OBSTACLES et DÉBLOCAGES en MATHÉMATIQUES

par Michel Bruston et Claude Rouxel

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public) 1983
N° 47

Pour tout renseignement concernant

l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

Inscription (cotisation, abonnement)

Publications (Bulletin de l'A.P.M.E.P., brochures, en particulier les collections **ELEM-MATH** et **MOTS**)

Fonctionnement (Régionales, Commissions, ...)

s'adresser au :

Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
13, rue du Jura
75013 PARIS
Tél. (1) 331.34.05

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe près de 11 000 enseignants concernés par les mathématiques (''de la Maternelle à l'Université'').

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, ''de la Maternelle à l'Université'', mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen *, en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte *, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies, (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association, ainsi qu'un supplément d'actualité (4 N^{os} par an). Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3^{e}, CAP et BEP, Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

* et dans le Texte d'Orientation 1978.

Avertissement au lecteur

La publication par l'A.P.M.E.P. de cette brochure, dont le contenu intéresse l'ensemble des enseignants de mathématiques, est un exemple de ces "retombées" possibles de la formation continue des adultes sur la formation initiale.

En effet, ces textes sont issus d'une expérimentation pédagogique en formation d'adultes, dans le cadre des enseignements préparatoires au Conservatoire National des Arts et Métiers (ceci explique que les enseignants y soient désignés comme "formateurs" et les élèves comme "étudiants").

Cette expérimentation intitulée "Introduction aux Enseignements Scientifiques" est réalisée sous la responsabilité de Michel Bruston et Claude Rouxel, avec J. Alzieu, M.J. Dassas, O. Dupont, A. Ghighi, J.P. Korolitski, M. Lagache, B. Logé, J. Lucbert, F. Montarras, M.F. Politis, A. Raksanyi, J.L. Weissberg.

Les articles qui constituent cette brochure sont le fruit du travail de cette équipe.

Dans *"Hypothèses et propositions pédagogiques pour l'enseignement des mathématiques"*, il est question des difficultés objectives que rencontrent les étudiants dans l'apprentissage des mathématiques, notamment avec la logique, l'écriture symbolique, le vocabulaire, etc. (voir sommaire page 6).

Dans *"Inconnues et Variables"*, sont repris et approfondis les problèmes posés par l'emploi des lettres, et par le passage de l'arithmétique à l'algèbre (voir sommaire page 64).

Dans *"Note sur la question des nombres"*, sont analysées les représentations mentales des étudiants de "bas niveau" à propos des distinctions entre mesures de grandeurs et nombres "purs", entre nombres entiers décimaux et nombres "réels" (voir sommaire page 74).

Dans *"Utilisation des schémas d'opérateurs en algèbre élémentaire"*, sont présentés des outils pour séparer le traitement des difficultés conceptuelles et le traitement des difficultés d'écriture symbolique (voir sommaire page 84).

M. Bruston et C. Rouxel

Hypothèses et propositions pédagogiques pour l'enseignement des mathématiques

par
Michel BRUSTON

SOMMAIRE

Hypothèses fondamentales

1°) Sur les méthodes en pédagogie 7
2°) Sur l'attitude vis-à-vis des mathématiques 8
3°) Sur le temps nécessaire 10

Hypothèses pour l'organisation de la formation

4°) Sur le programme, la démarche, le niveau visé 11
5°) Sur l'ordre de traitement des problèmes 12
6°) Sur la rigueur dans le cours 16

Hypothèses pour l'enseignement de la logique mathématique

7°) Sur le vrai et le faux 20
8°) Sur l'apprentissage de la logique mathématique 22
9°) Sur la présentation des résultats 25

Hypothèses pour l'enseignement de l'écriture symbolique

10°) Sur les automatismes 29
11°) Sur le statut des lettres en algèbre 31
12°) Sur l'introduction des conventions d'écriture 32

Hypothèses pour l'analyse des difficultés d'écriture

13°) Sur l'écriture "f(x)" et l'écriture des fonctions usuelles .. 34
14°) Sur la distinction entre "image" et "fonction" 38
15°) Sur la différence entre l'oral et l'écrit 40
16°) Sur une utilisation des "schémas d'opérateurs" 48
17°) Sur la différence entre calcul et opération 49

Hypothèses pour la rédaction des documents

18°) Sur le vocabulaire utilisé (concepts et mots ambigus) 51
19°) Sur l'acte de désignation 54
20°) Sur la grammaire utilisée 56
21°) Sur les présupposés 59

Hypothèses fondamentales

1°) *Sur les méthodes en pédagogie*

La mise au point de méthodes nouvelles en pédagogie des mathématiques présente un grand intérêt. Cependant, l'emploi d'une méthode, quelle qu'elle soit, présente aussi un risque : celui de figer le moment pédagogique, d'en exclure l'inattendu.

Or, le formateur a tout intérêt à saisir "au bond" les questions, remarques, perplexités, et même (on pourrait dire surtout) les objections des étudiants. Pour cela, au besoin, il peut en favoriser l'expression ; il est en tout cas essentiel qu'il ne la "bloque" pas.

On pourrait dire que tout "blocage" des étudiants devant les mathématiques est d'abord un blocage de leur expression à propos des mathématiques (ou, plus précisément, *en* mathématiques).

Justes ou faux, intuitifs ou argumentés, leurs opinions et jugements sont le signe de leur réflexion propre. Ils expriment la forme spécifique de leur raisonnement. Si illogiques qu'elles puissent paraître parfois, leurs raisons sont la manifestation de *leur* logique, et c'est pourquoi il est si important de leur faire expliciter celles-ci le plus complètement possible.

La nécessité d'expliciter, de communiquer avec autrui, peut d'ailleurs faire comprendre aux étudiants l'intérêt de mettre en forme leurs raisons et raisonnements, de les codifier. De plus, ces derniers, une fois exprimés et au besoin écrits, deviennent extérieurs à eux, donc susceptibles d'être étudiés, évalués, vérifiés par eux-mêmes ; leur attention devient disponible pour un raisonnement *sur* la logique de leurs raisonnements (pour une logique au deuxième degré en quelque sorte).

Si cette logique (au premier degré) est incorrecte, elle peut bloquer la suite de l'apprentissage. Il faut prendre le temps de la faire mettre en défaut par l'étudiant lui-même. C'est nécessaire pour qu'il soit convaincu de son erreur. C'est aussi une condition essentielle pour ne pas le dévaloriser à ses propres yeux : s'il arrive lui-même à la conclusion qu'il se trompait, il prouve sa capacité à raisonner juste, au deuxième degré. C'est enfin indispensable pour qu'il cherche à comprendre où, comment, pourquoi, il faisait erreur ; ce qui d'une part mobilise et exerce sa capacité à raisonner correctement, et d'autre part diminue notablement le risque d'un renouvellement systématique de la même erreur.

Par contre, si cette logique est correcte, elle peut favoriser la suite de l'apprentissage. La faire préciser et vérifier, par l'étudiant lui-même, exerce dans ce cas-là aussi sa capacité de raisonnement. Mais surtout, le formateur peut saisir l'occasion pour présenter le problème en cours sous l'angle ainsi proposé. Et cela, même s'il s'agit d'un angle inattendu, ou si cela anticipe sur la suite de la progression (ou même conduit à faire un "petit tour" aux marges du programme).

Dans les deux cas, cela peut signifier un détour, mais cela peut aussi accélérer ensuite la progression des étudiants. Et, de toutes manières, si le formateur ne prend pas au sérieux la façon dont les étudiants expriment leurs réactions en mathématiques, comment ceux-ci pourraient-ils conserver ou reprendre confiance dans leur capacité à faire des mathématiques ? Comment pourraient-ils appliquer cette capacité à résoudre les problèmes proposés par le formateur ?

Il est très important que ce dernier, tout en ne perdant pas de vue l'objectif qu'il s'est fixé, se montre très libre par rapport à tout cadre pré-élaboré. Et notamment qu'il ne se sente pas tenu par un modèle fixant une voie pour atteindre cet objectif. Il vaut mieux, pour l'efficacité de l'apprentissage, qu'il suive un moment une approche suggérée par les remarques d'un étudiant, plutôt que de s'en tenir "mordicus" à une progression balisée d'avance. Et cela, même si l'expérience a montré l'efficacité de cette progression dans d'autres circonstances.

Ainsi, notre première hypothèse fondamentale vis-à-vis de toute méthode (y compris les propositions pédagogiques qui font l'objet de cet article) est paradoxalement qu'il faut aussi savoir s'en distancier, pour que les étudiants occupent pleinement la place centrale qui est la leur dans l'acte d'apprentissage.

2°) *Sur l'attitude vis-à-vis des mathématiques*

Afin que les difficultés particulières de chaque étudiant puissent être traitées, un travail très individualisé est nécessaire, même si le formateur favorise l'étude par petits groupes. Surtout à propos des exercices, l'enseignant doit prendre le temps de s'occuper de chacun, de décortiquer chaque difficulté, avant de reprendre l'ensemble sous forme de corrigé-synthèse.

Dans cette optique, il apparaît essentiel de favoriser au maximum l'expression en mathématiques des étudiants, même quand ils sont peu sûrs de la justesse de leurs raisonnements et de leurs calculs. Il s'agit de leur faire perdre (ou de leur éviter de prendre) cette habitude — scolaire — d'écrire seulement ce dont ils sont sûrs, pour leur enlever l'angoisse de l'erreur.

Toute écriture mathématique, juste ou non, est en effet un objet sur lequel il est non seulement *possible* de raisonner, mais même sur lequel il s'agit *précisément* de raisonner ; car c'est précisément la spécificité des mathématiques d'être un travail sur des objets symboliques (et non sur du concret), travail lui-même commandé par une certaine logique (et non par des "lois" ou le seul bon sens). (1)

---

(1) *Concret* : situation considérée dans toute sa complexité (en tenant compte de tous les paramètres en jeu et de leurs variations réelles, y compris celles qui peuvent rendre la situation intraitable mathématiquement à un niveau donné de connaissances).
Si la réalité est simplifiée dans le but unique d'en faire un support à la pédagogie des mathématiques, il s'agit d'un *pseudo-concret*. L'exercice élimine les caractéristiques essentielles de

Notre deuxième hypothèse fondamentale est que la possibilité de susciter semblable attitude chez les étudiants est conditionnée par l'attitude du formateur lui-même par rapport aux mathématiques :

— attitude "dogmatique" et évaluative, ou attitude réflexive pouvant le conduire à un auto-questionnement sur ses propres connaissances ?

— attitude "capitalisante" sur un ensemble de savoirs et de méthodes, ou attitude de recherche sur un ensemble non clos de problèmes plus ou moins difficilement solubles (ou même non résolus à ce jour) ?

L'attitude du formateur nous semble par ailleurs largement liée à la possibilité, qui lui est ou non offerte,

— d'élargir le champ de référence de sa réflexion pédagogique : à l'histoire des mathématiques, à celle de la logique, aux recherches en linguistique notamment, ainsi qu'aux recherches en didactique des mathématiques,

— de travailler en équipe avec d'autres formateurs confrontés aux mêmes problèmes.

---

toute étude mathématisée du réel : définition des grandeurs à mesurer, procédures de mesure, approximations, modélisation, vérification de la validité de la méthode par ses résultats.

Cf. M. BRUSTON : "L'articulation entre l'enseignement de la physique et l'enseignement des mathématiques" (diffusé par le Centre de Formation de Formateurs du C.N.A.M.)

Si les simplifications entrent en contradiction avec la connaissance concrète qu'ont les étudiants de cette réalité (ou s'ils n'en ont aucune connaissance), l'exercice est pour eux totalement abstrait, irréel, incompréhensible. Ces simplifications abusives peuvent conduire à une pédagogie absurde ou même désastreuse.

Cf. St. BARUK : "Echec et Maths" (Ed. Seuil)
J. ADDA : "A propos des évaluations en mathématiques : du questionnement à l'interprétation et au diagnostic" (UER de Didactique des Disciplines, Paris VII) et autres articles.

Objet symbolique : 1°) — Objet *concret* mais porteur d'une symbolique claire et *familière* aux étudiants, permettant de faire abstraction, "dans le jeu", de certains paramètres matériels (exemples : cartes, dés, pièces, etc.). La familiarité est indispensable avant toute tentative de résolution de problèmes utilisant de tels objets. Or, elle dépend étroitement de la culture des étudiants concernés. S'ils ne la possèdent pas au départ, il faut prendre le temps qu'elle se constitue, si l'on ne veut pas provoquer malentendus ou incompréhensions.

Cf. WHEELER : "Mathématiques pour l'enseignement élémentaire" (Ed. OCDL)
B. DUMONT : "L'influence du langage et du contexte dans les épreuves de type logique" (thèse à l'Université Paris VII, diffusée par l'IREM de Paris-Sud)

2°) — Réalisation matérielle d'un symbole sous forme de *sons* (mots, phrases, ...) ou de *graphismes* (caractères, tableaux, schémas, graphiques, ...) construits et disposés d'une certaine manière. La matérialité de ces "objets symboliques" en fait le support de divers processus (association d'idées, construction d'images mentales, maniement automatique, ...) qui font partie intégrante de la pratique mathématique, mais qui peuvent aussi empêcher l'apprentissage s'il n'en est pas tenu compte au niveau pédagogique.

Cf. St. BARUK : "Fabrice ou l'école des mathématiques" (Ed. Seuil)
M. BRUSTON : "Expressions mathématiques et expression en mathématiques" (Education Permanente - n° 47) et ci-dessous, paragraphes 10°, et 13° à 17°.

3°) *Sur le temps nécessaire*

La pratique systématique de l'attitude réflexive peut poser au départ un problème : cette forme de travail prend du temps, et ce temps ne semble profiter qu'aux étudiants qui ont des difficultés ; les autres semblent freinés dans leurs possibilités de progression.

Pour répondre à ce problème, le formateur peut parfois organiser, pour les étudiants qui ont le plus de difficultés, des séances de ''soutien'' pendant lesquelles l'attitude réflexive est profitable à tous les présents. Une solution plus facilement généralisable est de proposer aux étudiants des exercices à deux niveaux, les plus rapides pouvant travailler sur des exercices d'approfondissement pendant que les autres ont le temps nécessaire au traitement approfondi de leurs difficultés d'assimilation.

La deuxième solution, à défaut de la première, permettra au formateur d'expérimenter cette pédagogie centrée sur la pratique des étudiants en mathématiques, et d'en tirer le maximum de bénéfices avec ceux pour lesquels elle est indispensable. C'est ainsi que nous avons nous-mêmes procédé au début. Cela nous a permis de faire les constatations suivantes :

— Les étudiants les plus faibles, après une période de perplexité, entrent tout à fait dans l'esprit de cette forme de travail, commencent à s'exprimer plus facilement, même au tableau, manifestent peu à peu des capacités intellectuelles certaines et progressent alors beaucoup plus vite.

— Les étudiants plus à l'aise au départ peuvent également tirer profit de cette forme de travail, pour passer de l'application ''automatique'' de règles et de modèles de raisonnement à la compréhension de ce qui fonde ces règles et ces modèles.

— Le travail au tableau, même avec un seul étudiant ''bloqué'', est suivi attentivement par l'ensemble du groupe, qui s'aperçoit qu'il peut en tirer profit d'une manière ou d'une autre, les difficultés des uns ayant, semble-t-il, toujours quelque rapport avec celles des autres.

— Lorsqu'un certain nombre de difficultés ont été résolues, la progression du groupe cesse d'être ralentie par les fréquents retours en arrière qu'elles occasionnaient. L'assimilation de modes de raisonnement abstraits crée une ouverture d'esprit et suscite un auto-contrôle permanent chez les étudiants. Le temps apparemment perdu au départ se trouve largement rattrapé par la suite.

Nous avons pu faire des constatations du même ordre par rapport à chacune des hypothèses pédagogiques que nous formulons dans la suite de cet article : leur prise en compte nécessite du temps, mais ce temps est rentabilisé par les effets obtenus. Au total, les acquis des étudiants se trouvent renforcés, et la quantité de programme traitée sur une longue période (plusieurs mois) n'est pas diminuée, par un mode de travail qui ne vise pas la rentabilité à très court terme.

Nous affirmons donc, et ce sera notre troisième hypothèse fondamentale, que le formateur ne doit pas hésiter à investir du temps de formation en tenant compte des propositions pédagogiques qui sont faites ici, car au bout du compte, l'efficacité de son enseignement en sera augmentée en qualité, sans être diminuée en quantité.

Hypothèses pour l'organisation de la formation

4°) *Sur le programme, la démarche, le niveau visé*

Même s'il est connu des étudiants, le programme de mathématiques prévu dans une formation est le plus souvent incompréhensible pour eux. Il est rédigé dans des termes mathématiques dont les étudiants ne connaissent pas le sens au départ : ils le découvrent au fur et à mesure de l'avancement de la formation. Ils peuvent donc savoir ce qu'ils ont fait, non ce qu'ils vont faire.

De plus, dans un programme, les titres de chapitre ne précisent ni le point jusqu'auquel l'étude théorique sera poussée, ni le genre de problèmes que les étudiants sont censés savoir résoudre à partir de cette théorie, ni le niveau de complexité qu'ils pourront rencontrer dans les calculs nécessaires à ces problèmes.

Enfin, la démarche qui sera suivie pour traiter le programme ne leur est en général pas communiquée. Quand il leur est proposé un exercice, ils ne connaissent pas l'objectif poursuivi par le formateur.

Programme, démarche, niveau visé ne sont donc connus que du seul formateur, surtout s'il n'y a pas de livre de référence (ou bien si le formateur ne suit pas la progression du livre).

L'ignorance dans laquelle sont les étudiants ne leur permet pas de situer leurs efforts et leurs résultats par rapport à l'ensemble de la formation. Nous faisons l'hypothèse que, si cela leur était permis, l'effort soutenu qui leur est demandé dans une formation de longue durée en mathématique en serait facilité.

Nous proposons pour cela de leur fournir, en sus du programme, un document comprenant :

— la liste des "capacités terminales" visées : ce qu'ils doivent être capables de faire à la fin de chaque grande étape de la formation ou de sa totalité ; c'est-à-dire les objectifs de la formation ;

— la liste des "capacités intermédiaires" nécessaires : ce dont les étudiants doivent devenir capables, au fur et à mesure de l'avancement de la formation, et qui leur sera nécessaire pour atteindre les "capacités terminales".

A l'inverse du caractère elliptique des programmes, ces listes doivent être rédigées de manière très détaillée, et préciser à la fois les types de problèmes qui seront posés aux évaluations et le niveau maximal des difficultés dans les calculs correspondants.

Toutefois, ceci ne sera vraiment utile aux étudiants que si ces capacités leur sont directement compréhensibles. Par exemple : "résoudre une équation du premier degré à coefficients entiers donnés" (ou rationnels donnés, ou etc.), n'est pas forcément explicite et compréhensible au départ pour eux, même si c'est plus précis que "équation du premier degré" (avec quel type de coefficients ? avec ou sans paramètre ? résoudre ou discuter ?). La compréhension des objectifs globaux d'une formation n'est pas toujours possible à l'avance.

C'est pourquoi nous proposons au moins, avec chaque problème ou groupe d'exercices posé au cours de la formation, de fournir des explications sur l'objectif poursuivi. Celui-ci peut être un entraînement à une technique, ou l'approfondissement d'un point déjà traité, ou encore l'exploration d'un problème général nouveau dans un cas particulier. Les termes utilisés pour formuler cet objectif peuvent et doivent être assez familiers aux étudiants pour leur permettre de se rendre compte de ce dont il s'agit.

Tout ceci nécessite bien sûr que tous ces objectifs soient clairs ou qu'ils soient préalablement clarifiés, ce qui n'est pas forcément un travail bref ni facile. Il faut noter cependant que c'est aussi une condition pour la cohérence de la formation, du point de vue du formateur (qui pourra éliminer l'inutile) autant que du point de vue du formé, qui saisira mieux les liens entre les différents moments de sa formation.

5°) ***Sur l'ordre de traitement des problèmes***

Il arrive très souvent qu'à un problème relativement simple, corresponde un problème "réciproque" plus complexe.

Ainsi, il est assez simple de remplacer "a" par "$\sqrt{2}x$", et "b" par "1", dans les expressions suivantes :

$$(a^2 - b^2) \quad , \quad (a + b)(a - b)$$

et d'obtenir :

$$(2x^2 - 1) \quad , \quad (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)$$

C'est en tout cas plus simple que de reconnaître dans $(2x^2 - 1)$ une différence de deux carrés, permettant de factoriser.

L'*identification* d'un cas "particulier" à une forme générale (ici : $a^2 - b^2$) est donc le problème réciproque, correspondant au *remplacement* des lettres par des expressions particulières dans une forme générale. *(Voir aussi paragraphe b) ci-dessous)*

De même, calculer la valeur de l'expression $(x^3 + x^2 + 1)$ pour $x = -3$ et obtenir -17, est plus simple que trouver s'il existe des valeurs de x pour lesquelles cette expression vaut -17, et si oui, les calculer — ce qu'on appelle, de manière condensée, *résoudre l'équation* $x^3 + x^2 + 1 = -17$.

La *résolution des équations* est donc le problème réciproque, correspondant à l'utilisation des expressions comme des *fonctions* (au sens où, à une valeur de x correspond une valeur de l'expression).

a) *Les cas simples*

Dans bien des cas (les plus simples en tout cas), le problème "direct" est celui où il suffit de mettre en œuvre une *technique* de calcul. Il a forcément une solution, unique. Le problème réciproque est moins automatique. Il n'a pas a priori une solution, et fait appel à une ou des *méthodes* plus complexes (2).

Ainsi, développer un produit de plusieurs polynomes (du premier ou du deuxième degré) est toujours réalisable effectivement ; tandis que mettre en produit de facteurs (du premier ou deuxième degré) un polynome donné ne l'est pas toujours, du moins en pratique.

Du point de vue du mathématicien, c'est le problème réciproque qui est le plus intéressant, justement parce qu'il ne se résout pas à tout coup par l'application d'une technique immuable, parce qu'il peut être le sujet d'une recherche, d'un problème.

Du point de vue pédagogique, il devrait pourtant être évident que l'on ne peut comprendre le problème réciproque et sa résolution tant que l'on ne maîtrise pas le problème direct.

De plus, nous faisons l'hypothèse que :

— l'étude du problème direct permet d'analyser avec les étudiants les ***difficultés*** **du problème réciproque ;**

— la présentation du problème réciproque dans sa généralité permet de leur faire comprendre la distinction entre :

• *d'une part, les objectifs.* **[Parmi les objectifs possibles, on peut en distinguer de plus ou moins importants :**

- **trouver s'il y a ou non des solutions (ou dans quels cas il y en a)**
- **trouver le nombre de solutions (quand il y en a)**
- **trouver une de ces (ou toutes ces) solutions de manière approchée**
- **trouver une de ces (ou toutes ces) solutions de manière exacte.]**

• *d'autre part, les moyens d'atteindre chacun de ces objectifs : les méthodes.* **[Il peut y en avoir plusieurs ou ne pas y en avoir ; on peut les distinguer suivant les cas, et suivant celui des objectifs que l'on veut atteindre.]**

Il est par exemple utile d'expliquer que (contrairement aux craintes des étudiants) il n'y a pas une hiérarchie infiniment croissante de difficultés dans les méthodes de résolution, au fur et à mesure que croît le degré d'une équation. Cela peut les "rassurer" d'apprendre qu'il y a en réalité une rupture qualitative entre les degrés 1 et 2 d'une part (pour *chacun* des-

---

(2) *Méthode* : ensemble complexe d'opérations, supposant la mise en œuvre d'outils pour réaliser une production.

Outil, technique : ensemble précis d'opérations pour traiter un objet.

quels existe une méthode générale *exacte*), et les degrés 3,4,5,6, etc. d'autre part, pour lesquels n'existe qu'*une* méthode générale *approchée*, bien que certains cas particuliers puissent être résolus exactement (avec le cas spécial des degrés 3 et 4 pour lesquels des méthodes exactes existent mais sont trop complexes pour être utilisables). Cela situe leurs acquisitions dans un cadre limité et maîtrisable.

b) *Un exemple simple*

Pour utiliser les identités ("remarquables" ou non), les formules générales, les "règles", etc., il faut savoir identifier, "reconnaître" dans une écriture donnée, un cas possible d'une écriture comportant des paramètres.

Ces identifications comportent en général un certain nombre de difficultés qui sont de trois types principaux. Par exemple :

	identifier, dans l'écriture donnée ci-dessous	***un cas de la forme générale ci-dessous***
(A)	$(2x^2 + x)^2$	
(B)	$[sin(2x) + 1]^2$	$(a + b)^2$
(C)	$(a + b + c)^2$	
(D)	$x^2 - 5x + \dots$	$a^2 + 2ab + \dots$
(E)	$x^2 - \frac{b}{a}x + \dots$	
(F)	$-x^3 + x - 2$	$ax^3 + bx^2 + cx + d$
(G)	$2x^2 - 1$	$a^2 - b^2$
(H)	$(x - \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	$(a^2 - b^2)$ ou $(a^2 + b^2)$

Premier type de difficulté : (A), (B), (C), (H) utilisent des expressions *plus ou moins complexes* dans le rôle de "a" et "b": $2x^2$; $sin(2x)$; $(a + b)$ ou $(b + c)$; $(x - \frac{b}{2a})$; *etc.*

Deuxième type de difficulté : (D), (E), (F), (G) utilisent pour "a" et "b" des symboles *qui n'apparaissent pas* dans l'écriture donnée : $-\frac{5}{2}$; $-\frac{b}{2a}$; -1; 0; $+1$; $+(-2)$; $\sqrt{2}$; *etc.*

Troisième type de difficulté : (C), (E), (H) utilisent, dans le rôle de "a" et "b", des expressions *contenant elles-mêmes a et b* :
$(b + c)$ dans le rôle de "b" [ou $(a + b)$ et c dans les rôles de "a" et "b"] ;
$-b/2a$ dans le rôle de "b" ; etc.
On ne peut donc pas dire que l'on a donné à b la valeur "$b + c$" ou "$-b/2a$"...

Pour les étudiants, il s'agit de véritables difficultés (surtout celles du troisième type).

On peut cependant les diminuer, si l'on part des formes générales et que l'on y fait divers *remplacements* (ici de *a, b.* ..., par des nombres, des lettres, des expressions), de façon à faire apparaître les différents cas possibles. Les difficultés du processus réciproque (l'identification) peuvent *ensuite* être analysées et traitées, en référence au processus direct du remplacement.

c) *Un exemple plus complexe*

Dans certaines méthodes, il est nécessaire de combiner la résolution de plusieurs problèmes, directs ou réciproques. Par exemple, dans l'étude des fonctions, on utilise :

— premier problème (direct) : avec une fonction explicite, obtenir sa dérivée explicitement. [*Le problème réciproque serait : avec une fonction explicite, obtenir ses primitives explicitement.*]

— deuxième problème (réciproque) : avec le tableau des signes d'une dérivée, obtenir le tableau de variations de la fonction. [*Le problème direct est : avec les variations d'une fonction, obtenir le tableau des signes de sa dérivée.*]

— troisième problème (réciproque): avec le tableau de variations d'une fonction, obtenir le graphique de la fonction. [*Le problème direct est : avec le graphique d'une fonction, obtenir son tableau de variations.*]

Pour savoir étudier une fonction, il est évidemment nécessaire de maîtriser ces trois étapes. Ceci nécessite la maîtrise des trois problèmes directs, plus celle des deuxième et troisième problèmes réciproques. Un entraînement spécifique sur le deuxième et le troisième problèmes *directs* est donc bénéfique pour l'apprentissage de l'étude des fonctions ; et ceci indépendamment du calcul explicite des dérivées. (3)

Mais surtout, pour comprendre la méthode d'étude, il est nécessaire d'aller du troisième problème au deuxième puis au premier :

— le troisième montre l'intérêt d'un tableau de variations *(et la place seulement complémentaire qu'occupe un tableau de valeurs, forcément fini)* ;
— le deuxième en déduit l'utilité d'un tableau des signes de la dérivée ;
— le premier fournit alors la technique de calcul de cette dérivée.

---

(3) Seul, le premier problème réciproque est inutile : le calcul explicite des primitives.
On peut cependant remarquer que le deuxième problème *réciproque* relève déjà de l'intégration : des *signes* d'une dérivée f' , on doit déduire les *variations* de la fonction f (c'est-à-dire d'une primitive de f'). Il peut donc être intéressant de traiter simultanément la dérivation et l'intégration, du moins qualitativement ou de façon numérique. *Cf. le cours "M.A.10" organisé par le C.U.E.E.P. (préparation à l'E.S.E.U. par unités capitalisables, Université de Lille I).*

Quel que soit le moment choisi par le formateur pour présenter les choses ainsi, cela ne peut qu'aider les étudiants à se faire une idée synthétique de la méthode, à se l'approprier.

Remarque 1 : Cela peut aussi les aider à situer l'intérêt et les limites de cette méthode :

— d'abord, par rapport à l'objectif global : avec une fonction explicite, obtenir un graphique. *[Ils pourront noter que dans certains cas simples, la méthode complète est inutile, les variations pouvant être trouvées par une analyse directe de la fonction (une composition de fonctions monotones par exemple)]* ;

— ensuite, par rapport à une des principales difficultés : étudier le signe de la dérivée. *[Ce n'est pas forcément facile, surtout si son expression est assez complexe. Ils pourront apprendre que, pour étudier le signe d'une expression, ici la dérivée, il est possible d'étudier cette expression (ou chacun de ses éventuels facteurs) comme une fonction, le graphique donnant le signe (quatrième problème)]* ;

— enfin, par rapport au problème réciproque global : avec un graphique, obtenir une fonction explicite. *[Il sera possible de leur expliquer que cela requiert des techniques entièrement différentes, et ne peut être réalisé que de manière approchée (sauf si le graphe de la fonction est défini géométriquement ; auquel cas il y a une solution unique, exacte, et la méthode relève de la géométrie analytique)]*.

Remarque 2 : Le troisième problème *direct* soulève des questions essentielles à propos de la représentation graphique. En effet, un dessin étant forcément de dimensions finies, il ne représente qu'une partie de la fonction. Un tableau de variations, au contraire, symbolise la totalité de la fonction. Un dessin ne peut suffire pour obtenir un tableau de variations complet, à moins que :

— soit l'on ne s'intéresse qu'à la partie de la fonction effectivement représentée [*cas fréquent dans l'utilisation des fonctions pour modéliser le réel : en sciences expérimentales, économie, etc.*] ;

— soit l'on symbolise sur le graphique les parties illimitées de la courbe, qui ne peuvent être effectivement dessinées. Et c'est le rôle des asymptotes : permettre d'"imaginer" ce qui est "hors dessin".

Ainsi, dans le troisième problème réciproque (des variations au graphique), les étudiants verront mieux l'utilité de la représentation graphique des limites : les branches infinies.

6°) *Sur la rigueur dans le cours*

En mathématiques, la notion de "démonstration" occupe une place centrale. Cela ne signifie pas pour autant que cette notion soit claire, d'emblée, aux yeux des étudiants. Une démonstration peut être probante pour le formateur ; elle n'est souvent, pour les étudiants, guère plus convaincante que le résultat lui-même.

Il faut noter, d'ailleurs, qu'une rigueur totale serait impossible dans les enseignements dont il est ici question. La mise au point d'un corpus entièrement déductif des mathématiques a été réalisée par des mathématiciens du plus haut niveau, et il serait ridicule de tenter de les enseigner ainsi. (4)

Certains concepts sont donc introduits de façon plus ou moins intuitive ; or leur caractère "intuitif" n'a, en général, rien d'évident. Le concept de "nombre réel" et celui de "limite", notamment, sont particulièrement complexes. (La preuve est historique : les mathématiciens ont éprouvé les plus grandes difficultés à leur donner un statut rigoureux)

Pour que se constitue chez les étudiants une certaine "compréhension intuitive" de ces concepts, pour que ce soient au moins pour eux des "notions" claires, il est nécessaire de les aborder par des exercices spécifiques. A partir de là, il est possible de passer un certain temps à leur fournir des explications complémentaires, de type qualitatif. **Nous faisons l'hypothèse qu'il est plus facile pour les étudiants d'accepter ce qui s'annonce explicitement comme une information non démontrée en cours, que ce qui est accompagné d'une démonstration non convaincante — à condition que ce qui est admis soit expliqué (et discuté au besoin) de façon que la signification en devienne claire pour eux.**

Ceci ne veut évidemment pas dire qu'il faut admettre tous les théorèmes importants et n'en démontrer que des conséquences immédiates ou triviales (Idem si l'on part d'axiomes). Notamment, il est inutile de "démontrer" un théorème s'il a été admis précédemment sous une forme différente, comme axiome ou théorème (faire passer cela pour une démonstration peut même relever de la mystification ; il vaut mieux montrer que : l'admettre sous une forme revient à l'admettre sous une autre ; c'est tout aussi rigoureux, et plus conforme à l'esprit de l'axiomatique).

Il faut se rappeler que dans le mot *démontrer*, il y a *montrer*, c'est-à-dire donner à voir, emporter la conviction. (A l'origine des progrès de la logique, il y a d'ailleurs toujours eu l'étude des raisonnements qui emportent la conviction (5)).

---

(4) Quiconque en doute, est convié :
— à s'excuser (comme le fait Bourbaki) d'utiliser des documents aux pages numérotées, avant d'avoir défini les entiers...
— à s'excuser (ce que ne fait même pas Bourbaki) de tenir des raisonnements avant d'avoir présenté les "axiomes logiques" sur lesquels il s'appuie, et déduit de ces axiomes chacun des "théorèmes logiques" qu'il compte utiliser... *(cf. note 5 sur l'axiomatisation de la logique).*

(5) De là vient qu'il puisse y avoir débat entre logiciens (mathématiciens et/ou philosophes). Le dernier de ces débats, qui a été très vif dans la première moitié de ce siècle, porte sur les fondements des mathématiques. Comme il est encore actuel, et que les recherches qu'il a suscitées ont eu d'énormes conséquences (invention des langages-machines ; étude de la classe des fonctions de **N** dans **N** effectivement calculables ; création de l'axiomatique mathématique actuelle ; etc.), nous en dirons quelques mots ci-dessous.

Une démonstration qui n'emporte pas la conviction des étudiants, parce qu'elle est trop complexe par rapport à leurs connaissances en logique, est inutile (Il en est de même pour une déduction immédiate à partir d'un théorème admis — ou d'un axiome — dont la signification n'est pas claire pour eux). Si, de plus, une telle démonstration est pour le formateur une preuve indiscutable, suffisante, alors les étudiants sont conduits à "admettre" la démonstration, en même temps que sa conclusion ; tout au plus poseront-ils des questions sur les étapes les plus difficiles pour eux. Mais cela risque de leur enlever la possibilité d'exprimer leurs questions sur la signification du résultat obtenu, voire même leurs objections sur sa validité, et sur la validité de ses conséquences.

Or, si un formateur veut mettre en cause le raisonnement d'un étudiant, comment va-t-il s'y prendre ? Avant de lui montrer (ou de lui faire chercher) son erreur, ne peut-il lui faire d'abord découvrir qu'*il y a* erreur, en mettant en cause le résultat obtenu ? Par exemple, en lui opposant un contre-exemple ? ou en lui montrant que l'on pourrait tirer de ce résultat des conséquences clairement fausses ? *(cf. exemple au paragraphe 7° ci-dessous).* Pourquoi les étudiants ne pourraient-ils faire de même, ne serait-ce que pour mieux comprendre, s'ils ne sont pas pleinement convaincus par un raisonnement du formateur ?

Ceci est d'ailleurs également valable dans les cas où la démonstration est convaincante si, par contre, sa conclusion étonne. Dans un tel cas,

---

Ce débat (et ces recherches) ont été déclenchées par la découverte, dans la "théorie des ensembles" de Cantor, de contradictions internes appelées "paradoxes logiques" (paradoxes de Russell, de Cantor, de Burali-Forti, etc.). Pour éliminer de tels risques de contradiction, deux directions ont été proposées et deux courants se sont constitués : les "formalistes", et les "intuitionnistes" (ou "constructivistes").

Les intuitionnistes (à la suite de Brouwer) ont considéré notamment que : l'existence d'un élément (ou d'une fonction) ne peut être prouvée qu'à la condition de construire une *procédure effective et explicite* permettant de calculer, en un nombre *fini* d'étapes, cet élément (ou l'image, par la fonction, d'un élément de départ donné). Il ne suffit donc pas de prouver que l'hypothèse d'inexistence conduit à une contradiction. Ainsi, le raisonnement par l'absurde est exclu des raisonnements qui emportent la conviction. Par contre, les formalistes (à la suite de Hilbert) acceptent le raisonnement par l'absurde et les démonstrations d'existence qui en découlent.

Ces deux courants règlent les raisonnements acceptables en *axiomatisant* non seulement les mathématiques (comme Euclide pensait l'avoir fait pour la géométrie) mais aussi la *logique*, en choisissant des *axiomes logiques* et des *règles de déduction* ; on obtient des *théorèmes logiques*. Ces derniers sont considérés comme *les* raisonnements qui emportent la conviction parce que : leur déduction est une suite *finie* d'énoncés, qui soit sont des axiomes, soit en découlent par application *mécanique* des règles de déduction. Le choix des axiomes logiques [par exemple : *"(A et B) implique B"*] et des règles de déduction [par exemple : *de "A" et "A implique B" on peut déduire "B"*], correspond à ce qui est considéré comme raisonnement élémentaire intuitivement convaincant. Ainsi, pour les formalistes, *"(non non A) implique A"* est un axiome. Les intuitionnistes se limitent à un axiome moins fort.

Les formalistes utilisent aussi les tables de vérité. Les intuitionnistes ne peuvent que les refuser puisque pour eux : *"non A" faux*, prouve : *"non non A" vrai*, mais ne suffit pas à prouver : *"A" vrai*.

Pour plus de détails, nous renvoyons à :

S.C. KLEENE : "Logique mathématique" (Ed. A. Colin) p. 194-206.

tout mathématicien cherchera des preuves annexes, vérifiera sur des cas particuliers ou en tirant des conséquences vérifiables, etc. Ceci parce que, toujours, le risque d'une erreur de raisonnement existe (il y a eu, dans l'histoire, de fausses démonstrations du théorème des accroissements finis ; cf. aussi les contradictions de la théorie des ensembles). Mais aussi parce qu'un résultat étonnant oblige à modifier *l'idée* que l'on se fait des objets mathématiques que l'on manipule (leur *représentation* mentale). Il en est de même pour les étudiants, à leur niveau ; c'est pourquoi il est essentiel qu'ils puissent mettre en question, "tester", ce qu'ils apprennent.

Si ces questions et objections, toujours essentielles pour eux, n'ont pas la possibilité de s'exprimer et d'obtenir réponse, elle restent comme un "hiatus" dans leur esprit. Et ceci, même s'ils tentent de les oublier et cherchent à appliquer "automatiquement" les résultats. Quand toute leur attention se trouve concentrée sur l'utilisation correcte de la "règle" qu'ils ont admise sans la comprendre, ils ne se trompent en général pas. Mais dès qu'il s'agit de l'utiliser dans un autre contexte, où l'intérêt se porte sur un autre objectif, l'application automatique de la règle se trouve mise en défaut : l'erreur dite "d'inattention" vient régulièrement signaler que quelque chose fait toujours problème.

L'exigence d'une grande rigueur formelle dans la progression d'un cours réduit les étudiants à "l'acte de foi". Ceci ne favorise pas le développement de leurs capacités de raisonnement. On obtient ainsi le contraire de ce que l'on cherchait : la rigueur de l'enseignement entraîne le manque de rigueur de l'apprentissage (même si, par ailleurs, elle suscite un certain sentiment de sécurité : *"les maths, c'est rigoureux"*).

Nous faisons donc l'hypothèse que la progression de la formation peut avantageusement être organisée en fonction de considérations principalement pédagogiques (à condition que cette organisation soit assez cohérente pour que les étudiants se sentent sur un "terrain" solide, sûr (non-insécurisant)).

En particulier, nous proposons que certains problèmes généraux soient abordés par l'étude de cas particuliers "typiques". Ceux-ci doivent être choisis suffisamment complexes pour que leur étude mette en évidence les différentes situations que l'on peut rencontrer dans le cas général. Il est alors commode d'admettre certains résultats n'ayant qu'un rapport lointain avec l'objectif visé, de façon à concentrer l'attention sur ce dernier, et à y consacrer tout le temps disponible.

Des moments de synthèse peuvent être prévus à quelques grandes étapes de la formation, pour une reprise des résultats accumulés et leur réorganisation dans un cadre plus déductif.

Ceci suppose évidemment que, à ces moments, les formés aient acquis une certaine connaissance des règles de logique, et en aient compris l'intérêt.

7°) *Sur le vrai et le faux*

En examinant les travaux réalisés par les étudiants, le formateur est généralement à même de juger très rapidement si leurs résultats sont justes ou non (sans parler des cas où il connaît d'avance le résultat juste). Les étudiants se trouvent ainsi placés sous un regard extérieur qui sépare le vrai du faux, sans qu'eux-mêmes sachent comment. Ils sont dessaisis de tout contrôle sur leur propre travail.

Certes, ils savent en général que les formateurs aussi peuvent se tromper (car cela leur arrive pendant les cours). Mais ils ignorent que ces derniers possèdent des méthodes pour contrôler la validité de leurs résultats, retrouver les erreurs éventuelles, les corriger.

Ainsi, se constitue le mythe d'une mathématique sans faute, incarnée peu ou prou par les formateurs qui jugent en dernier ressort (y compris leurs propres erreurs). Et ce mythe creuse un fossé infranchissable entre les formés, qui se trompent, et les mathématiques.

Il est pourtant clair que des techniques de vérification peuvent être enseignées, au même titre que celles de calcul et de raisonnement. C'est en utilisant ces techniques que l'on apprend à repérer les impossibilités, les contradictions, et que l'on forme son regard aux "évidences" (ce mot si allègrement brandi devant des étudiants qui "n'en peuvent mais" et se feront traiter d'aveugles : points d'exclamation dans la marge des copies, *"oh !"* et autres onomatopées qui n'en apprendront pas plus à la victime).

De plus, si un résultat est faux, les techniques de vérification peuvent aider à repérer le lieu de l'erreur, et à trouver le résultat correct sans tout recommencer. Alors qu'en recommençant tout, il arrive fréquemment que l'on reproduise la même erreur.

Nous faisons l'hypothèse que, plutôt que de dire lui-même si un résultat est juste ou faux, le formateur doit fournir aux étudiants les moyens de le déterminer eux-mêmes, et (si le résultat se révèle être faux) de repérer le lieu de l'erreur.

L'autonomie de ces étudiants s'en trouvera augmentée ; et l'exigence de rigueur se manifestera concrètement par un travail sur le matériau mathématique qu'ils auront produit, ce qui est une vision plus correcte des mathématiques.

Analyse d'un exemple

Considérons l'égalité suivante, que bien des étudiants estiment vraie au premier abord :

$$\frac{a + c}{b + c} = \frac{a}{b}$$

Pour un étudiant habitué à *"rayer le même nombre en haut et en bas"* en guise de méthode de simplification des fractions, le *"c"* appelle irrésistiblement le coup de crayon.

Ne rejetons cependant pas trop vite cette "recette", elle contient une information importante, le mot *nombre*: elle suppose admis que la lettre *c* représente un nombre. Il est donc possible de se mettre d'accord sur le statut des lettres *a, b, c,* : elles représentent des nombres, n'importe quels nombres. Dire que cette égalité est vraie, c'est affirmer qu'elle l'est avec n'importe quelles valeurs numériques de *a, b, c*.

A partir de là, pourquoi ne pas proposer de s'en assurer dans quelques cas particuliers, choisis par les étudiants ? Une telle vérification est une démarche qui relève directement de la logique "concrète" des étudiants. Obtenir un résultat négatif est une démonstration de leur erreur qui leur est immédiatement accessible. Or la probabilité d'un choix "heureux" (pour eux, c'est-à-dire rendant l'égalité vraie) est faible ; avec plusieurs choix différents, on peut la considérer comme nulle.

L'analyse d'un cas rendant l'égalité fausse, la comparaison avec une simplification correcte, permettent alors de tirer des conclusions : le nombre par lequel on "simplifie" doit être en facteur au numérateur et au dénominateur.

Mais la leçon principale n'est pas là : elle est dans la méthode qui a permis de prouver la fausseté de l'égalité : un seul cas particulier y suffit.

Ce n'est pas fini cependant, car deux erreurs (logiquement équivalentes d'ailleurs) peuvent encore découler de tout ce travail :

— croire qu'il suffit d'un cas particulier pour prouver la vérité d'une égalité ;

— croire qu'une égalité qui est fausse dans un cas est fausse dans tous les cas.

La question de départ (l'égalité est-elle vraie, c'est-à-dire toujours vraie ?) peut être retournée : l'égalité est-elle toujours fausse ?

Quelle que soit la méthode (recherche par essais choisis ou proposés, ou bien calcul algébrique), la découverte de cas où l'égalité est vraie permet de traiter simultanément les deux risques d'erreur :

— il y a des cas où l'égalité est vraie, et pourtant, elle ne l'est pas toujours ; un cas suffit à prouver la fausseté, mais un cas ne saurait suffire à prouver la vérité. Même de nombreux cas n'y suffisent pas. C'est le problème de la démonstration des identités.

— il y a des égalités qui sont fausses dans certains cas, mais vraies dans d'autres. C'est le problème de la résolution des équations.

Ainsi, le vrai et le faux trouvent leur statut à l'intérieur des mathématiques (ce qui est le début de la logique) et à l'intérieur du travail des étudiants, ce qui est le début de la pratique de cette logique.

8°) *Sur l'apprentissage de la logique mathématique*

La logique mathématique est quelque chose qui s'apprend, notamment au fur et à mesure de l'apprentissage des mathématiques.

C'est aussi quelque chose qui s'enseigne. Même les formes dites "élémentaires" du raisonnement déductif présentent une certaine complexité (et certains types de déduction — raisonnements par l'absurde, par récurrence — présentent des difficultés particulières).

Pour en favoriser l'apprentissage, nous faisons l'hypothèse qu'il est préférable de distinguer les difficultés d'ordre logique des difficultés de maniement des symboles (calcul algébrique par exemple), et de les traiter différemment au cours de la formation.

Analyse d'un exemple

Considérons une équation à une inconnue x, dont le référentiel est **R**. Ce pourrait être l'une des équations suivantes :

$$2x - 6 = 0 \qquad \text{(A)}$$

ou bien $$4x^5 + x^3 = 5 \qquad \text{(B)}$$

ou bien $$\sqrt{1 - x} = x - 1 \qquad \text{(C)}$$

ou bien $$|8x^2 - 5| = 5 - 16x \quad \text{(6)} \qquad \text{(D)}$$

ou bien $$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = 0 \qquad \text{(E)}$$

(On pourrait tout aussi bien se servir d'une inéquation, même du premier degré à une inconnue. Ce serait au formateur désirant utiliser la suite de ce paragraphe avec ses étudiants de construire un exemple adapté à leur niveau, et de le traiter en tenant compte de leurs connaissances mathématiques)

L'équation considérée peut fait l'objet de traitements divers ; notamment :

— *voir* immédiatement une solution très simple, ou un ensemble de telles solutions ;

— *essayer* une liste de nombres pour savoir s'ils sont ou non solutions ;

(6) Remarque sur *"la valeur absolue de a"* : "$|a|$" ; on la calcule indifféremment de l'une des quatre manières suivantes :
$|a|$ = *d(0,a) = distance (sur l'axe des réels) entre les points représentant "0" et "a";*
$|a|$ = *sup (a ; − a) = le plus grand des deux nombres "a" et "− a";*
$|a|$ = $\sqrt{a^2}$ = *la racine carrée positive ou nulle de "a^2";*
$|a|$ = *soit "+ a" (si a est positif), soit "− a" (si a est négatif), soit "0" (si a est nul).*
La valeur absolue d'un nombre n'est donc *jamais négative*. Mais il serait faux de dire qu'elle est toujours positive, puisqu'elle peut être nulle.

— chercher un ensemble contenant *toutes* les solutions éventuelles *[cet ensemble peut être fini (une liste) ou infini (une demi-droite, un intervalle,...)]*. (7)

La distinction entre ces trois traitements est d'ordre purement *logique*, et totalement indépendante des difficultés de leur mise en œuvre :

— le premier conduit à une affirmation du type suivant :
a : "si x appartient à tel ensemble, alors l'égalité est vraie"

— le deuxième conduit à une affirmation du type *a*, pour certains nombres, et pour d'autres à une affirmation du type suivant :
b : "si x appartient à tel ensemble, alors l'égalité est fausse"

— le troisième conduit à deux affirmations des types suivants :
c : "si x n'appartient pas à tel ensemble, alors l'égalité est fausse"
d : "si l'égalité est vraie, alors x appartient à tel ensemble"

(Avec une inéquation, il suffirait de remplacer le mot *"égalité"* par *"inégalité"*).

---

(7) Le deuxième et le troisième des traitements proposés ici supposent, explicitement ou non, que l'inconnue x est en réalité une *variable* (variable à laquelle est imposée une condition fixant le domaine des valeurs cherchées, et non pas le domaine des valeurs *possibles* : ce dernier reste le "référentiel" de l'équation, c'est-à-dire le domaine dans lequel on cherche).

Premier traitement :
Pour A : $\{+3\}$; B : $\{+1\}$; C : $\{+1\}$; D : $\{0\}$; E : $\{0; +2\}$ mais il y a erreur pour $+2$ car le dénominateur aussi s'annule pour $x = +2$.

Deuxième traitement :
On essaie souvent les premiers entiers dans les équations polynomiales à coefficients entiers. On peut essayer les solutions "vues" — au premier traitement — par prudence (cf. E : on peut "voir" $+2$, qui pourtant n'est pas solution). On peut essayer les nombres trouvés au troisième traitement, s'il s'agit d'un ensemble *fini* ; on peut en essayer certains s'il s'agit d'un ensemble *infini*. Les techniques d'approximation nécessitent l'essai de nombres de plus en plus proches des solutions cherchées. Etc.

Troisième traitement :
Pour A : $\{3\}$, obtenu par calcul algébrique.
Pour B : $]0, +\infty[$, car il est clair qu'il n'y a aucune solution négative ou nulle ;
$[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}]$, obtenu en utilisant la majoration suivante :

les solutions de "$\sum_{0}^{n} a_k x^k = 0$" *vérifient :* $|x| \leqslant \sup(1 ; \frac{1}{|a_n|} . \sum_{0}^{n-1} |a_k|)$;

$\{\pm 1; \pm 5; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{5}{2}; \pm\frac{5}{4}\}$, si l'on cherche spécifiquement les solutions *rationnelles*.
Pour C : $\{1\}$, obtenu par des considérations de signes $(1-x \geqslant 0 ; x-1 \geqslant 0)$;
$\{0;1\}$, obtenu par "suppression" du radical.
Pour D : $]-\infty, -5/16]$, obtenu par des considérations de signes $(5-16x \geqslant 0)$;
$\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 0; 2\}$, obtenu par "suppression" de la valeur absolue.
Pour E : $\mathbf{R} - \{2 ; 3\}$, car une solution ne doit pas annuler le dénominateur ;
$\{0 ; 2\}$, obtenu par "suppression" du dénominateur.

L'examen de ces affirmations, leur comparaison, peut conduire aux notions d'implication (a ; b ; c ; d) et d'implications contraposées (c et d). Et l'on peut faire établir les implications contraposées de a et b .

En changeant les ensembles cités (ou avec E et les solutions "vues" $\{0 ; +2\}$) on peut encore faire apparaître qu'il y a des implications *vraies* et des implications *fausses* (et qu'une implication est fausse, s'il y a un cas où le *"si..."* est *vrai,* et où le *"alors..."* est *faux*).

Et en considérant ces affirmations indépendamment de leur véracité, on peut introduire enfin la notion d'implications réciproques l'une de l'autre (d'une part *d,* d'autre part *a, avec le même ensemble*), et celle d'équivalence logique (*"d et a", avec le même ensemble*).

L'exigence de rigueur dans la résolution d'une équation (ou d'une inéquation) peut alors être analysée : il s'agit d'établir une équivalence logique du type *"d et a" vrai* (ou *"a et c" vrai*) *pour le même ensemble.* Celle-ci pouvant d'ailleurs être comprise de deux manières un peu (très peu) différentes :

$\left\{\begin{array}{l}\textit{a: tous les nombres trouvés sont solutions;}\\ \textit{c: il n'y a pas d'autres solutions;}\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}\textit{d: on a trouvé des nombres, qui sont les seuls susceptibles d'être}\\ \quad\textit{solutions;}\\ \textit{a: tous ces nombres sont effectivement solutions.}\end{array}\right.$

En résumé, une équation (ou une inéquation) à une inconnue peut conduire à des considérations logiques, à condition de laisser de côté l'apprentissage des méthodes de résolution, et des techniques de calcul correspondantes.

Remarque 1 : Les conclusions peuvent ensuite être utilisées pour analyser les diverses méthodes connues de résolution, ou en présenter de nouvelles :

— résolution par *implications successives* jusqu'à obtenir une liste de nombres *(d)* ; puis *essai* de chaque nombre de cette liste (soit *a,* soit *b* pour chacun) ;

— résolution par *découverte* immédiate d'un nombre de solutions *(a)* correspondant au nombre *maximum* possible *(c)* ;

— résolution par *encadrement (d)* puis *approximations* successives (*a*, mais avec des valeurs approchées) ;

— résolution par *équivalences logiques* successives (*d* et *a* simultanés), moyennant certaines *précautions* (pour les dénominateurs, radicaux, valeurs absolues, ...) (8);

— etc.

Remarque 2: Les conclusions d'ordre logique permettent également d'analyser d'autres aspects des mathématiques. On peut notamment distinguer les théorèmes avec implication (*"si..., alors..."*) de ceux avec équivalence logique (*"...si et seulement si..."*).

9°) *Sur la présentation des résultats*

Les techniques de vérification dont il a été question plus haut *(paragraphe 7°)* trouvent tout naturellement leur place dans l'apprentissage de la logique.

D'abord, la vérification des résultats trouvés en résolvant une équation peut être considérée comme le deuxième des trois traitements que nous avons analysés (essayer une liste de nombres pour savoir s'ils sont ou non solutions). Elle est logiquement nécessaire après un début de résolution par implications successives.

Ensuite, cette vérification est utile, y compris dans les cas où la résolution a été faite par équivalences logiques successives (et où, par conséquent, ce n'est pas une nécessité logique qui l'impose). Le risque d'erreurs dans ladite résolution, à lui seul, la justifie; c'est déjà une première raison.

Il y en a une deuxième: c'est que toute vérification met *directement* en rapport les résultats trouvés et l'énoncé du problème. Et ceci présente un intérêt dans l'apprentissage de la logique, à un autre niveau.

Les processus plus ou moins mécaniques de démonstration ou de calcul peuvent en effet finir par cacher qu'une conclusion est valable seulement par rapport aux hypothèses choisies.

Ils peuvent aussi cacher qu'une conclusion est réutilisable dans tous les cas où les hypothèses correspondantes sont remplies.

---

(8) Pour comprendre la nécessité de ces *précautions* (et leur choix), il faut préalablement avoir constaté, notamment sur des exemples, que sinon, on peut obtenir des nombres qui ne sont pas solutions; il faut aussi avoir vu un intérêt à ne pas devoir trier les nombres obtenus en essayant chacun (rapidité, cas d'une infinité de solutions, cas avec paramètres, généralisation...); et il faut surtout avoir analysé les raisons pour lesquelles il n'y a pas équivalence logique.

Par exemple, avec l'équation (C) ci-dessus: $\sqrt{1 - x} = x - 1$, on peut analyser les effets de la pseudo-solution *(0)* [obtenue par élévation au carré (sans précautions) des deux membres de l'égalité]:

$$\sqrt{1} = -1 \qquad\qquad 1 = (-1)^2$$

Contrairement à ce que l'on pourrait attendre (par analogie avec l'existentiel des fonctions), le problème ne vient pas d'un $(1 - x)$ négatif sous le radical. Il vient d'une valeur négative de $(x - 1)$, qui donne cependant le "bon" carré, car elle est trouvée à partir de:

$$1 - x = (x - 1)^2$$

Ainsi, l'on peut faire comprendre que la "précaution" à prendre, pour n'obtenir *que* les solutions, est $x - 1 \geqslant 0$.

Nous faisons donc l'hypothèse que la présentation des résultats doit mettre directement en rapport les conclusions ou résultats obtenus avec les hypothèses ou données utilisées.

Nous verrons, à propos des exemples qui suivent, ce que cette hypothèse signifie, et quelles autres conséquences en découlent.

a) *Premier exemple*

Une solution d'équation à une inconnue n'a ni sens ni intérêt si elle est isolée de l'équation elle-même. Il est impossible de s'en servir. Le véritable résultat n'est pas non plus l'ensemble des solutions, mais *une équivalence logique*: **entre l'équation et l'appartenance de l'inconnue à cet ensemble.**

Considérons par exemple un problème *de nombre de solutions d'une équation du deuxième degré en x, avec un paramètre m.* La résolution de "$\triangle(m) = 0$" n'a pas pour résultat un ensemble de valeurs de m; cela donnerait l'impression d'en avoir fini avec le problème (au mieux, on ne saurait qu'en faire). Le résultat est :

$$\triangle(m) = 0 \iff m \in \{\ldots\ldots\}$$

De ce résultat, ainsi présenté, il est possible de tirer d'autres conclusions, notamment :

$$\triangle(m) \neq 0 \iff m \notin \{\ldots\ldots\}$$

et il est possible de revenir au problème posé (l'étude du signe de $\triangle(m)$).

b) *Deuxième exemple*

De même, une expression algébrique obtenue par des transformations d'écriture (développement, mise en produit de facteurs, etc.) n'a ni sens ni intérêt si elle est isolée de l'expression de laquelle on est parti. Le résultat est une *égalité*: **entre l'expression de départ et celle trouvée à la fin.**

Considérons, par exemple, un problème *d'étude de signe d'un polynome du deuxième degré en x, donné sous forme développée.* La mise en facteurs n'a pas pour résultat un produit, mais l'égalité entre l'expression développée et le produit :

$$\ldots x^2 + \ldots x + \ldots = \ldots(x - \ldots)(x - \ldots)$$

De ce résultat, ainsi présenté, il est possible de tirer d'autres conclusions, notamment :

$$\ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0 \iff x \in \{\ldots ; \ldots\}$$

et de revenir au problème posé (l'étude du signe du polynome).

Remarque: L'égalité obtenue n'est utile que parce qu'elle est vraie *pour toute valeur de x dans* **R**. Pour que cela soit clairement indiqué dans l'écriture, il est utile de se servir du symbole "$\forall$":

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = \ldots(x - \ldots)(x - \ldots)$$

La signification de l'égalité est ainsi plus évidente, et les techniques de vérification plus faciles à imaginer (remplacer "x" par des réels judicieusement choisis). La question du nombre de tels remplacements, suffisant pour être certain de l'égalité, peut alors être posée. De plus, avec cette présentation, il est signifié que la variable "x" peut être remplacée aussi par toute variable ou expression *représentant* des nombres réels. On peut donc en tirer d'autres conclusions :

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad \ldots y^2 + \ldots y + \ldots = \ldots(y - \ldots)(y - \ldots)$$
$$\forall m \in \mathbf{R} \quad \ldots m^6 + \ldots m^3 + \ldots = \ldots(m^3 - \ldots)(m^3 - \ldots)$$
$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \ldots \cos^2(\alpha) + \ldots \cos(\alpha) + \ldots = \ldots[\cos(\alpha) - \ldots][\cos(\alpha) - \ldots]$$

c) Troisième exemple

On peut faire une analyse semblable avec les implications et les équivalences logiques. Considérons celles qui portent sur les limites. L'écriture suivante, isolée, n'a aucun sens :

$$\frac{1}{2x} \longrightarrow +\infty$$

Les écritures suivantes sont déjà meilleures :

$$\frac{1}{2x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

$$2x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0^+ \Longleftrightarrow \frac{1}{2x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

Cependant, ce résultat est surtout utile pour des études de limites où c'est par exemple $x-3$ qui tend vers 0^+ (et non pas $2x$). Il est donc préférable d'indiquer clairement cette possibilité de remplacer $2x$ par $x-3$ (ou toute autre fonction à valeur dans **R**), à l'aide du symbole $\forall$:

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \; [f \longrightarrow 0^+ \Longleftrightarrow \frac{1}{f} \longrightarrow +\infty]$$

En effet, comme "$\forall x \in \mathbf{R}$" **signifie** *"pour n'importe quelle valeur de x dans* **R** *(ou : expression à valeur dans* **R***)"*, **de même** "$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$" **signifie :** *"pour n'importe quelle fonction (ou : expression de fonction) à valeurs dans* **R***"*. **Il indique le champ de réutilisation de l'implication.**

C'est là le rôle fondamental du symbole $\forall$. Nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire de l'enseigner et de le faire utiliser. Chaque écriture complète où il y a des variables (identité, inégalité, implication, équivalence logique) peut et devrait être précédée de ce symbole. (9)

C'est à chaque formateur de choisir le moment d'introduire le symbole $\forall$, et de faire apprendre sa manipulation. Il est certain que, dès ce moment, les étudiants comprendront mieux comment se servir d'un théorème ou d'une formule, et comprendront (pour la première fois probablement) qu'une méthode ou un résultat particulier peut en réalité servir à une famille de problèmes.

---

(9) *Cf. J. ADDA : "L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques" (NICO, 1975).*

d) *Retour sur le premier exemple*

Le premier exemple vu dans ce paragraphe sur la présentation des résultats peut donner les écritures suivantes :

$$\forall m \in \mathbf{R} \quad [\,\triangle(m) = 0 \iff m \in \{......\}\,]$$
$$\forall m \in \mathbf{R} \quad [\,\triangle(m) \neq 0 \iff m \notin \{......\}\,]$$

Ces écritures précédées du "$\forall$", ont l'avantage de bien mettre en évidence que le travail effectué est indépendant de la lettre "*m*", que les techniques à mettre en œuvre sont les mêmes que celles qui porteraient sur une expression en "*x*". De plus "$\forall m \in \mathbf{R}$" renforce l'idée (déjà présente dans l'équivalence logique) que c'est de manière provisoire que le paramètre m a été traité comme une inconnue : m reste une lettre à valeur quelconque dans **R**.

e) *Remarque*

Vu la signification première du symbole $\forall$, il est tout à fait possible que les étudiants demandent ce que cela donnerait si, dans une implication ou une équivalence logique précédée de "$\forall x \in \mathbf{R}$", on remplaçait x par un nombre réel.

L'expérience vaut d'être tentée (au besoin en commençant par des cas simples). Par exemple :

1°) Avec l'équivalence logique suivante:	$\forall x \in \mathbf{R}\,[\,2x - 6 = 0$	$\Leftrightarrow$	$2x = 6\,]$
on obtient, en remplaçant x par 3 :	*vrai*		*vrai*
et par un nombre différent de 3 :	*faux*		*faux*

(Ceci donne les deux cas où l'équivalence logique est *vraie* en termes de tables de vérité).

La signification de l'équivalence logique s'en dégage clairement : *"si vrai, alors vrai, et si faux, alors faux"* ; c'est-à-dire : *"vrais simultanément, faux simultanément"*. Ceci peut être mis en rapport avec le fait suivant, plus facile à comprendre :

de l'équivalence donnée : $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6$

on peut déduire : $2x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 6$

2°) Avec l'implication suivante :	$\forall x \in \mathbf{R}\,[\,2x - 6 = 0$	$\Rightarrow$	$x^2 = 9\,]$
on obtient en remplaçant x par 3 :	*vrai*		*vrai*
et par (-3) :	*faux*		*vrai*
et par un nombre différent de 3 et (-3) :	*faux*		*faux*

(Ceci donne les trois cas où l'implication est *vraie* en termes de tables de vérité).

La spécificité de l'implication (par rapport à l'équivalence logique) s'en dégage clairement : *"si vrai alors vrai, si faux alors... vrai ou faux"*. Ceci peut être mis en rapport avec le fait suivant, plus facile à comprendre :

Pour montrer la *fausseté* de l'implication donnée $(2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 9)$ il faudrait trouver un cas où "$2x - 6 = 0$" *est vrai*, et où "$x^2 = 9$" est *faux*.

Ainsi, l'utilisation du symbole ∀ peut amener les étudiants à une meilleure compréhension de l'équivalence logique et de l'implication (et éventuellement servir d'introduction aux tables de vérité). (10)

Hypothèses pour l'enseignement de l'écriture symbolique

Le travail mathématique s'effectue depuis quelques siècles à l'aide d'écritures symboliques qui présentent d'énormes avantages (11). A ces avantages correspondent cependant un certain nombre de difficultés d'ordre pédagogique, qu'il s'agit de pallier.

10°) *Sur les automatismes*

Le premier avantage de l'écriture symbolique est de condenser en un petit nombre de signes des significations complexes, et de permettre un traitement quasi "automatique" de ces signes.

Ces jeux d'écriture laissent cependant au second plan la compréhension des processus mathématiques sous-jacents. Une certaine "mécanique" peut se constituer... et déborder son champ de validité.

Pour éviter la constitution de ces mécanismes totalement automatiques (ou bien pour remédier à ceux déjà constitués chez les étudiants), il est nécessaire de rétablir l'exigence d'une signification mathématique claire pour toute manipulation des symboles.

Pour cela, nous faisons l'hypothèse qu'il y a avantage à briser le monopole de l'écriture algébrique, en jouant sur plusieurs modes de représentation plus ou moins formalisés (12). **En particulier, nous proposons au formateur d'utiliser ce que nous appelons les** *schémas d'opérateurs*. **Ils peuvent en effet jouer le rôle de langage intermédiaire entre le français** (13), **l'arithmétique** (12), **la manipulation des calculatrices programmables** (14), ***et l'écriture algébrique.*** (14)

---

(10) *Pour l'utilisation pédagogique des tables de vérité, cf. J. ADDA : "Initiation au langage mathématique : analyse d'une expérience d'enseignement" (diffusé par l'A.P.M.E.P.)*

(11) Quiconque douterait des avantages de l'emploi des symboles est convié à résoudre l'équation $x^2 + 3x - 2 = 0$ par la mise en forme canonique (comme on l'apprend au lycée), mais en effectuant tout avec des mots. Nous lui donnons l'équation traduite en mots : *le carré de l'inconnue, plus trois fois l'inconnue, moins deux, égale zéro.*

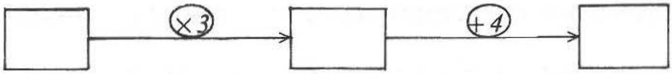
(12) *Cf. E. LOOSFELT et D. POISSON : "Mathématiques pour la formation d'adultes" (diffusé par l'A.P.M.E.P.).*

(13) *Cf. paragraphe 15° sur la transcription du français (oral, notamment) en schémas d'opérateurs.*

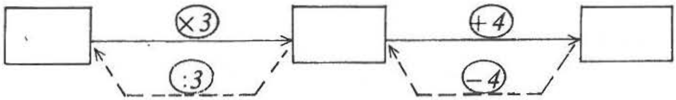
(14) *Cf. R. DIDI et M. FERRAND : coll. "Thèmes mathématiques et calculatrices" (éd. Bordas).*
Cl. ROUXEL : "Rapport sur l'utilisation des calculatrices programmables" (diffusé par le Centre de formation de formateurs du C.N.A.M.).
"Utilisation des schémas d'opérateurs en algèbre élémentaire" (dans cette brochure).

Analyse d'un exemple

Considérons (dans **R**) le *schéma* suivant, à deux *opérateurs arithmétiques* :



On peut compléter ce schéma avec les opérateurs arithmétiques *réciproques* :

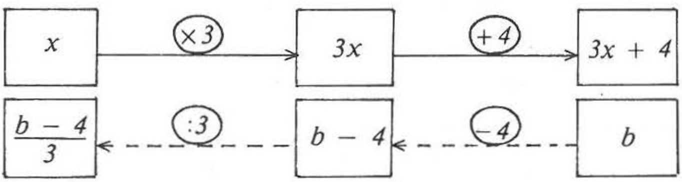


Si l'on choisit une *entrée* (6, par exemple), on trouve une *sortie (22)* ; c'est l'aspect "fonction".

Si l'on appelle l'entrée "x", la sortie s'écrira : "$3x + 4$" ; le mode de correspondance s'écrira : $x \longmapsto 3x + 4$; on obtient ainsi l'écriture symbolique des fonctions.

Si l'on choisit une *sortie* (5, par exemple), on peut trouver une *entrée (1/3)* ; c'est l'aspect "équation". (On peut noter que l'inconnue, comme la variable, est représentée par l'entrée ; on ne change que le sens de lecture du schéma).

Si l'on appelle la sortie "b", l'entrée s'écrira : "$\frac{b-4}{3}$" ; en mettant ceci en rapport avec les résultats précédents, on obtient l'écriture symbolique des équations, et de leur résolution algébrique :



$$3x + 4 = b$$

$$x = \frac{b-4}{3} \Longleftrightarrow 3x = b - 4 \Longleftrightarrow 3x + 4 = b$$

Conclusion : Des règles du calcul algébrique sont ici traduites par l'utilisation des opérateurs réciproques. Elles ne sont donc pas de pures manipulations de signes.

Remarque : L'entrée peut aussi être appelée "y", "t" ou autrement ; et l'on peut faire aussi entrer "$-x$", "$x + 2\pi$" ou "$\pi - x$". Ceci présente

de nombreux avantages, dans la composition des fonctions, la recherche d'une fonction réciproque, l'étude des symétries et des périodes, et toute occasion où un changement de variable est utile ; et aussi pour la physique, où les variables portent dans chaque cas des noms correspondants à leur signification ("t" pour le temps, "v" pour la vitesse, "I" pour l'intensité, etc.).
On remarquera aussi que l'on peut appeler X la case *intermédiaire*, et faire ainsi le changement d'inconnue (ou de variable) $X = 3x$. Dans ce cas précis, cela ne présente pas grand intérêt pratique ; mais c'est sur de tels schémas que l'on peut faire comprendre le "pourquoi" et le "comment" de cette technique.

11°) *Sur le statut des lettres en algèbre*

Dès que l'on manipule non seulement des nombres, mais aussi des lettres, celles-ci posent un problème : selon les circonstances ce sont des inconnues, ou bien des variables, ou bien des paramètres. Le traitement de ces lettres (et des écritures qui les contiennent) dépend étroitement de leur statut.

Si ce statut n'est pas précisé explicitement par le formateur, si les différents cas possibles ne sont pas distingués par les étudiants, ceux-ci ne peuvent que s'embrouiller... ou appliquer mécaniquement des procédés appris. Leur faculté d'analyse des écritures mathématiques, leur autonomie de réflexion ne peuvent qu'en être amoindries.

Nous faisons l'hypothèse qu'il ne faut pas attendre le moment où ils se trouveront confrontés avec le problème de plusieurs lettres ayant des statuts différents pour leur fournir les moyens de s'y repérer.

Nous proposons comme moyens :

— des explications sur le statut des lettres déjà manipulées [*notamment les "variables".*]

— une notation symbolique indiquant clairement ce statut [*notamment, pour les variables, l'utilisation du symbole "$\forall$".* (15)]

— des exercices sur le maniement de cette notation, permettant aussi de revenir sur les explications données et de les éclairer d'exemples [*notamment, avec le symbole $\forall$, "remplacements" des variables par des nombres, d'autres lettres, des expressions.* (16)]

Lors de l'introduction de tout autre type de lettre, des explications du même genre sont évidemment indispensables. Il est nécessaire aussi de faire bien comprendre les différences entre le statut nouvellement introduit et les statuts déjà connus.

---

(15) *Cf. paragraphe 9°, sur la présentation des résultats.*

(16) *Cf. paragraphe 5°b, sur les processus d'identification.*

Remarque : Pour comprendre pleinement la notion d'"inconnue", il faut sans doute avoir acquis préalablement celle de "variable". Une inconnue, en effet, est une variable à laquelle est imposée une (ou plusieurs) condition(s) fixant le domaine des valeurs cherchées, et non pas le domaine des valeurs possibles (le "référentiel", c'est-à-dire le domaine dans lequel on cherche). Ce qui est recherché, donc inconnu, c'est non pas la lettre elle-même, mais les (l'ensemble des) valeurs satisfaisant aux conditions. On peut donc dire que la lettre est *traitée comme* une inconnue, mais non pas qu'elle *est* une inconnue. D'ailleurs, dans la recherche de l'ensemble de définition d'une fonction (explicite) de **R** dans **R**, la variable est traitée comme une inconnue satisfaisant à diverses conditions (dénominateurs non-nuls, expressions sous radical non-négatives, etc.). A l'intérieur de l'ensemble des solutions, elle n'en reste pas moins fondamentalement une variable (et même dans tout **R**, puisqu'on peut prolonger la fonction, par exemple par continuité). Elle peut être à nouveau traitée comme une inconnue dans les problèmes du type "$f(x) \in E$" (E, sous-ensemble donné de **R**). Etc. De même, un paramètre peut être traité comme une inconnue, dans le cas où on lui impose une (ou plusieurs) condition(s). Il n'en reste pas moins un paramètre (pouvant par exemple remplir d'autres conditions, ou aucune).

Au total, on peut dire qu'il y a deux statuts fondamentaux : variable et paramètre ; et à l'intérieur de chacun, un traitement possible, de façon provisoire ou définitive, comme une inconnue.

Ainsi, quand on passe de l'arithmétique à l'algèbre, et qu'on utilise des lettres comme "inconnues" dans des problèmes dits "concrets", il est préférable de dire : ***si** le rectangle fait x mètres de long, **alors**...* (plutôt que : *"**soit** x la longueur du rectangle, exprimée en mètres; on sait **donc** que..."*). Cela rend plus clair que l'inconnue est un nombre (et non pas la grandeur elle-même), et qu'il faut donc choisir une unité (on évite ainsi l'erreur-type : *"soit L la longueur du rectangle"*). De plus, cela permet de calculer progressivement, comme en arithmétique, les expressions nécessaires à la mise en équation : *alors le périmètre fait 2(x + ...) mètres, la surface est de (x × ...) mètres carrés, etc.* ; on peut ainsi vérifier la cohérence des unités, puis montrer progressivement pourquoi il n'est pas toujours nécessaire de les écrire. (17)

12°) Sur l'introduction des conventions d'écriture

a) *Les cas "commodes"*

Certaines notations mathématiques ont été choisies en fonction de leur facilité de manipulation, c'est-à-dire en fonction des propriétés de ce qu'elles symbolisent.

Ainsi, les *exposants négatifs* (et *fractionnaires)* sont des notations commodes. Ils ne nécessitent pas l'emploi de règles autres que celle sur les

---

(17) *Pour plus de détail, cf. M. BRUSTON: "Inconnues et Variables", dans cette même brochure.*

exposants dans **N**, et sur le calcul dans **Z** (et **Q**). Les règles sur les exposants dans **N** s'étendent aux exposants dans **Z** (et **Q**).

Si ce n'était pas le cas, ces notations seraient une source d'erreurs, un véritable piège. C'est dire que la décision de les utiliser n'est pas neutre : elle présuppose l'extension des règles sur les exposants.

Ceci n'est pas sans effet sur les étudiants. Après avoir présenté de telles notations, il devient difficile de leur faire comprendre la nécessité d'une démonstration pour l'extension des règles correspondantes : cette extension leur est suggérée, imposée, rendue évidente par l'emploi des notations ; elle saute aux yeux, au sens propre.

Plutôt que d'asséner à tout prix une démonstration dont l'utilité ne peut être vue, nous faisons l'hypothèse qu'il faut :

— soit introduire d'emblée la notation nouvelle et admettre l'extension des règles déjà connues ;

— soit inventer une notation provisoire pour démontrer des propriétés qui justifieront l'emploi de la notation nouvelle (c'est-à-dire celles qui, une fois traduites, exprimeront l'extension des règles déjà connues) ; et n'introduire cette notation qu'après avoir fait constater sa commodité ;

— soit prendre le temps d'expliquer le processus historique : la démonstration de certaines propriétés, puis l'invention d'une notation commode. Ceci peut conduire tout au plus aujourd'hui, en acceptant la notation, à *vérifier* que le choix était bon, que son utilisation n'entraîne aucune erreur.

De telles vérifications comportent évidemment les mêmes exigences de rigueur que des démonstrations. Elles en diffèrent cependant sur un point (qui n'est pas d'ordre logique) : elles s'appuient sur une écriture qui rend certain, aux yeux des étudiants, ce que l'on cherche à prouver.

Alors qu'en général, la difficulté pédagogique est d'emporter leur conviction, avec les notations commodes elle vient de ce que cette conviction est acquise d'avance.

b) *Considérations générales*

En général, les conventions d'écriture ne sont pas particulièrement faciles à manipuler (cf. paragraphes 13° à 17°). Si l'introduction d'une notation nouvelle coïncide avec l'étude d'un problème nouveau, les deux difficultés s'ajoutent... et les incompréhensions se multiplient.

Par contre, si un problème nouveau est présenté, et exploré, en utilisant seulement des écritures déjà connues, cela a plusieurs conséquences intéressantes :

— la familiarité avec l'écriture permet de concentrer l'attention et la réflexion des étudiants sur l'étude du problème ;

— ceci conduit à formuler les résultats obtenus avec des mots plus qu'avec des signes, ce qui les rend plus clairs (surtout si le formateur fait l'effort de s'exprimer en phrases courtes et de n'employer que des tournures grammaticales simples) ;

— les notations peuvent être introduites à la fin ; elles désignent alors des choses que les étudiants ont déjà manipulées, et qui leur sont devenues quelque peu familières. La traduction des résultats obtenus dans la nouvelle symbolique peut leur apparaître comme un avantage, puisqu'elle permet d'exprimer ces résultats de manière condensée et les résume en certaines manipulations de signes.

Nous faisons donc l'hypothèse que le formateur a avantage à retarder la présentation de ces conventions d'écriture, par rapport à ce qui se fait d'habitude. (18)

Hypothèses pour l'analyse des difficultés d'écriture

13°) *Sur l'écriture f(x) et l'écriture des fonctions usuelles*

Dans certains cas, les conventions d'écriture sont particulièrement difficiles à manipuler et induisent en erreur les étudiants qui ne sont pas pleinement familiarisés avec elles.

L'écriture moderne des fonctions (avec *f(x)*) et l'écriture classique des fonctions usuelles sont dans ce cas.

a) *Les écritures du type f(x)*

Dans de nombreux cas usuels et dans le cas général, le nom de la fonction est écrit à gauche de celui de la variable: *"f(x)", "sin(x)", "exp(x)", "Log(x)"*,... Or, en français, ce qui s'écrit à gauche est lu — et en général écrit — avant ce qui s'écrit à droite. On peut donc dire que, dans ces écritures, le nom de la fonction vient *avant* le nom de la variable. (19)

On peut tenter de justifier cette convention en disant que la donnée de la fonction est première par rapport au choix d'une lettre comme variable (ou d'un nombre comme valeur de départ). On peut cependant remarquer que, sur une calculatrice, la touche fonctionnelle se tape après la touche de mémoire ou l'affichage d'un nombre ; et cela bien que l'existence des touches fonctionnelles soit évidemment première par rapport au choix d'une mémoire ou d'un affichage. De même dans l'utilisation des graphiques : le choix d'une abscisse particulière précède la recherche du point correspondant de la courbe ; cela ne contredit en rien le fait que la fonction est une donnée première par rapport à ce travail. Et l'on pourrait citer de nombreuses autres pratiques semblables.

---

(18) *Cf. paragraphes 10°, 15°, 16°, sur l'utilisation des schémas d'opérateurs pour traiter les difficultés liées aux automatismes et aux conventions d'écriture.*

(19) Toute l'analyse qui suit concerne les étudiants qui apprennent les mathématiques *en utilisant le français*, ou toute autre langue qui *s'écrit de gauche à droite*. Elle serait fausse pour un enseignement utilisant une langue qui s'écrit de droite à gauche, l'arabe par exemple.

Les écritures du type *f(x)* ou *f(3)* ne peuvent donc pas s'expliquer par le fait que *f* est une donnée première par rapport à *x* ou *3* . (20)

On peut remarquer, au contraire, que les formulations les plus claires, correspondant le mieux aux pratiques citées ci-dessus, sont :

"x, par f, donne ..."
"à x, f associe ..."
"à x, f fait correspondre ..."

Ainsi *x, par f,* donne une image qui s'écrit... *"f(x)"* : c'est-à-dire dans l'ordre exactement inverse à celui dans lequel les lettres *x* et *f* apparaissent dans la phrase.

On peut remarquer enfin que cette malencontreuse convention d'écriture est l'unique raison pour laquelle la composition des fonctions s'écrit de droite à gauche (c'est-à-dire dans l'ordre exactement inverse à celui de la langue française).

Dans les écritures du type *f(x) ["sin(x)", "exp(x)", "Log(x)",...]* il y a donc inversion de l'ordre de l'écriture par rapport à l'ordre "logique", commode, des idées et de la pratique mathématique. (21)

Pour essayer de diminuer la difficulté pour les étudiants, nous faisons l'hypothèse qu'il faut leur dire clairement que le choix de cette convention d'écriture est mauvais (même si le poids des habitudes empêche d'en changer), et leur faire constater les risques d'erreur qui en découlent. (22)

b) *Comparaison avec d'autres fonctions usuelles*

Nous proposons au formateur une comparaison entre différentes écritures de fonctions usuelles, qui diffèrent de la convention générale type *"f(x)"*. Cela peut lui être utile pour analyser les difficultés des étudiants et les aider à les surmonter.

---

(20) *Voir au paragraphe 14°b un essai d'explication historique (en particulier la note 24).*

(21) *A l'origine d'un très grand nombre d'erreurs d'écriture (et/ou de lecture) de la part des étudiants, il y a cette inversion. Ce sera analysé plus en détail aux paragraphes 14° et 15°.*

(22) On peut noter le même phénomène d'inversion *pour la notation décimale,* qui nous vient des Arabes. En arabe classique, *"432"* se lit comme : *"deux trente quatre cent"*. Pour nous, le chiffre des *unités* se lit et s'écrit *en dernier.* Si l'on écrit un nombre entier sans le "parler", ou bien si l'on "épelle" ses chiffres *(quatre, trois, ...,...),* ses chiffres n'acquièrent une signification qu'*à la fin* : au moment où, tous les chiffres étant donnés, celui des unités étant donc identifié, on sait pour chacun des autres s'il s'agit de centaines, milliers, dizaines ou millions. La contradiction apparaît clairement quand on effectue des opérations arithmétiques directes (addition, multiplication des entiers) : alors que c'est de gauche à droite que l'on écrit les deux nombres à additionner ou multiplier, il faut travailler de *droite à gauche.* Quand on veut additionner plusieurs entiers, il faut d'ailleurs disposer leurs chiffres respectifs les uns au-dessus des autres *à partir de la droite* ; c'est plus commode si on les *écrit* de droite à gauche. Cette écriture décimale n'est pas adaptée aux langues qui s'écrivent dans le sens du français. *On peut se demander si cela ne joue pas un rôle dans les difficultés d'apprentissage de l'arithmétique.*

Les puissances : Dans l'écriture x^4 , la fonction *puissance 4* est indiquée par la place exponentielle du chiffre *4* . Cet exposant s'écrit à droite et se lit *après* le x .

Cette convention d'écriture suit donc presque l'ordre "logique" de l'idée (ayant x , je l'élève à la puissance *4*). Les difficultés d'utilisation tiennent seulement à l'absence de tout symbole pour désigner la fonction, et au fait que c'est un petit décalage vers le haut qui en tient lieu (on peut noter que, *pour faciliter la lecture*, les mathématiciens ont l'habitude d'utiliser des caractères plus petits pour les exposants). L'écriture des fonctions-puissances reste cependant plus facile à manipuler que l'écriture du type $f(x)$.

Les exponentielles : Dans l'écriture e^x , la fonction *e-puissance* est indiquée par le e et la place exponentielle du x . Elle s'écrit donc *avant* le x , avec de plus le décalage de ce x vers le haut.

Cette convention d'écriture est donc légèrement plus complexe que la convention générale. La difficulté augmente cependant au fur et à mesure que l'écriture de l'exposant se complique, lui-même devenant une fonction de x : par exemple dans :

$$e^{2x} \quad ; \quad e^{-x} \quad ; \quad e^{xLog(a)} \quad ; \quad ....$$

De plus, si l'on utilise des caractères plus petits pour les exposants, comme cela se fait pour les fonctions puissances, alors la variable devient difficile à repérer dans la formule de la fonction. A l'usage, on constate que les étudiants manipulent plus difficilement l'écriture des exponentielles que la convention générale.

Il est à noter que l'exponentielle peut aussi s'écrire $exp(x)$. Cette convention n'entraîne pas de difficultés supplémentaires pour les étudiants, par rapport à la convention générale. A ce titre, elle est plus commode pour eux que l'écriture e^x (bien que les règles de calcul sur les puissances s'y transposent moins facilement).

Les racines : Dans l'écriture $\sqrt[3]{x}$, la fonction *radical troisième* (ou *racine cubique*) est lue *avant* le x ; de plus, elle s'écrit non seulement à gauche mais aussi *au-dessus* de ce x .

Cette convention d'écriture est donc plus difficile à manipuler que la convention générale. Le concept de "racine" est certes difficile, mais il y a bien des erreurs qui sont dues uniquement à un allongement ou un raccourcissement de la barre horizontale, faisant entrer ou sortir du symbole "radical" ce qui est écrit à sa droite.

On peut remarquer que les étudiants préfèrent en général la notation en *"puissance 1/3"*, à partir du moment où elle leur a été présentée. Le concept de racine n'en est pourtant pas simplifié. Leur préférence tient uniquement au fait qu'ils manipulent plus facilement l'écriture des fonctions-puissances.

L'inversion: Dans l'écriture $\frac{1}{x}$, la fonction *d'inversion ("un sur")* est lue *avant* le x ; de plus, elle ne s'écrit ni à gauche, ni à droite, mais *au-dessus* de ce x, qui se retrouve ainsi placé *au-dessous* de la ligne d'écriture. Cette convention d'écriture est donc d'un type tout à fait différent de la convention générale.

Cette disposition verticale n'est pas celle de la langue écrite dans notre culture; *cela peut sans doute contribuer à expliquer les difficultés générales des étudiants dans l'apprentissage du calcul sur les fractions.*

Cela ne suffit cependant pas à expliquer qu'ils trouvent *l'écriture* "$\frac{x}{3}$" plus commode que "$\frac{1}{3}x$"; et "$3x^{-1}$" plus facile à *lire* que "$\frac{3}{x}$"; c'est que la place de x dans la lecture et l'écriture n'est pas la même : il est plus commode que x soit écrit et lu en premier, et si ce n'est pas le cas, il est plus commode qu'il soit sur la ligne d'écriture, plutôt qu'en dessous.

La valeur absolue: Dans l'écriture $|x|$, la fonction *valeur absolue* est à lire avant le x, alors qu'elle s'écrit *à la fois à gauche et à droite* de ce x. Ceci nécessite une lecture globale, beaucoup plus difficile que dans tous les cas précédents.

On sait que les étudiants ont une certaine difficulté à acquérir les techniques de manipulation des parenthèses, crochets, etc. Or, ici les barres verticales jouent *à la fois* le rôle de parenthèses (par exemple dans "$|2x + 3|$") *et* un rôle fonctionnel.

Ceci explique, au moins en partie, la difficulté d'appropriation de la notion de "valeur absolue". En effet, cette difficulté ne tient pas seulement au concept lui-même; présenté avec une écriture moins difficile, il est beaucoup plus aisément compris : par exemple sous l'une des formes suivantes :

$$sup\,(x; -x) \text{ ; ou bien : } d(0,x) \text{ ; ou bien : } \sqrt{x^2}$$

En résumé, la convention générale (écriture du type $f(x)$) présente une difficulté certaine. Sauf l'exception des puissances, les autres conventions correspondant à des fonctions usuelles sont plutôt plus difficiles encore à manipuler, les pires étant celles où la fonction s'écrit à l'aide de symboles placés à la fois à gauche et à droite de la variable.

Pour que ces conventions d'écriture ne constituent pas à elles seules un obstacle à l'apprentissage des mathématiques, nous proposons au formateur d'analyser, avec les étudiants, leurs propres productions écrites, afin de bien mettre en évidence les difficultés objectives de lecture et d'écriture de ces fonctions.

14°) *Sur la distinction entre "image" et "fonction"*

a) *Première analyse*

L'écriture suivante : *f(x)* , se lit *"f de x"*. Elle signifie : *"l'image de x par f"*. Nous disons bien : *"de x par f"*, dans cet ordre (c'est-à-dire dans l'ordre logique, commode des idées et de la pratique mathématique ; *cf. paragraphe 13° a).*

L'expression suivante, d'ordre contraire : *"l'image, par f, de x"*, est moins naturelle, grammaticalement plus complexe, bien qu'elle soit couramment employée aujourd'hui. Puisque le mot "image" est tiré de l'optique (23), posons-nous la question : dira-t-on : "l'image, dans le miroir, du point M" ? ou dira-t-on : "l'image du point M dans le miroir" ?

L'expression : *"l'image, par f, de x"*, ne se justifie donc que de suivre l'ordre de l'écriture : *f(x)* . Ce n'est pourtant pas une raison suffisante pour l'employer car, à l'oral, elle présente une ambiguïté gênante. Puisque rien ne distingue, *oralement*, *"f de x"* et *"f(x)"*, rien non plus ne distingue *"par f, de x"* et *"par f(x)" (rien sauf d'imperceptibles ruptures de rythme, correspondants oraux de la ponctuation écrite). Quasiment rien ne permet donc de distinguer les deux expressions suivantes :*

"l'image, par f, de x"
"l'image, par f(x)"

Cela peut suffire à provoquer une certaine confusion.

Considérons ainsi la phrase suivante, *dite* à haute voix :

"f(x) est l'image, par f, de x" (A)

Rien ne la distingue
de celles-ci :

"f de x est l'image, par f, de x" (B)
"f(x) est l'image, par f(x)" (C)

Or, les phrases (B) et (C) sont des cercles vicieux. L'emploi oral de la phrase (A) ne peut donc qu'embrouiller les étudiants.

Il est nettement plus clair de *ne pas suivre* l'ordre de l'écriture. La phrase suivante :

"f(x) est l'image de x par f"

peut être entendue ainsi :

"f de x est l'image de x par f"

mais il n'en résulte pas les mêmes risques de confusion.

(23) Le mot "image" vient de l'optique, par analogie avec l'image d'un *point*. Il serait préférable de l'expliciter pour les étudiants, car ce mot est pris usuellement dans un sens global (photographique, par exemple), ou au sens de "représentation" (comme dans "vocabulaire imagé", "image mentale", etc.). Ainsi, le graphique est une image — au sens usuel — de la *fonction*.

b) *Deuxième analyse*

Considérons les fonctions usuelles, et en particulier l'écriture suivante : *sin (60°)* . Elle peut être *lue* à haute voix de plusieurs manières :

" *sinus*		*soixante degrés*"	(A)
" *sinus*	*de*	*soixante degrés*"	(B)
"*le sinus*	*de*	*soixante degrés*"	(C)

Dans l'expression (C), à cause de l'article *le* , le mot *sinus* désigne l'image *(0,5)* , et non pas la fonction *(sin)* . Dans (A), et surtout dans (B) *(sinus de 60°)* , on peut se demander si le mot *sinus* ne désigne pas aussi l'image, plutôt que la fonction [comme ce devrait être le cas, si on lisait *sin(60°)* de la manière dont on doit lire *f(x)*]. Le mot *sinus* est donc ambigu, désignant selon le contexte tantôt l'image, tantôt la fonction (d'où l'expression *la fonction-sinus* pour lever l'ambiguïté dans certains cas).

L'écriture *sin(x)* est parfaitement cohérente avec la lecture (C) : "***le** sinus **de** x*" (où le mot *sinus* désigne l'image et non pas la fonction). Elle n'est cohérente avec les lectures (A) : "*sinus x*" et B : "*sinus **de** x*", que si celles-ci sont considérées comme des abréviations de (C), avec la même signification pour le mot *sinus*.

L'écriture *f(x)* , et sa lecture "*f **de** x*", ont hérité des formulations précédentes. De là semble venir l'écriture de la fonction *f* à gauche de la variable. Mais la préposition *de* (dans "*f **de** x*") continue à évoquer le cas "*sinus de x*", où le mot *sinus* désigne plutôt l'image (celle ***de*** *x* précisément). (24)

D'ailleurs, à l'origine, c'est bien *l'image* qui est "fonction" *de x* ; on calcule encore *cos(2x)* en *fonction de sin(x)* , ou de *cos(x)* ; on étudie un nombre de solutions *en fonction d'*un paramètre, et un signe en *fonction d'*une variable, etc. Et quand on étudie les variations d'une fonction *f* , ce sont bien sûr des variations *de f(x)* que l'on s'occupe, la fonction *f* , elle, ne variant pas.

c) *Conclusions*

Nous faisons l'hypothèse que le sens usuel du mot "fonction" ne facilite pas la compréhension, par les étudiants, de la distinction entre image et fonction ; et surtout que la lecture "*f de x*", parce qu'elle est grammaticalement contradictoire avec cette distinction, fait en permanence obstacle à son assimilation ; et enfin que l'expression : "*l'image, par f, de x*" ne peut qu'embrouiller un peu plus les étudiants.

De plus, l'usage mathématique maintient l'ambiguïté dans le cas des fonctions usuelles. Ainsi on s'interdit de dire : "***le** f **de** x*", mais on continue à dire : "***le** sinus **de** x*" (et même : *le carré de..., la valeur absolue*

(24) Ainsi, l'écriture *f(x)* vient de l'écriture *sin(x)* ; celle-ci viendrait de l'expression "***le** sinus **de** x*" dans laquelle le mot *sinus* désigne *l'image*.

de..., le logarithme de..., etc.). Pour les étudiants, la différence — historique — entre les cas du genre *"sinus"* et les cas du genre *"f"* ne peut apparaître (car ils les apprennent simultanément), à moins qu'elle ne leur soit expliquée.

On peut énoncer la règle suivante : les fonctions qui sont désignées par un mot ou une expression (comme *sinus* ou *valeur absolue*) datent d'*avant* la distinction formelle entre image et fonction.

Pour essayer de diminuer la difficulté, nous proposons au formateur de dire clairement aux étudiants que la convention de lecture *"f de x"* pour l'écriture *f(x)* comporte comme inconvénient majeur (hérité du passé) le risque de confusion entre image et fonction. Il pourra ainsi leur faire comprendre qu'il vaut mieux dire : *"l'image de x, par f"* dans cet ordre, plutôt que de suivre à tout prix l'ordre de l'écriture conventionnelle *"f(x)"*.

15°) ***Sur la différence entre l'oral et l'écrit***

Lorsque les notations ne sont pas particulièrement "commodes" à manipuler, il est plus facile de *lire* des textes mathématiques que d'en écrire de corrects. (On pourrait peut-être rapprocher cela de la comparaison version/thème ; ou bien de l'orthographe : il est plus facile de lire un texte correctement orthographié que de ne pas faire soi-même de fautes en écrivant...)

Or, la réalisation d'un travail mathématique suppose une alternance : ayant *lu* un énoncé, on *écrit* quelque chose, qu'on re-*lit* pour l'utiliser et *écrire* à nouveau, et ainsi de suite.

a) *Premier type d'exemples*

Dans certains cas, les étudiants comprennent "bien" leurs propres textes, même si l'écriture en est incorrecte : c'est-à-dire qu'ils y lisent ce qu'ils ont *voulu* écrire (et non pas ce qu'un mathématicien y lirait d'après les conventions d'écriture).

Considérons par exemple les suites d'écritures ci-dessous : elles sont en partie incorrectes (*2ème ligne*), et pourtant les résultats sont justes (*3ème ligne*) :

$x^2 - 4x + 3 = 0$	$2\cos(x) - 1 = 0$
$\Delta = 4 = \sqrt{2}$	$\cos(x) = 0{,}5 = \pi/3$
$x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3 \; ; \; x^2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$	$x = \pm\pi/3 + k2\pi$

Nous faisons l'hypothèse que l'on peut analyser ces écritures en cherchant quels *processus mentaux — corrects*, vu les résultats — peuvent expliquer les incorrections d'écriture :

"delta égale [$\Delta =$] quatre [4], racine carrée [$\sqrt{\ }$] : deux [2] ... $\Delta = 4 = \sqrt{2}$".
"cosinus x égale [cos(x) =] zéro virgule cinq [0,5], c'est : pi sur trois [$\pi/3$] ... $\cos(x) = 0{,}5 = \pi/3$".

Ces processus mentaux ont simplement été *traduits directement dans l'écriture*, sans tenir compte des conventions mathématiques, notamment pour l'emploi du symbole d'égalité.

L'idée sous-jacente (correcte) est cependant restée présente au moment de la re-lecture, et la suite a pu être correcte.

b) *Deuxième type d'exemples*

Dans d'autres cas, les étudiants comprennent "mal" leurs propres textes : ils lisent *selon les conventions* ce qu'ils ont écrit sans en tenir compte.

Considérons par exemple les suites d'écritures ci-dessous : elles sont partiellement incorrectes (*3ème ligne*), et les résultats sont erronés (*4ème ligne*) ; cependant la quatrième ligne est parfaitement cohérente avec la troisième :

$x^2 - 4x + 3 = 0$	$2\cos(x) - 1 = 0$
$\triangle = 4$	$\cos(x) = 0{,}5$
$\boxed{\triangle = \sqrt{2}}$	$\boxed{\cos(x) = \pi/3}$
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt[4]{2}}{2}$	$x = \pm \mathrm{Arccos}\ (\pi/3) + k2\pi$

Cette fois encore, nous faisons l'hypothèse qu'un *processus mental correct* a d'abord été traduit directement dans l'écriture :

"delta égale quatre [$\triangle = 4$] ; delta [$\triangle$] a la racine carrée [$\sqrt{\ }$] deux [2]... $\triangle = \sqrt{2}$".

"cosinus x égale zéro virgule cinq [$\cos(x) = 0{,}5$] ; avec cosinus x [$\cos(x)$], c'est : pi sur trois [$\pi/3$] ... $\cos(x) = \pi/3$".

L'écriture obtenue à la troisième ligne correspond ainsi à une idée juste, bien qu'elle ne tienne pas compte des conventions mathématiques.

Mais, à l'étape suivante, l'idée a été perdue. L'écrit a été lu selon les conventions :

$\triangle = \sqrt{2}$	$\cos(x) = \pi/3$
"delta égale racine carrée de deux"	*"cosinus x égale pi sur trois"*

Le cas ne rentrant plus dans la catégorie particulière que l'on résout de tête, c'est alors la technique générale "lourde" qui est mise en œuvre, avec :

$\sqrt{\sqrt{2}}$ *ou bien* $\sqrt[4]{2}$	$\mathrm{Arccos}\ (\pi/3)$

On peut ainsi comprendre l'apparition de ces expressions "inattendues" à la quatrième ligne. Elles montrent que, dans le processus purement *écrit*, il n'y a pas d'erreur.

Remarque : Considérons la suite d'écritures ci-dessous, d'un type que l'on rencontre plus souvent dans les copies d'étudiants que celle avec $\sqrt[4]{2}$:

$x^2 - 4x + 3 = 0$	Elle est identique à celle vue au-dessus
$\triangle = 4$	(à gauche), jusqu'à la troisième ligne ;
$\triangle = \sqrt{2}$	la quatrième ligne est à la fois erronée *et*
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$	incohérente par rapport à la troisième.

On peut faire l'hypothèse que, jusqu'à la troisième ligne, le processus a été celui décrit précédemment.

Mais à l'étape suivante, l'écriture "$\triangle = \sqrt{2}$" n'a pas été re-lue selon les conventions, car l'idée n'a pas été complètement perdue : il en est resté le *souvenir* d'avoir procédé à *l'extraction de la racine carrée* ; celle-ci n'est donc pas réitérée, et on obtient simplement $\sqrt{2}$ (au lieu de $\sqrt[4]{2}$) à la quatrième ligne.

c) *Troisième type d'exemples. Première analyse*

Dans chacun des exemples précédents, c'est la transcription directe d'un processus *mental* qui conduit à une écriture incorrecte. Ce processus n'est pas forcément verbalisé. Il reste cependant assez proche de ce qui pourrait se *dire*. Dans l'exemple qui suit, c'est encore plus net.

Considérons la phrase suivante :

"deux plus quatre égale six, multiplié par trois égale dix-huit"

Pensée ou dite à haute voix, *elle est correcte* ; ou du moins elle correspond à un processus correct [par exemple, le calcul mental ou *oral* de $(2 + 4).3$]. Traduite directement en symboles, par contre, elle est fausse :

$$2 + 4 = 6 \,.\, 3 = 18$$

Plus exactement, la deuxième égalité est juste, *mais la première est fausse* (25). Pour que ce soit juste, il faudrait écrire ainsi :

	$2 + 4 = 6$	*et*	$6 \,.\, 3 = 18$
ou bien :	$(2 + 4) \,.\, 3$	$=$	$6 \,.\, 3 = 18$
ou bien :	$3 \,.\, (2 + 4)$	$=$	$6 \,.\, 3 = 18$

Il y a donc une nette différence entre l'expression orale ou mentale, et l'expression écrite.

A l'oral, le mot *"six"* joue un *double rôle* :
— *résultat* de la première opération (*deux plus quatre égale* ***six***)
— *prémisse* de la deuxième opération (***six*** *multiplié par trois égale* ...).

(25) Notons que, s'il y avait encore d'autres opérations à la suite (par exemple *"moins sept"* puis *"multiplié par cinq"*), toutes les égalités seraient *fausses, sauf la dernière* :

$$\underline{(2 + 4) = 6.3 = 18 - 7 = 11.5} = 55$$

A l'écrit, ce double rôle n'est pas accepté, vu la convention qui régit l'emploi du symbole d'égalité : il s'applique à tout ce qui le précède — jusqu'à un éventuel autre symbole d'égalité — et à tout ce qui le suit — jusqu'à un éventuel autre symbole d'égalité. Il en est ainsi de tous les symboles relationnels du type *"a ℛ b"* : $=$, $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, *etc.* (y compris quand on les combine entre eux).

Remarque : De même en français, l'on peut *dire* à haute voix : *"les visiteurs voulaient tous l'acheter, **cette maison**, elle était si belle"*.

L'analyse grammaticale de la phrase montre que *"cette maison"* est un terme flottant. Il peut être rattaché à *"les visiteurs voulaient tous l'acheter"*, aussi bien qu'à *"**elle** était si belle"*. Ce flottement dans la structure de la phrase est typique de l'oral. Une telle phrase ne peut être écrite qu'en étant mise "dans la bouche" d'un personnage : il s'agit alors d'un oral/écrit. A l'écrit proprement dit, la convention voulant que la structure grammaticale soit univoque, il faudrait choisir :
soit : *"les visiteurs voulaient tous acheter cette maison, elle était si belle"*
soit : *"les visiteurs voulaient tous l'acheter, cette maison était si belle"*.

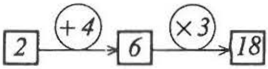
Le problème du passage de l'oral à l'écrit, et réciproquement, n'est donc pas particulier aux mathématiques. Il est cependant particulièrement important dans ce cas, puisqu'il peut induire les étudiants en erreur.

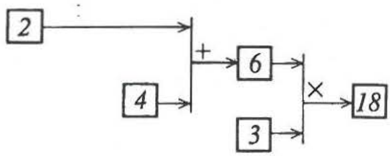
Nous venons d'en voir une première raison : l'emploi du symbole d'égalité interdit d'utiliser une écriture symbolique à la fois comme résultat d'une première opération *et* prémisse d'une deuxième opération.

Ceci oblige à distinguer

le mode d'*écriture symbolique* : *(2 + 4) . 3 = 6 . 3 = 18*
du *processus oral ou mental* : *deux plus quatre égale six, multiplié par trois égale dix-huit*

Ce processus oral (ou mental) peut par contre être traduit directement en schémas d'opérateurs :





La raison en est que :
— on peut ne pas y faire apparaître le symbole d'égalité ;
— une case peut servir à la fois de sortie pour un opérateur et d'entrée pour un autre opérateur.

d) *Retour sur un exemple du paragraphe a). Deuxième analyse*

Dans la phrase : *"delta égale **quatre**, racine carrée deux"*, le mot *"quatre"* joue un double rôle (résultat du *calcul de* $\triangle$, prémisse de *l'extraction de la racine carrée*). Vu l'analyse faite ci-dessus, il est normal que la transcription directe de cette phrase en symboles conduise à une écriture incorrecte ($\triangle = 4 = \sqrt{2}$). Mais cette analyse ne suffit pas.

En effet, si l'on isole la deuxième partie de la phrase, soit : *"4, racine carrée 2"*, on élimine le double-emploi du mot *"quatre"*, et pourtant la transcription directe en symboles conduit à une écriture incorrecte : ($4 = \sqrt{2}$). On obtient d'ailleurs le même type d'incorrection avec la phrase *"$\triangle$ a la racine carrée 2"*: $\underline{\triangle = \sqrt{2}}$. Quant à la phrase *"4, sa racine carrée est égale à 2"* (ou : *"est 2"*), elle conduit à une écriture tellement incorrecte ($4 \sqrt{\ } = 2$) qu'aucun étudiant ne l'utiliserait.

Par contre, si l'on remplace les mots *"racine carrée"* par *"puissance un-demi"*, alors les diverses formulations conduisent toutes, directement, à une écriture correcte :

$4^{1/2} = 2 \longleftrightarrow$
- *4, puissance un-demi, 2*
- *4, à la puissance un-demi, égale 2*
- *4, sa puissance un-demi est égale à 2 (ou : est 2)*
- *4 a sa puissance un-demi égale à 2*
- *etc.*

Nous devons donc constater que l'emploi de *"puissance un-demi"*, à la place de *"racine carrée"*, change quelque chose. L'emploi de *"puissance un-demi"* rend plus facile la transcription *correcte*, en symboles, du processus oral de calcul. Ceci est visiblement dû à ce que la convention d'écriture des *puissances* est plus commode que celle des *radicaux (cf. paragraphe 13° b)* :

— une fonction-puissance s'écrit à droite, donc *après* le nombre auquel on l'applique :	*"$4^{1/2} = 2$" est correct*
— ceci n'est pas vrai pour une fonction-radical :	*"$4\sqrt{\ }=2$" est incorrect* *"$4 = \sqrt{2}$" est faux*

Ainsi, la transcription directe en symboles de la phrase : *"delta égale quatre, puissance un-demi, deux"*, n'est incorrecte que pour *une seule* raison, le double rôle du mot *"quatre"*: "$\triangle = 4^{1/2} = 2$" ; seule la dernière égalité est juste.

Tandis qu'avec la phrase dont nous sommes partis : *"delta égale quatre, racine carrée deux"*, la transcription "$\triangle = 4 = \sqrt{2}$" est incorrecte à un *double* titre, puisque l'écriture *"$4 = \sqrt{2}$"* est à elle seule déjà incorrecte. (En "contrepartie" en quelque sorte, la première égalité se trouve être juste; mais ce ne serait même pas le cas avec l'écriture : "$\triangle = 4\sqrt{\ } = 2$").

Nous voyons donc un deuxième aspect de la différence entre écrit et oral, en mathématique, une deuxième source d'erreurs pour les étudiants : les conventions d'écriture des fonctions usuelles qui, sauf l'exception des puissances, ne s'écrivent ni à droite ni *après* le nombre (ou la variable) auquel elles s'appliquent *(cf. paragraphe 13° a et b)*.

Ceci oblige encore à distinguer, le plus souvent,

le mode d'*écriture symbolique* : $\sqrt{4} = 2$

du processus oral ou mental :
4, racine carrée 2
4 a la racine carrée 2
4, sa racine carrée est égale à 2 (ou : est 2)
4 a sa racine carrée égale à 2
etc.

Ce processus oral (ou mental) peut par contre toujours être traduit directement en schémas d'opérateurs :

$$\boxed{4} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{2} \qquad \boxed{4} \xrightarrow{\substack{1/2 \\ *}} \boxed{2}$$

La raison en est que la fonction y apparaît (en général) *à droite* de la case à laquelle on l'applique ; et qu'en tout cas, elle est toujours *lue après* le contenu de cette case.

Quand il y a plusieurs fonctions, elles apparaissent donc aussi de gauche à droite, dans l'ordre de leur composition, quelles que soient les complications de leur écriture symbolique (*cf. paragraphe 16°*) :

$$\underline{\text{calcul}}\ \text{du}\ \triangle \rightarrow \boxed{4} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{2} \qquad \boxed{x} \xrightarrow{\cos} \boxed{0{,}5} \xrightarrow{\text{Arccos}} \boxed{\pi/3}$$

e) *Troisième analyse. Retour sur les deux exemples du paragraphe a)*

Le symbole d'égalité étant absent des schémas d'opérateurs utilisés ci-dessus (*cf. paragraphes c et d*), les formes verbales *"égale", "est"*,... peuvent et doivent être remplacées par *"donne"* :

deux plus quatre donne six qui, multiplié par trois, donne dix-huit; (26)
4, par radical deuxième (ou : racine carrée ou : puissance un-demi), donne 2;
le calcul du △ donne 4 qui, par radical deuxième, donne 2 ;
x, par cos, donne 0,5 qui, par Arccos, donne π/3.

Et, de manière générale :

x, par f, donne f(x) qui, par g, donne g[f(x)].

(26) Dans ce cas, *"donne"* remplace le *"font"*, utilisé autrefois (*"deux et quatre font six, six fois trois font dix-huit"*), ou bien vient combler un vide (*deux et quatre... six, six fois trois... dix-huit"*).

Cependant, ceci ne permet pas de traduire le mot *"égale"*, tel qu'il apparaît dans les phrases *"delta égale quatre"* (ce n'est pas *"△ donne 4"*) et *"cosinus x égale zéro virgule cinq"* (ce n'est pas non plus *"cos(x) donne 0,5"*). En effet, ces phrases ne formulent pas des processus oraux ou mentaux qu'il resterait à transcrire ; elles formulent oralement des *écrits* donnés, ou obtenus par *transformations d'écritures*, et où figure déjà le symbole d'égalité. (27)

Le mot *"égale"* doit être remplacé par le mot *"donne"* seulement lorsqu'il y a application d'une opération ou d'une fonction, pouvant donner lieu à un *calcul* et donc à un *processus* oral ou mental pour l'effectuation de ce calcul. C'est ce processus qui doit être formulé avec le mot *"donne"*, afin d'éviter qu'on ne le transcrive directement par un symbole d'égalité.

La phrase *"delta égale quatre"* ne peut donc être traduite en schéma d'opérateurs. Cependant, sa forme écrite *"$\triangle = 4$"* peut être introduite telle quelle dans une case d'un schéma d'opérateurs. Par exemple ainsi :

$$\boxed{\quad \triangle = 4 \quad} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{\quad\quad 2}$$

Ceci exprime que la racine carrée de △ ou de *4*, cela revient au même :
△, comme 4, a la racine carrée 2 .

Le symbole d'égalité ayant été introduit dans la case d'entrée de l'opérateur, il peut ensuite apparaître, par voie de conséquence, dans la case de sortie :

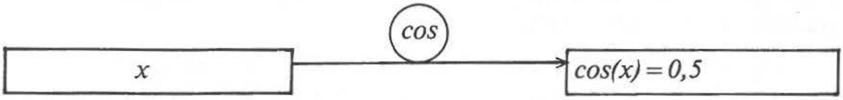
$$\boxed{\quad \triangle = 4 \quad} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{\sqrt{\triangle} = \sqrt{4} = 2}$$

Ainsi, on voit apparaître *l'écriture symbolique correcte*, correspondant à la phrase *"△ égale 4, racine carrée 2"* :

$$\left|\begin{array}{lcl} \textit{case d'entrée} & \longmapsto & \textit{case de sortie} \\ \triangle = 4 & \Longrightarrow & \sqrt{\triangle} = \sqrt{4} = 2 \end{array}\right.$$

(27) Il est vrai que *"$\triangle = 4$"* est la conséquence d'un calcul. Mais ce calcul ne part pas de △ pour *arriver* à *4*. Ce sont plutôt $+1$, -4, $+3$ (coefficients de $x^2 - 4x + 3 = 0$) qui donnent *4* comme valeur à △ ; d'une manière générale les coefficients a, b, c (dans $ax^2 + bx + c = 0$) donnent $b^2 - 4ac$, en quelque sorte par la *"fonction △"*.

De même, l'écriture *"cos(x) = 0,5"* peut être introduite telle quelle dans une case d'un schéma d'opérateurs. Par exemple ainsi :

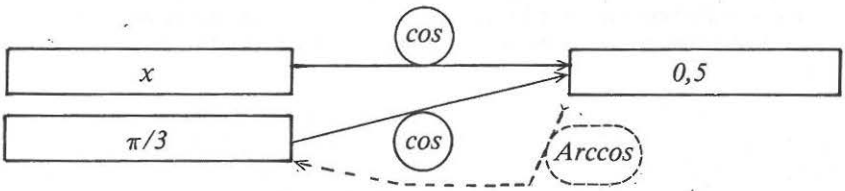


Ceci exprime que le *cosinus de x* (obtenu à partir de *x* par la fonction *cos*)et *0,5*, cela revient au même. C'est-à-dire que *x, par cos, donne 0,5*.

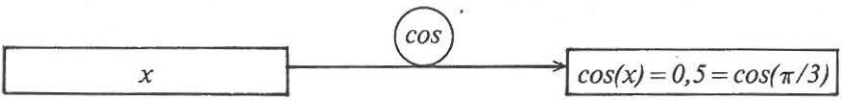
Le symbole d'égalité étant cette fois introduit dans la case de *sortie* de l'opérateur, le problème est du type "réciproque" (*cf. paragraphe 5°*) ; on cherche à le faire apparaître dans la case d'entrée.

Si la fonction *cos* admettait une fonction réciproque, il suffirait pour "remonter" l'opérateur d'appliquer son opérateur réciproque (*cf. paragraphe 10°, exemple*). Toute la difficulté — mathématique *et* d'écriture — de ce problème-ci tient au fait qu'il n'y a justement pas de fonction réciproque de *cos*, donc pas d'opérateur réciproque.

Pour exprimer la phrase : *"cosinus x égale 0,5, c'est π/3"* (phrase où ce n'est ni *0,5*, ni même *x*, qui *"est π/3"*), on pourra seulement, dans un premier temps, faire apparaître *π/3* dans une *autre case d'entrée* :



Ainsi *x, comme π/3, par la fonction cos donne 0,5* (parce que *0,5 par la fonction Arccos donne π/3*). Et on obtient, par voie de conséquence, une égalité supplémentaire dans la case de *sortie* :



On obtient ainsi *l'écriture symbolique correcte* de la phrase *"cosinus x égale 0,5, c'est π/3"* : $cos(x) = 0,5 = cos(\pi/3)$

Dans un deuxième temps, le symbole d'égalité peut apparaître dans la case d'*entrée*, ce qui donne l'écriture suivante :

$$\begin{array}{|lcl}\textit{case de sortie} & \longmapsto & \textit{case d'entrée} \\ cos(x) = 0,5 = cos(\pi/3) & \Longrightarrow & x = \pm\pi/3 + k2\pi \end{array}$$

f) *Conclusions*

Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, que les processus mentaux et les expressions orales ne peuvent être traduits en écritures symboliques de façon directe.

Une des raisons de ce phénomène est que, dans l'écriture, les symboles d'opération et de fonction ne se placent pas à droite des variables mais à leur gauche ou dans d'autres positions plus complexes encore (*cf. paragraphes 15°d, et 13° - 14°*).

L'autre raison tient au rôle du symbole d'égalité, qui interdit d'utiliser une écriture symbolique comme résultat d'une première opération *et* prémisse d'une deuxième opération (*cf. paragraphe 15° c et e*).

Ceci nous oblige à distinguer :

— *l'effectuation des calculs*, avec les expressions orales correspondantes [*et éventuellement des procédures telles que "poser l'opération", "lire dans les tables numériques", "mesurer sur le cercle trigonométrique", "utiliser une machine à calculer", etc.*], que l'on peut représenter en général par des schémas d'opérateurs *sans symbole d'égalité.*

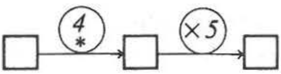
— *l'écriture des conclusions*, avec les expressions symboliques correspondantes, que l'on obtiendra en général en *introduisant le symbole d'égalité* dans ces mêmes schémas.

Nous faisons l'hypothèse que, pour faire prendre conscience de ces difficultés aux étudiants, le formateur a avantage à réserver des moments dans la formation pour *l'apprentissage de la lecture et de l'écriture*; et tout particulièrement pour la mise en forme (en français et en symboles) des expressions plus ou moins abrégées qu'ils utilisent, à l'oral ou en pensée.

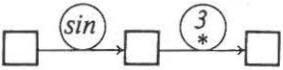
Et nous lui proposons, pour faciliter cet apprentissage, d'utiliser les schémas d'opérateurs comme outil provisoire, *langage intermédiaire* entre l'expression orale et l'écriture symbolique ; et de distinguer ainsi les mots *"donne"* et *"égale"*.

16°) ***Sur une autre utilisation des schémas d'opérateurs***

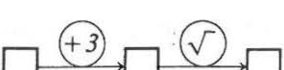
Les schémas d'opérateurs (*cf. paragraphes 10° et 15°*) permettent aussi de distinguer des expressions — ou fonctions — qui se *lisent* (et se *disent*) exactement pareil. Par exemple :



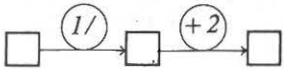
$x \longmapsto 5x^4$ et non pas : $(5x)^4$
qui se dit pourtant pareil :
"cinq x puissance quatre"



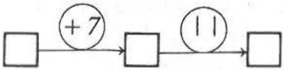
$x \longmapsto [\sin(x)]^3$ et non pas : $\sin(x^3)$



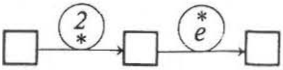
$x \longmapsto \sqrt{x+3}$ et non pas : $\sqrt{x} + 3$



$x \longmapsto \frac{1}{x} + 2$ et non pas : $\frac{1}{x+2}$

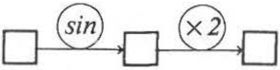


$x \longmapsto |x + 7|$ et non pas : $|x| + 7$



$x \longmapsto e^{(x^2)}$ et non pas : $(e^x)^2$

Ils permettent aussi de distinguer des expressions — ou fonctions — que les étudiants ont tendance à confondre. Par exemple :



$x \longmapsto 2sin(x)$ et non pas : $sin(2x)$

Les conventions d'écriture créent donc des difficultés, que les schémas d'opérateurs permettent d'éviter. Ces derniers facilitent la traduction sur le papier des situations étudiées ; ils peuvent donc en faciliter la compréhension par les étudiants.

17°) ***Sur la différence entre calcul et opération***

Nous avons été amenés à distinguer d'une part les procédures réelles (et partiellement orales) d'effectuation des calculs, et d'autre part le mode d'écriture symbolique des conclusions de ces mêmes calculs (*cf. paragraphe 15°*).

Par exemple :

calculs	
"4, racine carrée 2"	*"2 plus 4 égale 6, multiplié par 3 égale 18"*
"4, par radical deux, donne 2"	*"2 plus 4 donne 6, qui, multiplié par 3, donne 18"*
conclusions	
$\sqrt{4} = 2$	$(2 + 4).3 = 18$

Dans l'écriture symbolique des conclusions, quand apparaît le symbole d'égalité, on écrit : *"$\sqrt{4}$", "(2 + 4).3"*.

Il n'est pas facile pour les étudiants de comprendre que, dans ce type d'écriture, les opérations (ou fonctions) sont à considérer comme *déjà* appliquées ; et que ces écritures désignent déjà les résultats des opérations, *bien que des calculs puissent encore être effectués à leur propos.*

En effet, cela implique que dans l'énoncé : *"calculer (2+4).3"*, le résultat soit déjà écrit ! (le résultat des opérations mais pas celui du calcul...). Il y a donc résultat et "résultat" ! C'est une première difficulté.

Néanmoins, dans ce cas-là, le symbole d'égalité désigne tout de même l'effectuation de calculs (bien qu'il ne désigne pas la procédure réelle par laquelle ces calculs peuvent être effectués).

Il y a une difficulté supplémentaire quand les écritures *"$\sqrt{4}$"*, *"(2 + 4).3"*, etc. ne sont pas données au départ avec l'objectif de faire des calculs dessus. Par exemple, quand le *"4"* vient du calcul d'un discriminant, quand les *"2, 4 et 3"* viennent de données géométriques (ou d'un problème dit "concret"), les écritures *"$\sqrt{4}$"* et *"(2 + 4).3"* sont *à trouver*, tout autant que les résultats des calculs. Et c'est alors que c'est le plus difficile : car non seulement l'égalité ne signifie pas l'effectuation réelle des calculs, mais ceux-ci peuvent être faits *sans* recours à l'écriture théorique du résultat "avant calcul". Il faut alors être capable de trouver la bonne écriture pour des calculs *déjà* effectués, mais *sans* les effectuer, de façon à ne transcrire que les opérations. Par exemple, ayant, à partir de *4*, trouvé sa racine carrée *2*, il faut penser qu'on a *extrait la racine carrée* de *4* et que, si l'on avait fait cette opération, *mais pas le calcul*, le résultat s'écrirait *"$\sqrt{4}$"*, et que par conséquent $\sqrt{4}$ est égal au *2* que l'on a déjà trouvé !

Nous avons vu que, les fonctions et opérations ne s'écrivant pas à droite des variables, et leur composition comportant des conventions d'écriture peu commodes, le processus décrit ci-dessus est complexe (*cf. paragraphe 15°*).

Nous voyons ici que ce processus conduit à distinguer *"calculer le résultat"* (c'est-à-dire : effectuer les opérations), et *"écrire le résultat"* (sous-entendu : sans effectuer les opérations). Dans ce type de cas, le symbole d'égalité est à placer entre *deux écritures des résultats*, l'une avant le calcul, et l'autre après, sachant que l'écriture "avant calcul" peut fort bien n'être cherchée (et trouvée) qu'*après* avoir effectué le dit calcul.

Ainsi, pour faire comprendre aux étudiants cette distinction fondamentale entre *"appliquer une opération (ou une fonction)"* **et** *"effectuer le calcul du résultat (ou de l'image)"*, **nous faisons l'hypothèse que le formateur doit distinguer les énoncés** *"écrire le résultat"* **et** *"calculer le résultat"*, *"écrire l'image"* **et** *"calculer l'image"*.

Par exemple :

$$\boxed{2} \xrightarrow{+4} \boxed{} \xrightarrow{\times 3} \boxed{}$$

écrire le résultat :

$$\boxed{2} \xrightarrow{+4} \boxed{2 + 4} \xrightarrow{\times 3} \boxed{(2+4).3}$$

calculer le résultat :

$$\boxed{2} \xrightarrow{+4} \boxed{6} \xrightarrow{\times 3} \boxed{18}$$

conclusion :

$$\boxed{2} \xrightarrow{+4} \boxed{2 + 4 = 6} \xrightarrow{\times 3} \boxed{(2+4).3 = 18}$$

Hypothèses pour la rédaction des documents

18°) ***Sur le vocabulaire utilisé***

Le vocabulaire spécialisé des mathématiques est de deux types :

— les concepts proprement mathématiques, définis aussi exactement que possible ;

— les expressions plus ambiguës qui servent principalement dans la rédaction des énoncés d'exercices (notamment *résoudre, étudier, discuter, calculer, simplifier, etc.*).

Ces deux types de vocabulaires posent des problèmes différents.

a) *Les concepts*

Ils sont souvent une source de difficultés pour celui qui apprend. Ce vocabulaire spécialisé est en effet assez abondant, et nécessite un gros effort de mémoire.

Or, les gros apports de vocabulaire nouveau coïncident en général avec l'introduction des notions correspondantes. Les étudiants ont de la peine à s'approprier le vocabulaire avant toute pratique de ces notions ; si cette pratique présuppose l'assimilation du vocabulaire, on aboutit à un cercle vicieux... dont les étudiants font les frais.

Cet effort est moindre quand il s'agit de mots du langage courant, ayant une ou plusieurs significations usuelles (comme *ordonner, réduire,...*), et dont la signification mathématique est voisine de ces significations usuelles. Les étudiants peuvent en effet s'appuyer sur des analogies pour se souvenir des significations mathématiques. Ainsi *"ordonner"* un polynome signifie bien y mettre de l'ordre. Cependant cet "ordre" a un sens beaucoup plus précis que dans les expressions courantes (*"mettre de l'ordre dans ses affaires"* ou *"dans ses idées"*), et ce sens est tout à fait spécifique aux polynomes. C'est alors sur cette spécificité qu'il s'agit d'attirer l'attention des étudiants.

Les significations mathématiques peuvent aussi n'avoir aucun rapport avec les significations usuelles. Ainsi, le mot *terme* désigne de manière courante une fin (*"y mettre un terme"*), ou une expression (*"un terme technique"*), alors qu'en mathématiques, le mot *terme* est lié à l'idée de somme (algébrique). Dans de tels cas, les étudiants risquent de ne pas comprendre le sens mathématique des mots, ou d'avoir des difficultés à s'en souvenir. C'est alors que des explications détaillées sont indispensables, avec des exemples et des contre-exemples. Il est utile aussi de fournir, quand c'est possible, l'explication historique du choix des mots.

Par exemple, la signification mathématique du mot *terme* est à rapprocher de la vieille expression : *"les termes du loyer"*, le loyer annuel étant formé de la somme de ces termes successifs (et l'on peut aussi sans doute expliquer ainsi l'emploi du même mot à propos des suites et des séries). (cf. aussi note 23 sur le mot *image*)

De plus, les synonymes du français courant ne sont en général pas valables en mathématiques (*réduire* et *décroître* désignent deux choses différentes ; *ordonner* n'est pas *ranger* ; un polynome *simple* ne s'obtient pas en *simplifiant* ; etc.).

Réduire plusieurs fractions au même dénominateur est même faire le contraire de les rendre *irréductibles*.

Dans certains cas, le même mot a plusieurs significations mathématiques différentes, qui ne peuvent être distinguées que par le contexte (le *"degré" d'un polynome* et le *"degré" unité de mesure des angles* ; un *"terme" d'une somme* et un *"terme" d'une suite* ; une *relation "d'ordre"* et une *racine "d'ordre" deux* ; etc.).

Enfin, quand on apprend les mathématiques, il faut apprendre à distinguer, à l'intérieur des textes, les mots qui sont utilisés dans un sens courant, de ceux qui sont utilisés dans un sens mathématique précis. Il faut, par exemple, distinguer les *exercices d'application* (c'est-à-dire les exercices d'utilisation d'un théorème général), des *exercices sur les applications* (c'est-à-dire les exercices sur une certaine sorte de fonctions appelées les "applications").

Un cas particulièrement complexe est celui du mot *fonction*, puisqu'il est utilisé tantôt comme concept mathématique *(A)*, tantôt dans un sens mathématique non-conceptuel mais précis *(C,D)*, tantôt dans un sens courant *(B)* :

(A) *"on désigne par g une fonction de* **R** *dans* **R***";*
(B) *"la valeur de f(x), ou de (mx – 3), est fonction de x" (elle dépend de celle de x);*
(C) *"étudier le signe de f(x), en fonction de x";*
(D) *"discuter, en fonction de m, le nombre de solutions en x de* $mx-3 = 0$*"*

Un autre cas complexe est celui du mot *variable* car on fait aussi "varier" les valeurs des paramètres, on étudie les "variations" des fonctions, etc.

Nous faisons l'hypothèse que les étudiants ont besoin, pour s'y retrouver dans les documents qui leur sont fournis, que les mots et les expressions ayant une signification mathématique nouvelle pour eux soient signalés d'une manière ou d'une autre (au moins au moment de leur première utilisation), et qu'ils soient :

— accompagnés d'explications détaillées ;

— illustrés d'exemples non seulement mathématiques, mais aussi grammaticaux ;

— situés par rapport à leurs usages courants et, si nécessaire, expliqués historiquement.

Nous proposons également de leur fournir un lexique contenant ces mots ou expressions. En effet, les étudiants peuvent avoir besoin de retrouver ces explications (en cas d'oubli ou de doute). Pour les y aider, le lexique peut comporter soit lesdites explications (il doit alors être très gros), soit l'indication de leur place dans les documents.

b) *Les mots ambigus*

Dans la catégorie des mots ambigus, on peut prendre comme exemple caractéristique le mot *résoudre* :

— en tant que mot du vocabulaire courant, il peut s'appliquer à l'exercice tout entier ; il désigne alors l'objectif général du travail des étudiants, *résoudre des problèmes.*

— en tant que consigne particulière, il s'applique à une équation particulière (ou à un système d'équations). Il désigne alors un objectif particulier. C'est une première ambiguïté.

De plus, dans sa deuxième acception, ce mot a tendance à ne plus désigner un objectif (*chercher* quelque chose, et pour cela, *chercher* une méthode). De façon quasi-automatique, il évoque la mise en œuvre d'une méthode qui est censée être connue, l'application d'un *procédé.* Cette ambiguïté est beaucoup plus gênante. Ainsi, toute équation un peu bizarre (comme $|x| = -x$), ne rentrant pas dans la catégorie des procédés bien connus, provoque l'impuissance ("on ne m'a pas appris"), ou même une sorte d'angoisse. Les procédés classiques ne s'appliquant qu'à des équations ayant un nombre très restreint de solutions (premier degré : une solution ; deuxième degré : deux au maximum ; systèmes : une, dans les exercices classiques), il s'avère du coup quasi-impossible de trouver à une équation (type $|x| = -x$) une infinité de solutions, qui de plus peut s'écrire comme une inéquation ($x \leqslant 0$).

Nous faisons l'hypothèse que les mots qui expriment des objectifs dans les énoncés d'exercices (*résoudre, étudier, discuter, calculer, simplifier,...*) non seulement présentent des ambiguïtés de sens, mais de plus ont tendance à évoquer la mise en œuvre de procédés automatiques.

Pour surmonter cet obstacle, nous pensons nécessaire d'expliciter (oralement ou par écrit) ce que l'on entend par *"résoudre une équation", "étudier le signe d'une expression", "étudier une fonction", "discuter les solutions d'une équation paramétrique", "calculer un nombre", "calculer une fonction", etc.*

Nous proposons aussi de reformuler ces expressions de façon plus claire :

*"étudier **l'existence** et le signe d'une expression"*
*"étudier **les variations** d'une fonction" (ou: établir le tableau de variations d'une fonction **sur un intervalle d'étude** suffisant)*
*"discuter **le nombre** (et/ou le signe, la place, etc.) des solutions d'une équation **en fonction d'un paramètre**"*
*"calculer une **valeur exacte** (et/ou approchée) d'un nombre"*

"calculer ***l'expression*** *d'un nombre* ***en fonction de paramètres"***
"calculer ***l'expression de l'image*** *de x (ou t, ou...) par une fonction"*
etc. (28)

Il est sans doute encore préférable de formuler autrement les objectifs des exercices, au moins au début. Quitte ensuite à expliquer que ce sont des objectifs que l'on résume par ces expressions moins explicites, mais d'usage courant. (29)

19°) *Sur l'acte de désignation*

Il est courant, en mathématiques, d'utiliser des désignations (des "noms") pour les objets étudiés. C'est d'ailleurs très souvent indispensable pour traduire, en écriture symbolique, les hypothèses, problèmes, résultats, théorèmes, etc.

D'où les expressions *"soient P et Q deux points..."*
"la fonction f telle que..."
"la famille de cercles C_λ*..."*
"on désigne par b une constante donnée..."
"le polynome P(x) = ..."
"on appelle R le reste de la division..."

a) *Première analyse*

Il y a dans ces expressions une distinction à faire entre deux types de constructions grammaticales :

— les cas où le nom est introduit au fil de la phrase, comme dans :
"la fonction f telle que..."
"le polynome P(x) = ..."

— les cas où la phrase est construite autour de l'acte de désignation, comme dans :
"soient P et Q deux points..."
"on désigne par b une constante donnée..."
"on appelle R le reste de la division..."

---

(28) Nous ne citons que les principales significations du mot *calculer*. Dans bien des cas, ce mot est à prendre, hélas, comme synonyme de *"simplifier l'écriture de..."*. Or, le mot *simplifier* a tellement de significations différentes que nous renonçons à en faire une liste. N'importe quelle transformation d'écriture au moyen d'identités pourrait être considérée comme une simplification (et l'a sans doute effectivement été). Pour les polynomes, nous lui préférons le mot *réduire* qui est très précis (Pour les fractions, nous ferions de même, si l'expression "*réduire* au même dénominateur" ne désignait pas une transformation exactement inverse). Dans tous les autres cas, comprendre l'objectif qui est désigné par le mot *simplifier* relève de la devinette (ou de l'histoire : quand, faute de calculatrices, il fallait "simplifier" les calculs nécessaires aux applications numériques, pour diminuer les erreurs dues à l'emploi de valeurs approchées).

(29) *Voir notamment les paragraphes 8° (exemple) et 9° (a et d) sur l'objectif de la résolution d'une équation (ou d'une inéquation) et sur la présentation de ses résultats.*

Dans les constructions grammaticales du deuxième type, l'attention du lecteur est retenue sur l'acte de désignation. Dans le premier type, c'est à lui de noter au passage le nom choisi et ce qu'il désigne ; c'est évidemment plus difficile. D'autant que les constructions du premier type favorisent l'emploi de structures grammaticales complexes où peuvent s'emboîter désignations et propriétés caractéristiques. *(cf. paragraphe 20°)*

Nous proposons, quand c'est possible, d'utiliser de préférence les constructions du deuxième type : *"soient..."*, *"on désigne par..."*, *"on appelle..."*

b) *Deuxième analyse*

Il y a une autre distinction à faire :

— quand on écrit *"on appelle R le reste de la division..."*, cette décision n'est valable que dans un cadre limité. A une autre occasion, "*R*" pourra désigner tout autre chose ;

— quand on écrit *"on appelle* **R** *l'ensemble des nombres réels"*, il s'agit d'une décision ayant un caractère permanent.

Il serait bon de ne pas utiliser les mêmes termes dans les deux cas. Pour le deuxième cas, dans l'expression : *"on appelle..."*, le *"on"* désigne tous ceux qui font des mathématiques aujourd'hui ; le formateur, les étudiants ne sont pas libres de leur choix. L'expression *"on appelle..."* convient.

Dans le premier cas, le choix est en grande partie arbitraire ; il est guidé par des habitudes ou des commodités, mais n'a aucun caractère d'obligation. Le formateur et les formés, à condition de se mettre d'accord, sont *libres de leur choix*.

Il faut seulement que la désignation choisie soit différente de celles déjà utilisées pour autre chose (et de celles qui ont une signification permanente ; par exemple π en trigonométrie, e avec les exponentielles, etc.).

Nous proposons d'utiliser l'expression *"on appelle par exemple"* (ou *"dans ce problème, ce chapitre, cette démonstration, etc."* ; idem avec *"on désigne par..."*) :

*"on appelle **par exemple** R le reste de la division..."*
*"le reste de la division... est appelé R **dans ce problème**"*
*"le reste de la division... que l'on appelle R **dans ce théorème**..."*
*"le reste de la division..., appelé R **dans cette démonstration**..."*
*"**dans cette étude,** on désigne par R le reste de la division..."*

Ceci est d'autant plus important que les travaux (études, démonstrations, etc.) et leurs conclusions (théorèmes,...) ne dépendent pas du nom choisi.

De plus, sauf précision contraire, les conclusions peuvent être utilisées en remplaçant plusieurs désignations par *une seule* (ou par une même expression particulière).

Nous faisons l'hypothèse qu'une précision (comme *"par exemple"*) **est nécessaire, pour manifester clairement que la validité des conclusions ne serait pas mise en cause par un changement de désignation, ou son remplacement par une expression explicite. C'est essentiel pour que les étudiants apprennent à réutiliser ultérieurement ces conclusions.** *[Cette hypothèse correspond, au niveau de la langue française, à celle qui a été formulée ailleurs pour l'écriture symbolique; cf. paragraphe 9° sur la présentation des résultats.]*

Il faut noter que le mot *soit* ne remplit pas les conditions de notre hypothèse. Considérons par exemple l'expression suivante : *"soient P et Q deux points quelconques"* ; il y est affirmé simultanément deux choses :

"on considère deux points quelconques"
et *"ces deux points sont ici appelés P et Q"*

La deuxième affirmation est sans importance pour l'étude (pourvu que les deux *noms* soient différents), et pour la validité de ses conclusions (on peut les appliquer à deux points A et B, et aussi à un même point C). Mais la première affirmation est nécessaire à l'étude. L'expression suivante : *"soient **par exemple** P et Q deux points quelconques"* serait ambiguë (le *"par exemple"* porte-t-il sur *"P et Q"*? ou sur *"deux points"*?).
La double signification du mot *soit* (ou *soient*) le rend donc impropre par rapport à l'objectif de clarification que nous proposons.

20°) *Sur la grammaire utilisée*

Bien que les mathématiciens s'en rendent rarement compte, il est de fait que les tournures grammaticales utilisées dans les cours, et surtout dans les énoncés d'exercices, sont assez complexes (30). De plus, elles comportent très souvent des présupposés (certaines informations sont "implicites"), et des ambiguïtés.

Ceci crée des difficultés pour les étudiants peu habitués à ce langage, et particulièrement pour ceux qui n'ont pas un bagage culturel suffisant, ou qui ont appris le français en tant que langue étrangère.

a) *Analyse d'un premier exemple*

Considérons la phrase suivante :

"On considère la famille de cercles C_λ, dépendant du paramètre λ, et dont l'équation, rapportée à un repère orthonormé xOy, est :

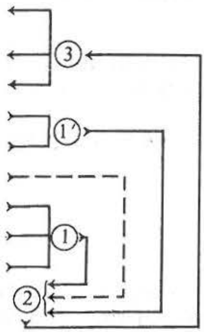
$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + \frac{\lambda^2}{2} = 0\text{''}$$

---

(30) Au paragraphe 14°, nous avons même vu que, dans l'expression *"f de x"*, l'emploi de la préposition *"de"* est grammaticalement contradictoire avec le fait que la lettre f désigne une fonction. Dans ce cas, la langue mathématique diverge radicalement de la langue française, au sens où elle en ignore délibérément la grammaire.

Il y a dans cette seule phrase un très grand nombre d'informations données dans un ordre complexe :

— une *famille*
— des *cercles*
— un nom : *"C_λ"*
— un *paramètre*
— une lettre : "λ"
— une *équation*
— un *repère*
— un qualificatif : *"orthonormé"*
— un nom : *"xOy"*
— une écriture d'équation : "$x^2 + \ldots = 0$"



C'est ① : dans un *repère xOy*, et ② : par l'intermédiaire de l'*équation* que ③ : la *famille de cercles* est définie ; et c'est parce que le repère est *orthonormé* que ce sont des *cercles*, et non des ellipses. C'est ①' : parce que "λ" est un *paramètre*, dans ② : *l'équation*, qu'il y a ③ : *plusieurs cercles* définissant une *famille*, et que le nom *"C_λ"* se justifie.

Notons, de plus, que le référentiel du paramètre λ n'est pas indiqué : c'est une information implicite. Or, c'est ce référentiel qui détermine la *famille* de cercles dont il s'agit. *(Nous laisserons provisoirement de côté cette question, qui sera reprise plus à fond au paragraphe 21°a).*

La plus grande partie des informations est contenue dans deux propositions subordonnées (*"dépendant... λ"; "dont... = 0"*). Celles-ci ne sont pas du même type (*"dépendant"* : participe présent ; *"dont"* : relative), ce qui rend la lecture difficile.

Un très bon maniement de la langue française est indispensable pour comprendre une telle phrase. L'exercice évalue donc la maîtrise de la langue française, au moins autant, sinon plus, que la maîtrise de la géométrie analytique.

De plus, la structure de la phrase est ambiguë :

— *"C_λ"* est-il le nom de la famille ? ou bien des cercles (d'un cercle pour chaque valeur de λ) ?
— *"dépendant"* se rapporte-t-il à *"cercles"* ? ou à *"famille"* ?
— *"dont"* se rapporte-t-il à *"cercles"* ? ou à *"famille"* ?

Ce type d'ambiguïté, entre le nom d'une famille et celui de ses éléments, a été longtemps admis par les mathématiciens, mais il est très gênant pour les étudiants (et il est peu conforme à l'effort actuel de clarification des notations). De plus, en réalité, ni la famille ni aucun des cercles ne *dépend* de λ ; c'est le *choix* d'un des cercles qui dépend du choix d'une *valeur* de λ (c'est-à-dire que seule l'écriture *"C_λ"* dépend de λ !). Il y a là un raccourci, une abréviation tout à fait saisissants.

On peut donc se demander si le singulier : *"l'équation"*, est à rapporter au singulier : *"une famille"*, ou bien à l'unicité (purement graphique) de l'écriture "C_λ"?? (indépendamment de la signification de cette écriture).

On peut aussi s'interroger sur ce à quoi s'applique le mot *"et"*, dans ce qui le précède ; il y a trois possibilités :

"on... famille de cercles C_λ, dépendant de λ, et dont l'équation... = 0"

En tout état de cause, on peut conclure que les tournures grammaticales (et même l'emploi de mots comme *"dépendant"*) sont assez particulières aux mathématiques, inusitées (pour ne pas dire incorrectes) en langue française.

L'exercice évalue donc la maîtrise de ce langage particulier aux mathématiciens, au moins autant — sinon plus — que la maîtrise de la théorie mathématique appelée géométrie analytique.

Ne serait-il pas plus clair, par exemple, d'écrire ainsi :

"Dans ce problème, $x0y$ désigne un repère orthonormé,
λ est un paramètre à valeur dans **R**.
Pour chaque valeur de λ, l'équation suivante définit un cercle appelé C_λ :
$$x^2 + \ldots = 0$$
La famille de ces cercles est appelée F : $F = \{C_\lambda \,/\, \lambda \in \mathbf{R}\}$."

Si l'on veut que les étudiants apprennent à lire les énoncés, encore faut-il que ceux-ci soient effectivement lisibles, et pas seulement "devinables" grâce aux habitudes acquises. Si l'on veut qu'ils attachent de l'importance à la signification de certains mots-clefs *(comme "orthonormé", ci-dessus)*, **encore faut-il qu'il n'y ait pas d'autres mots à la signification floue** *(comme "dépendant", ci-dessus)*.

b) *Analyse d'un deuxième exemple. Conclusions*

Considérons de même la phrase suivante :

"Calculer la primitive F de la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ qui vérifie $F(0) = 1/4$".

La dernière partie de cette phrase *("qui vérifie... 1/4")* est grammaticalement ambiguë : elle peut se rapporter aussi bien à *"la primitive F"* qu'à *"la fonction $x \longmapsto \ldots$"*. Pour lever cette ambiguïté, il faut saisir l'aspect mathématique de l'exercice. Loin d'aider le lecteur à comprendre cet aspect mathématique, la tournure grammaticale présuppose chez lui une pleine familiarité avec le problème posé. Celui qui ne connaît pas d'avance ce *type* de problème ne peut chercher à résoudre ce problème *particulier*.

L'exercice est donc absolument impropre pour faire rechercher, dans ce cas particulier, des méthodes de résolution du problème-type correspondant. Il évalue d'abord la familiarité avec ce dernier.

Ne serait-il pas plus clair, par exemple, d'écrire ainsi :

"On considère la fonction suivante : $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$;
on appelle F celle de ses primitives qui vérifie $F(0) = 1/4$;
calculer l'expression de $F(x)$*."*

Nous faisons l'hypothèse que plus les phrases sont courtes, de structure grammaticale simple et univoque (sans ambiguïté), plus les étudiants sont à même de comprendre ce qui leur est demandé, et de mobiliser leurs capacités (en mathématiques) pour rechercher une méthode de résolution.

De plus, nous pensons préférable que les données et les objectifs soient formulés dans des phrases distinctes.

21°) *Sur les présupposés*

a) *Première analyse*

Considérons la phrase suivante :

"Soit l'équation paramétrique : $(m + 1)x^2 + (2m - 1)x - (2m + 3) = 0$*"*

Bien sûr l'habitude veut que, dans un tel cas, l'inconnue soit x et que le paramètre soit m, mais ce n'est pas précisé. Si les étudiants doivent se baser sur de telles "habitudes" pour comprendre, comment pourront-ils s'attaquer à des problèmes inhabituels, penser à des méthodes originales ? Ils ne peuvent donc avoir recours qu'à des procédés appris, à des automatismes.

On notera que les référentiels ne sont pas non plus explicités. Le paramètre est-il à valeur dans **R** ? ou **C** ? (ou même **Q**, ou **Z** ?) ; les solutions sont-elles considérées dans **R** ? ou **C** ? (ou même **A**, ensemble des nombres algébriques ?). Il est sans doute "sous-entendu" que c'est **R**, car c'est dans ce cadre que l'étude de ce type d'équation paramétrique est généralement enseigné... C'est encore l'habitude qui compte. Mais alors, comment les étudiants pourraient-ils comprendre et traiter le cas "$m \in \mathbf{C}$, $x \in \mathbf{R}$" ?

Il est heureusement de plus en plus rare de trouver des énoncés rédigés de cette façon. Mais on en trouve du type suivant :

"Soit l'équation $(m + 1)x^2 + (2m - 1)x - (2m + 3) = 0$
où x est l'inconnue et m le paramètre."

Cette fois, les statuts de x et de m sont précisés, mais on lit l'équation avant de les connaître. Or cette lecture est en bonne partie déterminée par lesdits statuts : si x est l'inconnue, l'équation est du deuxième degré ; si c'est m, il faut réorganiser l'écriture et l'équation se révèle être du premier degré.

De plus, il y a en réalité une équation pour chaque valeur du paramètre ; le référentiel du paramètre détermine la *famille* d'équations dont il s'agit. Il est par conséquent incorrect de ne pas préciser d'emblée ce référentiel. De plus, on cherche le nombre de solutions et leurs éventuelles valeurs *en fonction du paramètre* ; la donnée du paramètre est donc *première* par rapport à celle de l'inconnue. Il est par conséquent peu correct de mettre ce paramètre sur le même plan que l'inconnue et, pire, de le présenter en seconde place (Le référentiel de l'inconnue peut être précisé par la suite, ou même changé au cours de l'exercice, cela pose moins de problèmes de compréhension).

Ne serait-il pas plus clair, par exemple, d'écrire ainsi :

"m est un paramètre à valeur dans $\mathbf{R}$*;*
on considère l'équation suivante à une inconnue x: ...."

Nous faisons l'hypothèse que, plus les informations sont explicitées et classées dans un ordre "logique", moins il y a de risques de malentendu, d'incompréhension et de recours à des mécanismes purement automatiques.

De plus, nous pensons préférable que les expressions mathématiques ne se trouvent pas au milieu des phrases ; leur lecture polarise en effet l'attention, et la fin du texte en français risque de ne pas être lue, ou bien d'être considérée comme secondaire.

b) *Deuxième analyse*

Considérons à nouveau la phrase suivante *(cf. paragraphe 19°)* :

"Calculer la primitive F de la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$
qui vérifie F(0) = 1/4"

A cause de l'article *"la"* (dans *"calculer la primitive"*), ce calcul doit conduire à une fonction précise, unique. L'énoncé présuppose donc que le problème a une solution, et que cette solution est unique.

La raison pour laquelle la fonction donnée a des primitives n'est pas explicitée. Un étudiant qui ne la connaît pas (ou qui l'a mal comprise, ou l'a oubliée) peut être induit à croire que toute fonction a une primitive.

Il y a pourtant au moins une fonction usuelle qui n'a pas de primitive (la fonction *partie entière*) ; et il est facile d'en construire du même type (affines par morceaux, avec discontinuités pour des abscisses appartenant à leur existentiel). (31)

La raison pour laquelle la condition *"F(0) = 1/4"* détermine la primitive de façon unique n'est pas non plus explicitée. Un étudiant qui l'a oubliée peut être induit à une généralisation.

Il y a pourtant de nombreuses fonctions usuelles qui ont plusieurs primitives vérifiant cette condition (par exemple : $(x+1)^{-1}$, $Log|x+1|$, ...) ; et il est facile d'en construire d'autres du même type (continues sur leur existentiel, mais ce dernier formé d'une union d'intervalles disjoints). (31)

L'énoncé ne précise pas si l'étudiant doit, ou non, vérifier que les conditions sont effectivement remplies pour qu'il y ait une solution unique au problème. C'est sans doute que cela ne lui est pas demandé. Il ne faudrait pas pour autant le laisser oublier (ou méconnaître) qu'il va utiliser un théorème comportant des hypothèses précises.

Nous faisons l'hypothèse que, si les conditions d'application des théorèmes ne sont pas rappelées (données à vérifier, ou admises explicitement), les étudiants auront tendance à généraliser leurs conclusions à des cas où ils ne s'appliquent pas. Cela pourra se produire sur des cas où ces conclusions sont néanmoins vraies (mais sans qu'ils aient appris pourquoi) aussi bien que sur des cas où elles sont fausses.

C'est pourquoi nous proposons, par exemple, d'écrire ainsi :

"On considère la fonction suivante (qui est continue sur **R***) :*

$$x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

On appelle F celle de ses primitives qui vérifie F(0) = 1/4; calculer l'expression de F(x)."

(31) Pour affirmer cela, nous nous basons sur la seule définition générale des primitives qui puisse être enseignée au niveau du baccalauréat. C'est-à-dire : *"F est une primitive de f si et seulement si, pour toute valeur de x dans* **R**, *on a :*

— *soit ni f(x), ni F(x) n'existent;*

— *soit f(x), F(x) et F'(x) existent,* et *F'(x) = f(x)."*

On peut aussi améliorer cette définition en acceptant, quand c'est possible, que *F* soit prolongée *par continuité*, en des points où *f(x)* n'existe pas, à condition que cela *ne prolonge pas F'* du même coup (ainsi $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ a pour primitive $\sqrt{x}$, y compris en $x = 0$).

Voici par exemple deux primitives de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ qui à 0 donnent l'image 1/4 :

$$F_1 \begin{cases} \text{si } x > -1 & F_1(x) = \mathrm{Log}(x+1) + 1/4 \\ \text{si } x < -1 & F_1(x) = \mathrm{Log}(-x-1) \end{cases}$$

$$F_2 \begin{cases} \text{si } x > -1 & F_2(x) = \mathrm{Log}(x+1) + 1/4 \\ \text{si } x < -1 & F_2(x) = \mathrm{Log}(-x-1) + 3{,}7 \end{cases}$$

L'information supplémentaire *("qui est continue sur* **R***")* peut au moins provoquer des questions sur son utilité, chez les étudiants qui ont oublié que ce type de problème n'a pas forcément une solution unique. Cela peut fournir l'occasion de rappeler les hypothèses du théorème utilisé (c'est-à-dire les conditions de validité de sa démonstration), et donc de rappeler qu'explicitement ou implicitement, la résolution du problème utilise un théorème.

Inconnues et variables

par M. BRUSTON

SOMMAIRE

Introduction 65

I - Les variables cachées 65

II - Conséquences pour la caractérisation des nombres

1°) Caractérisation d'un nombre unique 68

2°) Caractérisation d'un ensemble de nombres 69

3°) Ecriture des ensembles définis en compréhension 70

III - Conséquences pour la notion d'inconnue

1°) Inconnue et variable 70

2°) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre 71

Introduction

Considérons la phrase suivante:

"Calculer la primitive F de la fonction $x \longmapsto sin\left(\frac{x}{2}\right)\ cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ *qui vérifie F(0) = 1/4"*

Dans l'article précédent (paragraphes 20° b et 21° b), cette phrase a été analysée sous divers angles (complexité de la structure grammaticale, informations implicites, etc.).

A la suite de ces analyses, nous en avons proposé deux reformulations, dont la suivante:

"On considère la fonction suivante: $x \longmapsto sin\left(\frac{x}{2}\right)\ cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ *;*
on appelle F celle de ses primitives qui vérifie F(0) = 1/4;
calculer l'expression de F(x)."

L'objectif de cet article est de poursuivre l'analyse de la phrase considérée (ainsi que de sa reformulation), et d'en tirer quelques conséquences :

- sur la notion de variable (et de paramètre) cachée;
- sur la caractérisation des nombres (par des équations ou d'autres conditions) et la définition des ensembles "en compréhension";
- sur la notion d'inconnue, le passage de l'arithmétique à l'algèbre et le traitement algébrique des problèmes dits "concrets".

I - Les variables cachées

Considérons donc la phrase citée ci-dessus :

"Calculer la primitive F de la fonction $x \longmapsto sin\left(\frac{x}{2}\right)\ cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ *qui vérifie F(0) = 1/4."*

La reformulation que nous en avons proposée repose sur une *hypothèse*, à savoir que *"F"* désigne une fonction précise, unique: la solution de l'exercice. Ainsi, *"la primitive F"* signifie *"la primitive cherchée, désignée par F"*.

Cette hypothèse pose cependant quelques problèmes. Puisque la fonction *F* est la solution, il est évident qu'elle vérifie *F(0) = 1/4*; cela fait partie de ses propriétés, par hypothèse. Mais, "a contrario", la fonction *F* est *la seule* à pouvoir vérifier *F(0) = 1/4*; en effet, aucune autre fonction ne peut s'appeler aussi *"F"*. Comme on ne connaît pas *F*, l'énoncé comporte un cercle vicieux: une des primitives doit vérifier *F(0) = 1/4*, et c'est *celle-là* que l'on doit désigner par *F*; or, pour qu'elle vérifie *F(0) = 1/4*, il faut *déjà* qu'elle soit appelée *F*. (1)

(1) Le cercle vicieux apparaît plus clairement si l'on modifie la phrase ainsi : *"celle de ses primitives qui vérifie F(0) = 1/4 est appelée F"*.

Pour sortir de ce cercle vicieux, considérons les phrases suivantes :

— *"Chercher le Pierre, français, qui vérifie : Pierre fait 2,20 m de hauteur"*;

— *"Chercher la valeur de X, rationnel, qui vérifie : $3X - 2 = 1 - X$"*;

(on présuppose dans chaque cas qu'il y a une solution unique)

Dans ces phrases, *"Pierre"* et *"X"* ne désignent pas la solution : ce sont des variables (parcourant respectivement l'ensemble des individus français prénommés Pierre, et **Q**) ; la solution portera un autre nom (respectivement : *Pierre Machin* ; et X_0, ou *r*).

Il s'agit de chercher, parmi ***les** Pierre français*, celui pour lequel est vraie la déclaration *Pierre fait 2,20 m de hauteur* (pour ***chaque*** *Pierre français*, cette déclaration est soit vraie, soit fausse). Il s'agit de chercher parmi ***les** valeurs de X, rationnel,* celle qui rend vraie l'égalité $3X - 2 = 1 - X$ (***chaque*** rationnel, s'il est assigné comme valeur à *X*, rend l'égalité soit vraie, soit fausse).

De même, dans *"la primitive F... qui vérifie $F(0) = 1/4$"*, la lettre *F* ne peut valablement être qu'une *variable* (parcourant l'ensemble des primitives de la fonction donnée).

Il s'agit de chercher, parmi ***les** primitives F,* celle qui vérifie $F(0) = 1/4$. Plus exactement, il s'agit de chercher, parmi les primitives (de la fonction donnée), celle qui, assignée comme valeur à la variable *F*, rend vraie l'égalité $F(0) = 1/4$. (2)

Ceci entre en contradiction avec notre hypothèse précédente (*"F"* désignant *la* solution). Alors, comment faut-il interpréter l'expression *"la primitive F"* ?

Ainsi :

*"la primitive cherchée, **désignée par F**"*

ou bien ainsi :

*"celle, parmi **les** primitives **assignables à la variable F**"* ?

La première interprétation, on l'a vu, conduit à un cercle vicieux ; mais la deuxième (avec *F* comme variable) est loin d'être évidente. Nous dirons que *F paraît* désigner la solution, mais est en réalité une *variable cachée*.

D'ailleurs, si l'on veut expliciter le présupposé qu'il y a une solution unique, il faut utiliser le quantificateur "$\exists !$", appliqué à *F*, ce qui prouve que *F* est une variable :

$$\exists ! F \, [F \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ et } \forall x \, [F'(x) = f(x)] \text{ et } F(0) = 1/4]$$

(2) *C'est parce que "$F(0) = 1/4$"* est une *caractérisation* de la primitive cherchée, que la lettre *F* doit être lue comme une variable. Au contraire, dans la phrase *"démontrer que la primitive F vérifie $F(0) = 1/4$"*, la lettre *F* ne peut désigner qu'une fonction précise, unique (et précédemment définie).

Si F désignait une fonction précise, l'affirmation de son unicité n'aurait tout simplement pas de sens.

La pratique mathématique courante joue en fait sur les deux interprétations sans se soucier du cercle vicieux ; elle utilise l'ambiguïté. On écrira par exemple :

$$F(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) + C$$

Or,

— si C est la constante précise, unique, que l'on cherche, alors la lettre F désigne la primitive cherchée ;

mais

— si C est un paramètre (dans $\mathbf{R}$), la lettre F désigne une quelconque des primitives.

Et c'est la deuxième interprétation qui est sous-jacente à la première. Pour lever l'ambiguïté, il faudrait (*avant* de calculer C avec $F(0) = 1/4$) écrire ainsi :

— soit $\exists! \, C \in \mathbf{R} \quad F(x) = \ldots + C$ (F désignant la primitive cherchée)
— soit $\forall \, C \in \mathbf{R} \quad F(x) = \ldots + C$ (F désignant une primitive quelconque)

Or, c'est la validité de ces *deux* écritures (avec chacune sa signification particulière pour "F") qui fonde la validité de l'écriture ambiguë, sans quantificateurs. Et c'est la *deuxième* écriture (avec "$\forall C$") qui fonde la validité de la première (avec "$\exists! C$"). Nous dirons que, dans l'écriture sans quantificateurs, "C" est un *paramètre caché*.

Nous faisons l'hypothèse que l'emploi de variables et paramètres cachés (avec ambiguïté entre valeur cherchée et lettre parcourant le référentiel dans lequel on cherche), bien que courante dans la pratique mathématique, rend difficile la compréhension de ce qui fonde cette pratique.

Nous proposons, pour lever l'ambiguïté,

— soit de considérer "F" comme désignant la solution unique :

"On désigne par F celle des primitives qui donne à 0 l'image 1/4"

— soit de considérer "F" comme une variable et de le signifier clairement en donnant un autre nom à la solution (par exemple F_0) :

"On désigne par F_0 celle des primitives F qui vérifie $F(0) = 1/4$"

Dans le deuxième cas, par exemple, l'énoncé global devient :

"On considère la fonction suivante : $x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$;
celle de ses primitives F qui vérifie $F(0) = 1/4$ est désignée par F_0 ; calculer l'expression de $F_0(x)$."

Et la résolution utilisera les écritures suivantes :

$$\forall\, C \in \mathbf{R}\ [\forall x \in \mathbf{R}\ [F(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) + C] \Rightarrow F' = f]$$

$$\exists !\, C \in \mathbf{R}\ [\forall x \in \mathbf{R}\ [F_0(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) + C] \text{ et } F_0' = f \text{ et } F_0(0) = 1/4]$$

En assignant à x la valeur 0 :

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\,.\,1 \quad + \frac{1}{2}\,.\,1 \quad + C$$

donc $C = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R}\ F_0(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

Remarque : Pour traduire l'énoncé global en symboles mathématiques, nous pourrions utiliser l'opérateur logique "ι" ("iota") qui signifie précisément : "l'unique assignation à la lettre... telle que..." (3)

Nous appuyant sur :

$$\exists !\, F \qquad [F \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ et } \forall x\, [F'(x) = f(x)] \text{ et } F(0) = 1/4]$$

nous pourrions écrire :

$$F_0 = \iota F \quad [F \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ et } \forall x\, [F'(x) = f(x)] \text{ et } F(0) = 1/4]$$

II — Conséquences pour la caractérisation des nombres

1°) *Caractérisation d'un nombre unique*

Du travail précédent, nous pouvons conclure qu'il y a ambiguïté sur le statut de la lettre X dans la phrase suivante :

"Chercher le rationnel X qui vérifie : $3X - 2 = 1 - X$"

En effet, si *"X"* désigne la solution, alors il est clair que X vérifie l'égalité $3X - 2 = 1 - X$; le rationnel cherché est tout trouvé : c'est X !

Si l'on veut en savoir plus, il faut chercher *lequel*, parmi ***les** rationnels X*, vérifie $3X - 2 = 1 - X$; c'est-à-dire laquelle, parmi ***les** valeurs* possibles de *la variable X* parcourant $\mathbf{Q}$, vérifie $3X - 2 = 1 - X$.

Plus exactement encore, il faut chercher quel rationnel, s'il est *assigné* comme valeur à la variable X, rend vraie l'égalité $3X - 2 = 1 - X$.

Tout dépend de la façon dont on lit l'expression *"le rationnel X"* :

— soit *"**le** rationnel cherché, désigné par X"* ;
— soit *"celui, parmi **les** rationnels assignables à la variable X"*.

(3) Cet opérateur n'est utilisable que dans le cas où ladite assignation existe et est unique. Cf. KLEENE : "Logique Mathématique" (1971, A. Colin) p. 174-179.

Tout dépend aussi de la réponse que l'on attend de l'étudiant :

— soit *"$X = 3/4$"*, exprimant la valeur de X ; X est donc le rationnel cherché, et de plus il est demandé de calculer sa valeur.

— soit *"$3/4$"*, exprimant le rationnel qui, assigné à X, rend vraie l'égalité ;
et l'on peut aussi écrire :
$\forall X \in \mathbf{Q}\ [3X - 2 = X - 1 \Leftrightarrow X = 3/4]$

La pratique mathématique joue en général sur ces différentes interprétations en les considérant en quelque sorte comme synonymes. Mais cela contribue sans aucun doute à embrouiller les étudiants.

2°) ***Caractérisation d'un ensemble de nombres***

L'ambiguïté entre inconnue et variable n'est acceptable que s'il y a *une solution unique*. Il serait absolument incorrect de dire :

*"Chercher **le** rationnel X qui vérifie* $X^2 = 2$*"*

ou

*"Chercher **le** rationnel X qui vérifie* $X^2 - 5X + 6 > 0$*"*

Il ne serait pas non plus correct de lire la phrase suivante en considérant la lettre X comme désignant les solutions :

*"Chercher **les deux** rationnels X qui vérifient* $X^2 - 5X + 6 = 0$*"*

La lettre X ne peut être ici qu'une variable, car *"X"* ne peut simultanément désigner plusieurs nombres distincts.

Il faut donc interpréter l'expression *"les deux rationnels X"* de la manière suivante :

"les deux, parmi les rationnels assignables à la variable X"

"les deux, parmi les valeurs assignables à la variable X parcourant $\mathbf{Q}$*"*

"les deux valeurs de X dans $\mathbf{Q}$*"*

ou bien *"les deux rationnels, parmi les réels assignables à la variable X"*

"les deux rationnels, parmi les assignations possibles (absolument quelconques) à la variable X"

Pour faciliter la lecture, il vaudrait mieux écrire :

"Montrer qu'il y a deux valeurs de X, dans $\mathbf{Q}$*, qui vérifient* $X^2 - 5X + 6 = 0$*"*

"Montrer qu'il y a deux rationnels qui, assignés à X, rendent vraie l'égalité..."

L'expression *"les rationnels X tels que* $X^2 - 5X + 6 = 0$*"* apparaît donc comme dangereuse, dans la mesure où la lettre *"X"* semble y désigner simultanément $(+2)$ et $(+3)$ (ou pire, l'ensemble $\{+2\ ;\ +3\}$).

L'interprétation correcte serait : *"ceux, parmi les rationnels assignables à la variable X"*, ou bien : *"les rationnels, parmi les assignations possibles à la variable X"*.

Nous faisons l'hypothèse que l'interprétation correcte est beaucoup trop difficile pour être faite spontanément par les étudiants ; mais que, par contre, la signification des mots *"assignable, assigné, assignation"* peut être comprise par eux.

Il suffit donc de reformuler l'expression : *"les rationnels X tels que* $X^2 - 5X + 6 = 0$*"* de manière à en expliciter l'interprétation correcte :

"les rationnels qui, assignés à X, vérifient $X^2 - 5X + 6 = 0$*"*

ou bien

"les rationnels qui, assignés à X, rendent vraie l'égalité..."

3°) ***Ecriture des ensembles définis en compréhension***

Le même problème se pose pour l'interprétation des suites de symboles ci-dessous :

"$\{X \in \mathbf{Q} \mid X^2 - 5X + 6 = 0\}$" ; "$\{X \mid X \in \mathbf{Q} \text{ et } X^2 - 5X + 6 = 0\}$"

La lecture classique : *"l'ensemble des X, rationnels, tels que* $X^2 - 5X + 6 = 0$*"* est dangereuse. Nous proposons, comme précédemment, de la reformuler de façon à en expliciter l'interprétation correcte :

"l'ensemble des rationnels qui, assignés à X, vérifient $X^2 - 5X + 6 = 0$*"*

ou bien, de façon moins claire mais plus proche de l'ordre d'écriture des symboles :

"l'ensemble des assignations à X dans **Q** *telles que* $X^2 - 5X + 6 = 0$
(soit vraie)"

Ainsi, la suite de symboles "$\{X \mid \ldots$" **se lira** *"l'ensemble des assignations à X..."* **(et non pas :** *"l'ensemble des X..."***).**

III — Conséquences pour la notion d'inconnue

1°) ***Inconnue et variable***

En réalité, pour comprendre pleinement la notion d'"inconnue", il faut avoir acquis préalablement celle de "variable". Une inconnue, en effet, est une variable à laquelle est imposée une ou plusieurs conditions fixant le domaine des valeurs *cherchées*, et non pas le domaine des valeurs *possibles* (le "référentiel", c'est-à-dire le domaine dans lequel on cherche).

Cela seul permet de comprendre des pratiques telles que :
— vérifier si une solution trouvée est correcte ou non ;
— essayer des nombres pour savoir s'ils sont, ou non, solutions ;
— chercher un ensemble contenant toutes les solutions éventuelles ;
— chercher des valeurs approchées d'une solution ;
— etc.

La seule pratique compréhensible sans la notion de variable est la résolution par des "techniques" algébriques (type "faire passer d'un membre dans l'autre", etc.) qui correspondent à des *équivalences logiques*. Mais la notion même d'équivalence logique, qui leur est sous-jacente, ne peut elle-même pas être comprise sans la notion de variable parcourant un certain ensemble, puisqu'elle signifie "égalités vraies simultanément, *et fausses simultanément*", ce qui nécessite que la lettre puisse prendre n'importe quelle valeur dans le référentiel. Ces techniques ne peuvent alors être assimilées que comme des procédés plus ou moins *automatiques*; les "précautions" à prendre dans certains cas (élévation au carré des deux membres, etc.) prennent un caractère quelque peu mystérieux.

2°) ***Le passage de l'arithmétique à l'algèbre***

Si l'on enseigne d'abord l'emploi des lettres comme inconnues, c'est en général parce que l'on veut introduire l'algèbre à propos de problèmes dits "concrets" : on appelle *"x"* (ou *"n"*, ou *"l"*, ou etc.) un nombre que l'on cherche, la mesure d'une grandeur que l'on ne peut trouver facilement par une technique arithmétique. Or, ceci, loin de favoriser une transition "souple" entre l'arithmétique et l'algèbre, produit en réalité une inutile rupture; rupture que l'on peut au contraire éviter en employant des variables.

En effet, avec de tels problèmes (du premier degré) et en particulier ceux qui sont clairement résolubles avec une seule inconnue, il peut être très intéressant de faire des "essais" en étudiant les conséquences d'un choix pour la grandeur que l'on cherche (par exemple, si l'inconnue est la longueur d'un rectangle, poser : *"si le rectangle fait 5 mètres de long, alors..."*). De tels essais permettent de s'approprier les informations de l'énoncé par un traitement *arithmétique*. Ils permettent aussi d'*expliciter* les "lois" des phénomènes, qui sont sous-jacentes au problème (par exemple : le périmètre d'un rectangle est égal à deux fois sa longueur plus deux fois sa largeur), et dont la prise en compte est nécessaire au traitement algébrique ultérieur.

Sauf chance extraordinaire, aucun des essais ne correspondra à la solution ; c'est-à-dire qu'aucun ne "collera" avec l'ensemble des informations et contraintes données par l'énoncé du problème. Mais la raison pour laquelle ils ne "colleront" pas correspond très exactement à ce que le traitement algébrique donnera comme *équation*. D'ailleurs, en comparant les résultats de plusieurs essais successifs, il est souvent possible de déterminer des essais meilleurs, c'est-à-dire plus proches du nombre cherché ; on peut ainsi trouver la solution exacte (s'il s'agit d'un entier) ou un encadrement de celle-ci (s'il s'agit d'un réel ou d'un décimal).

Au moment du traitement algébrique, plutôt que de dire :

"Soit x la longueur du rectangle, exprimée en mètres ; on a donc..."

il est préférable de généraliser le traitement arithmétique par essais, en disant :

"Si le rectangle fait x mètres de long, alors..."

Le traitement du problème peut ainsi être mené selon la même progression qu'un traitement arithmétique (où l'on connaîtrait la valeur de x) :

"... alors, la largeur faisant par hypothèse 3 mètres,
le périmètre fait $(x + 3)$ mètres ;
la surface est de $(x \times 3)$ mètres carrés ;
alors, etc.

Outre l'avantage qu'il y a à maintenir en algèbre la structure de la résolution arithmétique, il apparaît beaucoup plus clairement dans cette présentation que l'inconnue est un *nombre* (et non pas la grandeur elle-même), et qu'il faut donc choisir une *unité de mesure*. On évite ainsi l'erreur-type : *"soit x la longueur du rectangle"*. On peut aussi vérifier, au fur et à mesure, la cohérence des unités utilisées ; puis on peut montrer progressivement pourquoi (et à quelles conditions) il est possible de ne pas écrire ces unités. D'ailleurs, avec cette présentation, il est possible de choisir au départ des unités *incohérentes*, à condition d'effectuer en cours de route les conversions nécessaires :

"si le rectangle fait x mètres de long, alors
il fait 100x centimètres de long
et la largeur étant par hypothèse de 25 centimètres,
le périmètre fait $2(100x + 25)$ centimètres
la surface est de $(100x \times 25)$ centimètres carrés,
alors, etc.

De plus, dans cette présentation, la découverte finale de la valeur de x qui est solution du problème permet manifestement de trouver la valeur de *toutes* les autres grandeurs en jeu dans le problème. La résolution du problème ne se limite pas à trouver l'inconnue explicite (ou les inconnues), mais aussi toutes les inconnues *implicites*. Ceci peut d'ailleurs faire comprendre pourquoi il est souvent possible de choisir une seule inconnue, dans des problèmes où l'on demande explicitement de trouver la valeur de *plusieurs* grandeurs (et que cette inconnue ne doit même pas forcément être l'une des grandeurs cherchées). Ainsi, ce qui apparaît souvent comme une "astuce" plus ou moins sophistiquée devient un *élément naturel de la méthode.*

Il faut noter enfin que les remarques qui précèdent peuvent s'étendre à l'emploi de plusieurs inconnues, et à des problèmes qui ne sont pas du premier degré. Les seules modifications sont :

1°) que les valeurs trouvées sont les résultats d'*implications* successives, et ne sont donc pas forcément solutions du problème ; il reste à les "tester" (et à éliminer les solutions n'ayant pas de signification concrète : longueurs négatives, etc.) ;

2°) que la méthode par "essais", si elle conduit à des solutions, ne permet pas d'être certain que ce sont les *seules* solutions possibles.

Note sur la Question des Nombres

Analyse des représentations mentales des étudiants de ''bas niveau'' à propos des distinctions

— entre mesures de grandeurs, et nombres ''purs''

— entre nombres entiers ou décimaux, et nombres ''réels''

par M. BRUSTON

SOMMAIRE

1°) Première analyse

a) Le rôle des supports dits "concrets" 75
b) Les effets classiques de l'absence de support concret 76
c) Les seuls nombres "purs" 77
d) Conclusion 78

2°) Deuxième analyse

a) Le passage des mesures de grandeurs aux nombres "purs" ... 78
b) Le passage des nombres décimaux aux nombres réels 79
c) Conclusion.. 80

3°) Conséquences

a) La définition des opérations 80
b) Les procédures de calcul 81

4°) Remarques 81

L'objectif de ce court article est d'analyser les difficultés que les étudiants de "bas niveau" ont à passer de l'emploi des *nombres entiers ou décimaux* à l'emploi des *nombres réels* dans le cadre du calcul algébrique élémentaire.

1°) Première analyse

a) *Le rôle des supports dits "concrets"*

Dans les problèmes de l'école primaire, où les calculs portent toujours sur des grandeurs et sont toujours exprimés par des nombres ayant une unité (nombre de *pièces*, nombre de *mètres*, nombre d'*heures*, etc.), ces nombres sont soit *entiers* (pièces) soit *décimaux* (mètres), ou parfois sexagésimaux (heures).

Dans le cas de grandeurs *discontinues*, d'unités indivisibles (pièces), le calcul "doit tomber juste" : s'il se présente une extraction de racine carrée, ce ne peut être que celle d'un carré parfait ; les dividendes sont obligatoirement des multiples de leurs diviseurs ; etc.

Il en reste chez les étudiants de "bas niveau" une réticence devant des nombres comme $\frac{1}{4}$ et $\sqrt{3}$, et l'impression de s'être trompés s'il s'agit d'un résultat.

Dans le cas de grandeurs *continues*, d'unités indéfiniment divisibles (mètres), le calcul "doit" cette fois mener à une solution décimale. L'écriture "$\frac{1}{4}$" est alors comprise comme une opération à effectuer dont le résultat est $0,25$; de même $\frac{2}{3}$ est automatiquement remplacé par $0,66$, $\sqrt{3}$ par $1,732$ et π par $3,14$; et ceci sans même que soit connue ou reconnue la différence entre le premier cas et les trois suivants ($\frac{1}{4}$ et $0,25$ sont exactement égaux, tandis que $\frac{2}{3}$ et $0,66$ ne sont qu'approximativement égaux, et de même pour $\sqrt{3}$ et $1,732$, pour π et $3,14$).

Il en reste l'habitude de "donner des valeurs" décimales à tous les nombres non entiers sans se préoccuper d'exactitude ou d'approximation.

Ainsi, le traitement du calcul est dépendant du type de grandeur dont il est question, au niveau des résultats attendus et de leur présentation, avec des effets même sur les résultats intermédiaires.

De plus, l'existence d'un support dit "concret", ou du moins familier (sauf s'il est purement scolaire), matérialisé par l'utilisation d'unités, rend au moins un peu familier le calcul lui-même.

Même quand l'algèbre succède à l'arithmétique, x, y et z restent dans les équations des nombres *de* pièces, *de* mètres ou *d'*heures, ou etc. ; nombres que l'on cherche certes, donc "inconnus", mais malgré tout pas entièrement inconnus puisque l'on sait au moins *de* quoi il s'agit.

Ainsi, le fait qu'il s'agisse de grandeurs imaginables intervient dans le calcul, comme support du raisonnement et guide du calcul. On peut même parler d'un substitut partiel au raisonnement abstrait. (On prétend ajouter des longueurs, ou multiplier des vitesses et des temps, alors qu'en réalité on n'opère que sur les nombres qui les expriment dans des unités cohérentes).

En résumé, l'existence d'un support familier, représentable dans l'imagination, joue un rôle en algèbre, et de deux manières : comme guide du calcul et comme restriction des résultats aux nombres entiers, ou décimaux, ou parfois sexagésimaux.

b) *Les effets classiques de l'absence de support "concret"*

Dans le maniement des lettres représentant des nombres ("inconnues" ou "variables"), l'absence de référence à des grandeurs familières, à des unités, joue comme une perte de tout support solide, sûr.

A propos des équations, cela se traduit

— dans le traitement du calcul : "où va-t-on ? qu'est-on en train de faire ? que s'agit-il de faire ?". Ainsi, on peut écrire une "solution" du genre :

$$x = \sqrt{\frac{2x - 1}{2}} \quad \text{à l'équation} \quad 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

— dans la présentation des résultats numériques : "que doit-on en faire ?" Ainsi, on peut vouloir tout ramener aux nombres décimaux bien sûr ($\frac{8}{3} = 8 : 3 = 2{,}6$), mais aussi aux entiers par des "transformations" du genre suivant :

$$\frac{8}{3} = 8.3 = 24$$

Les contraintes exercées par le support familier sur le mode de calcul et son résultat sont au mieux remplacées par une fidélité à toute épreuve à des règles de calcul inexpliquées *et* par une imitation intelligente des procédures utilisées par les enseignants, pour les problèmes trop différents de ceux qu'ils ont traités. On comprend que les étudiants soient, bonne volonté ou pas, rares à combiner ces deux "qualités" quelque peu contradictoires, et que beaucoup par contre soient en général perdus devant la simple question de savoir ce que l'on attend d'eux dans tout problème quelque peu nouveau.

A propos des relations, et de leurs cas particuliers **les fonctions**, cela se traduit

— d'abord (et pour mémoire) par des automatismes dus aux systèmes d'équations ; par la volonté, par exemple, de calculer x et y à partir de la seule condition "$2y - 3x + 5 = 0$".

— ensuite, par la difficulté à passer de "*t (secondes)* $\longmapsto$ *d (mètres parcourus)*" à "*x* $\longmapsto$ *3x*", même après un exemple $d = 3t$ où *3* représente une vitesse de *3m/s* (et justement à cause de ces "*m/s*"). La représentation graphique, si elle peut jouer le rôle de support de représentation, est en fait un obstacle à la compréhension si elle vient trop tôt (par exemple elle conduit à tracer une droite avec *une* valeur de *x* et la valeur correspondante de *y*, reportées comme *deux* points, sur les axes).

— enfin, les variables se trouvent réduites à leurs valeurs entières ou, à la rigueur, décimales simples. Le cas $x = \sqrt{3}$, s'il est proposé par l'enseignant, est automatiquement remplacé par 1,732. Là encore, la représentation graphique, forcément approximative, est un obstacle à la compréhension si elle est utilisée trop tôt.

c) ***Les seuls nombres "purs"***

Les seuls nombres "abstraits" et pourtant familiers semblent être les entiers (à l'exception peut-être de π et de quelques fractions). Encore sont-ils utilisés essentiellement dans des formules portant sur des grandeurs géométriques ou, avec le *même* rôle, dans des formules algébriques paraissant apparentées :

— *Comme coefficient*, par exemple dans "$D = 2R$" ou "$L = 2\pi R$" ou "$V = \frac{4}{3}\pi R^3$"; et par suite dans "$y = 2x$", "$2x = -\frac{4}{3}y = 0$",...

Le fait que ces "coefficients" soient en géométrie des *rapports* de grandeurs de même espèce n'est ni connu ni reconnu.

Par suite, leur transfert à l'algèbre se fait par mimétisme et non par un processus rendant ces rapports indépendants de leur origine et utilisables comme nombres "abstraits". Ainsi n'est pas assimilée la possibilité de donner aux lettres *x, y* des valeurs telles que π ou $\frac{4}{3}$.

De plus, l'utilisation concrète de la géométrie, avec les approximations qu'elle nécessite, renforce toujours la pseudo-évidence de la "valeur" décimale des nombres.

— *Comme exposants*, par exemple dans "$S = L^2$" ou "$V = \frac{4}{3}\pi R^3$" et par suite en algèbre "$y = x^2$" ou, en combinant avec des coefficients, dans "$4x^2 - 3x + 1 = 0$".

Mais ces exposants sont compris comme "symboles d'élévation à une puissance" (alors qu'en fait il n'y a pas de symbole pour la puissance, celle-ci étant symbolisée par la *position* exponentielle du nombre). Bien qu'en pratique le rapport entre élévation à une puissance (entière) et multiplication soit souvent "oublié" (ce qui rend difficile l'assimilation des règles), l'idée de puissance est très loin de l'idée d'opération entre deux nombres, et l'exposant n'est donc pas compris comme un nombre.

L'introduction d'exposants négatifs, puis fractionnaires, n'est comprise (difficilement) que comme complexification des notations symboliques, et ne permet nullement une meilleure compréhension du nombre négatif ou fractionnaire ("$x^{4/3}$" c'est "$\sqrt[3]{x^4}$"; pour aller plus loin, il faudrait justement comprendre $\frac{4}{3}$ comme nombre et "$x^{4/3}$" comme opération entre x et $\frac{4}{3}$).

L'introduction des exponentielles (et logarithmes) en est rendue évidemment impossible (sauf appel au concept de fonction définie, continue et dérivable, beaucoup plus complexe, et dont la compréhension nécessite l'acquisition complète de la notion de nombre réel...).

De ce fait, ces nombres ne sont pas vraiment assimilés comme abstractions, manipulables dans d'autres contextes que leur origine comptable ou géométrique et leurs utilisations concrètes. Sauf pour les entiers, l'approximation décimale va de soi.

d) *Conclusion*

On peut constater que les étudiants de "bas niveau" rencontrent deux difficultés en même temps :

— passer des nombres comme *mesures* des grandeurs (dans une unité), aux nombres *"abstraits"*, "purs" ;
— passer des nombres *entiers ou décimaux* aux nombres *réels*.

2°) Deuxième analyse

Le fait que ces deux difficultés se superposent ne signifie pas qu'il s'agisse de deux facettes du même problème. En réalité, en se superposant, elles se masquent l'une l'autre; et pour les traiter, nous faisons l'hypothèse qu'il y a avantage à les distinguer.

a) ***Le passage des mesures de grandeurs aux nombres "purs"***

— Le problème des nombres "purs" n'est qu'un prolongement du problème de la *construction du concept de nombre* comme abstraction à partir du concret.

Il s'agit ici de faire accéder au processus abstrait sous-jacent *même* au traitement des calculs sur les grandeurs (les unités sont "pensées", mais non écrites, en cours de calcul: pourquoi et comment cela fonctionne-t-il ?).

Pour la résolution de ce problème, la seule distinction opératoire est celle entre entiers (grandeurs discontinues, décompte d'objets indivisibles) et nombres réels quelconques (grandeurs continues, rapports de grandeurs de même espèce). Le premier cas ne suppose comme abstraction que l'idée d'"unité" indépendante de la nature de l'objet ; la deuxième cas suppose l'abstraction géométrique : le rapport des côtés d'un carré est *1* exactement, même si la mesure réelle comporte une incertitude.

On pourrait même imaginer de ne pas parler des grandeurs discontinues et d'introduire le concept de nombre uniquement à partir des rapports de grandeurs continues, les entiers n'en étant que des cas particuliers. Ce ne serait pourtant pas très pédagogique car les entiers jouent un rôle à part dans la numérotation (ordinaux) et le comptage (cardinaux), et de plus ils jouent un rôle essentiel dans le deuxième problème : la classification des nombres, la notation symbolique des nombres réels non transcendants, et l'écriture décimale infinie de tous les réels.

b) ***Le passage des nombres décimaux aux nombres réels***

— *Le problème des nombres entiers, décimaux ou réels* n'est qu'une partie du problème de la *classification des nombres réels* en sous-ensembles "emboîtés" depuis **N** jusqu'à $\mathbf{R}^+$, en passant par $\mathbf{D}^+$ et $\mathbf{Q}^+$. (*)

Il s'agit *premièrement* de situer l'écriture décimale des entiers comme une écriture symbolique particulière caractérisée par :

— une *base* qui est de plus *régulière* : dix (par comparaison, l'écriture romaine est à base irrégulière : cinq et deux ; d'où les symboles particuliers pour cinq : V ; dix : X ; cinquante : L ; etc. ; mais on peut facilement imaginer un principe qui rendrait sa base régulière à dix : CLXVII = CXXXXXXIIIIIII)

— une notation à la fois

- additive *et multiplicative* (par comparaison, l'écriture romaine originelle est seulement additive : CCCLXXI = C + C + C + L + X + X + I ; mais on peut facilement imaginer un principe qui la rendrait multiplicative : CCCXXI = III × C + II × X + I = IIICIIXI)
- *positionnelle* : 321 = 3 cent. + 7 diz. + 1 ; d'où l'importance d'un symbole pour l'"absence" (d'unité, de dizaine, de centaine, etc.) conduisant à l'invention du zéro comme nombre (abstraction issue des progrès de la numération, et non pas directement d'une pratique comme les nombres sont issus du comptage) (**).

(*) La résolution de ce problème nécessite, en préalable, la définition des opérations élémentaires (addition et multiplication des réels, division des entiers) ; en effet, c'est nécessaire pour définir l'écriture décimale des entiers et des décimaux, l'écriture fractionnaire des rationnels, l'écriture décimale infinie des réels.

(**) Par comparaison, on peut étudier le langage *parlé* correspondant, c'est-à-dire la manière dont sont dits (ou lus) *en français* les entiers ainsi écrits :
— le principe positionnel est supprimé : au lieu de dire la suite des chiffres, on intercale le plus souvent les mots "mille", "cent" et "dix" (qui est intégré dans les mots "on*ze*", "dou*ze*"... "sei*ze*" et séparé dans "dix-sept", etc.). C'est pourquoi le zéro n'est pas dit.
— il reste des traces de numérations à base irrégulière : six et dix ("soixante-dix", au lieu de "septante" en Suisse), à base vingt ("vingt", "quatre-vingt", "quatre-vingt-dix"...) et à base mille ("mille", "million", "milliard" ; ce qui dans l'écriture elle-même se retrouve par l'habitude de regrouper les chiffres par trois pour *faciliter la lecture*).

Il s'agit *deuxièmement* de situer l'écriture décimale avec virgule comme une écriture symbolique particulière (reposant sur la même base, et les mêmes principes de notation, par adjonction d'un symbole — la virgule — par rapport à laquelle les positions sont repérées), et dont le champ est limité à une certaine catégorie de nombres réels. La notion d'"écriture décimale infinie" peut permettre de donner tout son sens à l'approximation décimale et à l'encadrement décimal des nombres réels.

Il s'agit *troisièmement* de situer l'écriture fractionnaire comme une écriture symbolique particulière, et dont le champ est lui aussi limité à une certaine catégorie de nombres réels (bien que cette catégorie soit plus vaste que la précédente): les rapports d'entiers (le nombre par lequel il faut multiplier un entier pour trouver un autre entier). Là encore la notion d'"écriture décimale infinie" peut être utile car elle permet de situer les irrationnels, par rapport aux rationnels (en s'appuyant sur la périodicité du développement décimal dans le cas des rationnels et la non-périodicité dans le cas des irrationnels). Ainsi, peut être introduite la nécessité d'une écriture symbolique appropriée aux irrationnels, à l'aide de radicaux quand c'est possible, et d'une désignation littérale quand ça ne l'est pas.

c) ***Conclusions***

En résumé, le premier problème est celui de *l'existence de l'abstraction* et de la symbolique mathématiques, et cela dès les nombres entiers (pourtant dits "naturels"). Le deuxième problème est celui de la nécessité de *symbolismes adaptés* à chaque catégorie de nombres.

3°) Conséquences

L'importance de cette distinction (qui sur le plan pédagogique n'implique pas obligatoirement une successivité, mais une articulation permanente) se retrouve dans le traitement de la question des opérations sur les nombres.

a) ***La définition des opérations***

Les nombres (entiers ou réels) pouvant être représentés par des lettres, la résolution du *premier* problème peut conduire à la *définition* de chaque opération élémentaire (addition, soustraction, multiplication, division), sur les entiers *puis* sur les réels positifs (et il faut alors montrer que les deux définitions sont cohérentes dans le cas des entiers).

L'emploi de symboles pour désigner ces opérations peut être justifié, ainsi que la nécessité du symbole "parenthèses".

A partir de là, les propriétés de ces opérations peuvent être étudiées, indépendamment des cas particuliers par lesquels on prétend souvent les "vérifier". Et c'est heureux, car ces opérations et leurs propriétés sont nécessaires pour introduire le *deuxième problème*, celui des symbolismes adaptés à chaque catégorie de nombres (puisque ceux-ci utilisent des notations additives, multiplicatives, et fractionnaires — on pourrait dire "divisives" ; et ce sont ces symbolismes que l'on utilise pour effectuer des "vérifications").

b) ***Les procédures de calcul***

L'introduction des symbolismes adaptés à chaque catégorie de nombres, à l'aide de ces opérations, peut dans un deuxième temps conduire aux *procédures* de calcul correspondant à *chacune des catégories, dans son symbolisme particulier* :

— procédures pour "poser" les opérations sur les *nombres entiers* en notation décimale, puis sur les *nombres décimaux*; intérêt de connaître au moins des "tables" d'addition et de multiplication sur les chiffres (et méthodes pour les établir ou les vérifier) ;

— procédures sur les fractions (donc sur les *nombres rationnels*) puis sur les rapports en général (donc sur les *nombres réels*).

4°) Remarques

Il paraît important de traiter à part deux types de problèmes :

— L'introduction des *nombres négatifs*. Il peut paraître commode de les "justifier" par des cas "concrets" (variations de température, altitude, etc.), mais tout support simple de ce genre se révèle à l'usage largement mystificateur, car ces grandeurs "négatives" ne se multiplient pas entre elles. Il semble plus intéressant de les présenter en deux temps, correspondant aux deux périodes historiques :

- comme commodité de calcul, dans des problèmes d'algèbre portant en dernier ressort sur des nombres positifs, d'où découlent immédiatement les règles des signes.
- comme nombres abstraits introduits à partir de cette pratique mathématique elle-même (comme le zéro s'introduit à partir de la numération positionnelle), par des considérations théoriques cohérentes aux règles précédemment édictées.

— Les deux opérations d'extraction de *racine* et d'élévation à une *puissance* qui sont définies séparément, dans un premier temps, à partir de la multiplication des nombres réels et doivent dans un deuxième temps être considérées comme des opérations entre un nombre réel et un nombre entier.

L'articulation explicite de ces deux points de vue peut seule permettre par la suite l'extension de l'ensemble des exposants à $\mathbf{Q}^+$ d'une part (ce qui réunit les deux opérations en une seule), et à $\mathbf{Z}$ d'autre part ; puis à $\mathbf{Q}$ par combinaison et enfin $\mathbf{R}$ par passage à la limite.

PUBLICATION A.P.M.E.P.

MATHEMATIQUES POUR FORMATION D'ADULTES

par Philippe LOOSFELT et Daniel POISSON, C.U.E.E.P.
Centre Université Economie d'Education Permanente.
Université des Sciences et Techniques de Lille.

192 pages, format Bulletin A.P.M.E.P. Prix: 15F (avec port 23,50F)

Depuis 7 ans, le C.U.E.E.P. assure exclusivement des formations d'adultes, dans la Région Nord-Pas-de-Calais. Les formations se déroulent :

- soit en Entreprise, sur le temps de travail,
- soit en "Zone Résidentielle" : 2 zones de formation collective.

En Mathématiques, l'essentiel de l'effort a été porté sur le niveau du C.A.P. dont le C.U.E.E.P. prépare les Unités Capitalisables de tronc commun.

Deux responsables-Matière "Mathématiques" ont capitalisé les expériences de formation. La multitude d'expérimentations, d'essais, de tâtonnements que représente l'acquis de plusieurs centaines de cycles de formation d'adultes, a permis d'orienter progressivement la politique pédagogique du C.U.E.E.P. dans une direction tout à fait imprévue et imprévisible au départ.

Le premier pas de notre évolution nous a orientés vers l'exploration des thèmes de la vie réelle : impôts, salaires, fiches de gaz, etc...

Le bilan de cette tentative s'est soldé par un demi-échec ; la réalité ne provoque pas de motivations profondes au travail et elle est trop compliquée à mathématiser.

La deuxième étape de notre évolution n'a pas été choisie : il a suffi de faire le bilan de ce qui intéresse réellement les formés pour constater que le "pseudo-réel" était bien plus riche, à tout point de vue. Le "faux-réel" où la réalité est si décantée que le mécanisme sous-jacent en devient accessible, la situation tellement caricaturée qu'elle peut être totalement maîtrisée par le formé, voilà ce qui incite les formés à verser toute leur énergie dans le travail intellectuel.

Dans cet ouvrage, écrit d'abord pour aider les formateurs du C.U.E.E.P. dans leur tâche, nous essayons de montrer comment certains thèmes peuvent être utilisés, comment telle fiche s'est révélée passionnante, quels sont les échecs qui nous ont poussés à corriger certains points, etc...

Nous ne proposons pas de théories, nous disons seulement :

"Voilà un thème, voilà la structure sous-jacente à ce thème (réseau de relations, "architecturation"), voilà comment ce thème a été essayé, voilà les corrections apportées. Nous vous garantissons qu'il y a là de quoi intéresser les formés".

Pour vous procurer cette brochure, adressez-vous à votre Régionale ou Départementale.

Utilisation des schémas d'opérateurs en Algèbre élémentaire

par
Claude ROUXEL

SOMMAIRE

Introduction 85

Description des opérateurs 86

Utilisation des opérateurs 89

I) Concept d'équation 89

II) Nouveaux ensembles de nombres - Extension de règles 94

III) Ecriture de formules ; distributivité 97

IV) Etude de fonctions 100

V) Algébrisation de problèmes 106

Introduction

L'objet de cet article est de présenter les principaux schémas que nous utilisons, leurs conditions d'emploi, leur intérêt spécifique comparativement à l'écriture algébrique, et leurs limites.

Le point de départ de notre réflexion est le constat des difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'acquisition de l'écriture symbolique.

Le principal intérêt à utiliser une telle écriture est de traduire les concepts en un minimum de symboles afin de mécaniser leur traitement. Cette mécanisation, si elle nous paraît souhaitable, ne doit cependant pas se traduire par une compréhension superficielle des processus mathématiques sous-jacents et transformer ces processus en un simple jeu d'écriture (1).

L'emploi des opérateurs nous a paru intéressant à plusieurs titres :

- **Séparation des difficultés conceptuelles et des difficultés de transcription ;**
- **Utilisation d'une écriture reflétant les structures mathématiques étudiées ; par exemple, des objets de nature différente sont représentés par des symboles différents ; l'ordre de traitement est conforme à l'ordre de l'écriture ;**
- **Emploi d'un langage déjà formalisé, intermédiaire entre l'arithmétique et l'algèbre.**

Le choix des thèmes abordés dans cet article n'est pas exhaustif mais répond

— d'une part à la volonté d'articuler les thèmes entre eux (ensembles de nombres, équations, fonctions), de façon à convaincre le formateur que l'emploi des opérateurs ne s'accompagne pas nécessairement d'une perte de temps ;

— d'autre part au souci de situer à chaque fois l'intérêt spécifique d'une écriture par opérateurs comparativement à l'écriture algébrique, le choix de ces supports correspondant à des stades d'évolution différents.

(1) *Cf. "Hypothèses et propositions pédagogiques" par Michel BRUSTON, dans cette même brochure.*

Description des opérateurs

I - Opérateurs élémentaires

1) ***Opérateurs du 1er degré***

Addition d'une constante et son réciproque : $\square \xrightarrow{+A} \square$ $\quad$ $\square \xrightarrow{-A} \square$

Multiplication et division par une constante : $\square \xrightarrow{\times A} \square$ $\quad$ $\square \xrightarrow{:A} \square$

Bien qu'ils soient présentables comme des cas particuliers de multiplication par *(+1)* et par *(−1)*, les opérateurs suivants permettent une bonne représentation de certaines situations :

Opérateur identique : $\square \xrightarrow{I} \square$ *qui est son propre réciproque*

Opérateur opposé
(ou changement de signe) : $\square \xrightarrow{+/-} \square$ *qui est son propre réciproque*

Opérateur valeur absolue : $\underset{\mathbf{R}}{\square} \xrightarrow{|\ \ |} \underset{\mathbf{R}^+}{\square}$ *et ses réciproques* $\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{I} \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \\ \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{+/-} \underset{\mathbf{R}^-}{\square} \end{array} \right.$

2) ***Opérateurs entrant dans la composition des fonctions polynomes et fractions rationnelles***

Opérateur carré : $\underset{\mathbf{R}}{\square} \xrightarrow{\overset{2}{*}} \underset{\mathbf{R}^+}{\square}$ *et ses réciproques* $\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \\ \underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{-\sqrt{\ }} \underset{\mathbf{R}^-}{\square} \end{array} \right.$

Opérateur puissance et son réciproque : $\underset{\mathbf{R}}{\square} \xrightarrow{\overset{n}{*}} \underset{\mathbf{R}^+}{\square}$ $\quad$ $\underset{\mathbf{R}^+}{\square} \xrightarrow{\overset{1/n}{*}} \underset{\mathbf{R}^+}{\square}$

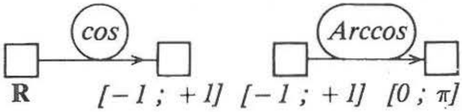
Opérateur inverse : $\square \xrightarrow{\frac{1}{\ }} \square$ *qui est son propre réciproque*

3) *Autres opérateurs fonctionnels*

Parmi ceux que nous utilisons le plus souvent, citons :

Logarithmes et exponentielles :

Les opérateurs trigonométriques et leur réciproques :



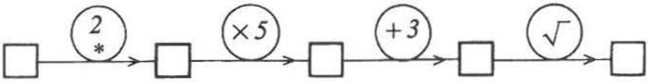
II - Composition des opérateurs

Selon le mode de composition des opérateurs élémentaires, les problèmes d'algèbre et de trigonométrie rencontrés présentent deux grands types de structures :

1) *Groupement des opérateurs en CHAINE*

C'est le cas des équations sous forme canonique, des fonctions composées, des changements de variable.

Exemple :
$x \longmapsto \sqrt{5x^2+3}$



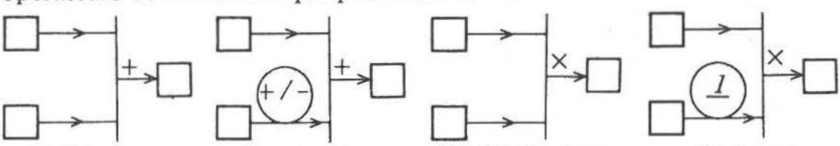
2) *Opérateurs comportant des ENTRÉES MULTIPLES*

On rencontre cette situation lors de la résolution des systèmes d'équations, ou de l'étude des polynomes de degré supérieur à un, par exemple.

Exemple :

additionneur *soustracteur*

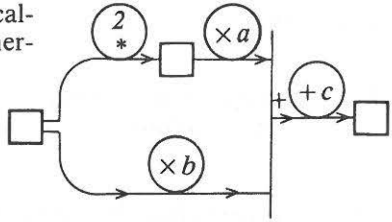
Ce dernier cas d'opérateur, à entrées non symétriques, montre l'intérêt de limiter progressivement l'usage de ce type d'opérateurs. Les quatre opérateurs de l'arithmétique peuvent s'écrire :



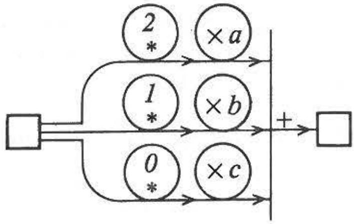
Additionneur *Soustracteur* *Multiplicateur* *Diviseur*

Le choix d'un schéma est généralement dicté par des considérations pédagogiques ; aussi, un polynome du second degré *"$ax^2 + bx + c$"* peut être représenté par différents schémas selon les difficultés à traiter :

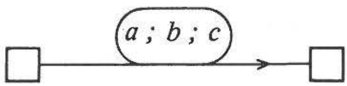
Ce schéma convient si l'objectif est le calcul numérique d'expression ou la recherche d'une canonisation :



On utilisera plutôt ce schéma pour insister sur la décomposition en monomes de degrés différents :



Ce schéma donne la priorité à la structuration en espace vectoriel des polynomes du second degré :



Remarque : Les schémas d'opérateurs sont applicables à des ensembles non numériques : vecteurs, fonctions (avec notamment l'opérateur de dérivation), etc.

Cette brève description des types d'opérateurs les plus usuels est liée à l'emploi que nous en faisons dans les différents niveaux d'enseignement.

Leur utilisation nous paraît intéressante à un double point de vue :

En premier lieu, les difficultés d'apprentissage de nouveaux concepts sont dissociées des difficultés d'écriture et de lecture.

Ceci nous paraît d'autant plus important que le niveau d'enseignement est bas : le support écrit utilisé pour démontrer ou énoncer une propriété doit être adapté aux capacités de l'étudiant ; l'écriture algébrique, si commode pour les calculs et si familière à l'enseignant, fourmille de pièges pour le débutant (2) :

— ordre de calcul et de lecture souvent inversés ;

— priorités à connaître entre opérations ;

— absence de symbole (multiplication par exemple) ;

(2) *Cf. "Hypothèses et propositions pédagogiques", paragraphes 13 à 17.*

— symbole d'égalité désignant tantôt une identité et tantôt une équation ;
— conventions implicites dans le choix des lettres, par exemple : *"a"* pour un coefficient, *"m"* pour un paramètre, *"x"* pour une variable, *"n"* pour un entier, etc.

La difficulté de raisonner sans ce support familier apparaît à l'enseignant qui commence à utiliser les opérateurs ; le formé qui n'est habitué à aucune écriture mathématique sera évidemment tenté de recourir à un certain nombre d'automatismes dès qu'il utilise un langage conventionnel ; il nous paraît essentiel que ces automatismes, malgré leur utilité, ne soient pas dissociés des raisonnements qui les légitiment.

En second lieu, l'emploi des opérateurs amène l'enseignant à reconsidérer la présentation de son enseignement.

Alors que les programmes d'algèbre sont plutôt pensés à partir de la notion de degré par exemple, l'utilisation des opérateurs conduit plutôt à une présentation pensée en fonction de la structure des questions à étudier : problèmes traitables à l'aide d'un opérateur, puis à l'aide d'une chaîne d'opérateurs élémentaires, et enfin questions faisant intervenir plusieurs chaînes d'opérateurs.

Utilisation des opérateurs

Nous avons choisi ces quelques exemples d'utilisation des opérateurs afin de comparer, lors de l'apprentissage d'un concept, les supports que constituent l'écriture algébrique traditionnelle et l'écriture par schéma d'opérateurs, et de mieux cerner leurs intérêts respectifs.

I - Concept d'équation

1) Considérons une équation du 1[er] degré réduite, s'écrivant

$$-3x + 15 = 0$$

en écriture algébrique

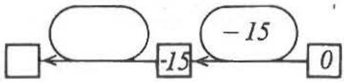
$$\square \xrightarrow{\times(-3)} \square \xrightarrow{+15} \boxed{0}$$

en schéma d'opérateurs.

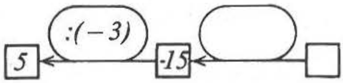
Trois différences importantes apparaissent ; dans le schéma d'opérateurs, on observe :
— l'absence de lettre pour désigner l'inconnue : nous en verrons l'importance sur d'autres exemples ;
— l'absence du signe de l'égalité donc la *disparition de la notion de membres* ;
— la présence explicite du symbole de multiplication.

La compréhension du mécanisme de résolution suppose la connaissance des transformations d'équations : ici soustraction, puis division par un nombre. Examinons comment se présentent les transformations dans l'exemple :

$-3x = -15 \longrightarrow$



$x = \dfrac{-15}{-3} = 5 \longrightarrow$

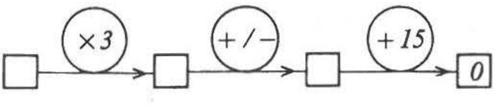


Même si l'enseignant insiste sur la justification des étapes, nous faisons l'hypothèse que l'étudiant retient essentiellement la trace écrite visualisée sur le tableau.

Le schéma d'opérateurs permet d'éviter les erreurs-types, provoquées par la visualisation d'un modèle dont les justifications sont souvent oubliées. L'étudiant aura, par exemple, retenu qu'un nombre qui "change de membre" change de signe, et aura oublié que ce modèle ne fonctionne pas pour la multiplication...

A ce propos, la multiplication par un négatif est souvent source d'erreurs (équations et surtout inéquations) : "$-3x$" apparaît davantage comme *l'opposé de* "$3x$" que comme le produit de "x" par "(-3)". Autrement dit, il y a en fait deux étapes dans la multiplication par "-3" : la multiplication par "3" puis le changement de signe.

Si cette difficulté apparaît, on peut utiliser le schéma :



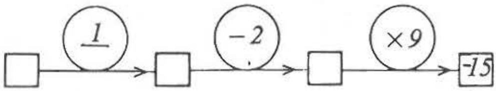
Il est surtout important que le schéma soit le plus proche possible de la façon dont l'élève lit "$-3x+15$" quand il veut calculer cette expression pour une valeur de x.

Enfin, signalons un autre intérêt du schéma lorsqu'il se présente sous la forme de chaîne :

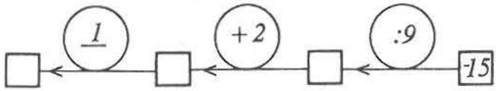
Le procédé de résolution est intégré au schéma ; l'ordre des étapes, les opérations à effectuer, sont suggérées par le schéma lui-même.

Exemple : Pour résoudre l'équation $9(\frac{1}{x} - 2) = -15$, l'élève s'inspirant de modèles aura souvent tendance à développer et réduire au même dénominateur, alourdissant ainsi la résolution.

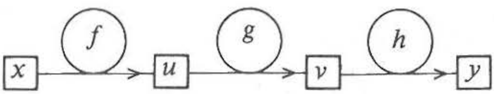
L'écriture de cette équation sous forme de chaîne



fournit les étapes de sa résolution :



On a ainsi opéré, sans soulever la question, un changement d'inconnue $(\frac{1}{x} = u)$. Notons au passage que toute chaîne d'opérateurs peut être considérée comme une succession de changements de variable :



Les variables et inconnues n'étant pas nécessairement désignées par des lettres, on peut travailler sur des changements de variable sans alourdir les notations, à un moment de l'enseignement où cette technique n'est pas encore maîtrisée en tant que telle.

2) Nous n'avons examiné jusqu'à maintenant que des chaînes d'opérateurs, c'est-à-dire des expressions algébriques ne comportant qu'une fois l'inconnue (formes canoniques).

Dans les autres cas, l'écriture algébrique reprend alors tout son intérêt ; cela n'a rien d'étonnant puisque certaines règles d'écriture (comme la priorité de la multiplication sur l'addition, et l'absence de symbole pour la multiplication) ont probablement été adoptées pour faciliter les calculs.

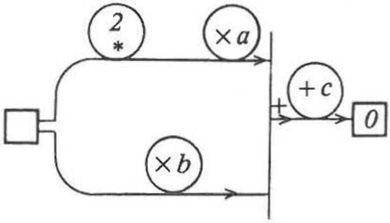
Mais dès que l'on travaille sur un concept nouveau, l'écriture par schéma d'opérateurs présente un intérêt, dans la mesure où elle respecte les difficultés conceptuelles.

Exemple : la résolution de l'équation du second degré "$ax^2 + bx + c = 0$" amène souvent l'étudiant qui la découvre à procéder comme pour le premier degré, c'est-à-dire "*isoler x dans un membre*" puis "*tirer x*"

$$ax^2 + bx = -c \;\ldots\; x(ax + b) = -c \;\ldots\; x = \frac{-c}{ax+b}$$

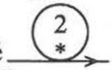
Ceci dans le meilleur des cas ; une autre erreur fréquente consiste à grouper coûte que coûte les termes en "x".

Le schéma d'opérateur correspondant



montre bien la nature du problème : les entrées d'un additionneur ne peuvent être déterminées à l'aide de la seule sortie.

La difficulté de passer du 1er degré au 2d degré *n'est donc pas seulement une question de degré :*

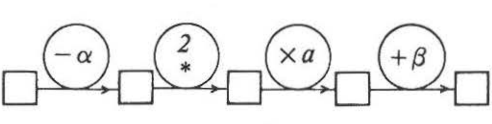
L'opérateur carré  fait bien apparaître deux ou zéro solutions, situation nouvelle par rapport au 1er degré, mais l'important est que **la présentation en polynome développé** "$ax^2 + bx + c$" **n'est plus une forme canonique comme l'était** "$ax + b$".

Notons au passage la priorité accordée traditionnellement aux formes développées comme point de départ. Suivant la nature des problèmes à étudier, on peut partir d'une des trois formes :

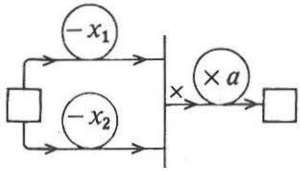
$ax^2 + bx + c$	$a(x-\alpha)^2 + \beta$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
forme développée	*forme canonique*	*forme factorisée*

La simplicité apparente de la forme développée n'est due qu'aux conventions d'écriture : 5 opérations pour la forme développée, contre 4 aux deux autres.

Les schémas d'opérateurs reflètent bien ces différences de structure :



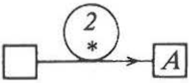
forme canonique



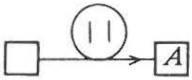
forme factorisée

3) Sans en développer l'analyse, citons quelques cas d'équations où les opérateurs apportent une clarification, ou permettent d'aborder autrement les difficultés classiques :

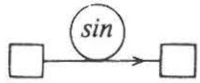
— *équations où l'opérateur réciproque n'est pas unique :*



ou encore

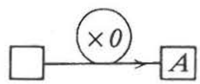


(du point de vue conceptuel il s'agit du même problème ; un travail préalable dans le sens direct facilite l'étude des opérateurs réciproques et de leur existentiel) et encore :



— *équations conduisant à "impossibilité" ou "indétermination"*, notamment lorsque, par l'algèbre classique, la lettre désignant l'inconnue "disparaît" en cours de calcul (1er degré). Par exemple :

Etude du schéma :



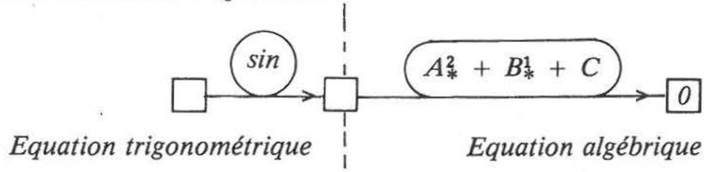
Le faux raisonnement *il n'y a plus d'"x", donc* $S = \phi$ (ou encore $x = \phi$) ne peut plus être tenu.

Ce faux raisonnement (qui aboutit souvent à un résultat juste !) fait ressortir la confusion entre les valeurs attribuables à une lettre et la lettre elle-même. On retrouve cette confusion lors de l'écriture de l'opposé d'une expression (où "– A" est assimilé à un nombre négatif). De ce point de vue, le remplacement d'une lettre par une case vide fournit une écriture plus proche du concept de variable ou d'inconnue, même si on y perd — provisoirement — en commodité.

— *équations nécessitant un changement de variable*

L'équation $A \sin^2(x) + B \sin(x) + C = 0$

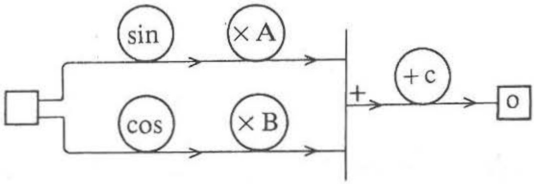
s'écrit en schéma d'opérateurs



Ceci fait apparaître deux problèmes distincts (un problème algébrique et un problème trigonométrique) dont la séparation correspond au changement de variable $\sin(x) = X$.

Même lorsque le changement de variable n'est pas aussi évident, le schéma d'opérateurs peut justifier une telle recherche.

Ainsi l'équation *"Asin(x) + Bcos(x) = C"* fait apparaître un additionneur :



La recherche d'une solution s'oriente vers la transformation de *"sinus"* et *"cosinus"* en une même variable ; les deux principales transformations utilisées ont alors pour effet :

— soit de "canoniser" l'équation avec séparation en questions d'algèbre et de trigo $[A\sin(x) + B\cos(x) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x + \varphi)]$;

— soit de la transformer en un problème d'algèbre connu $[tg\,(\frac{x}{2}) = t]$.

L'élève apprend donc à reconnaître les structures de problèmes nécessitant de telles transformations (ici, présence d'un additionneur) plutôt qu'à retenir le changement de variable lui-même.

II - Présentation de nouveaux ensembles de nombres Extension de règles

Le problème pédagogique abordé maintenant est celui de l'enseignement de "règles" de calcul en évitant :

— d'une part le détour de la démarche axiomatique, surtout satisfaisante du point de vue de la rigueur des mathématiques ;

— d'autre part, le "parachutage" de règles et définitions dont l'aspect arbitraire risque de gêner ultérieurement l'élève.

Nous avons choisi deux exemples : le calcul dans **Z** et les puissances à exposant négatif.

1) Les quatre opérations dans **Z**

Deux types de difficultés surgissent lorsqu'on procède à des extensions d'ensemble de nombres (**N, Z, Q, R, C,...**) :

— Comprendre ce que sont les nouveaux nombres sur lesquels porte l'extension (cas typique : extension de **Q** à **R**) ;

— Comprendre comment s'étendent les règles d'opérations sur les nouveaux ensembles. Exemples : extension de **N** à **Z** avec les fameuses Règles des Signes ; ou encore extension de **N** à **Q**$^+$ avec les règles sur les fractions.

Nous avons cherché à utiliser les opérateurs pour traiter cette seconde difficulté dans le cas de l'extension de **N** à **Z**.

a) Construction de **Z**

Les supports familiers pour présenter **Z** (températures, altitudes, comptes bancaires, etc.) s'appuient sur la nécessité de *compter à rebours,* et de se donner la possibilité de *remonter au-delà de zéro.*

Le public auquel nous enseignons ne connaît pas de difficultés pour comprendre ce point de vue.

b) Addition et soustraction dans **Z**

L'étude des opérateurs $\xrightarrow{+A}$ et $\xrightarrow{-A}$ dans **N** conduit à une propriété simple, très utilisée, connue des étudiants, mais qu'il est important d'expliciter :

Ces opérateurs transforment une suite arithmétique de nombres en une suite arithmétique de même raison.

L'extension envisagée de **N** *à* **Z** *doit conserver cette propriété.*

Concrètement :

$\square \xrightarrow{+17} \square$

dans **N**	2	19
	1	18
	0	17
Extension à **Z**	−1	16
	−2	15
	...	...
	−17	0
	−18	−1

$\square \xrightarrow{-15} \square$

dans **N**	17	2
	16	1
	15	0
dans **Z**	14	−1
	13	−2
	...	...
	0	−15
	−1	−16

Remarque : ce point acquis, il est important de travailler sur l'équivalence entre $\xrightarrow{+(-A)}$ et $\xrightarrow{-A}$ avec $A \in \mathbf{Z}$, et sur la présentation en additionneur, avec entrées dans **Z**, qui schématise bien la commutativité de l'addition dans **Z**.

c) Multiplication et division dans **Z**

Jusqu'ici, cette présentation est très proche d'une présentation avec les températures, par exemple. Un premier intérêt du schéma d'opérateur sera de faciliter le passage des nombres aux lettres.

Le second intérêt est que les supports familiers ne résistent pas à l'introduction de l'opération de multiplication; en effet, dès qu'il ne s'agit plus d'entiers positifs, l'idée même de multiplication n'est plus définissable comme une addition répétée.

Un opérateur multiplicatif est caractérisable par la propriété :

L'opérateur $\xrightarrow{\times A}$ *transforme une suite arithmétique de raison 1 en une suite arithmétique de raison A. Il y a correspondance des zéros.*

La conservation de cette propriété permet de traiter le cas de la multiplication d'un élément de **Z** par un entier positif :

Exemple

$$\begin{array}{ccc} \square & \xrightarrow{\quad \times 3 \quad} & \square \\ 2 & & 6 \\ 1 & & 3 \\ 0 & & 0 \\ -1 & & -3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Multiplication par un négatif

Pour définir cette multiplication, nous pouvons observer que l'opérateur $\xrightarrow{+/-}$ possède la propriété caractéristique des opérateurs multiplicatifs :

— *une suite arithmétique est transformée en suite arithmétique,*

— *il y a correspondance des zéros ;*
MAIS une suite croissante est transformée en suite décroissante.

Poser l'identité entre opérateurs $\xrightarrow{+/-}$ et $\xrightarrow{\times(-1)}$ conserve, en outre, la commutativité de la multiplication.

Remarques :

1) La multiplication par *(− n)* se décompose en multiplications par *(− 1)* et par *n*.

2) $\xrightarrow{+/-}$ est son propre réciproque : ceci permet d'étendre la règle des signes à la division et de traiter une source de nombreuses erreurs.

3) $\xrightarrow{+/- \quad +/-}$ équivaut à l'opérateur identique $\xrightarrow{\mathrm{I}}$

4) L'identité entre $\xrightarrow{+/-}$ et $\xrightarrow{\times(-1)}$ entre dans de nombreuses questions : symétrie, changement de sens, orientations de droite, plan, cercle.

2) *Puissance à exposant négatif*

La comparaison des progressions "à rebours" entre *l'opérateur des puissances* et *celui des exposants* permet une définition de a^{-n} par un schéma qui insiste sur la correspondance entre MULTIPLICATION des puissances et ADDITION des exposants.

Extension aux exposants négatifs avec $a \neq 0$

$$\boxed{a^3} \xrightarrow{:a} \boxed{a^2} \xrightarrow{:a} \boxed{a} \xrightarrow{:a} \boxed{1} \xrightarrow{:a} \boxed{1/a} \xrightarrow{:a} \boxed{1/a^2}$$

Opérateur de progression des puissances

$$\boxed{3} \xrightarrow{-1} \boxed{2} \xrightarrow{-1} \boxed{1} \xrightarrow{-1} \boxed{0} \xrightarrow{-1} \boxed{-1} \xrightarrow{-1} \boxed{-2}$$

Opérateur de progression des exposants

Par cohérence des écritures, on obtient les définitions

$$a^0 = 1 \qquad\qquad a^{-n} = 1/a^n$$

Remarque : Il reste évidemment à vérifier le prolongement des règles aux exposants négatifs.

Prolongement : La notion de logarithme à base a, pour des valeurs entières du logarithme, est sous-jacente :

$a^n \xrightarrow{\bigcirc} n$ définit la fonction $\xrightarrow{\quad Log_a \quad}$

III - Ecriture de formules - Distributivité

Nous examinons maintenant quel intérêt peut présenter un schéma d'opérateurs lors de l'écriture d'une formule ou d'une identité.

Le terme de "Formule" doit être pris au sens large ; citons quelques exemples :

Volume de la sphère : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ et formule inverse : $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Identité algébrique : $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

Formule de dérivation : $(uv)' = u'v + uv'$

Là encore, l'écriture algébrique est particulièrement commode pour les calculs. Un schéma d'opérateurs peut être intéressant chaque fois qu'on observe des difficultés dans l'utilisation de la formule.

Remarquons que les "formules" comprennent généralement un premier et un second membre : le choix de l'ordre des membres correspond implicitement à une perspective d'utilisation.

Il n'est pas rare, par exemple, de voir dans un ouvrage les identités "remarquables" données dans le sens du *développement*,

pour $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

et pour $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

mais dans le sens de la *factorisation* pour

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ce choix n'est pas neutre, mais l'étudiant le retient sans en comprendre nécessairement les raisons.

1) ***Distributivité***

Pour compléter les paragraphes précédents sur les équations, et les règles des signes, nous examinerons dans ce qui suit le cas de la DISTRIBUTIVITE d'une opération par rapport à une autre.

Citons quelques types d'erreurs classiques :

$(a+b)^2$	transformé en	a^2+b^2	
$(a-b)^2$	transformé en	a^2-b^2	
a^m+a^n	transformé en	a^{m+n}	
$\frac{a}{b}\times\frac{c}{b}$	transformé en	$\frac{a\times c}{b}$	(3)
$7x.3x$	transformé en	$21x$	

Dans tous ces exemples la transformation est effectuée comme si la distributivité s'appliquait. Cependant, l'erreur inverse existe aussi :

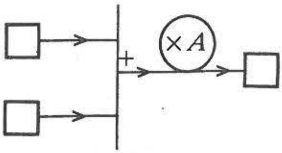
$\frac{a^2}{b^2}$ *transformé en* $\frac{a}{b}$, alors que la distributivité est applicable.

L'origine de ces erreurs ne provient donc pas d'une fausse application de la distributivité comme pourraient le laisser penser les premiers exemples, mais plutôt d'un apprentissage visuel de certaines transformations : suivant l'écriture adoptée, en ligne (comme *"7x.3x"*) ou en

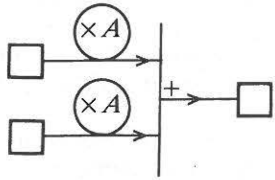
(3) Ce dernier cas s'observe souvent sur des exemples numériques quand l'élève réduit deux fractions au même dénominateur avant de les multiplier (extrapolation de la règle d'addition).

colonne (comme "$\frac{a^2}{b^2}$"), on rencontre des erreurs "mathématiquement" différentes.

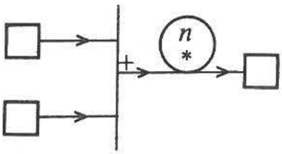
Voyons maintenant comment se présente une formule de distributivité en schéma d'opérateurs :

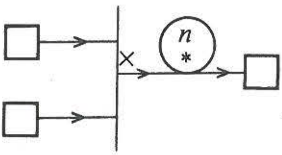


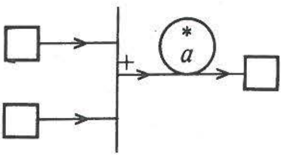
est identique à

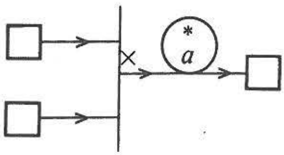


Considérons les schémas suivants faisant intervenir un opérateur "puissance" et une des deux opérations "addition, multiplication".









Quels sont ceux qui sont transformables par distributivité ?

Quels sont ceux qui sont transformables par d'autres formules ? Lesquelles ?

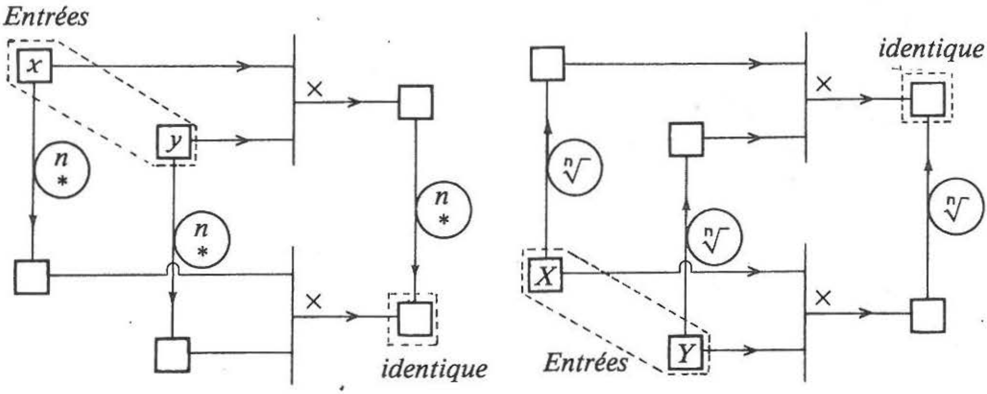
La difficulté de transformer de tels schémas, si l'on s'interdit d'utiliser l'écriture algébrique, montre bien la difficulté de manipulation du concept de "puissance", et explique la tentation de recourir à des automatismes.

La présentation en opérateurs montre également la difficulté de "démontrer" ce type d'identités ; la commodité de l'écriture algébrique n'est qu'apparente. A défaut de démonstration rigoureuse, on peut cependant procéder à des *vérifications* en entrant des nombres dans les cases des schémas, alors que la présentation algébrique incite plutôt à procéder par *visualisation* de mécanismes.

2) Donnons maintenant un exemple où le schéma d'opérateurs permet de *trouver l'itinéraire de démonstration*.

La démonstration de l'identité $\sqrt[n]{X} . \sqrt[n]{Y} = \sqrt[n]{X.Y}$ par l'écriture algébrique comprend deux difficultés : en premier lieu il faut connaître les deux membres dont on veut s'assurer l'identité, donc se douter du résultat, et en second lieu il faut penser à élever les deux membres à la puissance "*n*ième".

En schéma d'opérateurs, l'inversion des opérateurs puissances (possible dans $\mathbf{R}^+$) transforme l'identité sur les puissances en identité sur les radicaux :



IV - Etude de fonctions

L'emploi d'une écriture par schéma d'opérateurs pour l'étude des fonctions permet d'aborder sous un angle nouveau les concepts suivants :

— Ensemble de définition ;

— Variations ;

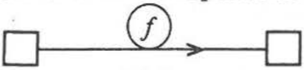
— Etude des limites ;

— Période.

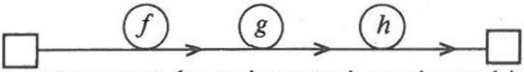
L'examen de ces différents concepts nous a amené à réviser l'ordre de présentation des fonctions. On peut, par exemple, étudier la croissance ou la décroissance d'une fonction sans utiliser nécessairement la dérivée ; le plan d'étude peut être différencié selon la structure de la fonction.

Nous distinguerons :

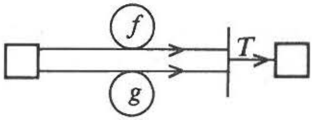
— les fonctions élémentaires à un seul opérateur :



— les fonctions composées caractérisées par une chaîne d'opérateurs élémentaires :



— les schémas comprenant des opérateurs à entrées multiples (additionneurs, multiplicateurs) :



Ensemble de définition

Parmi les fonctions élémentaires ayant un ensemble de définition différent de **R**, citons essentiellement :

$$\xrightarrow[D=\mathbf{R}^*]{1/} \qquad \xrightarrow[D=\mathbf{R}^+]{\sqrt{}} \qquad \xrightarrow[D=\mathbf{R}^{+*}]{Log}$$

La recherche d'un ensemble de définition suppose deux phases :

— le repérage des opérateurs définis sur une partie de **R** seulement ;

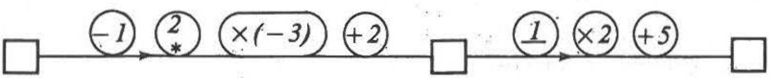
— la résolution d'une équation ou d'une inéquation pour chacun de ces opérateurs.

L'oubli de cette deuxième phase est fréquent (un dénominateur *D(x)* non nul est par exemple traduit par *"x non nul"*).

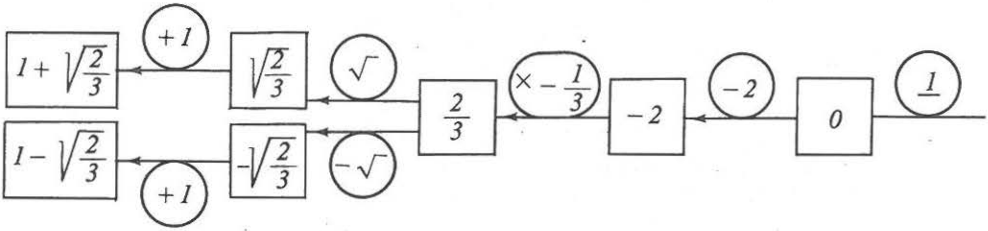
L'écriture par schéma d'opérateurs, où la lettre *x* n'est pas nécessairement présente, facilite la mise en é&nPgb Kb xKnn&bn Kb YJPpar schéma d'opérateurs, où la lettre *x* n'est pas nécessairement présente, facilite la mise en équation en mettant en évidence l'opération qui fait problème.

Exemple : $$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{+2}{2 - 3(x-1)^2} + 5$$

En opérateurs, cette fonction s'écrit :



On voit que seul l'opérateur $\xrightarrow{1/}$ pose un problème. L'ensemble de non-définition peut s'obtenir en remontant la chaîne d'opérateurs à partir de la *case d'entrée* de $\xrightarrow{1/}$



Cette étude peut être menée bien avant l'enseignement de la méthode de résolution des équations du second degré.

Variations d'une fonction

L'étude de la croissance d'une fonction peut être poussée assez loin sans l'étude de la dérivée dès qu'il s'agit :

d'opérateurs élémentaires
d'opérateurs en chaîne

Etude des opérateurs élémentaires

$\xrightarrow{+A}$ croissant quelle que soit l'entrée ; de plus, les variations d'entrées et de sorties sont égales $(\triangle x = \triangle y)$

$\xrightarrow{\times A}$ croissant si $A>0$
décroissant si $A<0$
constant si $A=0$

$\xrightarrow{\overset{2}{*}}$ croissant pour les entrées positives
décroissant pour les entrées négatives.

$\xrightarrow{1/}$ décroissant pour les entrées positives
décroissant pour les entrées négatives

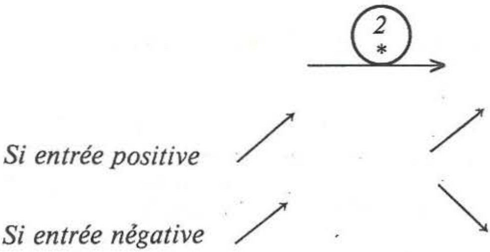
$\xrightarrow{Log}$ croissant (dans l'ensemble de définition)

$\xrightarrow{\overset{*}{e}}$ croissant (De façon générale un opérateur et son réciproque sont croissants ou décroissants simultanément).

Reprenons l'exemple précédent :

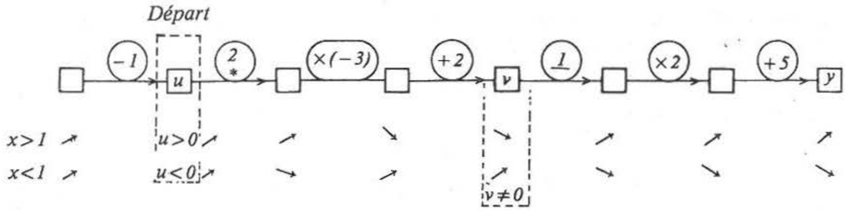
La présence de l'opérateur carré implique de distinguer deux cas, selon le signe de sa variable d'entrée.

Le schéma suivant traduit cette situation.



Les flèches indiquent la corrélation entre les variations de l'entrée et celles de la sortie.

En partant de *la case d'entrée de l'opérateur carré*, et en examinant la chaîne opérateur par opérateur, on obtient les variations de $f(x)$ par rapport à celle de $u = x + 1$.



Ensuite le premier opérateur est "*remonté*" à partir de la case de la variable u .

Finalement : si $x > 1$ la fonction est croissante
si $x < 1$ la fonction est décroissante
si $x = 1$ la fonction présente un minimum.

Le calcul de la dérivée permet évidemment d'obtenir directement ce résultat, mais l'utilisation des opérateurs permet :

— **de travailler sur cette notion de croissance indépendamment de celle de dérivée et ceci dans des cas pas trop simples ;**

— **de *présenter la dérivée à partir de la notion de croissance* et de voir son intérêt dans les cas où la démarche précédente n'aboutit pas : fonction nécessitant des opérateurs à entrées multiples ;**

— **de mieux cerner le rôle de chaque opérateur.**

Ainsi dans l'exemple ci-dessus :

$\xrightarrow{\overset{2}{*}}$ fournit la symétrie et la séparation en deux intervalles de croissance opposée ;

$\xrightarrow{\underline{1}}$ fait apparaître les discontinuités et les asymptotes correspondantes ;

$\xrightarrow{-1}\xrightarrow{+2}\xrightarrow{+5}$ sont des translations : la première de *(+ 1)* le long des abscisses, la troisième de *(+5)* le long des ordonnées : elles n'affectent pas la forme de la courbe ; la seconde par contre, du fait de son *insertion entre les opérateurs carré et inverse,* est importante : elle fournit deux zéros à l'entrée de $\xrightarrow{\underline{1}}$;

$\xrightarrow{\times 2}$ est une homothétie de rapport *2* et n'affecte pas la forme de la courbe ;

$\xrightarrow{\times(-3)}$ est une homothétie de rapport *3* composée avec une symétrie par rapport aux abscisses.

Remarque : Si on ne s'intéresse qu'à l'allure de la courbe représentative, on obtient une courbe de même nature en abandonnant les homothéties et les translations le long des axes.

Par exemple :

$$\square \xrightarrow{\overset{2}{*}} \xrightarrow{-1} \xrightarrow{\underline{1}} \square$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Dans le même esprit, il peut être intéressant de constater qu'un pôle double s'obtient en permutant les opérateurs ''Inverse'' et ''Carré''.

Chaque fois que la désignation de variables par des lettres pose problème, le schéma d'opérateurs facilite la manipulation du concept.

C'est le cas lorsqu'on travaille sur la composition des fonctions, sur l'étude d'une fonction réciproque ou sur une famille de fonctions paramétrées.

Limites et dérivées

Les schémas d'opérateurs sont susceptibles d'apporter une clarification conceptuelle chaque fois qu'il y a risque de confusion sur les variables, notamment à propos des limites et des dérivées (dans ce deuxième cas, la variable devient, provisoirement, l'élément différentiel *''dx''* pour une valeur fixée de la variable *''x''*).

Schéma de base sur les limites

$$\boxed{x_0} \xrightarrow{\quad f \quad} \boxed{y_0} \qquad\qquad \boxed{x} \xrightarrow{\quad f \quad} \boxed{y}$$

entrée fixe	*sortie fixe (éventuellement non définie)*	*entrée variable*	*sortie variable*

Exemple d'écriture de théorème :

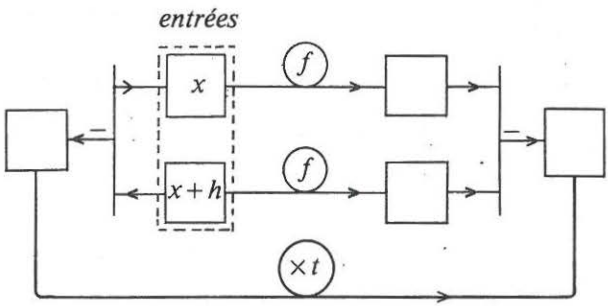
$$\boxed{0^+} \xrightarrow{\quad \frac{1}{\;\;} \quad} \boxed{+\infty}$$

L'opérateur d'inversion étant son propre réciproque, on a également :

$$\boxed{+\infty} \xrightarrow{\quad \frac{1}{\;\;} \quad} \boxed{0^+}$$

Schéma de base sur les dérivées

On peut grouper en un seul schéma le calcul du taux d'accroissement d'une fonction f entre (x) et $(x+h)$:



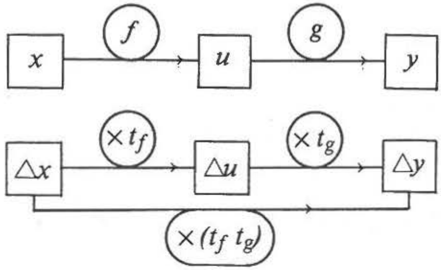
t est le nombre à déterminer.

Le schéma de dérivation de f s'en déduit par passage à la limite :

$$\boxed{0} \xrightarrow{\quad \times (f'_x) \quad} \boxed{0}$$

Un tel schéma présente l'intérêt de fournir la démarche complète du calcul du taux d'accroissement. On voit également que pour la fonction réciproque, en échangeant entrées et sorties on remonte le coefficient multiplicatif ; le taux de la fonction réciproque est donc l'inverse de celui de la fonction directe et **ceci est établi sans nommer les variables.**

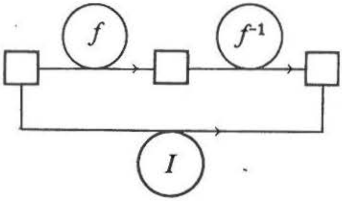
Fonction composée et fonction réciproque

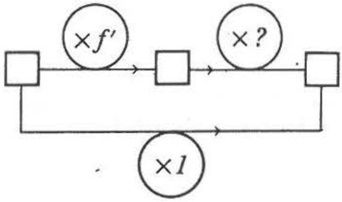


Au schéma de composition des fonctions $g \circ f$ correspond le schéma de multiplication des accroissements, et la multiplication des *nombres dérivés*.

Dans le cas de la dérivée d'une fonction réciproque, on a là aussi intérêt à travailler sur les *nombres dérivés en tant que coefficients multiplicatifs* entre accroissements, plutôt que sur les fonctions dérivées elles-mêmes.

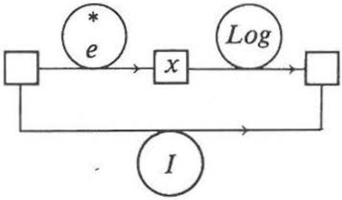
Schéma général

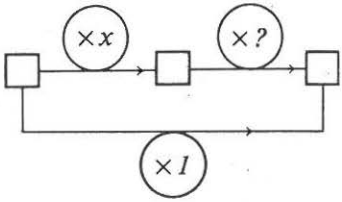




sur les fonctions *sur les nombres dérivés*

Exemple : on veut calculer la dérivée de $x \longmapsto Log\ x$ connaissant celle de $x \longmapsto e^x$.





Sur le schéma des fonctions, on peut nommer x la variable d'entrée de la fonction dont on cherche la dérivée.

On connaît le 1er coefficient multiplicatif *(x)* ; on en déduit le second *(1/x)*.

V - Algébrisation de problèmes

Nous avons commencé par utiliser des schémas d'opérateurs pour aborder les difficultés de traitement mathématique de problèmes à supports familiers.

Ces difficultés sont de plusieurs ordres :

— le traitement mathématique lui-même ;
— la mise en relation du problème à traiter avec les chapitres du cours concernés ;
— le repérage des *données et relations implicites* figurant dans les énoncés ; citons aussi les effets supposés implicitement négligeables, essentiellement parce que leur prise en compte rendrait impossible le traitement mathématique exact !
— la *maîtrise supposée de l'écriture mathématique* elle-même, de la part d'un public qui éprouve déjà des difficultés dans le domaine de la lecture : on observe le plus souvent que la plus grande difficulté se situe au départ, lors du choix des inconnues et de la mise en équations.

1er exemple : Etudions les difficultés de résolution du problème suivant :

Quand j'avais l'âge que vous avez, mon âge était le double du vôtre.
Quand vous aurez mon âge, nous totaliserons 63 ans.
Quels sont nos âges respectifs ?

Analyse des difficultés rencontrées

• La première réside dans la désignation des inconnues. On observe fréquemment : *soit "x" l'âge du plus vieux et "y" l'âge du plus jeune*, sans précision sur l'époque choisie.

Tout se passe comme si *x* et *y* étaient des *variables affectées* à des personnes (4) **et non des inconnues précises mesurées en nombre d'années.**

Ceci est particulièrement évident quand il faut écrire que l'âge du plus vieux était égal à "y" ou que celui du plus jeune sera égal à "x".

La mise en équation se traduit alors le plus souvent par

$$\begin{cases} x = 2y \\ x+y = 63 \end{cases}$$

• Une seconde difficulté est d'écrire la loi, *implicite* dans l'énoncé, selon laquelle la *différence d'âge est constante*. L'expérience montre que beaucoup d'étudiants n'y pensent pas, probablement parce qu'elle ne figure pas dans l'énoncé.

• Enfin, toute l'attention est portée sur le traitement mathématique ; ainsi on observe le plus souvent une séparation complète entre ce traitement et le support initial : le "concret" n'aide pas au raisonnement, "raisonnement" réduit ici au mécanisme de résolution des systèmes d'équations.

Notons encore que l'énoncé suggère qu'il s'agit d'un problème à deux inconnues, puisqu'il y a deux nombres à trouver.

(4) *Cf. "Inconnues et Variables" de M. BRUSTON, dans cette même brochure.*

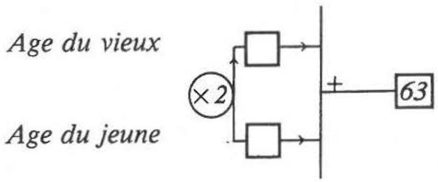
Suivant le point de vue adopté, on peut pourtant le présenter en problème à 7 inconnues (les âges des deux personnes aux trois époques et leur différence d'âge), ou à une seule inconnue (à condition de bien choisir entre les sept inconnues précédentes), auquel cas le problème est aisément résoluble par l'arithmétique.

Analyse du traitement par opérateur

La difficulté essentielle est de trouver une structure qui traduise le problème.

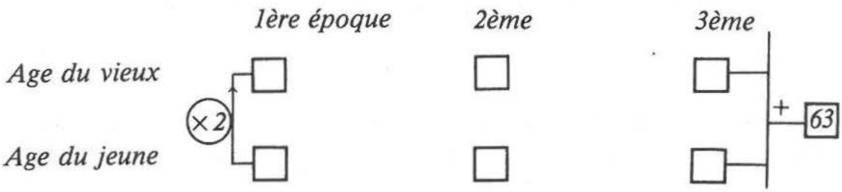
Pour savoir si un schéma convient, une technique simple consiste à procéder par essais successifs et systématiques en entrant des nombres dans les cases.

La structure suivante basée sur l'idée d'une case affectée à chaque personne ne résiste pas aux essais :



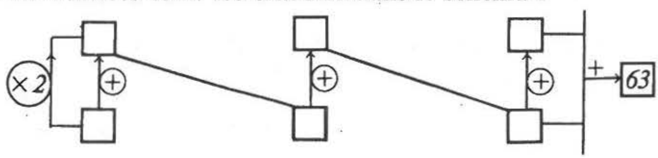
Les étudiants découvrent d'eux-mêmes que le schéma ne tient pas compte des différentes époques.

La structure ci-dessous permet par contre, en entrant un nombre dans une case, de découvrir toutes les relations entre cases, et notamment la nécessité d'*introduire la différence d'âge constante* dans le temps :



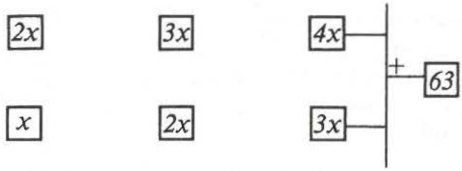
Proposer *20*, par exemple, comme âge actuel du plus jeune conduit à une différence d'âge de *10* (1ère époque) et permet alors de remplir toutes les cases pour constater que cette proposition était trop forte.

Ce travail met en évidence une *structure de raisonnement* permettant d'utiliser toutes les données et de les traduire dans le schéma :



On se rend compte alors qu'on peut le traiter en problème à une seule inconnue ; en poussant plus loin l'examen, on observe également que le choix le plus simple est d'appeler "x" le nombre d'années du plus jeune à la première époque.

Les cases se remplissent ainsi :



La résolution est immédiate.

Remarque : La forme de la question posée, "Quels sont nos âges respectifs ?", suggère d'en faire un problème à deux inconnues : il serait intéressant de comparer les comportements des étudiants devant des questions du type "Quel est mon âge ?", ou encore devant une question demandant de fournir les sept inconnues du problème.

2ème exemple : Examinons ce classique problème de robinets :

> *Un premier robinet remplit un bassin en 5 heures ;*
> *Un second robinet remplit ce bassin en 7 heures ;*
> *En combien de temps les robinets remplissent-ils le bassin en coulant ensemble ?*

Analyse des difficultés

• La désignation des débits comme inconnues est difficile à dégager. On observe très souvent des formulations du type *"soit x le premier robinet"*.

L'embarras devant un choix d'unité de débit traduit d'ailleurs souvent la nécessité de préciser cette notion (5).

• Cette précision étant apportée, une deuxième difficulté surgit au moment du choix d'une unité de volume, l'énoncé étant muet sur ce point. La plupart des étudiants oublie qu'une formule n'est valable que dans un système d'unités donné.

• Une troisième difficulté réside dans le fait que le volume du bassin n'est pas calculable à partir des données de l'énoncé : dans la phase algébrique, cela se traduit par un système comportant une inconnue de plus que d'équations (équations homogènes), ce qui augmente les difficultés de traitement.

---

(5) Il est bien connu que les problèmes de robinets ont mauvaise réputation : n'est-ce pas précisément que la notion de débit est peu familière ou, du moins, peu utilisée de façon quantitative ?

• Enfin, signalons que l'énoncé suppose implicitement l'addition des débits, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans la réalité (le réseau d'alimentation des robinets a un débit limité).

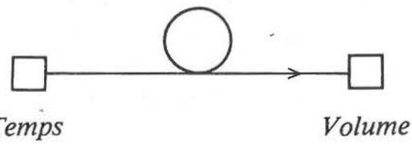
Généralement, ces difficultés conduisent à un traitement au moins partiellement arithmétique.

Parmi les réponses erronées mais provenant d'un raisonnement, les plus fréquentes reposent sur l'idée de faire une *moyenne arithmétique* (au lieu d'une moyenne harmonique). On trouve alors *6h* ou, si l'on tient compte de l'addition des débits, *3h* : moyenne entre *2h30* et *3h30*, nombres obtenus en supposant successivement les deux robinets semblables au premier puis au second.

Parmi les raisonnements corrects, le plus fréquent est celui qui consiste à comparer les volumes remplis dans une même unité de temps (ici *1h*) et à assigner au volume du bassin un nombre arbitraire de m^3 ou à le désigner par une variable.

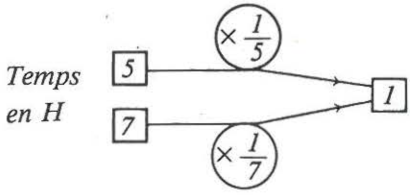
Traitement par schémas d'opérateurs

Là encore, tout l'effort porte sur l'écriture d'un schéma traduisant la relation implicite du problème (ici Temps-Volume).

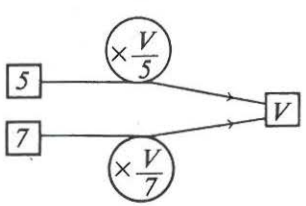


L'opérateur doit être un *multiplicateur* : en effet, il est caractérisable par le fait que si l'entrée double, triple,... la sortie double, triple...

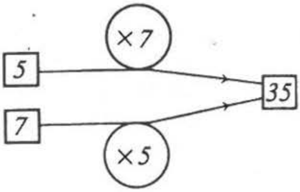
La traduction des deux premières données de l'énoncé peut alors conduire à trois schémas :



si on prend comme unité de volume celui du bassin



en choisissant comme unité de volume le m^3 (ou le *litre*) et appelant *V* le volume du bassin.



en adoptant une unité de volume adaptée au problème.

Il reste à voir que l'association des deux robinets conduit bien à additionner les opérateurs multiplicatifs.

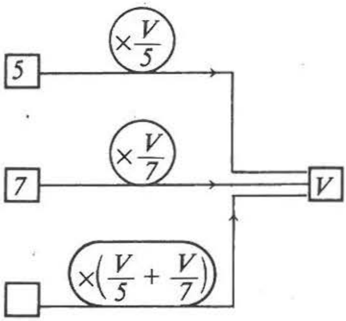
Ceci peut être fait en *testant cette structure*, en associant par exemple des robinets à débits égaux ou encore en entrant des temps égaux.

La structure complète du problème peut être schématisée ainsi, si l'on désigne par une lettre le volume du bassin :

1er robinet

2ème robinet

1er et 2ème robinets



La difficulté de calcul est réduite à un calcul de fractions (qu'on évite en grande partie en adoptant $V = 35$ *unités de volume*).

Remarque concernant les problèmes du 1er degré à deux inconnues

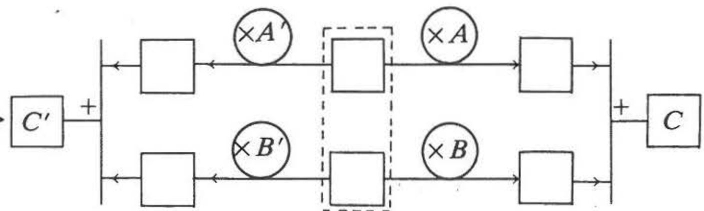
A la suite de ces exemples, deux questions se posent :

Peut-on toujours ramener les problèmes de ce type à des problèmes à une inconnue ?

Si oui, dans quelle mesure est-ce intéressant ?

Un système du 1er degré à deux inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases} \Longleftrightarrow$$



Le principal intérêt du schéma d'opérateurs est que *le lien entre les deux équations* figure au niveau de la structure : on peut "partir" d'une case quelconque en y entrant une lettre, "tourner" dans les deux sens, pour finalement "boucler" sur n'importe quelle autre case (ou même dans celle de départ) : l'égalité des expressions obtenues fournit une équation à une inconnue. Sa résolution donne la valeur de la case choisie comme "départ", donc celles de toutes les autres cases, et en particulier celles correspondant aux deux inconnues.

Cependant l'écriture algébrique reprend ses droits dès qu'on augmente le nombre d'inconnues ; la complexité d'un schéma d'opérateurs de 3 équations à 3 inconnues reflète la difficulté de calcul et rend nécessaire le recours à une démarche plus mécanique. **Le schéma d'opérateurs ne peut être qu'un outil de transition de l'arithmétique vers l'algèbre.**