournir les moyens de s'y repérer.

Nous proposons comme moyens :

— des explications sur le statut des lettres déjà manipulées [*notamment les "variables"*.]

— une notation symbolique indiquant clairement ce statut [*notamment, pour les variables, l'utilisation du symbole "∨"*. (15)]

— des exercices sur le maniement de cette notation, permettant aussi de revenir sur les explications données et de les éclairer d'exemples [*notamment, avec le symbole ∨, "remplacements" des variables par des nombres, d'autres lettres, des expressions*. (16)]

Lors de l'introduction de tout autre type de lettre, des explications du même genre sont évidemment indispensables. Il est nécessaire aussi de faire bien comprendre les différences entre le statut nouvellement introduit et les statuts déjà connus.

(15) Cf. paragraphe 9°, sur la présentation des résultats.

(16) Cf. paragraphe 5°b, sur les processus d'identification.

Remarque : Pour comprendre pleinement la notion d’“inconnue”, il faut sans doute avoir acquis préalablement celle de “variable”. Une inconnue, en effet, est une variable à laquelle est imposée une (ou plusieurs) condition(s) fixant le domaine des valeurs cherchées, et non pas le domaine des valeurs possibles (le “référentiel”, c’est-à-dire le domaine dans lequel on cherche). Ce qui est recherché, donc inconnu, c’est non pas la lettre elle-même, mais les (l’ensemble des) valeurs satisfaisant aux conditions. On peut donc dire que la lettre est *traitée comme* une inconnue, mais non pas qu’elle *est* une inconnue. D’ailleurs, dans la recherche de l’ensemble de définition d’une fonction (explicite) de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , la variable est traitée comme une inconnue satisfaisant à diverses conditions (dénominateurs non-nuls, expressions sous radical non-négatives, etc.). A l’intérieur de l’ensemble des solutions, elle n’en reste pas moins fondamentalement une variable (et même dans tout \mathbf{R} , puisqu’on peut prolonger la fonction, par exemple par continuité). Elle peut être à nouveau traitée comme une inconnue dans les problèmes du type “ $f(x) \in E$ ” (E , sous-ensemble donné de \mathbf{R}). Etc. De même, un paramètre peut être traité comme une inconnue, dans le cas où on lui impose une (ou plusieurs) condition(s). Il n’en reste pas moins un paramètre (pouvant par exemple remplir d’autres conditions, ou aucune).

Au total, on peut dire qu’il y a deux statuts fondamentaux : variable et paramètre ; et à l’intérieur de chacun, un traitement possible, de façon provisoire ou définitive, comme une inconnue.

Ainsi, quand on passe de l’arithmétique à l’algèbre, et qu’on utilise des lettres comme “inconnues” dans des problèmes dits “concrets”, il est préférable de dire : *si le rectangle fait x mètres de long, alors...* (plutôt que : “soit x la longueur du rectangle, exprimée en mètres ; on sait donc que...”). Cela rend plus clair que l’inconnue est un nombre (et non pas la grandeur elle-même), et qu’il faut donc choisir une unité (on évite ainsi l’erreur-type : “soit L la longueur du rectangle”). De plus, cela permet de calculer progressivement, comme en arithmétique, les expressions nécessaires à la mise en équation : *alors le périmètre fait $2(x + \dots)$ mètres, la surface est de $(x \times \dots)$ mètres carrés, etc.* ; on peut ainsi vérifier la cohérence des unités, puis montrer progressivement pourquoi il n’est pas toujours nécessaire de les écrire. (17)

12°) Sur l’introduction des conventions d’écriture

a) Les cas “commodes”

Certaines notations mathématiques ont été choisies en fonction de leur facilité de manipulation, c’est-à-dire en fonction des propriétés de ce qu’elles symbolisent.

Ainsi, les *exposants négatifs* (et *fractionnaires*) sont des notations commodes. Ils ne nécessitent pas l’emploi de règles autres que celle sur les

(17) Pour plus de détail, cf. M. BRUSTON : “Inconnues et Variables”, dans cette même brochure.

exposants dans N , et sur le calcul dans Z (et Q). Les règles sur les exposants dans N s'étendent aux exposants dans Z (et Q).

Si ce n'était pas le cas, ces notations seraient une source d'erreurs, un véritable piège. C'est dire que la décision de les utiliser n'est pas neutre : elle présuppose l'extension des règles sur les exposants.

Ceci n'est pas sans effet sur les étudiants. Après avoir présenté de telles notations, il devient difficile de leur faire comprendre la nécessité d'une démonstration pour l'extension des règles correspondantes : cette extension leur est suggérée, imposée, rendue évidente par l'emploi des notations ; elle saute aux yeux, au sens propre.

Plutôt que d'asséner à tout prix une démonstration dont l'utilité ne peut être vue, nous faisons l'hypothèse qu'il faut :

— soit introduire d'emblée la notation nouvelle et admettre l'extension des règles déjà connues ;

— soit inventer une notation provisoire pour démontrer des propriétés qui justifieront l'emploi de la notation nouvelle (c'est-à-dire celles qui, une fois traduites, exprimeront l'extension des règles déjà connues) ; et n'introduire cette notation qu'après avoir fait constater sa commodité ;

— soit prendre le temps d'expliquer le processus historique : la démonstration de certaines propriétés, puis l'invention d'une notation commode. Ceci peut conduire tout au plus aujourd'hui, en acceptant la notation, à vérifier que le choix était bon, que son utilisation n'entraîne aucune erreur.

De telles vérifications comportent évidemment les mêmes exigences de rigueur que des démonstrations. Elles en diffèrent cependant sur un point (qui n'est pas d'ordre logique) : elles s'appuient sur une écriture qui rend certain, aux yeux des étudiants, ce que l'on cherche à prouver.

Alors qu'en général, la difficulté pédagogique est d'emporter leur conviction, avec les notations commodes elle vient de ce que cette conviction est acquise d'avance.

b) *Considérations générales*

En général, les conventions d'écriture ne sont pas particulièrement faciles à manipuler (cf. paragraphes 13° à 17°). Si l'introduction d'une notation nouvelle coïncide avec l'étude d'un problème nouveau, les deux difficultés s'ajoutent... et les incompréhensions se multiplient.

Par contre, si un problème nouveau est présenté, et exploré, en utilisant seulement des écritures déjà connues, cela a plusieurs conséquences intéressantes :

— la familiarité avec l'écriture permet de concentrer l'attention et la réflexion des étudiants sur l'étude du problème ;

— ceci conduit à formuler les résultats obtenus avec des mots plus qu'avec des signes, ce qui les rend plus clairs (surtout si le formateur fait l'effort de s'exprimer en phrases courtes et de n'employer que des tournures grammaticales simples) ;

— les notations peuvent être introduites à la fin ; elles désignent alors des choses que les étudiants ont déjà manipulées, et qui leur sont devenues quelque peu familières. La traduction des résultats obtenus dans la nouvelle symbolique peut leur apparaître comme un avantage, puisqu'elle permet d'exprimer ces résultats de manière condensée et les résume en certaines manipulations de signes.

Nous faisons donc l'hypothèse que le formateur a avantage à retarder la présentation de ces conventions d'écriture, par rapport à ce qui se fait d'habitude. (18)

Hypothèses pour l'analyse des difficultés d'écriture

13°) *Sur l'écriture $f(x)$ et l'écriture des fonctions usuelles*

Dans certains cas, les conventions d'écriture sont particulièrement difficiles à manipuler et induisent en erreur les étudiants qui ne sont pas pleinement familiarisés avec elles.

L'écriture moderne des fonctions (avec $f(x)$) et l'écriture classique des fonctions usuelles sont dans ce cas.

a) *Les écritures du type $f(x)$*

Dans de nombreux cas usuels et dans le cas général, le nom de la fonction est écrit à gauche de celui de la variable : " $f(x)$ ", " $\sin(x)$ ", " $\exp(x)$ ", " $\text{Log}(x)$ ",... Or, en français, ce qui s'écrit à gauche est lu — et en général écrit — avant ce qui s'écrit à droite. On peut donc dire que, dans ces écritures, le nom de la fonction vient *avant* le nom de la variable. (19)

On peut tenter de justifier cette convention en disant que la donnée de la fonction est première par rapport au choix d'une lettre comme variable (ou d'un nombre comme valeur de départ). On peut cependant remarquer que, sur une calculatrice, la touche fonctionnelle se tape après la touche de mémoire ou l'affichage d'un nombre ; et cela bien que l'existence des touches fonctionnelles soit évidemment première par rapport au choix d'une mémoire ou d'un affichage. De même dans l'utilisation des graphiques : le choix d'une abscisse particulière précède la recherche du point correspondant de la courbe ; cela ne contredit en rien le fait que la fonction est une donnée première par rapport à ce travail. Et l'on pourrait citer de nombreuses autres pratiques semblables.

(18) Cf. paragraphes 10°, 15°, 16°, sur l'utilisation des schémas d'opérateurs pour traiter les difficultés liées aux automatismes et aux conventions d'écriture.

(19) Toute l'analyse qui suit concerne les étudiants qui apprennent les mathématiques *en utilisant le français*, ou toute autre langue qui *s'écrit de gauche à droite*. Elle serait fautive pour un enseignement utilisant une langue qui s'écrit de droite à gauche, l'arabe par exemple.

Les écritures du type $f(x)$ ou $f(3)$ ne peuvent donc pas s'expliquer par le fait que f est une donnée première par rapport à x ou 3 . (20)

On peut remarquer, au contraire, que les formulations les plus claires, correspondant le mieux aux pratiques citées ci-dessus, sont :

“ x , par f , donne ...”

“à x , f associe ...”

“à x , f fait correspondre ...”

Ainsi x , par f , donne une image qui s'écrit... “ $f(x)$ ” : c'est-à-dire dans l'ordre exactement inverse à celui dans lequel les lettres x et f apparaissent dans la phrase.

On peut remarquer enfin que cette malencontreuse convention d'écriture est l'unique raison pour laquelle la composition des fonctions s'écrit de droite à gauche (c'est-à-dire dans l'ordre exactement inverse à celui de la langue française).

Dans les écritures du type $f(x)$ [“ $\sin(x)$ ”, “ $\exp(x)$ ”, “ $\text{Log}(x)$ ”,...] il y a donc inversion de l'ordre de l'écriture par rapport à l'ordre “logique”, commode, des idées et de la pratique mathématique. (21)

Pour essayer de diminuer la difficulté pour les étudiants, nous faisons l'hypothèse qu'il faut leur dire clairement que le choix de cette convention d'écriture est mauvais (même si le poids des habitudes empêche d'en changer), et leur faire constater les risques d'erreur qui en découlent. (22)

b) Comparaison avec d'autres fonctions usuelles

Nous proposons au formateur une comparaison entre différentes écritures de fonctions usuelles, qui diffèrent de la convention générale type “ $f(x)$ ”. Cela peut lui être utile pour analyser les difficultés des étudiants et les aider à les surmonter.

(20) Voir au paragraphe 14°b un essai d'explication historique (en particulier la note 24).

(21) A l'origine d'un très grand nombre d'erreurs d'écriture (et/ou de lecture) de la part des étudiants, il y a cette inversion. Ce sera analysé plus en détail aux paragraphes 14° et 15°.

(22) On peut noter le même phénomène d'inversion pour la notation décimale, qui nous vient des Arabes. En arabe classique, “432” se lit comme : “deux trente quatre cent”. Pour nous, le chiffre des unités se lit et s'écrit en dernier. Si l'on écrit un nombre entier sans le “parler”, ou bien si l'on “épelle” ses chiffres (quatre, trois, ...,), ses chiffres n'acquiescent une signification qu'à la fin : au moment où, tous les chiffres étant donnés, celui des unités étant donc identifié, on sait pour chacun des autres s'il s'agit de centaines, milliers, dizaines ou millions. La contradiction apparaît clairement quand on effectue des opérations arithmétiques directes (addition, multiplication des entiers) : alors que c'est de gauche à droite que l'on écrit les deux nombres à additionner ou multiplier, il faut travailler de droite à gauche. Quand on veut additionner plusieurs entiers, il faut d'ailleurs disposer leurs chiffres respectifs les uns au-dessus des autres à partir de la droite ; c'est plus commode si on les écrit de droite à gauche. Cette écriture décimale n'est pas adaptée aux langues qui s'écrivent dans le sens du français. On peut se demander si cela ne joue pas un rôle dans les difficultés d'apprentissage de l'arithmétique.

Les puissances : Dans l'écriture x^4 , la fonction *puissance 4* est indiquée par la place exponentielle du chiffre 4. Cet exposant s'écrit à droite et se lit *après* le x .

Cette convention d'écriture suit donc presque l'ordre "logique" de l'idée (ayant x , je l'éleve à la puissance 4). Les difficultés d'utilisation tiennent seulement à l'absence de tout symbole pour désigner la fonction, et au fait que c'est un petit décalage vers le haut qui en tient lieu (on peut noter que, *pour faciliter la lecture*, les mathématiciens ont l'habitude d'utiliser des caractères plus petits pour les exposants). L'écriture des fonctions-puissances reste cependant plus facile à manipuler que l'écriture du type $f(x)$.

Les exponentielles : Dans l'écriture e^x , la fonction *e-puissance* est indiquée par le e et la place exponentielle du x . Elle s'écrit donc *avant* le x , avec de plus le décalage de ce x vers le haut.

Cette convention d'écriture est donc légèrement plus complexe que la convention générale. La difficulté augmente cependant au fur et à mesure que l'écriture de l'exposant se complique, lui-même devenant une fonction de x : par exemple dans :

$$e^{2x} \quad ; \quad e^{-x} \quad ; \quad e^{x \text{Log}(a)} \quad ; \quad \dots$$

De plus, si l'on utilise des caractères plus petits pour les exposants, comme cela se fait pour les fonctions puissances, alors la variable devient difficile à repérer dans la formule de la fonction. A l'usage, on constate que les étudiants manipulent plus difficilement l'écriture des exponentielles que la convention générale.

Il est à noter que l'exponentielle peut aussi s'écrire $\exp(x)$. Cette convention n'entraîne pas de difficultés supplémentaires pour les étudiants, par rapport à la convention générale. A ce titre, elle est plus commode pour eux que l'écriture e^x (bien que les règles de calcul sur les puissances s'y transposent moins facilement).

Les racines : Dans l'écriture $\sqrt[3]{x}$, la fonction *radical troisième* (ou *racine cubique*) est lue *avant* le x ; de plus, elle s'écrit non seulement à gauche mais aussi *au-dessus* de ce x .

Cette convention d'écriture est donc plus difficile à manipuler que la convention générale. Le concept de "racine" est certes difficile, mais il y a bien des erreurs qui sont dues uniquement à un allongement ou un raccourcissement de la barre horizontale, faisant entrer ou sortir du symbole "radical" ce qui est écrit à sa droite.

On peut remarquer que les étudiants préfèrent en général la notation en "*puissance 1/3*", à partir du moment où elle leur a été présentée. Le concept de racine n'en est pourtant pas simplifié. Leur préférence tient uniquement au fait qu'ils manipulent plus facilement l'écriture des fonctions-puissances.

L'inversion : Dans l'écriture $\frac{1}{x}$, la fonction *d'inversion* ("un sur") est lue *avant* le x ; de plus, elle ne s'écrit ni à gauche, ni à droite, mais *au-dessus* de ce x , qui se retrouve ainsi placé *au-dessous* de la ligne d'écriture. Cette convention d'écriture est donc d'un type tout à fait différent de la convention générale.

Cette disposition verticale n'est pas celle de la langue écrite dans notre culture ; *cela peut sans doute contribuer à expliquer les difficultés générales des étudiants dans l'apprentissage du calcul sur les fractions.*

Cela ne suffit cependant pas à expliquer qu'ils trouvent *l'écriture* " $\frac{x}{3}$ " plus commode que " $\frac{1}{3}x$ "; et " $3x-1$ " plus facile à lire que " $\frac{3}{x}$ "; c'est que la place de x dans la lecture et l'écriture n'est pas la même : il est plus commode que x soit écrit et lu en premier, et si ce n'est pas le cas, il est plus commode qu'il soit sur la ligne d'écriture, plutôt qu'en dessous.

La valeur absolue : Dans l'écriture $|x|$, la fonction *valeur absolue* est à lire avant le x , alors qu'elle s'écrit *à la fois à gauche et à droite* de ce x . Ceci nécessite une lecture globale, beaucoup plus difficile que dans tous les cas précédents.

On sait que les étudiants ont une certaine difficulté à acquérir les techniques de manipulation des parenthèses, crochets, etc. Or, ici les barres verticales jouent *à la fois* le rôle de parenthèses (par exemple dans " $|2x + 3|$ ") et un rôle fonctionnel.

Ceci explique, au moins en partie, la difficulté d'appropriation de la notion de "valeur absolue". En effet, cette difficulté ne tient pas seulement au concept lui-même ; présenté avec une écriture moins difficile, il est beaucoup plus aisément compris : par exemple sous l'une des formes suivantes :

$$\text{sup}(x; -x) ; \text{ ou bien : } d(0,x) ; \text{ ou bien : } \sqrt{x^2}$$

En résumé, la convention générale (écriture du type $f(x)$) présente une difficulté certaine. Sauf l'exception des puissances, les autres conventions correspondant à des fonctions usuelles sont plutôt plus difficiles encore à manipuler, les pires étant celles où la fonction s'écrit à l'aide de symboles placés à la fois à gauche et à droite de la variable.

Pour que ces conventions d'écriture ne constituent pas à elles seules un obstacle à l'apprentissage des mathématiques, nous proposons au formateur d'analyser, avec les étudiants, leurs propres productions écrites, afin de bien mettre en évidence les difficultés objectives de lecture et d'écriture de ces fonctions.

14°) Sur la distinction entre "image" et "fonction"

a) Première analyse

L'écriture suivante : $f(x)$, se lit "f de x". Elle signifie : "l'image de x par f". Nous disons bien : "de x par f", dans cet ordre (c'est-à-dire dans l'ordre logique, commode des idées et de la pratique mathématique ; cf. paragraphe 13° a).

L'expression suivante, d'ordre contraire : "l'image, par f, de x", est moins naturelle, grammaticalement plus complexe, bien qu'elle soit couramment employée aujourd'hui. Puisque le mot "image" est tiré de l'optique (23), posons-nous la question : dira-t-on : "l'image, dans le miroir, du point M" ? ou dira-t-on : "l'image du point M dans le miroir" ?

L'expression : "l'image, par f, de x", ne se justifie donc que de suivre l'ordre de l'écriture : $f(x)$. Ce n'est pourtant pas une raison suffisante pour l'employer car, à l'oral, elle présente une ambiguïté gênante. Puisque rien ne distingue, *oralement*, "f de x" et "f(x)", rien non plus ne distingue "par f, de x" et "par f(x)" (rien sauf d'imperceptibles ruptures de rythme, correspondants oraux de la ponctuation écrite). Quasiment rien ne permet donc de distinguer les deux expressions suivantes :

"l'image, par f, de x"
"l'image, par f(x)"

Cela peut suffire à provoquer une certaine confusion.

Considérons ainsi la phrase suivante, dite à haute voix :

" $f(x)$ est l'image, par f, de x" (A)

Rien ne la distingue de celles-ci :

"f de x est l'image, par f, de x" (B)

" $f(x)$ est l'image, par f(x)" (C)

Or, les phrases (B) et (C) sont des cercles vicieux. L'emploi oral de la phrase (A) ne peut donc qu'embrouiller les étudiants.

Il est nettement plus clair de *ne pas suivre* l'ordre de l'écriture. La phrase suivante :

"f(x) est l'image de x par f"

peut être entendue ainsi :

"f de x est l'image de x par f"

mais il n'en résulte pas les mêmes risques de confusion.

(23) Le mot "image" vient de l'optique, par analogie avec l'image d'un point. Il serait préférable de l'expliciter pour les étudiants, car ce mot est pris usuellement dans un sens global (photographique, par exemple), ou au sens de "représentation" (comme dans "vocabulaire imagé", "image mentale", etc.). Ainsi, le graphique est une image — au sens usuel — de la fonction.

b) Deuxième analyse

Considérons les fonctions usuelles, et en particulier l'écriture suivante : $\sin(60^\circ)$. Elle peut être lue à haute voix de plusieurs manières :

- | | | |
|----------------------|--------------------------|-----|
| “ <i>sinus</i> | <i>soixante degrés</i> ” | (A) |
| “ <i>sinus de</i> | <i>soixante degrés</i> ” | (B) |
| “ <i>le sinus de</i> | <i>soixante degrés</i> ” | (C) |

Dans l'expression (C), à cause de l'article *le*, le mot *sinus* désigne l'image $(0,5)$, et non pas la fonction (*sin*). Dans (A), et surtout dans (B) (*sinus de 60°*), on peut se demander si le mot *sinus* ne désigne pas aussi l'image, plutôt que la fonction [comme ce devrait être le cas, si on lisait $\sin(60^\circ)$ de la manière dont on doit lire $f(x)$]. Le mot *sinus* est donc ambigu, désignant selon le contexte tantôt l'image, tantôt la fonction (d'où l'expression *la fonction-sinus* pour lever l'ambiguïté dans certains cas).

L'écriture $\sin(x)$ est parfaitement cohérente avec la lecture (C) : “*le sinus de x* ” (où le mot *sinus* désigne l'image et non pas la fonction). Elle n'est cohérente avec les lectures (A) : “*sinus x* ” et B : “*sinus de x* ”, que si celles-ci sont considérées comme des abréviations de (C), avec la même signification pour le mot *sinus*.

L'écriture $f(x)$, et sa lecture “*f de x* ”, ont hérité des formulations précédentes. De là semble venir l'écriture de la fonction f à gauche de la variable. Mais la préposition *de* (dans “*f de x* ”) continue à évoquer le cas “*sinus de x* ”, où le mot *sinus* désigne plutôt l'image (celle *de x* précisément). (24)

D'ailleurs, à l'origine, c'est bien *l'image* qui est “fonction” *de x* ; on calcule encore $\cos(2x)$ en *fonction de $\sin(x)$* , ou de $\cos(x)$; on étudie un nombre de solutions *en fonction d'un paramètre*, et un signe en *fonction d'une variable*, etc. Et quand on étudie les variations d'une fonction f , ce sont bien sûr des variations *de $f(x)$* que l'on s'occupe, la fonction f , elle, ne variant pas.

c) Conclusions

Nous faisons l'hypothèse que le sens usuel du mot “fonction” ne facilite pas la compréhension, par les étudiants, de la distinction entre image et fonction ; et surtout que la lecture “*f de x* ”, parce qu'elle est grammaticalement contradictoire avec cette distinction, fait en permanence obstacle à son assimilation ; et enfin que l'expression : “*l'image, par f , de x* ” ne peut qu'embrouiller un peu plus les étudiants.

De plus, l'usage mathématique maintient l'ambiguïté dans le cas des fonctions usuelles. Ainsi on s'interdit de dire : “*le f de x* ”, mais on continue à dire : “*le sinus de x* ” (et même : *le carré de...*, *la valeur absolue*

(24) Ainsi, l'écriture $f(x)$ vient de l'écriture $\sin(x)$; celle-ci viendrait de l'expression “*le sinus de x* ” dans laquelle le mot *sinus* désigne l'image.

de..., le logarithme de..., etc.). Pour les étudiants, la différence — historique — entre les cas du genre “sinus” et les cas du genre “f” ne peut apparaître (car ils les apprennent simultanément), à moins qu’elle ne leur soit expliquée.

On peut énoncer la règle suivante : les fonctions qui sont désignées par un mot ou une expression (comme *sinus* ou *valeur absolue*) datent d’avant la distinction formelle entre image et fonction.

Pour essayer de diminuer la difficulté, nous proposons au formateur de dire clairement aux étudiants que la convention de lecture “f de x” pour l’écriture $f(x)$ comporte comme inconvénient majeur (hérité du passé) le risque de confusion entre image et fonction. Il pourra ainsi leur faire comprendre qu’il vaut mieux dire : “l’image de x, par f” dans cet ordre, plutôt que de suivre à tout prix l’ordre de l’écriture conventionnelle “ $f(x)$ ”.

15°) Sur la différence entre l’oral et l’écrit

Lorsque les notations ne sont pas particulièrement “commodes” à manipuler, il est plus facile de lire des textes mathématiques que d’en écrire de corrects. (On pourrait peut-être rapprocher cela de la comparaison version/thème ; ou bien de l’orthographe : il est plus facile de lire un texte correctement orthographié que de ne pas faire soi-même de fautes en écrivant...)

Or, la réalisation d’un travail mathématique suppose une alternance : ayant lu un énoncé, on écrit quelque chose, qu’on re-lit pour l’utiliser et écrire à nouveau, et ainsi de suite.

a) Premier type d’exemples

Dans certains cas, les étudiants comprennent “bien” leurs propres textes, même si l’écriture en est incorrecte : c’est-à-dire qu’ils y lisent ce qu’ils ont voulu écrire (et non pas ce qu’un mathématicien y lirait d’après les conventions d’écriture).

Considérons par exemple les suites d’écritures ci-dessous : elles sont en partie incorrectes (2ème ligne), et pourtant les résultats sont justes (3ème ligne) :

$$\begin{array}{l}
 x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \qquad \qquad | \quad 2\cos(x) - 1 = 0 \\
 \triangle = 4 = \sqrt{2} \qquad \qquad \qquad | \quad \cos(x) = 0,5 = \pi/3 \\
 x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 ; x^2 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad | \quad x = \pm \pi/3 + k2\pi
 \end{array}$$

Nous faisons l’hypothèse que l’on peut analyser ces écritures en cherchant quels processus mentaux — corrects, vu les résultats — peuvent expliquer les incorrections d’écriture :

“delta égale [$\Delta =$] quatre [4], racine carrée [$\sqrt{\quad}$] : deux [2] ... $\Delta = 4 = \sqrt{2}$ ”.
 “cosinus x égale [$\cos(x) =$] zéro virgule cinq [0,5], c’est : pi sur trois [$\pi/3$] ... $\cos(x) = 0,5 = \pi/3$ ”.

Ces processus mentaux ont simplement été traduits directement dans l'écriture, sans tenir compte des conventions mathématiques, notamment pour l'emploi du symbole d'égalité.

L'idée sous-jacente (correcte) est cependant restée présente au moment de la re-lecture, et la suite a pu être correcte.

b) Deuxième type d'exemples

Dans d'autres cas, les étudiants comprennent "mal" leurs propres textes : ils lisent *selon les conventions* ce qu'ils ont écrit sans en tenir compte.

Considérons par exemple les suites d'écritures ci-dessous : elles sont partiellement incorrectes (3ème ligne), et les résultats sont erronés (4ème ligne); cependant la quatrième ligne est parfaitement cohérente avec la troisième :

$x^2 - 4x + 3 = 0$	$2\cos(x) - 1 = 0$
$\Delta = 4$	$\cos(x) = 0,5$
$\Delta = \sqrt{2}$	$\cos(x) = \pi/3$
$x = \frac{4 \pm \sqrt[4]{2}}{2}$	$x = \pm \text{Arccos}(\pi/3) + k2\pi$

Cette fois encore, nous faisons l'hypothèse qu'un processus mental correct a d'abord été traduit directement dans l'écriture :

"delta égale quatre [$\Delta=4$]; delta [Δ] a la racine carrée [$\sqrt{\quad}$] deux [2]... $\Delta = \sqrt{2}$ ".

"cosinus x égale zéro virgule cinq [$\cos(x) = 0,5$]; avec cosinus x [$\cos(x)$], c'est : pi sur trois [$\pi/3$] ... $\cos(x) = \pi/3$ ".

L'écriture obtenue à la troisième ligne correspond ainsi à une idée juste, bien qu'elle ne tienne pas compte des conventions mathématiques.

Mais, à l'étape suivante, l'idée a été perdue. L'écrit a été lu selon les conventions :

$\Delta = \sqrt{2}$	$\cos(x) = \pi/3$
"delta égale racine carrée de deux"	"cosinus x égale pi sur trois"

Le cas ne rentrant plus dans la catégorie particulière que l'on résout de tête, c'est alors la technique générale "lourde" qui est mise en œuvre, avec :

$\sqrt{\sqrt{2}}$ ou bien $\sqrt[4]{2}$	$\text{Arccos}(\pi/3)$
---	------------------------

On peut ainsi comprendre l'apparition de ces expressions "inattendues" à la quatrième ligne. Elles montrent que, dans le processus purement écrit, il n'y a pas d'erreur.

Remarque : Considérons la suite d'écritures ci-dessous, d'un type que l'on rencontre plus souvent dans les copies d'étudiants que celle avec $\sqrt[4]{2}$:

$x^2 - 4x + 3 = 0$	Elle est identique à celle vue au-dessus
$\Delta = 4$	(à gauche), jusqu'à la troisième ligne;
$\Delta = \sqrt{2}$	la quatrième ligne est à la fois erronée et
$x = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$	incohérente par rapport à la troisième.

On peut faire l'hypothèse que, jusqu'à la troisième ligne, le processus a été celui décrit précédemment.

Mais à l'étape suivante, l'écriture " $\Delta = \sqrt{2}$ " n'a pas été re-lue selon les conventions, car l'idée n'a pas été complètement perdue : il en est resté le *souvenir* d'avoir procédé à l'*extraction de la racine carrée* ; celle-ci n'est donc pas réitérée, et on obtient simplement $\sqrt{2}$ (au lieu de $\sqrt[4]{2}$) à la quatrième ligne.

c) Troisième type d'exemples. Première analyse

Dans chacun des exemples précédents, c'est la transcription directe d'un processus *mental* qui conduit à une écriture incorrecte. Ce processus n'est pas forcément verbalisé. Il reste cependant assez proche de ce qui pourrait se *dire*. Dans l'exemple qui suit, c'est encore plus net.

Considérons la phrase suivante :

"deux plus quatre égale six, multiplié par trois égale dix-huit"

Pensée ou dite à haute voix, *elle est correcte* ; ou du moins elle correspond à un processus correct [par exemple, le calcul mental ou *oral* de $(2 + 4) \cdot 3$]. Traduite directement en symboles, par contre, elle est fautive :

$$2 + 4 = 6 \cdot 3 = 18$$

Plus exactement, la deuxième égalité est juste, *mais la première est fautive* (25). Pour que ce soit juste, il faudrait écrire ainsi :

$$\begin{array}{l}
 2 + 4 = 6 \quad \text{et} \quad 6 \cdot 3 = 18 \\
 \text{ou bien :} \quad (2 + 4) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \\
 \text{ou bien :} \quad 3 \cdot (2 + 4) = 6 \cdot 3 = 18
 \end{array}$$

Il y a donc une nette différence entre l'expression orale ou mentale, et l'expression écrite.

À l'oral, le mot "*six*" joue un *double rôle* :

- *résultat* de la première opération (*deux plus quatre égale six*)
- *prémisse* de la deuxième opération (*six multiplié par trois égale ...*).

(25) Notons que, s'il y avait encore d'autres opérations à la suite (par exemple "*moins sept*" puis "*multiplié par cinq*"), toutes les égalités seraient *fautes*, sauf la dernière :

$$(2 + 4) = 6 \cdot 3 = 18 - 7 = 11 \cdot 5 = 55$$

A l'écrit, ce double rôle n'est pas accepté, vu la convention qui régit l'emploi du symbole d'égalité: il s'applique à tout ce qui le précède — jusqu'à un éventuel autre symbole d'égalité — et à tout ce qui le suit — jusqu'à un éventuel autre symbole d'égalité. Il en est ainsi de tous les symboles relationnels du type " $a \mathcal{R} b$ ": $=$, $>$, \geq , $<$, \leq , etc. (y compris quand on les combine entre eux).

Remarque: De même en français, l'on peut dire à haute voix: "les visiteurs voulaient tous l'acheter, cette maison, elle était si belle".

L'analyse grammaticale de la phrase montre que "cette maison" est un terme flottant. Il peut être rattaché à "les visiteurs voulaient tous l'acheter", aussi bien qu'à "elle était si belle". Ce flottement dans la structure de la phrase est typique de l'oral. Une telle phrase ne peut être écrite qu'en étant mise "dans la bouche" d'un personnage: il s'agit alors d'un oral/écrit. A l'écrit proprement dit, la convention voulant que la structure grammaticale soit univoque, il faudrait choisir:

soit: "les visiteurs voulaient tous acheter cette maison, elle était si belle"
 soit: "les visiteurs voulaient tous l'acheter, cette maison était si belle".

Le problème du passage de l'oral à l'écrit, et réciproquement, n'est donc pas particulier aux mathématiques. Il est cependant particulièrement important dans ce cas, puisqu'il peut induire les étudiants en erreur.

Nous venons d'en voir une première raison: l'emploi du symbole d'égalité interdit d'utiliser une écriture symbolique à la fois comme résultat d'une première opération et prémisses d'une deuxième opération.

Ceci oblige à distinguer

le mode d'écriture symbolique:
 du processus oral ou mental:

$(2 + 4) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$
 deux plus quatre égale six,
 multiplié par trois égale dix-huit

Ce processus oral (ou mental) peut par contre être traduit directement en schémas d'opérateurs:



La raison en est que:

- on peut ne pas y faire apparaître le symbole d'égalité;
- une case peut servir à la fois de sortie pour un opérateur et d'entrée pour un autre opérateur.

d) Retour sur un exemple du paragraphe a). Deuxième analyse

Dans la phrase: "delta égale quatre, racine carrée deux", le mot "quatre" joue un double rôle (résultat du calcul de Δ , prémisses de

l'extraction de la racine carrée). Vu l'analyse faite ci-dessus, il est normal que la transcription directe de cette phrase en symboles conduise à une écriture incorrecte ($\Delta = 4 = \sqrt{2}$). Mais cette analyse ne suffit pas.

En effet, si l'on isole la deuxième partie de la phrase, soit : "4, *racine carrée 2*", on élimine le double-emploi du mot "quatre", et pourtant la transcription directe en symboles conduit à une écriture incorrecte : ($4 = \sqrt{2}$). On obtient d'ailleurs le même type d'incorrection avec la phrase " Δ a la *racine carrée 2*" : $\Delta = \sqrt{2}$. Quant à la phrase "4, *sa racine carrée est égale à 2*" (ou : "*est 2*"), elle conduit à une écriture tellement incorrecte ($4 \sqrt{\quad} = 2$) qu'aucun étudiant ne l'utiliserait.

Par contre, si l'on remplace les mots "*racine carrée*" par "*puissance un-demi*", alors les diverses formulations conduisent toutes, directement, à une écriture correcte :

$$4^{1/2} = 2 \longleftrightarrow \begin{cases} 4, \text{ puissance un-demi, } 2 \\ 4, \text{ à la puissance un-demi, égale } 2 \\ 4, \text{ sa puissance un-demi est égale à } 2 \text{ (ou : est } 2) \\ 4 \text{ a sa puissance un-demi égale à } 2 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Nous devons donc constater que l'emploi de "*puissance un-demi*", à la place de "*racine carrée*", change quelque chose. L'emploi de "*puissance un-demi*" rend plus facile la transcription *correcte*, en symboles, du processus oral de calcul. Ceci est visiblement dû à ce que la convention d'écriture des *puissances* est plus commode que celle des *radicaux* (cf. *paragraphe 13° b*) :

- une fonction-puissance s'écrit à droite, donc *après* le nombre auquel on l'applique : " $4^{1/2} = 2$ " est correct
- ceci n'est pas vrai pour une fonction-radical : " $4\sqrt{\quad} = 2$ " est incorrect
" $4 = \sqrt{2}$ " est faux

Ainsi, la transcription directe en symboles de la phrase : "*delta égale quatre, puissance un-demi, deux*", n'est incorrecte que pour une seule raison, le double rôle du mot "quatre" : " $\Delta = 4^{1/2} = 2$ "; seule la dernière égalité est juste.

Tandis qu'avec la phrase dont nous sommes partis : "*delta égale quatre, racine carrée deux*", la transcription " $\Delta = 4 = \sqrt{2}$ " est incorrecte à un *double* titre, puisque l'écriture " $4 = \sqrt{2}$ " est à elle seule déjà incorrecte. (En "contrepartie" en quelque sorte, la première égalité se trouve être juste; mais ce ne serait même pas le cas avec l'écriture : " $\Delta = 4\sqrt{\quad} = 2$ ").

Nous voyons donc un deuxième aspect de la différence entre écrit et oral, en mathématique, une deuxième source d'erreurs pour les étudiants : les conventions d'écriture des fonctions usuelles qui, sauf l'exception des puissances, ne s'écrivent ni à droite ni *après* le nombre (ou la variable) auquel elles s'appliquent (cf. *paragraphe 13° a et b*).

Ceci oblige encore à distinguer, le plus souvent,

le mode d'écriture symbolique: $\sqrt{4} = 2$

du processus oral ou mental: 4, racine carrée 2

4 a la racine carrée 2

4, sa racine carrée est égale à 2 (ou: est 2)

4 a sa racine carrée égale à 2

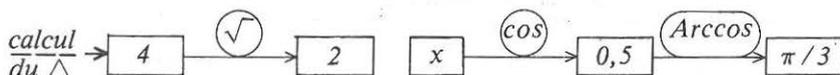
etc.

Ce processus oral (ou mental) peut par contre toujours être traduit directement en schémas d'opérateurs:



La raison en est que la fonction y apparaît (en général) à droite de la case à laquelle on l'applique; et qu'en tout cas, elle est toujours lue après le contenu de cette case.

Quand il y a plusieurs fonctions, elles apparaissent donc aussi de gauche à droite, dans l'ordre de leur composition, quelles que soient les complications de leur écriture symbolique (cf. paragraphe 16°):



e) Troisième analyse. Retour sur les deux exemples du paragraphe a)

Le symbole d'égalité étant absent des schémas d'opérateurs utilisés ci-dessus (cf. paragraphes c et d), les formes verbales "égale", "est",... peuvent et doivent être remplacées par "donne":

deux plus quatre donne six qui, multiplié par trois, donne dix-huit; (26)
4, par radical deuxième (ou: racine carrée ou: puissance un-demi), donne 2;
le calcul du Δ donne 4 qui, par radical deuxième, donne 2;
x, par cos, donne 0,5 qui, par Arccos, donne $\pi/3$.

Et, de manière générale :

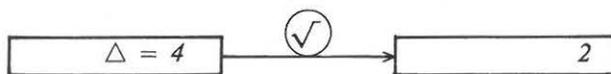
x, par f, donne $f(x)$ qui, par g, donne $g[f(x)]$.

(26) Dans ce cas, "donne" remplace le "font", utilisé autrefois ("deux et quatre font six, six fois trois font dix-huit"), ou bien vient combler un vide (deux et quatre... six, six fois trois... dix-huit").

Cependant, ceci ne permet pas de traduire le mot "égale", tel qu'il apparaît dans les phrases "delta égale quatre" (ce n'est pas " Δ donne 4") et "cosinus x égale zéro virgule cinq" (ce n'est pas non plus " $\cos(x)$ donne 0,5"). En effet, ces phrases ne forment pas des processus oraux ou mentaux qu'il resterait à transcrire; elles forment oralement des écrits donnés, ou obtenus par transformations d'écritures, et où figure déjà le symbole d'égalité. (27)

Le mot "égale" doit être remplacé par le mot "donne" seulement lorsqu'il y a application d'une opération ou d'une fonction, pouvant donner lieu à un calcul et donc à un processus oral ou mental pour l'effectuation de ce calcul. C'est ce processus qui doit être formulé avec le mot "donne", afin d'éviter qu'on ne le transcrive directement par un symbole d'égalité.

La phrase "delta égale quatre" ne peut donc être traduite en schéma d'opérateurs. Cependant, sa forme écrite " $\Delta = 4$ " peut être introduite telle quelle dans une case d'un schéma d'opérateurs. Par exemple ainsi :



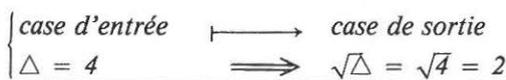
Ceci exprime que la racine carrée de Δ ou de 4, cela revient au même :

Δ , comme 4, a la racine carrée 2 .

Le symbole d'égalité ayant été introduit dans la case d'entrée de l'opérateur, il peut ensuite apparaître, par voie de conséquence, dans la case de sortie :



Ainsi, on voit apparaître l'écriture symbolique correcte, correspondant à la phrase "Δ égale 4, racine carrée 2" :



(27) Il est vrai que " $\Delta = 4$ " est la conséquence d'un calcul. Mais ce calcul ne part pas de Δ pour arriver à 4. Ce sont plutôt $+1, -4, +3$ (coefficients de $x^2 - 4x + 3 = 0$) qui donnent 4 comme valeur à Δ ; d'une manière générale les coefficients a, b, c (dans $ax^2 + bx + c = 0$) donnent $b^2 - 4ac$, en quelque sorte par la "fonction Δ ".

Une des raisons de ce phénomène est que, dans l'écriture, les symboles d'opération et de fonction ne se placent pas à droite des variables mais à leur gauche ou dans d'autres positions plus complexes encore (cf. paragraphes 15° d, et 13° - 14°).

L'autre raison tient au rôle du symbole d'égalité, qui interdit d'utiliser une écriture symbolique comme résultat d'une première opération et prémisses d'une deuxième opération (cf. paragraphe 15° c et e).

Ceci nous oblige à distinguer :

— l'effectuation des calculs, avec les expressions orales correspondantes [et éventuellement des procédures telles que "poser l'opération", "lire dans les tables numériques", "mesurer sur le cercle trigonométrique", "utiliser une machine à calculer", etc.], que l'on peut représenter en général par des schémas d'opérateurs sans symbole d'égalité.

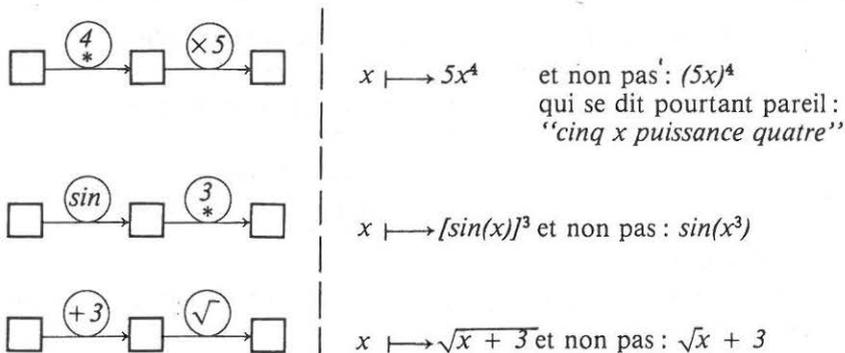
— l'écriture des conclusions, avec les expressions symboliques correspondantes, que l'on obtiendra en général en introduisant le symbole d'égalité dans ces mêmes schémas.

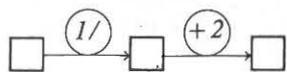
Nous faisons l'hypothèse que, pour faire prendre conscience de ces difficultés aux étudiants, le formateur a avantage à réserver des moments dans la formation pour l'apprentissage de la lecture et de l'écriture ; et tout particulièrement pour la mise en forme (en français et en symboles) des expressions plus ou moins abrégées qu'ils utilisent, à l'oral ou en pensée.

Et nous lui proposons, pour faciliter cet apprentissage, d'utiliser les schémas d'opérateurs comme outil provisoire, langage intermédiaire entre l'expression orale et l'écriture symbolique ; et de distinguer ainsi les mots "donne" et "égale".

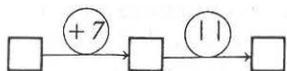
16°) Sur une autre utilisation des schémas d'opérateurs

Les schémas d'opérateurs (cf. paragraphes 10° et 15°) permettent aussi de distinguer des expressions — ou fonctions — qui se lisent (et se disent) exactement pareil. Par exemple :

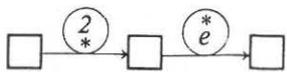




$$x \mapsto \frac{1}{x} + 2 \text{ et non pas : } \frac{1}{x + 2}$$

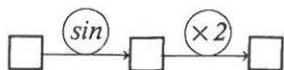


$$x \mapsto |x + 7| \text{ et non-pas : } |x| + 7$$



$$x \mapsto e^{(x^2)} \text{ et non pas : } (e^x)^2$$

Ils permettent aussi de distinguer des expressions — ou fonctions — que les étudiants ont tendance à confondre. Par exemple :



$$x \mapsto 2\sin(x) \text{ et non pas : } \sin(2x)$$

Les conventions d'écriture créent donc des difficultés, que les schémas d'opérateurs permettent d'éviter. Ces derniers facilitent la traduction sur le papier des situations étudiées ; ils peuvent donc en faciliter la compréhension par les étudiants.

17°) Sur la différence entre calcul et opération

Nous avons été amenés à distinguer d'une part les procédures réelles (et partiellement orales) d'effectuation des calculs, et d'autre part le mode d'écriture symbolique des conclusions de ces mêmes calculs (cf. paragraphe 15°).

Par exemple :

calculs

“4, racine carrée 2”

“2 plus 4 égale 6, multiplié par 3 égale 18”

“4, par radical deux, donne 2”

“2 plus 4 donne 6, qui, multiplié par 3, donne 18”

conclusions

$$\sqrt{4} = 2$$

$$(2 + 4).3 = 18$$

Dans l'écriture symbolique des conclusions, quand apparaît le symbole d'égalité, on écrit : “ $\sqrt{4}$ ”, “ $(2 + 4).3$ ”.

Il n'est pas facile pour les étudiants de comprendre que, dans ce type d'écriture, les opérations (ou fonctions) sont à considérer comme *déjà* appliquées ; et que ces écritures désignent déjà les résultats des opérations, *bien que des calculs puissent encore être effectués à leur propos*.

En effet, cela implique que dans l'énoncé : “calculer $(2 + 4).3$ ”, le résultat soit déjà écrit ! (le résultat des opérations mais pas celui du calcul...). Il y a donc résultat et “résultat” ! C'est une première difficulté.

Néanmoins, dans ce cas-là, le symbole d'égalité désigne tout de même l'effectuation de calculs (bien qu'il ne désigne pas la procédure réelle par laquelle ces calculs peuvent être effectués).

Il y a une difficulté supplémentaire quand les écritures " $\sqrt{4}$ ", " $(2 + 4).3$ ", etc. ne sont pas données au départ avec l'objectif de faire des calculs dessus. Par exemple, quand le "4" vient du calcul d'un discriminant, quand les "2, 4 et 3" viennent de données géométriques (ou d'un problème dit "concret"), les écritures " $\sqrt{4}$ " et " $(2 + 4).3$ " sont à trouver, tout autant que les résultats des calculs. Et c'est alors que c'est le plus difficile : car non seulement l'égalité ne signifie pas l'effectuation réelle des calculs, mais ceux-ci peuvent être faits *sans* recours à l'écriture théorique du résultat "avant calcul". Il faut alors être capable de trouver la bonne écriture pour des calculs *déjà* effectués, mais *sans* les effectuer, de façon à ne transcrire que les opérations. Par exemple, ayant, à partir de 4, trouvé sa racine carrée 2, il faut penser qu'on a *extraît la racine carrée* de 4 et que, si l'on avait fait cette opération, *mais pas le calcul*, le résultat s'écrirait " $\sqrt{4}$ ", et que par conséquent $\sqrt{4}$ est égal au 2 que l'on a déjà trouvé !

Nous avons vu que, les fonctions et opérations ne s'écrivant pas à droite des variables, et leur composition comportant des conventions d'écriture peu commodes, le processus décrit ci-dessus est complexe (cf. *paragraphe 15*°).

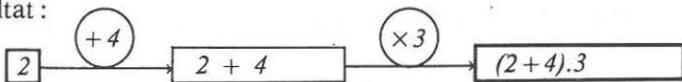
Nous voyons ici que ce processus conduit à distinguer "*calculer le résultat*" (c'est-à-dire : effectuer les opérations), et "*écrire le résultat*" (sous-entendu : sans effectuer les opérations). Dans ce type de cas, le symbole d'égalité est à placer entre *deux écritures des résultats*, l'une avant le calcul, et l'autre après, sachant que l'écriture "avant calcul" peut fort bien n'être cherchée (et trouvée) qu'*après* avoir effectué le dit calcul.

Ainsi, pour faire comprendre aux étudiants cette distinction fondamentale entre "*appliquer une opération (ou une fonction)*" et "*effectuer le calcul du résultat (ou de l'image)*", nous faisons l'hypothèse que le formateur doit distinguer les énoncés "*écrire le résultat*" et "*calculer le résultat*", "*écrire l'image*" et "*calculer l'image*".

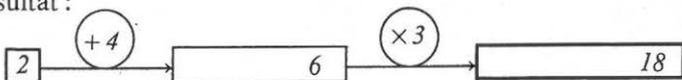
Par exemple :



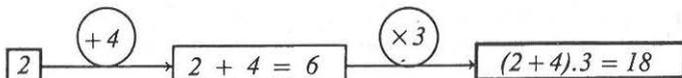
écrire le résultat :



calculer le résultat :



conclusion :



Hypothèses pour la rédaction des documents

18°) *Sur le vocabulaire utilisé*

Le vocabulaire spécialisé des mathématiques est de deux types :

— les concepts proprement mathématiques, définis aussi exactement que possible ;

— les expressions plus ambiguës qui servent principalement dans la rédaction des énoncés d'exercices (notamment *résoudre, étudier, discuter, calculer, simplifier, etc.*).

Ces deux types de vocabulaires posent des problèmes différents.

a) *Les concepts*

Ils sont souvent une source de difficultés pour celui qui apprend. Ce vocabulaire spécialisé est en effet assez abondant, et nécessite un gros effort de mémoire.

Or, les gros apports de vocabulaire nouveau coïncident en général avec l'introduction des notions correspondantes. Les étudiants ont de la peine à s'approprier le vocabulaire avant toute pratique de ces notions ; si cette pratique présuppose l'assimilation du vocabulaire, on aboutit à un cercle vicieux... dont les étudiants font les frais.

Cet effort est moindre quand il s'agit de mots du langage courant, ayant une ou plusieurs significations usuelles (comme *ordonner, réduire,...*), et dont la signification mathématique est voisine de ces significations usuelles. Les étudiants peuvent en effet s'appuyer sur des analogies pour se souvenir des significations mathématiques. Ainsi "*ordonner*" un polynôme signifie bien y mettre de l'ordre. Cependant cet "ordre" a un sens beaucoup plus précis que dans les expressions courantes ("*mettre de l'ordre dans ses affaires*" ou "*dans ses idées*"), et ce sens est tout à fait spécifique aux polynômes. C'est alors sur cette spécificité qu'il s'agit d'attirer l'attention des étudiants.

Les significations mathématiques peuvent aussi n'avoir aucun rapport avec les significations usuelles. Ainsi, le mot *terme* désigne de manière courante une fin ("*y mettre un terme*"), ou une expression ("*un terme technique*"), alors qu'en mathématiques, le mot *terme* est lié à l'idée de somme (algébrique). Dans de tels cas, les étudiants risquent de ne pas comprendre le sens mathématique des mots, ou d'avoir des difficultés à s'en souvenir. C'est alors que des explications détaillées sont indispensables, avec des exemples et des contre-exemples. Il est utile aussi de fournir, quand c'est possible, l'explication historique du choix des mots.

Par exemple, la signification mathématique du mot *terme* est à rapprocher de la vieille expression : "*les termes du loyer*", le loyer annuel étant formé de la somme de ces termes successifs (et l'on peut aussi sans doute expliquer ainsi l'emploi du même mot à propos des suites et des séries). (cf. aussi note 23 sur le mot *image*)

De plus, les synonymes du français courant ne sont en général pas valables en mathématiques (*réduire* et *décroître* désignent deux choses différentes ; *ordonner* n'est pas *ranger* ; un polynôme *simple* ne s'obtient pas en *simplifiant* ; etc.).

Réduire plusieurs fractions au même dénominateur est même faire le contraire de les rendre *irréductibles*.

Dans certains cas, le même mot a plusieurs significations mathématiques différentes, qui ne peuvent être distinguées que par le contexte (le "*degré*" d'un polynôme et le "*degré*" unité de mesure des angles ; un "*terme*" d'une somme et un "*terme*" d'une suite ; une *relation* "*d'ordre*" et une *racine* "*d'ordre*" deux ; etc.).

Enfin, quand on apprend les mathématiques, il faut apprendre à distinguer, à l'intérieur des textes, les mots qui sont utilisés dans un sens courant, de ceux qui sont utilisés dans un sens mathématique précis. Il faut, par exemple, distinguer les *exercices d'application* (c'est-à-dire les exercices d'utilisation d'un théorème général), des *exercices sur les applications* (c'est-à-dire les exercices sur une certaine sorte de fonctions appelées les "applications").

Un cas particulièrement complexe est celui du mot *fonction*, puisqu'il est utilisé tantôt comme concept mathématique (*A*), tantôt dans un sens mathématique non-conceptuel mais précis (*C, D*), tantôt dans un sens courant (*B*) :

- (A) "on désigne par g une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} " ;
- (B) "la valeur de $f(x)$, ou de $(mx - 3)$, est fonction de x " (elle dépend de celle de x) ;
- (C) "étudier le signe de $f(x)$, en fonction de x " ;
- (D) "discuter, en fonction de m , le nombre de solutions en x de $mx - 3 = 0$ "

Un autre cas complexe est celui du mot *variable* car on fait aussi "varier" les valeurs des paramètres, on étudie les "variations" des fonctions, etc.

Nous faisons l'hypothèse que les étudiants ont besoin, pour s'y retrouver dans les documents qui leur sont fournis, que les mots et les expressions ayant une signification mathématique nouvelle pour eux soient signalés d'une manière ou d'une autre (au moins au moment de leur première utilisation), et qu'ils soient :

- accompagnés d'explications détaillées ;
- illustrés d'exemples non seulement mathématiques, mais aussi grammaticaux ;
- situés par rapport à leurs usages courants et, si nécessaire, expliqués historiquement.

Nous proposons également de leur fournir un lexique contenant ces mots ou expressions. En effet, les étudiants peuvent avoir besoin de retrouver ces explications (en cas d'oubli ou de doute). Pour les y aider, le

lexique peut comporter soit lesdites explications (il doit alors être très gros), soit l'indication de leur place dans les documents.

b) *Les mots ambigus*

Dans la catégorie des mots ambigus, on peut prendre comme exemple caractéristique le mot *résoudre* :

— en tant que mot du vocabulaire courant, il peut s'appliquer à l'exercice tout entier ; il désigne alors l'objectif général du travail des étudiants, *résoudre des problèmes*.

— en tant que consigne particulière, il s'applique à une équation particulière (ou à un système d'équations). Il désigne alors un objectif particulier. C'est une première ambiguïté.

De plus, dans sa deuxième acception, ce mot a tendance à ne plus désigner un objectif (*chercher* quelque chose, et pour cela, *chercher* une méthode). De façon quasi-automatique, il évoque la mise en œuvre d'une méthode qui est censée être connue, l'application d'un *procédé*. Cette ambiguïté est beaucoup plus gênante. Ainsi, toute équation un peu bizarre (comme $|x| = -x$), ne rentrant pas dans la catégorie des procédés bien connus, provoque l'impuissance ("on ne m'a pas appris"), ou même une sorte d'angoisse. Les procédés classiques ne s'appliquant qu'à des équations ayant un nombre très restreint de solutions (premier degré : une solution ; deuxième degré : deux au maximum ; systèmes : une, dans les exercices classiques), il s'avère du coup quasi-impossible de trouver à une équation (type $|x| = -x$) une infinité de solutions, qui de plus peut s'écrire comme une inéquation ($x \leq 0$).

Nous faisons l'hypothèse que les mots qui expriment des objectifs dans les énoncés d'exercices (*résoudre, étudier, discuter, calculer, simplifier,...*) non seulement présentent des ambiguïtés de sens, mais de plus ont tendance à évoquer la mise en œuvre de procédés automatiques.

Pour surmonter cet obstacle, nous pensons nécessaire d'explicitier (oralement ou par écrit) ce que l'on entend par "*résoudre une équation*", "*étudier le signe d'une expression*", "*étudier une fonction*", "*discuter les solutions d'une équation paramétrique*", "*calculer un nombre*", "*calculer une fonction*", etc.

Nous proposons aussi de reformuler ces expressions de façon plus claire :

"*étudier l'existence et le signe d'une expression*"

"*étudier les variations d'une fonction*" (ou : établir le tableau de variations d'une fonction sur un intervalle d'étude suffisant)

"*discuter le nombre (et/ou le signe, la place, etc.) des solutions d'une équation en fonction d'un paramètre*"

"*calculer une valeur exacte (et/ou approchée) d'un nombre*"

“calculer l’expression d’un nombre en fonction de paramètres”
“calculer l’expression de l’image de x (ou t , ou...) par une fonction”
etc. (28)

Il est sans doute encore préférable de formuler autrement les objectifs des exercices, au moins au début. Quitte ensuite à expliquer que ce sont des objectifs que l’on résume par ces expressions moins explicites, mais d’usage courant. (29)

19°) *Sur l’acte de désignation*

Il est courant, en mathématiques, d’utiliser des désignations (des “noms”) pour les objets étudiés. C’est d’ailleurs très souvent indispensable pour traduire, en écriture symbolique, les hypothèses, problèmes, résultats, théorèmes, etc.

D’où les expressions “soient P et Q deux points...”
“la fonction f telle que...”
“la famille de cercles C_λ ...”
“on désigne par b une constante donnée...”
“le polynôme $P(x) = \dots$ ”
“on appelle R le reste de la division...”

a) *Première analyse*

Il y a dans ces expressions une distinction à faire entre deux types de constructions grammaticales :

— les cas où le nom est introduit au fil de la phrase, comme dans :
“la fonction f telle que...”
“le polynôme $P(x) = \dots$ ”

— les cas où la phrase est construite autour de l’acte de désignation, comme dans :
“soient P et Q deux points...”
“on désigne par b une constante donnée...”
“on appelle R le reste de la division...”

(28) Nous ne citons que les principales significations du mot *calculer*. Dans bien des cas, ce mot est à prendre, hélas, comme synonyme de “simplifier l’écriture de...”. Or, le mot *simplifier* a tellement de significations différentes que nous renonçons à en faire une liste. N’importe quelle transformation d’écriture au moyen d’identités pourrait être considérée comme une simplification (et l’a sans doute effectivement été). Pour les polynômes, nous lui préférons le mot *réduire* qui est très précis (Pour les fractions, nous ferions de même, si l’expression “réduire au même dénominateur” ne désignait pas une transformation exactement inverse). Dans tous les autres cas, comprendre l’objectif qui est désigné par le mot *simplifier* relève de la devinette (ou de l’histoire : quand, faute de calculatrices, il fallait “simplifier” les calculs nécessaires aux applications numériques, pour diminuer les erreurs dues à l’emploi de valeurs approchées).

(29) Voir notamment les paragraphes 8° (exemple) et 9° (a et d) sur l’objectif de la résolution d’une équation (ou d’une inéquation) et sur la présentation de ses résultats.

Dans les constructions grammaticales du deuxième type, l'attention du lecteur est retenue sur l'acte de désignation. Dans le premier type, c'est à lui de noter au passage le nom choisi et ce qu'il désigne; c'est évidemment plus difficile. D'autant que les constructions du premier type favorisent l'emploi de structures grammaticales complexes où peuvent s'emboîter désignations et propriétés caractéristiques. (cf. paragraphe 20°)

Nous proposons, quand c'est possible, d'utiliser de préférence les constructions du deuxième type: "*soient...*", "*on désigne par...*", "*on appelle...*"

b) Deuxième analyse

Il y a une autre distinction à faire :

— quand on écrit "*on appelle R le reste de la division...*", cette décision n'est valable que dans un cadre limité. A une autre occasion, "*R*" pourra désigner tout autre chose;

— quand on écrit "*on appelle R l'ensemble des nombres réels*", il s'agit d'une décision ayant un caractère permanent.

Il serait bon de ne pas utiliser les mêmes termes dans les deux cas. Pour le deuxième cas, dans l'expression: "*on appelle...*", le "*on*" désigne tous ceux qui font des mathématiques aujourd'hui; le formateur, les étudiants ne sont pas libres de leur choix. L'expression "*on appelle...*" convient.

Dans le premier cas, le choix est en grande partie arbitraire; il est guidé par des habitudes ou des commodités, mais n'a aucun caractère d'obligation. Le formateur et les formés, à condition de se mettre d'accord, sont *libres de leur choix*.

Il faut seulement que la désignation choisie soit différente de celles déjà utilisées pour autre chose (et de celles qui ont une signification permanente; par exemple π en trigonométrie, e avec les exponentielles, etc.).

Nous proposons d'utiliser l'expression "*on appelle par exemple*" (ou "*dans ce problème, ce chapitre, cette démonstration, etc.*"; idem avec "*on désigne par...*"):

"*on appelle par exemple R le reste de la division...*"

"*le reste de la division... est appelé R dans ce problème*"

"*le reste de la division... que l'on appelle R dans ce théorème...*"

"*le reste de la division..., appelé R dans cette démonstration...*"

"*dans cette étude, on désigne par R le reste de la division...*"

Ceci est d'autant plus important que les travaux (études, démonstrations, etc.) et leurs conclusions (théorèmes,...) ne dépendent pas du nom choisi.

De plus, sauf précision contraire, les conclusions peuvent être utilisées en remplaçant plusieurs désignations par *une seule* (ou par une même expression particulière).

Nous faisons l'hypothèse qu'une précision (comme "par exemple") est nécessaire, pour manifester clairement que la validité des conclusions ne serait pas mise en cause par un changement de désignation, ou son remplacement par une expression explicite. C'est essentiel pour que les étudiants apprennent à réutiliser ultérieurement ces conclusions. [Cette hypothèse correspond, au niveau de la langue française, à celle qui a été formulée ailleurs pour l'écriture symbolique; cf. paragraphe 9° sur la présentation des résultats.]

Il faut noter que le mot *soit* ne remplit pas les conditions de notre hypothèse. Considérons par exemple l'expression suivante: "soient P et Q deux points quelconques"; il y est affirmé simultanément deux choses:

"on considère deux points quelconques"
 et "ces deux points sont ici appelés P et Q "

La deuxième affirmation est sans importance pour l'étude (pourvu que les deux *noms* soient différents), et pour la validité de ses conclusions (on peut les appliquer à deux points A et B , et aussi à un même point C). Mais la première affirmation est nécessaire à l'étude. L'expression suivante: "soient par exemple P et Q deux points quelconques" serait ambiguë (le "par exemple" porte-t-il sur " P et Q "? ou sur "deux points"?).

La double signification du mot *soit* (ou *soient*) le rend donc impropre par rapport à l'objectif de clarification que nous proposons.

20°) Sur la grammaire utilisée

Bien que les mathématiciens s'en rendent rarement compte, il est de fait que les tournures grammaticales utilisées dans les cours, et surtout dans les énoncés d'exercices, sont assez complexes (30). De plus, elles comportent très souvent des présupposés (certaines informations sont "implicites"), et des ambiguïtés.

Ceci crée des difficultés pour les étudiants peu habitués à ce langage, et particulièrement pour ceux qui n'ont pas un bagage culturel suffisant, ou qui ont appris le français en tant que langue étrangère.

a) Analyse d'un premier exemple

Considérons la phrase suivante:

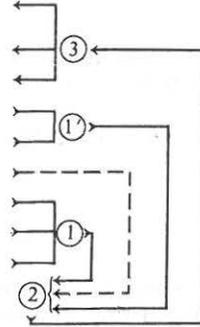
"On considère la famille de cercles C_λ , dépendant du paramètre λ , et dont l'équation, rapportée à un repère orthonormé xOy , est:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + \frac{\lambda^2}{2} = 0"$$

(30) Au paragraphe 14°, nous avons même vu que, dans l'expression "f de x", l'emploi de la préposition "de" est grammaticalement contradictoire avec le fait que la lettre f désigne une fonction. Dans ce cas, la langue mathématique diverge radicalement de la langue française, au sens où elle en ignore délibérément la grammaire.

Il y a dans cette seule phrase un très grand nombre d'informations données dans un ordre complexe :

- une *famille*
- des *cercles*
- un nom : " C_λ "
- un *paramètre*
- une lettre : " λ "
- une *équation*
- un *repère*
- un qualificatif : "*orthonormé*"
- un nom : " xOy "
- une écriture d'équation : " $x^2 + \dots = 0$ "



C'est ① : dans un *repère* xOy , et ② : par l'intermédiaire de l'*équation* que ③ : la *famille de cercles* est définie ; et c'est parce que le repère est *orthonormé* que ce sont des *cercles*, et non des ellipses. C'est ① : parce que " λ " est un *paramètre*, dans ② : l'*équation*, qu'il y a ③ : *plusieurs cercles* définissant une *famille*, et que le nom " C_λ " se justifie.

Notons, de plus, que le référentiel du paramètre λ n'est pas indiqué : c'est une information implicite. Or, c'est ce référentiel qui détermine la *famille* de cercles dont il s'agit. (Nous laisserons provisoirement de côté cette question, qui sera reprise plus à fond au paragraphe 21°a).

La plus grande partie des informations est contenue dans deux propositions subordonnées ("*dépendant*... λ "; "*dont*... = 0"). Celles-ci ne sont pas du même type ("*dépendant*" : participe présent ; "*dont*" : relative), ce qui rend la lecture difficile.

Un très bon maniement de la langue française est indispensable pour comprendre une telle phrase. L'exercice évalue donc la maîtrise de la langue française, au moins autant, sinon plus, que la maîtrise de la géométrie analytique.

De plus, la structure de la phrase est ambiguë :

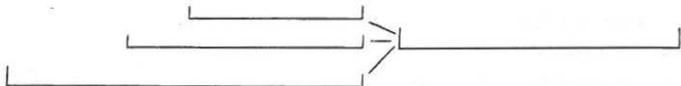
- " C_λ " est-il le nom de la famille ? ou bien des cercles (d'un cercle pour chaque valeur de λ) ?
- "*dépendant*" se rapporte-t-il à "*cercles*" ? ou à "*famille*" ?
- "*dont*" se rapporte-t-il à "*cercles*" ? ou à "*famille*" ?

Ce type d'ambiguïté, entre le nom d'une famille et celui de ses éléments, a été longtemps admis par les mathématiciens, mais il est très gênant pour les étudiants (et il est peu conforme à l'effort actuel de clarification des notations). De plus, en réalité, ni la famille ni aucun des cercles ne *dépend* de λ ; c'est le *choix* d'un des cercles qui dépend du choix d'une *valeur* de λ (c'est-à-dire que seule l'écriture " C_λ " dépend de λ !). Il y a là un raccourci, une abréviation tout à fait saisissants.

On peut donc se demander si le singulier : “l'équation”, est à rapporter au singulier : “une famille”, ou bien à l'unicité (purement graphique) de l'écriture “ C_λ ”?? (indépendamment de la signification de cette écriture).

On peut aussi s'interroger sur ce à quoi s'applique le mot “et”, dans ce qui le précède ; il y a trois possibilités :

“on... famille de cercles C_λ , dépendant de λ , et dont l'équation... = 0”



En tout état de cause, on peut conclure que les tournures grammaticales (et même l'emploi de mots comme “dépendant”) sont assez particulières aux mathématiques, inusitées (pour ne pas dire incorrectes) en langue française.

L'exercice évalue donc la maîtrise de ce langage particulier aux mathématiciens, au moins autant — sinon plus — que la maîtrise de la théorie mathématique appelée géométrie analytique.

Ne serait-il pas plus clair, par exemple, d'écrire ainsi :

“Dans ce problème, xOy désigne un repère orthonormé,
 λ est un paramètre à valeur dans \mathbf{R} .

Pour chaque valeur de λ , l'équation suivante définit un cercle appelé C_λ :

$$x^2 + \dots = 0$$

La famille de ces cercles est appelée $F : F = \{C_\lambda / \lambda \in \mathbf{R}\}$.”

Si l'on veut que les étudiants apprennent à lire les énoncés, encore faut-il que ceux-ci soient effectivement lisibles, et pas seulement “devinables” grâce aux habitudes acquises. Si l'on veut qu'ils attachent de l'importance à la signification de certains mots-clefs (comme “orthonormé”, ci-dessus), encore faut-il qu'il n'y ait pas d'autres mots à la signification floue (comme “dépendant”, ci-dessus).

b) Analyse d'un deuxième exemple. Conclusions

Considérons de même la phrase suivante :

“Calculer la primitive F de la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$
 qui vérifie $F(0) = 1/4$ ”.

La dernière partie de cette phrase (“qui vérifie... 1/4”) est grammaticalement ambiguë : elle peut se rapporter aussi bien à “la primitive F ” qu'à “la fonction $x \longmapsto \dots$ ”. Pour lever cette ambiguïté, il faut saisir l'aspect mathématique de l'exercice. Loin d'aider le lecteur à comprendre cet aspect mathématique, la tournure grammaticale présuppose chez lui une pleine familiarité avec le problème posé. Celui qui ne connaît pas d'avance ce type de problème ne peut chercher à résoudre ce problème particulier.

L'exercice est donc absolument impropre pour faire rechercher, dans ce cas particulier, des méthodes de résolution du problème-type correspondant. Il évalue d'abord la familiarité avec ce dernier.

Ne serait-il pas plus clair, par exemple, d'écrire ainsi :

*“On considère la fonction suivante : $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$;
on appelle F celle de ses primitives qui vérifie $F(0) = 1/4$;
calculer l'expression de $F(x)$.”*

Nous faisons l'hypothèse que plus les phrases sont courtes, de structure grammaticale simple et univoque (sans ambiguïté), plus les étudiants sont à même de comprendre ce qui leur est demandé, et de mobiliser leurs capacités (en mathématiques) pour rechercher une méthode de résolution.

De plus, nous pensons préférable que les données et les objectifs soient formulés dans des phrases distinctes.

21°) *Sur les présupposés*

a) *Première analyse*

Considérons la phrase suivante :

“Soit l'équation paramétrique : $(m + 1)x^2 + (2m - 1)x - (2m + 3) = 0$ ”

Bien sûr l'habitude veut que, dans un tel cas, l'inconnue soit x et que le paramètre soit m , mais ce n'est pas précisé. Si les étudiants doivent se baser sur de telles “habitudes” pour comprendre, comment pourront-ils s'attaquer à des problèmes inhabituels, penser à des méthodes originales ? Ils ne peuvent donc avoir recours qu'à des procédés appris, à des automatismes.

On notera que les référentiels ne sont pas non plus explicités. Le paramètre est-il à valeur dans \mathbf{R} ? ou \mathbf{C} ? (ou même \mathbf{Q} , ou \mathbf{Z} ?) ; les solutions sont-elles considérées dans \mathbf{R} ? ou \mathbf{C} ? (ou même \mathbf{A} , ensemble des nombres algébriques ?). Il est sans doute “sous-entendu” que c'est \mathbf{R} , car c'est dans ce cadre que l'étude de ce type d'équation paramétrique est généralement enseigné... C'est encore l'habitude qui compte. Mais alors, comment les étudiants pourraient-ils comprendre et traiter le cas “ $m \in \mathbf{C}, x \in \mathbf{R}$ ” ?

Il est heureusement de plus en plus rare de trouver des énoncés rédigés de cette façon. Mais on en trouve du type suivant :

*“Soit l'équation $(m + 1)x^2 + (2m - 1)x - (2m + 3) = 0$
où x est l'inconnue et m le paramètre.”*

Cette fois, les statuts de x et de m sont précisés, mais on lit l'équation avant de les connaître. Or cette lecture est en bonne partie déterminée par lesdits statuts : si x est l'inconnue, l'équation est du deuxième degré ; si c'est m , il faut réorganiser l'écriture et l'équation se révèle être du premier degré.

De plus, il y a en réalité une équation pour chaque valeur du paramètre ; le référentiel du paramètre détermine la *famille* d'équations dont il s'agit. Il est par conséquent incorrect de ne pas préciser d'emblée ce référentiel. De plus, on cherche le nombre de solutions et leurs éventuelles valeurs *en fonction du paramètre* ; la donnée du paramètre est donc *première* par rapport à celle de l'inconnue. Il est par conséquent peu correct de mettre ce paramètre sur le même plan que l'inconnue et, pire, de le présenter en seconde place (Le référentiel de l'inconnue peut être précisé par la suite, ou même changé au cours de l'exercice, cela pose moins de problèmes de compréhension).

Ne serait-il pas plus clair, par exemple, d'écrire ainsi :

*“ m est un paramètre à valeur dans \mathbf{R} ;
on considère l'équation suivante à une inconnue x :”*

Nous faisons l'hypothèse que, plus les informations sont explicitées et classées dans un ordre “logique”, moins il y a de risques de malentendu, d'incompréhension et de recours à des mécanismes purement automatiques.

De plus, nous pensons préférable que les expressions mathématiques ne se trouvent pas au milieu des phrases ; leur lecture polarise en effet l'attention, et la fin du texte en français risque de ne pas être lue, ou bien d'être considérée comme secondaire.

b) *Deuxième analyse*

Considérons à nouveau la phrase suivante (*cf. paragraphe 19°*) :

*“Calculer la primitive F de la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$
qui vérifie $F(0) = 1/4$ ”*

A cause de l'article “*la*” (dans “*calculer la primitive*”), ce calcul doit conduire à une fonction précise, unique. L'énoncé présuppose donc que le problème a une solution, et que cette solution est unique.

La raison pour laquelle la fonction donnée a des primitives n'est pas explicitée. Un étudiant qui ne la connaît pas (ou qui l'a mal comprise, ou l'a oubliée) peut être induit à croire que toute fonction a une primitive.

Il y a pourtant au moins une fonction usuelle qui n'a pas de primitive (la fonction *partie entière*); et il est facile d'en construire du même type (affines par morceaux, avec discontinuités pour des abscisses appartenant à leur existentiel). (31)

La raison pour laquelle la condition " $F(0) = 1/4$ " détermine la primitive de façon unique n'est pas non plus explicitée. Un étudiant qui l'a oubliée peut être induit à une généralisation.

Il y a pourtant de nombreuses fonctions usuelles qui ont plusieurs primitives vérifiant cette condition (par exemple : $(x+1)^{-1}$, $\text{Log}|x+1|$, ...); et il est facile d'en construire d'autres du même type (continues sur leur existentiel, mais ce dernier formé d'une union d'intervalles disjoints). (31)

L'énoncé ne précise pas si l'étudiant doit, ou non, vérifier que les conditions sont effectivement remplies pour qu'il y ait une solution unique au problème. C'est sans doute que cela ne lui est pas demandé. Il ne faudrait pas pour autant le laisser oublier (ou méconnaître) qu'il va utiliser un théorème comportant des hypothèses précises.

Nous faisons l'hypothèse que, si les conditions d'application des théorèmes ne sont pas rappelées (données à vérifier, ou admises explicitement), les étudiants auront tendance à généraliser leurs conclusions à des cas où ils ne s'appliquent pas. Cela pourra se produire sur des cas où ces conclusions sont néanmoins vraies (mais sans qu'ils aient appris pourquoi) aussi bien que sur des cas où elles sont fausses.

C'est pourquoi nous proposons, par exemple, d'écrire ainsi :

"On considère la fonction suivante (qui est continue sur \mathbf{R}) :

$$x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

On appelle F celle de ses primitives qui vérifie $F(0) = 1/4$; calculer l'expression de $F(x)$."

(31) Pour affirmer cela, nous nous basons sur la seule définition générale des primitives qui puisse être enseignée au niveau du baccalauréat. C'est-à-dire : " F est une primitive de f si et seulement si, pour toute valeur de x dans \mathbf{R} , on a :

- soit ni $f(x)$, ni $F(x)$ n'existent;
- soit $f(x)$, $F(x)$ et $F'(x)$ existent, et $F'(x) = f(x)$."

On peut aussi améliorer cette définition en acceptant, quand c'est possible, que F soit prolongée par continuité, en des points où $f(x)$ n'existe pas, à condition que cela ne prolonge pas F' du même coup (ainsi $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ a pour primitive \sqrt{x} , y compris en $x = 0$).

Voici par exemple deux primitives de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ qui à 0 donnent l'image 1/4 :

$$F_1 \begin{cases} \text{si } x > -1 & F_1(x) = \text{Log}(x+1) + 1/4 \\ \text{si } x < -1 & F_1(x) = \text{Log}(-x-1) \end{cases}$$

$$F_2 \begin{cases} \text{si } x > -1 & F_2(x) = \text{Log}(x+1) + 1/4 \\ \text{si } x < -1 & F_2(x) = \text{Log}(-x-1) + 3,7 \end{cases}$$

L'information supplémentaire ("*qui est continue sur \mathbf{R}* ") peut au moins provoquer des questions sur son utilité, chez les étudiants qui ont oublié que ce type de problème n'a pas forcément une solution unique. Cela peut fournir l'occasion de rappeler les hypothèses du théorème utilisé (c'est-à-dire les conditions de validité de sa démonstration), et donc de rappeler qu'explicitement ou implicitement, la résolution du problème utilise un théorème.