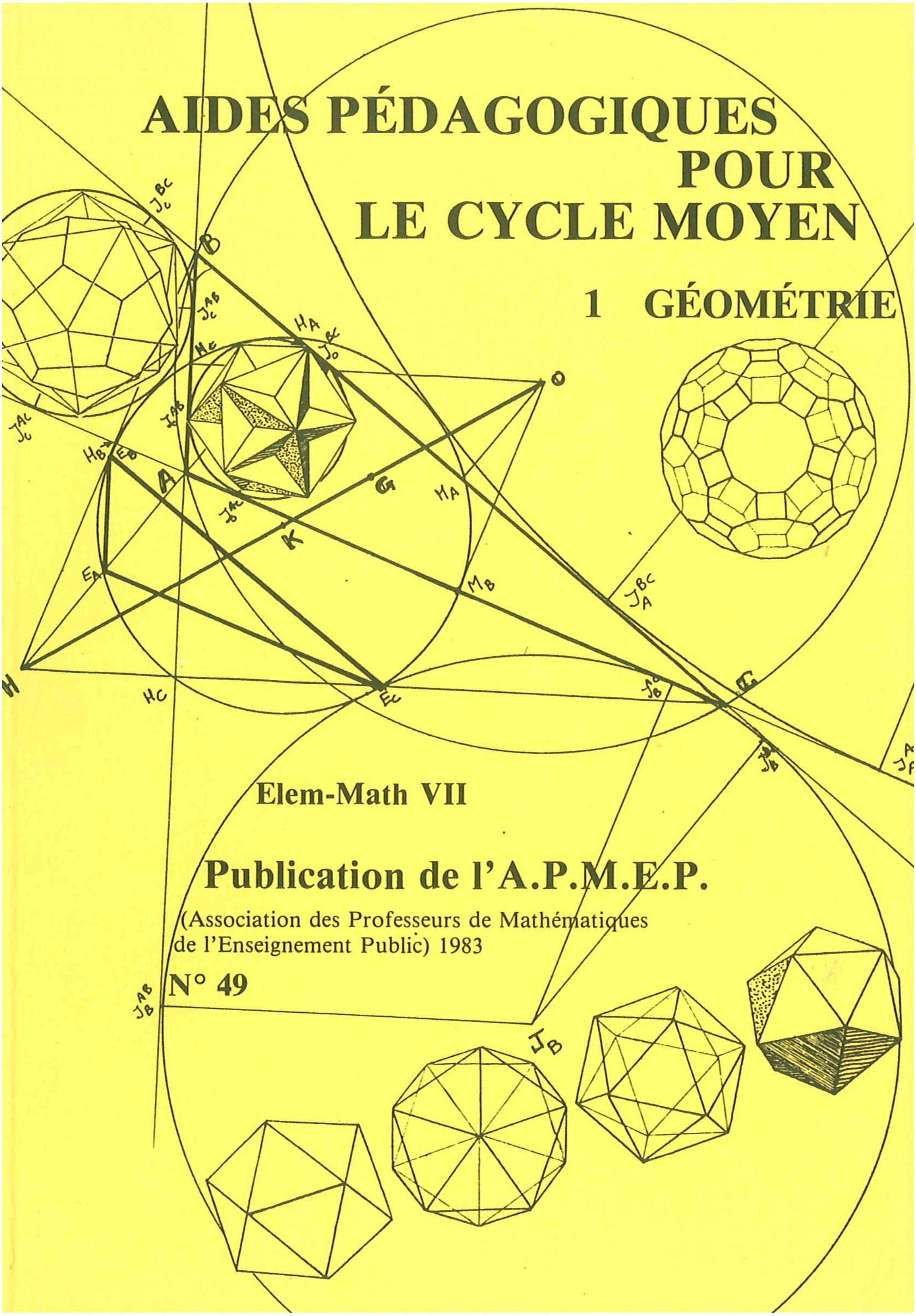
AIDES PÉDAGOGIQUES POUR LE CYCLE MOYEN

1 GÉOMÉTRIE



Elem-Math VII

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) 1983

N° 49

AIDES PÉDAGOGIQUES
POUR
LE CYCLE MOYEN

1 GÉOMÉTRIE

AVANT-PROPOS

Cette brochure d'aides pédagogiques pour le C.M. est une œuvre collective d'enseignants de l'Ecole élémentaire, d'Ecole Normale et du Supérieur travaillant dans des équipes de recherche sur l'enseignement élémentaire de divers IREM.

Cette brochure porte sur l'enseignement de la géométrie ; d'autres suivront portant sur les problèmes et situations-problèmes, les décimaux et les relations numériques.

Cette brochure comporte :

— quelques réflexions sur l'enseignement de la géométrie au C.M. ;

— des descriptions d'activités en classe sur différents thèmes précédées d'un tableau précisant les objectifs de ces activités ;

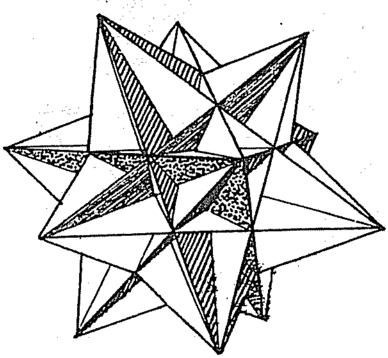
— une bibliographie légère.

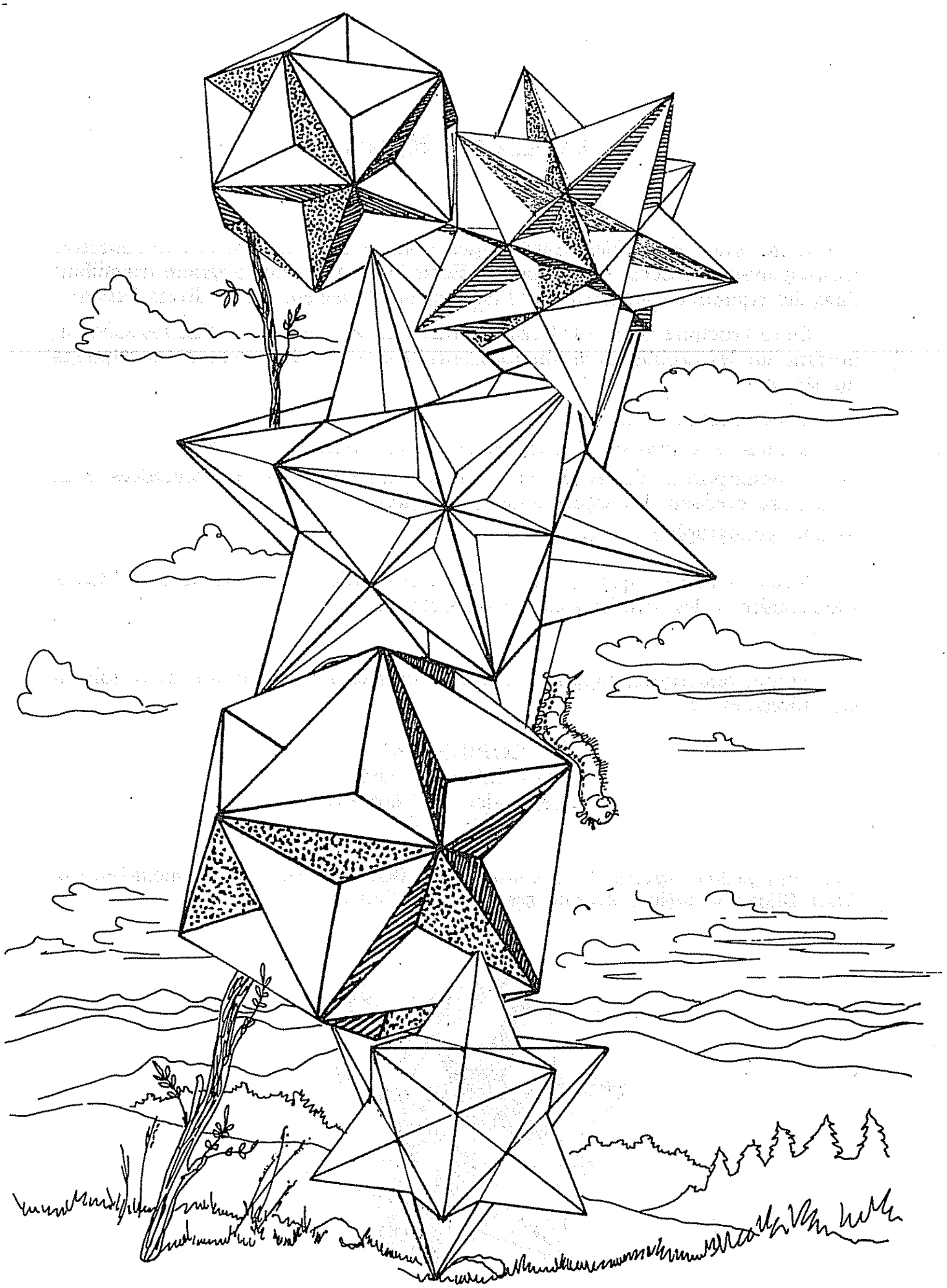
Nous souhaitons que ce travail puisse être utile aux enseignants de l'Ecole Elémentaire et des premières classes du Collège.

Toutes remarques, suggestions et questions seront les bienvenues et doivent être adressées à :

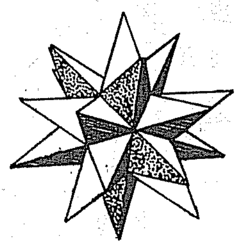
COPIRELEM
IREM - Université Paris VII
2, Place Jussieu — 75005 PARIS

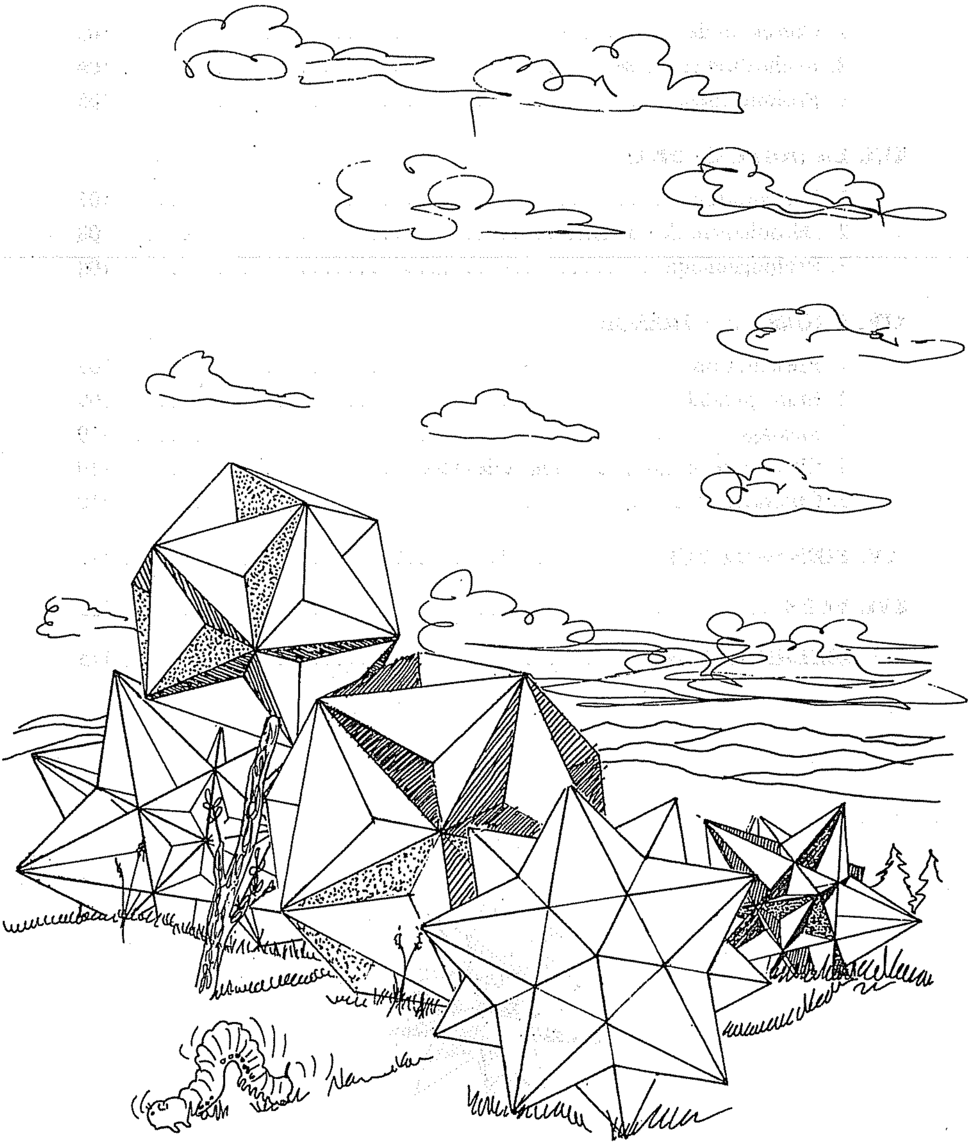
Ont participé à la rédaction de cette brochure les IREM de Besançon, Clermont-Ferrand, Caen, Dijon, Grenoble, Lille, Limoges, Orléans et Paris.





SOMMAIRE





CHAPITRE I

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

1. DU C.E. AU C.M.

La géométrie à l'Ecole Elémentaire s'est longtemps réduite à l'enseignement du système métrique assorti d'une description sommaire de quelques figures ou objets simples (carré, rectangle, cube, etc...). L'étude des figures géométriques aboutissait à l'énoncé de propriétés observables sans établir de liens entre elles. On traitait cet enseignement dans le même esprit que les leçons de choses : enseignement d'une description et d'un vocabulaire conventionnels sans intérêt explicatif.

Dans le cadre des Programmes du 2.1.1970 qui mettaient l'accent sur l'action propre des enfants et la manipulation d'objets, la présentation de la géométrie s'est modifiée ; ainsi on a vu apparaître un grand nombre d'activités sur quadrillage : repérages, cheminements mais aussi transformations géométriques telles que translation, agrandissement, symétrie. En fait, la géométrie comporte bien d'autres aspects que ceux évoqués ci-dessus. C'est une véritable théorie physique proposant un modèle explicatif d'une partie du monde qui nous entoure : ronds, faces planes, coins, agrandissements, déplacements etc... En tant que telle, elle présente selon les moments deux aspects essentiels :

— l'un consiste à agir sur des objets et à récolter des informations

— l'autre consiste à organiser ces informations afin de prévoir la possibilité ou l'impossibilité de réalisations matérielles.

Il va de soi que les deux aspects interagissent constamment l'un sur l'autre.

Les nouveaux programmes pour le C.E. (sept. 78) mettent l'accent sur cet aspect organisation. Au C.M. on peut espérer que les activités permettent de surcroît une plus grande distance par rapport aux objets et situations singulières. Les Instructions Pédagogiques précisent :

"Grâce à ces activités, il s'agit

— d'abord, comme au Cycle Elémentaire, de permettre aux enfants d'accumuler des expériences conduisant à la maîtrise de certains "savoir-faire" ;

— en outre, par une réflexion sur ces expériences, de conduire à un premier niveau d'abstraction, c'est-à-dire à la production de "langages" qui permettent, sans recourir à des définitions formelles, de communiquer et de justifier une action ou une suite d'actions incluses dans une activité géométrique".

On trouvera ci-dessous des illustrations de la démarche qui permet de dégager, à partir d'un objet physique, des notions géométriques : Droite et Plan (VI) ; Repérage (VII)...

2. VALIDATION

Les Instructions Pédagogiques pour le C.M. poursuivent :

"Dans tous les cas, une phase importante du travail est sa validation. Une description ou une représentation sont valides quand elles permettent de construire l'objet. Dans le cas de la représentation, il s'agit en outre de respecter les conventions établies dans la classe... L'utilisation et/ou l'élaboration de moyens conventionnels de communication doivent viser à réduire la part de subjectivité que risque de présenter la validation."

Exemple : Pour les "Reproductions de Dessins" (XI), la validation est immédiate : le dessin reproduit est-il conforme au modèle ? Dans ce cas la validation est muette. Il se peut que la validation remette en cause la démarche (choix des conventions, des mesures, des instruments, du langage utilisé) et permette de l'enrichir : orienter la figure, quadriller la feuille etc...

Si l'activité consiste en l'échange d'un message composé par une équipe et transmis à une autre, l'invalidation peut mettre en cause, soit le message transmis par la première équipe, soit son interprétation par la seconde, et conduire ainsi à l'examen du référent commun aux deux équipes.

3. FAIRE DE LA GÉOMÉTRIE

"Ces activités — précisent les Instructions — *peuvent également concerner des actions sur des objets géométriques. A partir d'une réflexion sur ces actions et leurs effets, on caractérisera quelques transformations par leurs invariants et leurs propriétés, et on en interprétera certaines comme transformations ponctuelles susceptibles d'une utilisation plus générale."*

Par ses observations, son action sur des objets, l'enfant découvre des démarches et des concepts qui permettent d'organiser l'espace et les objets qui s'y trouvent. Ces savoirs et savoir-faire conduiront d'une part l'enfant à prévoir le résultat de son action, et d'autre part à enrichir son langage, en vue de communiquer son expérience :

Expérimentation ⟶ communication ⟶ validation
↓ ↑
enrichissement du langage

Les termes permettant de décrire l'observation faite, l'action menée, les résultats obtenus interviennent donc, pour la communication, dans un but de synthèse et de clarification. C'est ainsi que l'on donnera leur statut aux concepts mathématiques envisagés. La deuxième chronique de "Pavage" (VIII) illustre ce propos : les enfants, après observations, sont conduits à dégager les concepts de translation, rotation, retournement qui permettent de décrire simplement les différents pavages. Cette nouvelle étape donne le moyen de dépasser la singularité des situations concrètes et d'accéder à des raisonnements sur des classes de situations.

4. ÉVALUATION

L'évaluation peut revêtir plusieurs formes :

- inventaire des mots, des concepts, des procédures utilisées lors d'une activité.

- formulation, description d'une activité réalisée (afin d'en dégager les articulations importantes, de les confronter aux articulations d'activités antérieures, etc....).

- réinvestissement dans une situation nouvelle. Les réinvestissements permettent de vérifier si les concepts ou procédures mis en œuvre sont susceptibles de transfert.

5. DE L'OBJET RÉEL A L'OBJET GÉOMÉTRIQUE

Il n'est pas question, au départ, de présenter abstraitement des définitions ou des théorèmes. L'activité que l'on propose s'exerce sur des objets dans des situations concrètes. Mais tout objet n'est pas convenable. Un objet géométrique n'est plus tout à fait "concret" ; tout objet n'est pas aisément "géométrisable". C'est au travers de l'action sur des objets réels que l'on dégage les caractères de l'objet géométrique et c'est cette action qui fondera les concepts géométriques. C'est pourquoi l'objectif que l'on s'est fixé quant aux relations et concepts (liés à l'objet géométrique) que l'on souhaite aborder gouvernera le choix de tel ou tel objet réel. Il faut alors prendre en compte ce que ce matériel peut induire dans le comportement des enfants, ce qu'il favorise comme découverte, ce qu'il élimine, les difficultés qu'il soulèvera etc...

Le matériel n'intervient pas seulement comme objet *d'*étude, mais aussi comme objet *pour* l'étude. Exemple : papier blanc / papier quadrillé.

papier blanc :	papier quadrillé
induit l'utilisation d'instruments tels que règle, règle graduée, compas ; incite au pliage ; n'offre pas le soutien de la perpendicularité et du comptage pour les mesures.	n'incite pas au pliage, à l'utilisation d'angles non droits ; induit l'utilisation automatique de la perpendicularité et du comptage des carreaux.

6. REMARQUE : Les thèmes proposés ci-dessous relèvent de la géométrie ; on s'est efforcé d'y considérer surtout les activités pour lesquelles la MESURE n'intervient pas de façon centrale (cette question devant être examinée dans un autre volume). Mais il est clair que cette distinction relève de la présentation de l'ouvrage et non de son objet : au détour de chaque activité géométrique — ou presque — on rencontre la Mesure, le Calcul, les problèmes etc... C'est pourquoi, dans le tableau récapitulatif sont signalés les thèmes qui évoquent la Mesure ou peuvent être prolongés dans cette direction.

Les thèmes d'activités qui suivent visent chacun plusieurs objectifs du programme officiel. De même que chaque objectif est visé par plusieurs de ces activités.

Il ne s'agit donc pas d'aborder avec une classe successivement tous les thèmes proposés : le tableau récapitulatif suivant doit permettre à l'enseignant de choisir le — ou les — activités en fonction des objectifs qu'il souhaite atteindre.

TABLEAU DES OBJECTIFS

OBJECTIFS → / ACTIVITÉS	Mesure	Utilisation, fabrication d'instruments	Découverte de propriété	Reconnaissance d'éléments géométriques	Codage	Représentation	Repérage d'éléments pertinents	Construction	Description	Observation
Jeu de construction					×		×		×	×
Octaèdre	×	×		×			×	×	×	×
Pentagones réguliers		×				×			×	×
Polyèdres tronqués		×		×			×	×	×	×
Lignes et surfaces		×	×					×		
Activités de repérage dans le plan		×			×		×			
Pavages		×	×		×		×	×		
Puzzle	×	×		×			×			×
Constructions géométriques		×					×	×		
Reproduction de dessins		×					×	×	×	×
Boîte du patissier			×		×			×	×	
Boîte cadeau			×	×	×			×	×	
Course au trésor	×	×				×	×	×		
Points de vue							×			×
Vues					×	×	×	×		×

CHAPITRE II

JEU DE CONSTRUCTION

1. REMARQUES PRÉALABLES

Avant d'être une codification d'êtres mathématiques abstraits, l'activité géométrique procède par observations et manipulations d'objets, ceux du moins dont l'étendue est aisément définissable : une flamme, un nuage de fumée ne se prêtent guère à la géométrie ; une bouteille, une boîte, un ballon, un abat-jour davantage. Ils sont donnés à observer, mais peu modifiables. C'est pourquoi on peut s'intéresser aux jeux de construction : leur champ d'utilisation s'étend bien au-delà de l'Ecole Maternelle où on les cantonne pourtant.

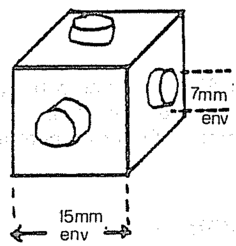


figure 1

On n'examine ici qu'un exemple parmi la dizaine de modèles les plus répandus : les cubes emboîtables. On désignera ci-dessous par "solide" une construction d'un seul tenant réalisée avec des cubes.

Les activités possibles sont de deux ordres, selon qu'elles font appel à une représentation plane du solide (vue, ou perspective) ou qu'elles sont basées sur l'observation et la manipulation des seuls solides. Les exemples proposés ci-dessous relèvent de ce second cas. Mais dans l'un comme dans l'autre interviennent généralement des représentations (images mentales) mais dont l'emploi demeure implicite et le code inconnu.

Voici quelques idées d'utilisation de ce matériel, l'organisation de l'activité étant laissée à l'initiative du maître.

2. RECONNAISSANCE :

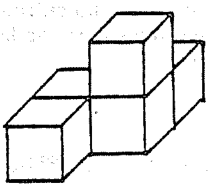


figure 2

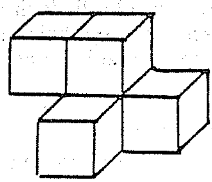


figure 3

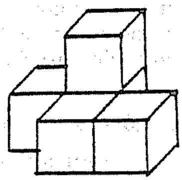
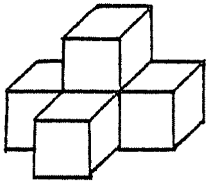


figure 4



°figure 5'

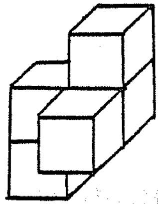


figure 6

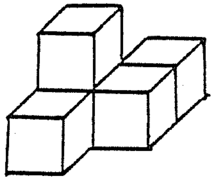


figure 7

Parmi les solides représentés ci-dessus (que l'on aura construits réellement) y en a-t-il deux ou davantage qui sont "pareils" ? (c'est-à-dire pouvant correspondre à la même procédure de construction).

Notons la difficulté rencontrée par certains élèves à distinguer les uns des autres des objets symétriques. Si c'est le cas au cours de cette activité, on pourra prévoir une série d'activités plus spécialement axées sur cette reconnaissance.

Exemple : le matériel proposé se compose d'un lot de pièces deux à deux symétriques. Par un échange de messages — oral ou écrit — un enfant (ou groupe d'enfants) devra faire deviner à un autre enfant (ou groupe d'enfants) quel est l'objet choisi, et comment il se distingue de son symétrique. Il fera référence à un repère absolu de l'espace du type "haut, bas, côté rue, côté couloir, vers le tableau...".

Une variante peut consister, pour un élève (ou groupe d'élèves) à construire le symétrique d'un objet dont il(s) dispose(nt).

3. REPRODUCTION

Un solide est donné (par exemple figure 3), il s'agit d'en faire une copie ; on dispose du modèle. Les dessins ci-dessus n'ont pas fait état des rentrants et des saillants : on pourrait convenir qu'il doit en être tenu compte. On représentera ici les saillants par $\boxed{\odot}$ et les rentrants par $\boxed{\otimes}$.

4. RECONNAISSANCE ET REPRODUCTION DIFFÉRÉES :

Un solide est présenté, que l'on doit observer ; puis on le retire. Parmi plusieurs solides présentés, il s'agit de trouver celui qui a été observé précédemment. Il est clair que cet exercice fait appel à une représentation interne (mentale) de l'objet, éventuellement à une "structure" (mode d'organisation de l'objet) explicitable ou non.

De la même façon : un modèle est présenté à un endroit ; un peu plus loin (ou de l'autre côté d'un paravent), on demande de reconstruire ce solide. On peut permettre ou non des va-et-vient de contrôle. Il s'agit dans ces exercices d'un entraînement non seulement de l'observation (globale ou analytique) mais aussi de la mémoire visuelle et de la capacité d'organiser une image mentale.

5. OBSERVATION QUANTITATIVE :

Le premier solide représenté (figure 8) est constitué de trois cubes. Sa SURFACE est constituée de 8 parties planes ("FACES") que l'on a baptisées : a, b,..., h. Le segment qui est commun à deux faces est une "ARETE". On a indiqué en trait plus gras l'arête "a-d" et l'arête "b-f". Combien ce solide comporte-t-il d'arêtes ? On appelle "SOMMET" le point de rencontre de plusieurs arêtes. Combien d'arêtes se rencontrent-elles généralement en un sommet ? Comparer à cet égard le premier solide dessiné ci-dessous et ceux proposés au § 2. Voici quelques autres exemples :

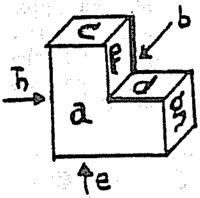
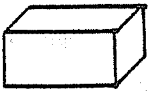
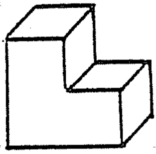


figure 8



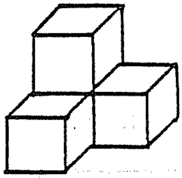
F	S	A
6	8	12

figure 9



F	S	A
8	12	18

figure 10



F	S	A
12	17	27

figure 11

On pourra observer qu'il existe une relation entre ces trois nombres ($F + S - A = 2$) quel que soit le solide.

On appelle "interface" la surface de contact de deux cubes ; les interfaces sont invisibles. Le second solide comporte une interface, le troisième 2, le quatrième 3. Y a-t-il une relation entre le nombre de cubes, le nombre d'interfaces et l'aire de la surface visible ? Cela permet-il de simplifier (dans certains cas) le calcul du nombre de faces ? celui du nombre d'arêtes ?

On peut également décompter le nombre de saillants d'un solide et chercher, pour un solide donné, quel est le nombre maximum, et le nombre minimum de saillants.

6. SUITES :

On s'intéresse dans cette partie aux solides constitués par des cubes bout à bout. L'exercice peut prendre deux formes :

- un tel solide est présenté, il est demandé de l'observer, et de poursuivre la construction comme elle a été commencée. Il s'agit donc d'observer quelle est la règle de construction qui a été mise en œuvre et de poursuivre selon la même règle ;

- au lieu d'un solide on donne un plan de construction, sous forme du développement de la surface latérale. Il s'agit encore de découvrir la règle de construction, et les actions à produire pour construire le solide. On se rendra compte sur quelques exemples que de tels exercices (que l'on peut varier à l'infini) demandent non seulement une bonne observation de l'objet proposé, mais une réflexion minutieuse pour conduire la manipulation.

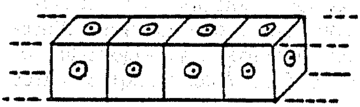


figure 9

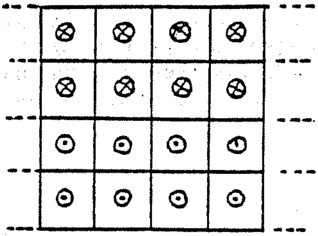


figure 10

La vue en perspective fait apparaître l'un des bouts, mais seulement deux faces latérales ; la surface latérale fait apparaître les quatre faces latérales (mais pas les bouts).

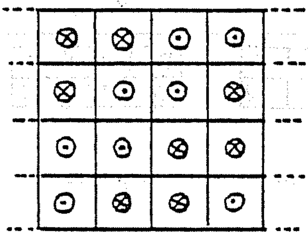


figure 11

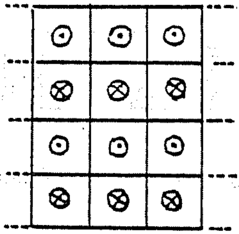


figure 12

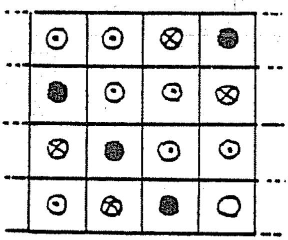


figure 13

— Construire la suite représentée par la figure 11. Sur quel type de face sont emboîtés les saillants ?

— Est-il possible de construire une suite correspondant à la représentation de la figure 12 ? Pourquoi ?

— Construire la suite représentée par la figure 13. Peut-on prévoir (avant de construire) de quel côté va se trouver le saillant de bout ?

N.B. : Les cubes ici utilisés comportent deux types de rentrants (patron ci-contre) : l'un d'eux (point noir) est plus profond que les deux autres.

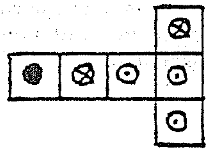


figure 14

CHAPITRE III

LES SOLIDES AU C.M.

Objectifs généraux

1. Observer, décrire, représenter, reproduire, construire des solides.
2. Mesurer des volumes.

1. RECONNAISSANCE DE SOLIDES

1.1. Matériel

a) Solides en carton.

Solides réguliers	Solides quelconques
1. tétraèdre	6. pyramides à base triangulaire
2. cube	7. pyramides à base carrée
3. octaèdre	8. pyramides à base quadrangulaire
4. dodécaèdre	9. tronc de pyramide
5. icosaèdre	10. prisme droit à bases hexagonales faces latérales carrées
	11. prisme droit à bases hexagonales faces rectangulaires
	12. prisme droit à bases quadrangulaires quelconques
	13. prisme droit à bases quadrangulaires trapézoïdales
	14. pavé oblique
	15. antiprisme à bases hexagonales
	16. antiprisme à bases carrées
	17. hexaèdre non régulier à faces triangulaires
	18. hexaèdre non régulier à faces losanges (rhomboèdre)
	19. décaèdre
	20. petit rhombicuboctaèdre
	21,22. solides non convexes
	23. cône
	24. cylindre.

(pochette "Solides" disponible à l'IREM d'Orléans).

b) Une série de photos des mêmes solides (par photo on peut entendre dessin réalisé par le maître).

1.2. Première séance : *correspondance photo-solide*

a) *Objectif* : Mettre en correspondance un solide (pris dans un ensemble de solides) et sa photo (prise parmi un ensemble de photos).

b) *Déroulement* : Les solides, repérés par des numéros, sont posés sur une table. Chaque élève (ou groupe d'élèves) dispose d'un jeu de photos repérés par des lettres et d'une grille de type suivant :

Solides	Photo
1	
2	
3	
⋮	

Pour remplir cette grille, les élèves peuvent manipuler les solides.

Il sera intéressant d'observer la stratégie développée par les enfants.

1.3. Deuxième séance : *exercices de communication solide-solide*

(Voir Aides Pédagogiques pour le C.E.).

1.4. Troisième séance : *exercices de communication : solide-photo*

a) *Objectif* : Apprendre à lire une photo ; retrouver l'angle de prise de vue ; être capable de décrire (écrit ou oral) un solide ou une photo.

b) *Déroulement* :

1) Un groupe d'élèves est émetteur, il décrit un solide, les groupes récepteurs doivent identifier la photo correspondante.

2) Inversement, le groupe émetteur dispose des photos et les groupes récepteurs des solides.

2. ETUDE D'UN SOLIDE PARTICULIER : L'OCTAEDRE

Pourquoi avoir choisi l'octaèdre ? C'est un solide qui n'est ni trop simple (dans un C.M. il vaut mieux éviter d'étudier le cube et le tétraèdre qui ont mieux leur place au C.E.), ni trop complexe (toutes ses faces sont semblables ; le triangle équilatéral est aisément constructible au compas ; ce solide a la même organisation autour de chaque sommet). Pour une étude de polyèdre comportant une analyse assez fine de l'organisation et la réalisation du solide, le choix de l'octaèdre semble donc raisonnable.

La démarche utilisée pour cette étude peut être réinvestie pour l'étude d'un autre solide (de préférence convexe).

2.1. Matériel

— Un octaèdre régulier dont chaque face est repérée par un signe particulier.
— Jeu de 7 photos prises sous différents angles (voir en annexe) de l'octaèdre.
— Cartons, compas, ciseaux, ruban adhésif.
— Système adhésif permettant d'accrocher les signes.

Déroulement général : Les différentes étapes décrites ci-dessous ne coïncident pas nécessairement avec des séances.

2.2. Première étape : ***description d'un octaèdre à partir de photos.***

Objectif : Imaginer un objet à partir de photos prises sous des angles différents.

Déroulement : A partir des trois photos 031, 041 C et 042 (voir annexe) déterminer les éléments constitutifs du solide.

Travail par groupes (deux ou trois élèves par groupe) ; chaque groupe reçoit les trois photos 031, 041 C et 042 (ou des photocopies de ces photos).

Consigne : voici trois photos d'un même solide ; chaque face apparaît sur au moins une des photos ; pouvez-vous donner une description de ce solide ?

On procède à une mise en commun pour établir une conclusion. On vérifie en montrant le solide qui a servi à réaliser les photos (solide avec les signes).

On veut arriver à la conclusion minimale : c'est un solide qui a huit faces identiques, chaque face est un triangle équilatéral. Peut-être est-il possible d'obtenir une information supplémentaire du type : il y a quatre faces autour de chaque sommet ; cela s'obtient assez facilement si les élèves ont fait les exercices de la partie 1.

2.3. Deuxième étape : ***étude et construction d'un triangle équilatéral***

Remarque : La poursuite des activités concernant l'octaèdre nécessite une étude plus approfondie d'une notion de géométrie plane : le triangle équilatéral.

2.4. Troisième étape : ***assemblage de triangles équilatéraux***

Objectif : Réaliser un octaèdre à partir de huit triangles équilatéraux.

Déroulement : Construire les huit triangles équilatéraux (on observera avec intérêt les méthodes utilisées : presque toujours triangles séparés au lieu de bandes). Les découper et les assembler avec du ruban adhésif, en prenant en compte les observations de la première étape (organisation autour d'un sommet) pour obtenir un solide analogue à celui dont on a les photos (de la première étape).

2.5. Quatrième étape : ***patrons de l'octaèdre***

Objectif : Etre capable de découvrir un patron.

Déroulement : En utilisant les solides obtenus à l'étape précédente, les enfants découpent le plus petit nombre possible d'arêtes scotchées, de façon à obtenir les huit triangles à plat sur la table et non séparés (si on soulève un triangle, on doit soulever les huit).

Recherche des onglets.

Supposons que l'on obtienne une configuration du type de la figure 1.

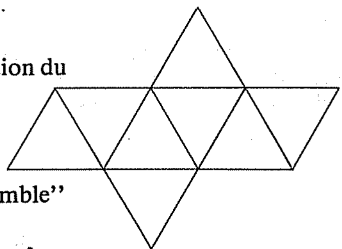


figure 1

Question : Quels sont les côtés qui "vont ensemble" pour former une arête ?

On va repérer par une même couleur (ou un même graphisme, ou un même numéro), les côtés qui "vont ensemble" et qui ne sont plus scotchés.

Pour cela les enfants reconstituent éventuellement le solide.

On obtient ainsi différents patrons avec arêtes colorées (figure 2). On les affiche au tableau en regroupant les patrons semblables. Deux patrons sont dits semblables s'il existe un moyen de les superposer (y compris en les retournant si nécessaire).

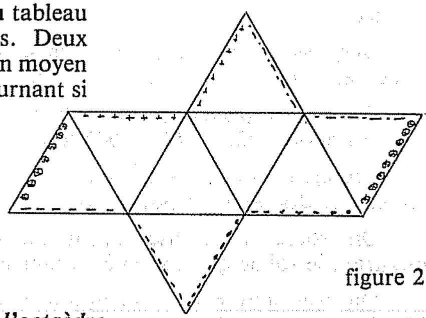


figure 2

2.6. Cinquième étape : ***construction de l'octaèdre***

Objectif : A partir d'un patron, être capable de réaliser un solide.

Déroulement : On part des patrons obtenus à l'étape précédente. On construit les patrons sur une feuille de carton, on peut changer la longueur du côté.

On peut alors rappeler la construction en triangles "séparés" faite bien souvent au cours de la deuxième étape et souligner ici le fait qu'une construction "en bande" est possible. Les arêtes colorées permettent de prévoir les onglets. Marquer les arêtes (avec un crayon bille usagé par exemple), plier, encoller, assembler.

2.7. Sixième étape : ***indications spatiales fournies par des représentations planes***

Objectif : Etre capable d'établir des relations d'incidence entre les faces du solide à partir des photos.

Déroulement : Les huit signes amovibles et leur moyen d'accrochage sont distribués aux enfants ; ils ont en leur possession l'octaèdre construit à l'étape précédente.

Chaque enfant (ou groupe d'enfants) reçoit une première série de photos par exemple : (041 c, 042) ou (042, 041 b) ou (041 b, 041 a, 031) (voir en annexe).

Cette première série permet de reconstituer exactement le solide photographié.

Ils reçoivent ensuite une seconde série de photos, par exemple (041 b, 031, 032, 02) ou (041 a, 041 b, 032, 02) ou (041 a, 032, 02).

Cette seconde série ne permet pas la reconstitution à coup sûr ; il y a plusieurs dispositions des signes correspondant à un jeu de photos de cette série.

Consigne : Placer les signes conformément à la première série, puis à la seconde série. Dans chaque cas, comparer avec le modèle qui est placé sur une table, au fond de la classe par exemple.

Synthèse :

— faire observer que le nombre minimal de photos (à condition de connaître par ailleurs les huit signes différents) est deux ;

— faire remarquer que certains groupements de quatre photos ne permettent pas la reconstitution certaine du solide photographié ;

— insister sur le fait qu'il ne s'agit pas d'une devinette et que le signe ne doit pas être placé au hasard ; ne placer que les signes pour lesquels l'observation du groupement de photos donne une certitude.

3. MESURES

3.1. Matériel :

— Cubes emboîtables (dimensions 1, 1, 1)
— Boîtes parallélépipédiques (dimensions 2,5,3 - dimensions 4,10,6)
— Boîtes cubiques (dimensions 2,2,2 - dimensions 4,4,4)
— En carton, 2 tétraèdres réguliers d'arêtes a et 2a sans fond pour pouvoir recevoir du sable.

Objectifs :
— Montrer la corrélation qui existe entre les mesures de longueurs, les aires des surfaces et les volumes des solides.
— Construire des solides.
— Utiliser un formulaire.
— Pratiquer des mesures.

3.2. Première étape : *aires de surfaces semblables (homothétiques)*

Déroulement :
— Comparer les aires de 2 carrés, l'un de côté a , l'autre de côté 2a.
— Comparer les aires d'un rectangle de dimensions (ℓ,L) et d'un rectangle de dimensions (2ℓ, 2L).
— Comparer les aires de 2 triangles de côtés (a,b,c) et de côtés (2a, 2b, 2c).

Conclusion : Qu'obtient-on en faisant varier le facteur multiplicatif (qui peut être égal à 10 dans le système métrique) ?

3.3. Deuxième étape : *volumes de solides semblables (homothétiques)*

Déroulement :
— Comparer les volumes de 2 cubes d'arêtes 2 et 4.
— Comparer les volumes d'un pavé de dimensions (2,5,3) et d'un pavé de dimensions (4,10,6). Méthode : empiler les cubes, utiliser du sable ou du sucre en poudre.
— Comparer les volumes des 2 tétraèdres (d'arête a et d'arête 2a). Méthode : utiliser du sucre en poudre ou du sable.
— Conclusion.

3.4. Troisième étape : *volume de l'octaèdre*

Déroulement :
— On construit un octaèdre d'arête a , et 4 tétraèdres d'arête a .
— On assemble ces 5 solides pour obtenir un tétraèdre pour lequel on vérifie que la mesure de son arête est 2a.
— On en déduit le volume de l'octaèdre :

$$\begin{cases} V_t & \text{volume du grand tétraèdre (arête 2a)} \\ v_t & \text{volume du petit tétraèdre (arête a)} \\ V_0 & \text{volume de l'octaèdre d'arête a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_t = 8\,v_t \\ V_t = V_0 + 4\,v_t \end{cases}$$

donc $V_0 = 4\,v_t$

3.5. Quatrième étape : *recherche de v_t*

Dans un formulaire on trouve la formule donnant le volume d'une pyramide

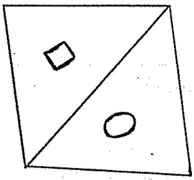
$$V = \frac{1}{3}Bh$$

— Calcul de B : aire d'un triangle équilatéral
- mesure du côté
- mesure de la hauteur de ce triangle.

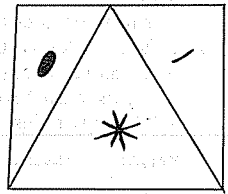
— Mesure expérimentale de la hauteur h du petit tétraèdre d'arête a .

On pourra donner un encadrement de la hauteur en mesurant la différence de niveau entre le plan de la base et le plan parallèle à la base passant par le sommet (le dernier plan s'obtiendra par exemple en faisant reposer une feuille de carton sur 3 tétraèdres).

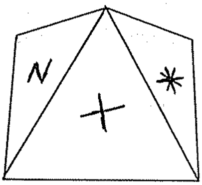
ANNEXE



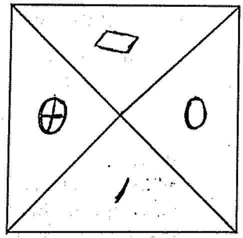
02
[octaèdre, 2 faces]



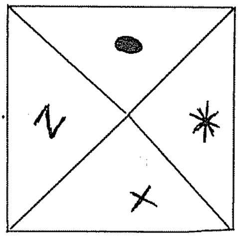
031
[octaèdre, 3 faces, 1re photo]



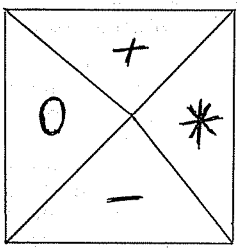
032
[octaèdre, 3 faces, 2e photo]



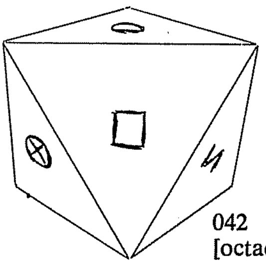
041a
[octaèdre, 4 faces,
1re façon de prendre 4 faces, photo a]



041b
[octaèdre, 4 faces,
1re façon de prendre 4 faces,
photo b]



041c
[octaèdre, 4 faces,
1re façon de prendre 4 faces, photo c]



042
[octaèdre, 4 faces, 2e façon de prendre 4 faces]

CHAPITRE IV

DODÉCAÈDRES ET PENTAGONES RÉGULIERS

1. RAPPEL ET PRÉSENTATION

1.1. Rappel : *Un polygone est dit régulier si tous les côtés jouent le même rôle et si tous les sommets jouent le même rôle dans l'ensemble de la figure, ce qui revient à dire que les côtés ont tous la même longueur et que tous les angles sont égaux.*

Dans le cas du triangle l'une des conditions entraîne l'autre : si les trois côtés sont de même longueur les trois angles sont égaux et, inversement, si les trois angles sont égaux les trois côtés ont même longueur.

Mais pour un polygone ayant quatre sommets ou davantage l'une des conditions peut être réalisée sans que l'autre le soit.

Par exemples : losange et rectangles non carrés ou les deux pentagones ci-dessous (figure 1)

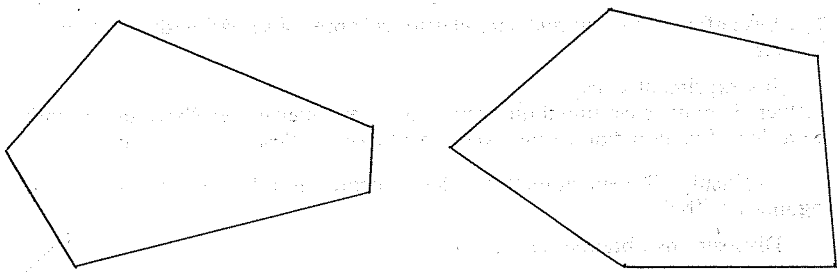


figure 1

1.2. L'activité décrite ici, réalisée par l'ensemble des élèves de la classe de CM_2, a eu pour *point de départ* un travail fait par *un groupe d'élèves en atelier* de géométrie. Elle a abouti

— à la *construction du pentagone régulier*

— à la construction du *dodécaèdre*

— à des *tracés* dans un pentagone, en se donnant des *règles* (***proposées par les enfants***).

1.3. Organisation du travail en atelier (première séance)

Numéro groupes	1	2 et 3	4
MATÉRIEL	triangles équilatéraux isométriques en plastique	polygones en carton et élastiques	pentagones réguliers isométriques en carton et élastiques
CONSIGNES ORALES	1°) Faire des solides avec le matériel; dénombrer faces, arêtes, sommets. 2°) Chercher des patrons par "mise à plat" de la surface qui limite le solide. 3°) Dessiner la forme obtenue en 2 en vue de construire, plus tard, un patron du solide et de faire un solide grâce au patron.		

2. ACTIVITÉS AVEC DES PENTAGONES PRÉDÉCOUPÉS

Voici un résumé bref de l'activité du groupe 4 avec les pentagones.

2.1. Première séance

— Les enfants font un dodécaèdre en assemblant les pentagones avec des élastiques

	Faces	Arêtes	Sommets
NOMBRE	12	30	20

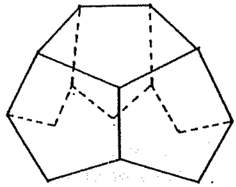
2.2. Les enfants enlèvent quelques élastiques, après observation du solide *posé sur la table*.

Il s'expriment ainsi :
..."vers le haut, c'est pareil que vers le bas ; en enlevant les élastiques au milieu, on a deux fois la même forme avec 6 pentagones, c'est comme un bol..."

— Ensuite, ils veulent mettre à plat la surface, non fermée, formée par 6 pentagones (le "bol").

Dispositions obtenues en deux essais.

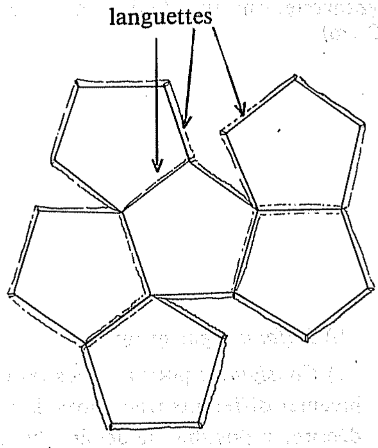
Premier essai avec un bol :



..."Il y a deux bols comme cela..."

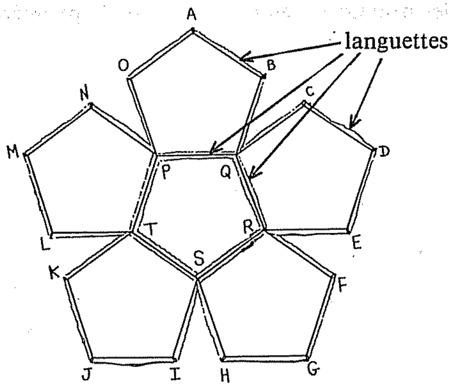
figure 2

figure 3



Deuxième essai avec l'autre bol :

figure 4



2.3. Les enfants ne veulent pas dessiner car cela leur semble difficile ; ils se contentent de dire : ...“c'est *une fleur à 5 pétales et un cœur...*”

REMARQUES IMPORTANTES : — sommets alignés
(ex. : M,P,Q,D et N,P,R,F)
— il y a un grand pentagone

Les remarques feront l'objet d'un travail plus approfondi au cours des autres séances.

2.4. Deuxième séance

Communication orale faite par les divers groupes.

3. DESSINS A PARTIR DES SOMMETS D'UN PENTAGONE

3.1. Troisième séance - ***Première partie***

a) *Matériel :* sommets d'un grand pentagone régulier, placés par le maître au tableau et sur des feuilles de papier dessin grand format 42 × 30 (par exemple, le pentagone, sur une feuille, a été construit à l'intérieur d'un cercle de rayon 12 cm).

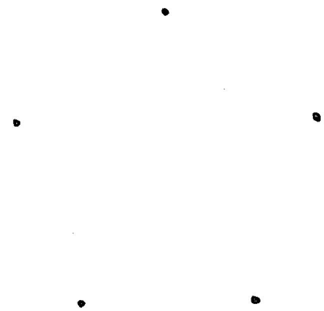


figure 5

b) *Enfants :* par groupes.

c) *Consignes :* pour tous les groupes.

— inventer différents tracés avec la règle en utilisant ces 5 points
— décrire, si possible, le dessin obtenu.

Parmi les résultats, celui-ci que les enfants *comparent* avec la disposition obtenue avec les pentagones en carton lors de la première séance.

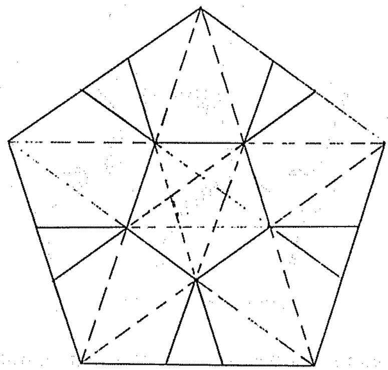


figure 6

3.2. Un texte a été rédigé par quelques enfants :

I. Quand on rejoint tous les points ça donne un pentagone régulier.

II. Quand on trace toutes les diagonales on découvre au centre un second pentagone.

III. Toutes les diagonales dessinées forment une étoile à 5 branches.

IV. On refait les diagonales à l'intérieur du second pentagone cela donne une autre étoile et un troisième pentagone.

V. Si vous prolongez les diagonales du deuxième pentagone cela donne (cinq) petits triangles isocèles.

VI. Si on trouve tous les pentagones cela donne une fleur à cinq pétales et un cœur.

VII. Tous les pentagones sont réguliers et identiques.

3.3. Demi-patron de Dodécaèdre

Obtenu à partir des tracés précédents.

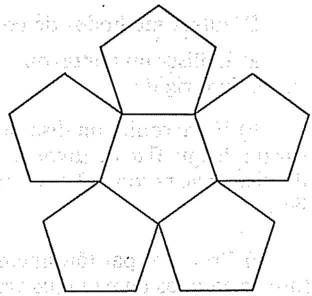


figure 7

3.4. *Deuxième partie :* Communication orale entre les groupes.

Les enfants ont été extrêmement intéressés par la multitude de dessins qu'ils pouvaient faire en partant des 5 sommets du grand pentagone régulier, ce qui explique les nombreuses productions qui viendront après.

4. CONSTRUCTION DU PENTAGONE RÉGULIER

4.1. Quatrième séance

Une méthode de construction (*) a été choisie et proposée aux élèves sous forme de consignes écrites :

On utilise la règle et le compas.

— *choisis un point O sur ta feuille*
— *trace un cercle de centre O*
— *construis deux rayons OA et OB perpendiculaires*
— *marque le point C au milieu du segment OA*
— *trace BC*
— *trace le cercle de diamètre OA. Il coupe le segment BC en D.*
— *trace le cercle de centre B et de rayon BD. Il coupe le cercle de centre O en deux points que tu appelles E et F.*
— *le segment EF est un côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle et de sommets E, F, G, H, I.*

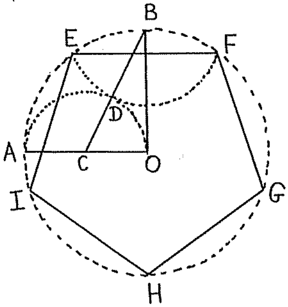


figure 8

(*) On trouvera une autre méthode de construction en IX.

4.2. Variantes

D'autres méthodes de construction peuvent être proposées, par exemple :

a) Utiliser un pentagone régulier déjà réalisé, mais "plus petit", en papier ou en matière rigide.

b) Faire rouler un disque de rayon 1, sur le bord duquel on marque un point, sur un disque fixe de rayon 5. Le point marqué revient périodiquement au contact du disque de rayon 5. Les points de contact sont les sommets d'un pentagone régulier.

c) Procéder par tâtonnement. Après avoir tracé un cercle, choisir une ouverture de compas un peu plus grande que le rayon, la reporter cinq fois ; partager en cinq à vue ou à l'aide d'une règle graduée l'arc compris entre le premier et le dernier point ; rectifier ainsi l'ouverture du compas et recommencer. Avec un peu d'adresse à la seconde rectification, l'erreur restante est absorbée par l'épaisseur des traits.

d) Utiliser un rapporteur (72°).

5. ACTIVITÉS SUR PLANCHE A CLOUS ET TRACÉS CORRESPONDANTS

On peut reprendre la recherche précédente en proposant aux enfants une planche à clous frabriquée selon la disposition de la figure 9.

Ils ont alors la possibilité d'ajouter d'autres clous — dont les positions sont déterminées soit par des "croisements d'élastiques", soit par des "mesures" sur des côtés ou des prolongements de côtés — et de tracer alors de nombreux pentagones.

Avec les élastiques, les enfants font apparaître :

— des *familles*
- de formes géométriques
- de droites parallèles
- de points alignés

— et, bien sûr, *un demi-patron de dodécaèdre.*

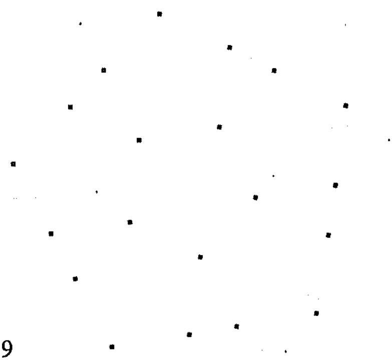


figure 9

6. ALBUM DES TRACÉS DES ENFANTS

6.1. Matériel : le maître met à la disposition des enfants plusieurs feuilles de dessin grand format sur lesquelles il a placé les 20 points décrits par la figure 9. Par la suite, après la séance, les enfants utiliseront ces feuilles librement pour faire d'autres tracés.

6.2. Utilisation : *les enfants se fixent une règle de tracés pour chaque figure.*

Par exemple :

1)
- figures 12, 13, 14, 15 : des lignes continues fermées
- figure 16 : des pentagones réguliers (les enfants ont pris 4 couleurs pour les 4 pentagones)
- figure 17 : des alignements avec 3 ou 4 points
- figure 18 : des segments de même longueur (une couleur par longueur)
- figure 19 : cinq familles de droites parallèles (une couleur par famille)
- etc. jusqu'à la figure 24.

2) *Nouvelle règle* proposée aux élèves qui pourront en inventer encore d'autres :

a) on utilise 15 points numérotés de 1 à 15, ceux situés sur les côtés du grand pentagone (voir figure 10).

b) joindre les points par des *segments, en tournant*, et en sautant n points.

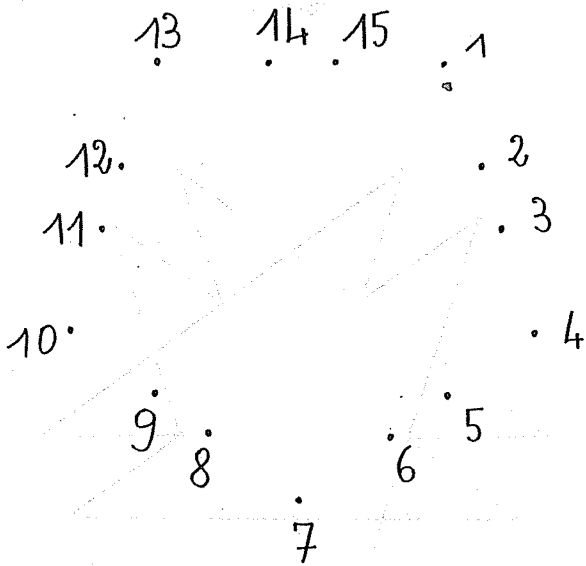


figure 10

Les figures 25 à 31 sont des exemples de ce qu'on peut obtenir en utilisant une telle numérotation.

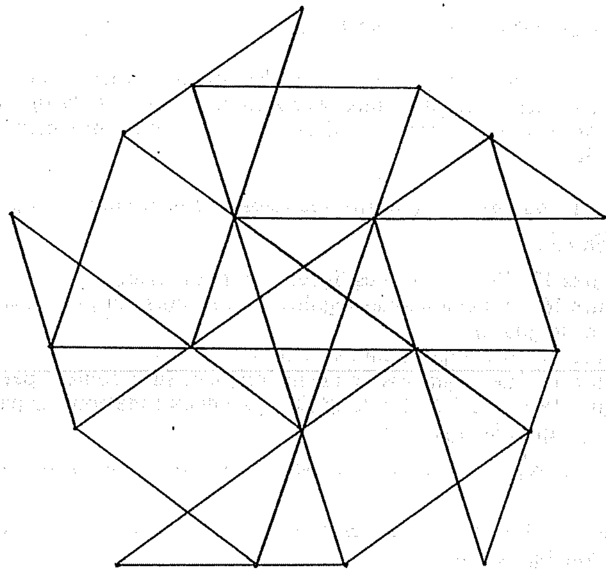


figure 11

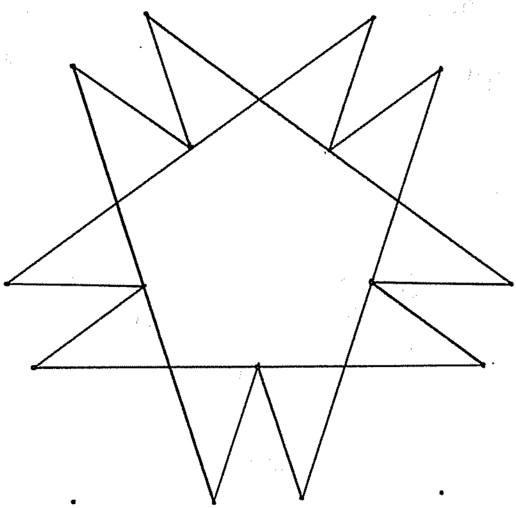


figure 12

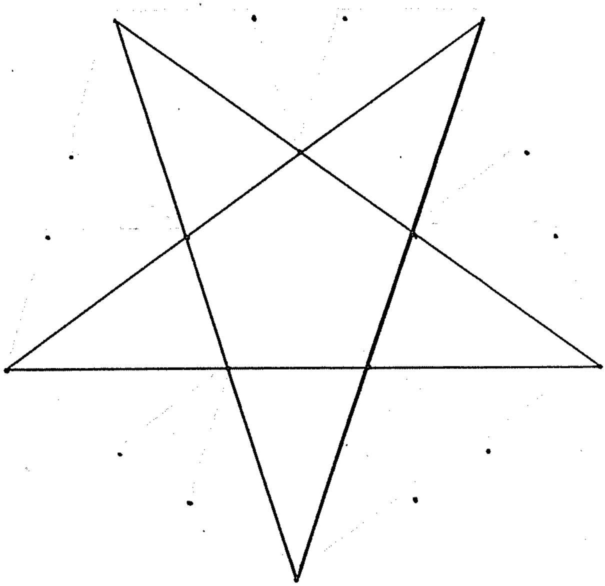


figure 13

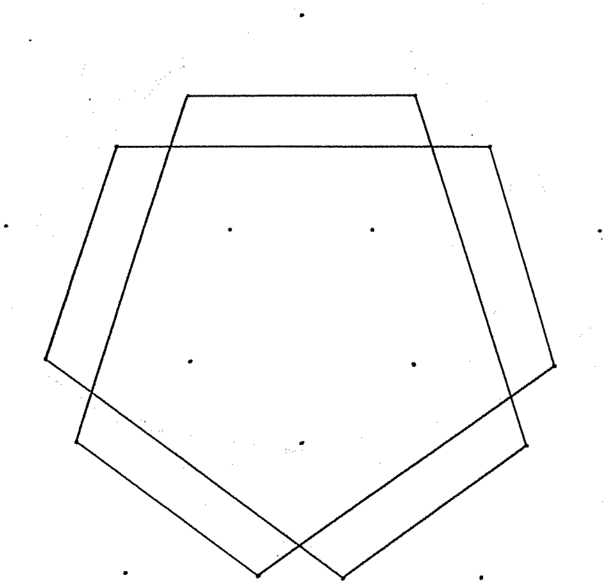


figure 14

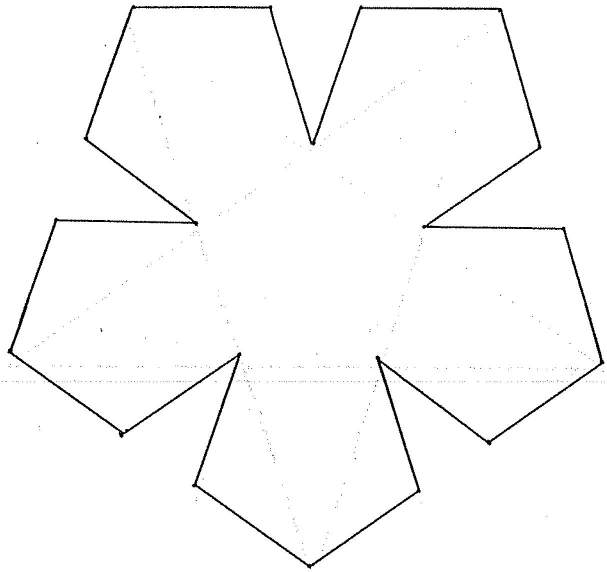


figure 15

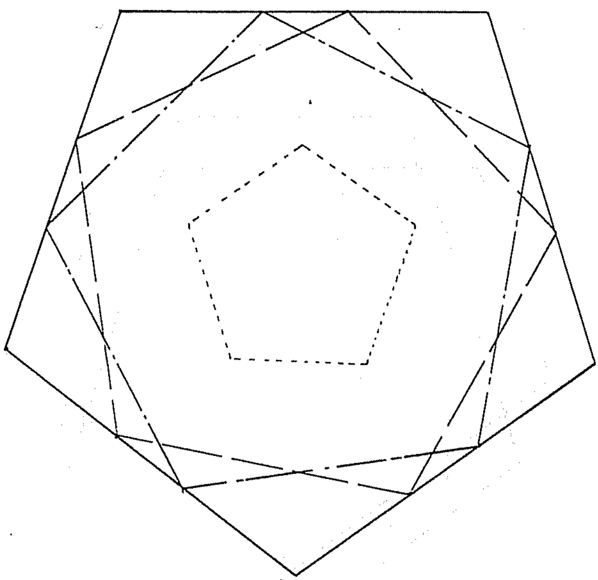


figure 16

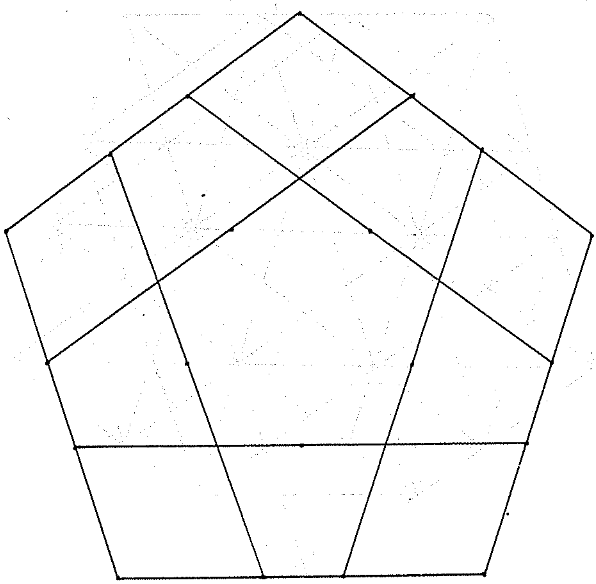


figure 17

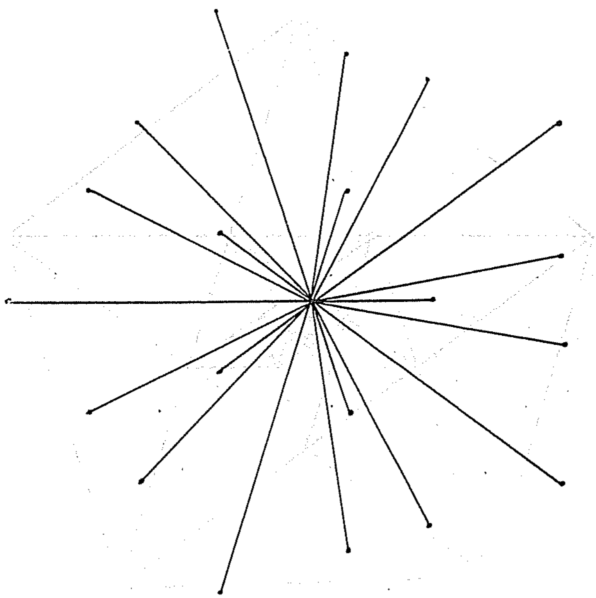


figure 18

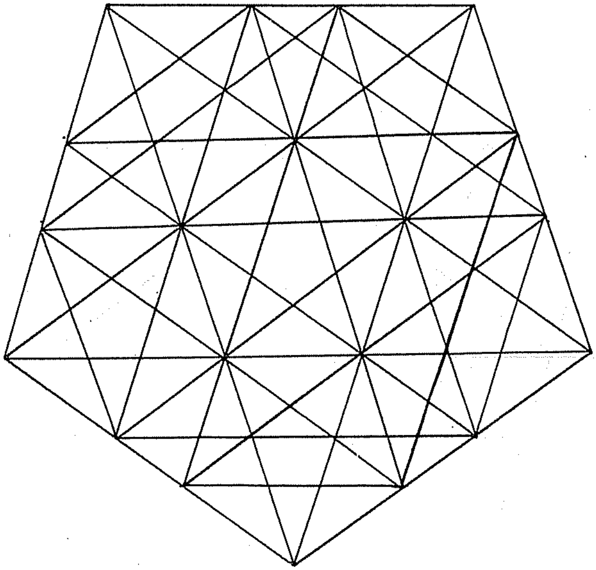


figure 19

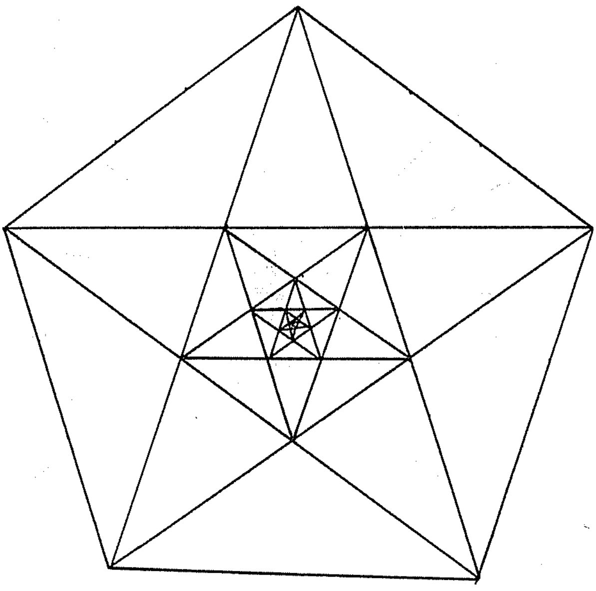


figure 20
Des étoiles à 5 branches de plus en plus petites.

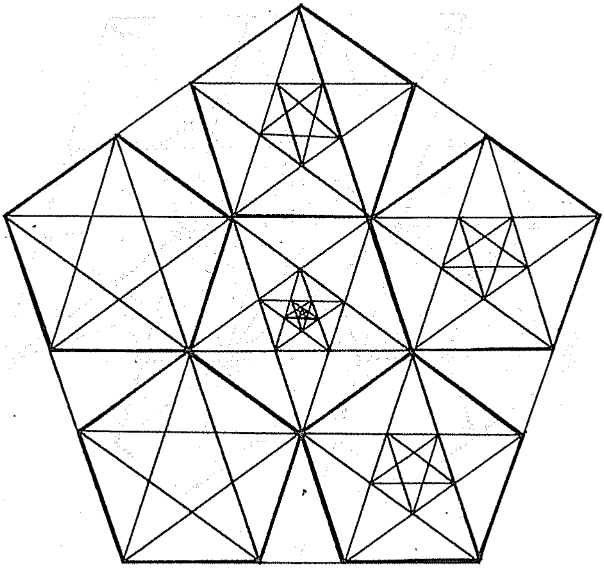


figure 21

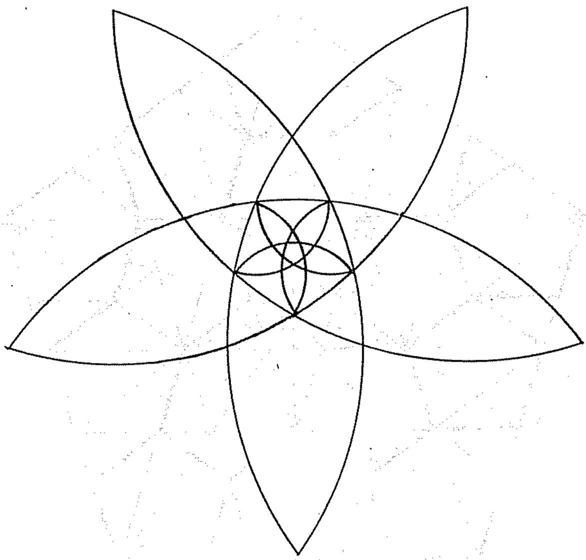


figure 22
On pourrait faire plus petit.

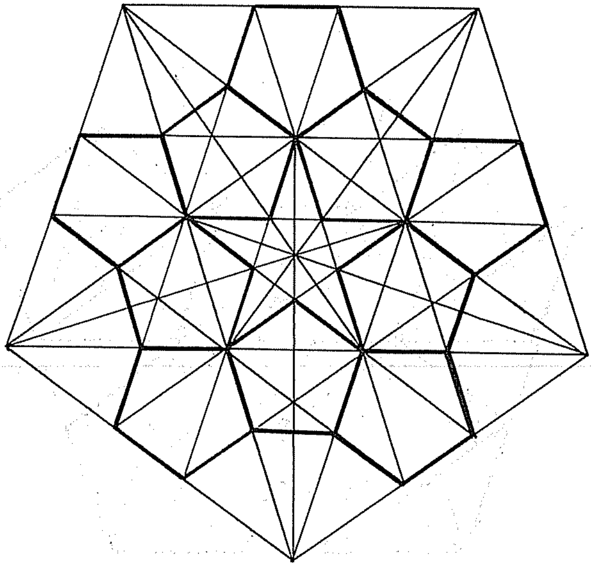


figure 23
Exemple inachevé.

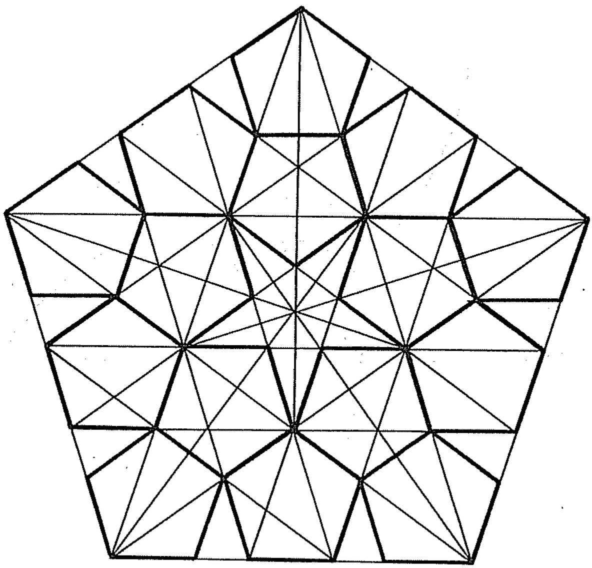


figure 24
Exemple achevé.

Sauter 1 point.

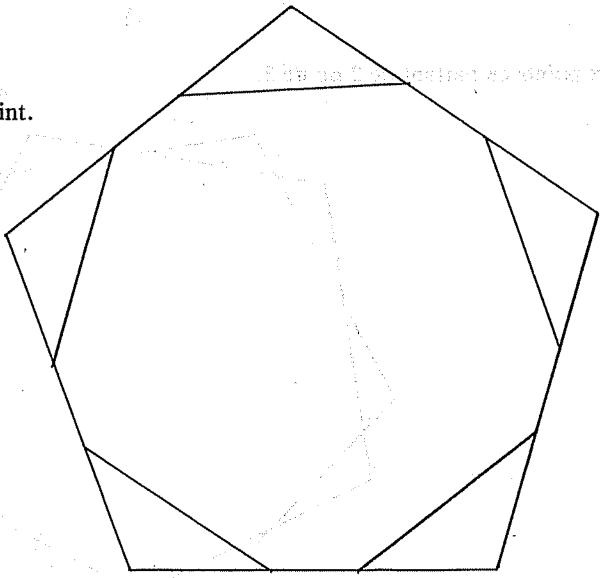


figure 25

Sauter 2 points en partant de 1.

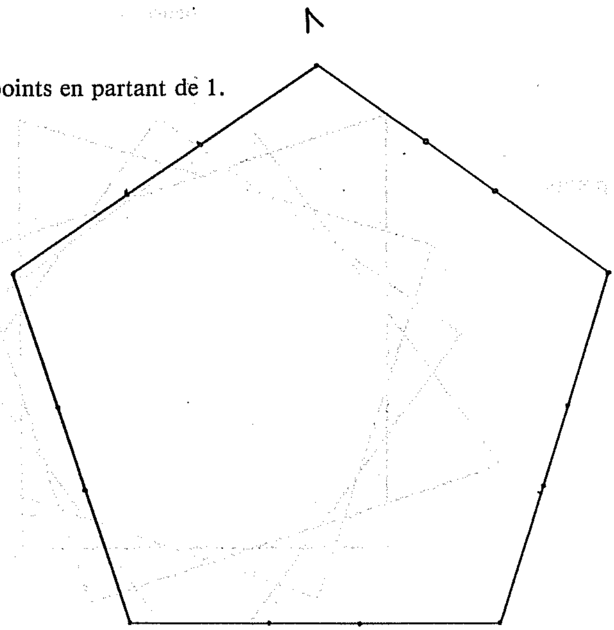


figure 26

On obtient un pentagone régulier.

Sauter deux points en partant de 2 ou de 3.

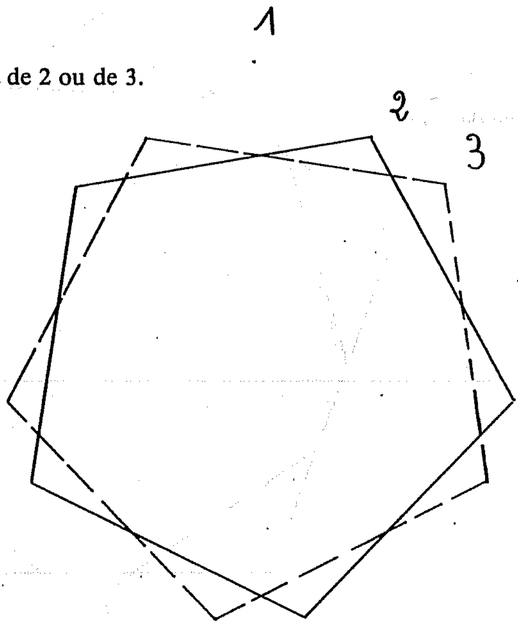


figure 27

Sauter trois points.

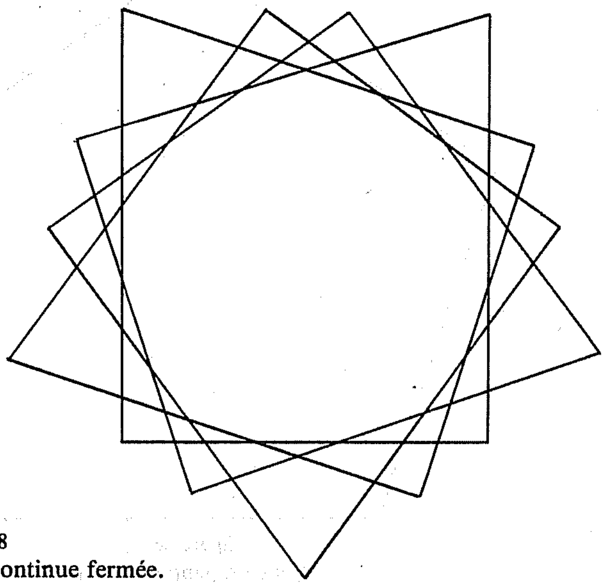


figure 28

On obtient une ligne continue fermée.

Sauter 4 points (ou 9 points) en partant de 1, puis de 2, puis de 3, puis de 4, puis de 5.

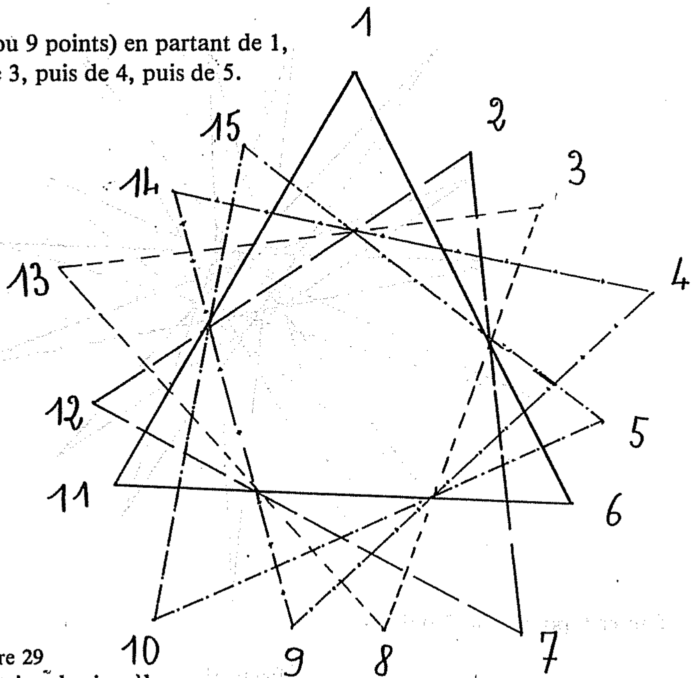


figure 29

On obtient cinq triangles isocèles.

Sauter 5 points en partant de 1, puis de 2, puis de 3.

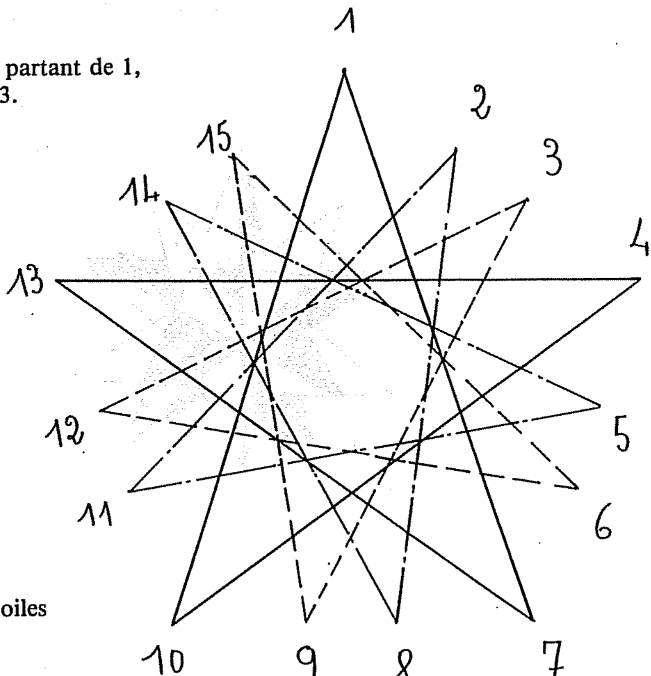
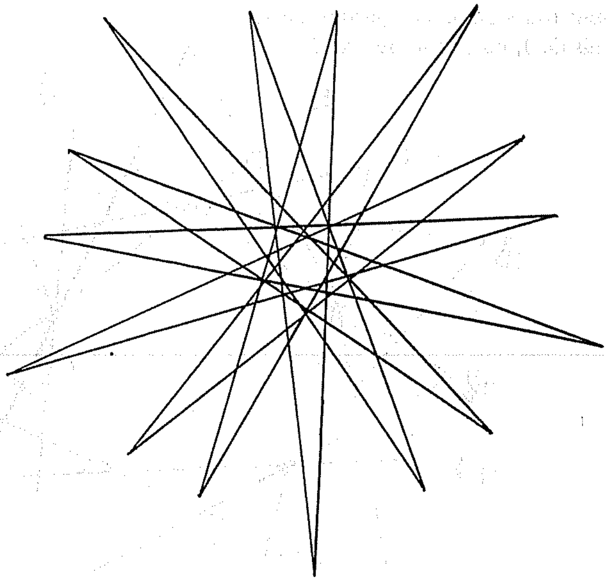


figure 30

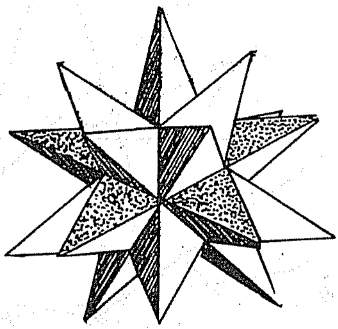
On obtient trois étoiles à cinq branches.



Sauter 6 points (ou 7 points).

figure 31

On obtient une ligne continue fermée.



CHAPITRE V

CONSTRUCTION DE POLYÈDRES TRONQUÉS

à partir de polyèdres déjà étudiés

Au cours de ces activités les élèves ont l'occasion de faire des découvertes et de réinvestir des acquis antérieurs (relations d'incidence, propriétés de figures géométriques...).

1. TÉTRAÈDRE TRONQUÉ

L'étude du tétraèdre a été faite préalablement (voir par exemple les aides pédagogiques pour le C.E.).

1.1. Première consigne : Construire un tétraèdre dont les faces sont des triangles équilatéraux de 6 cm de côté.

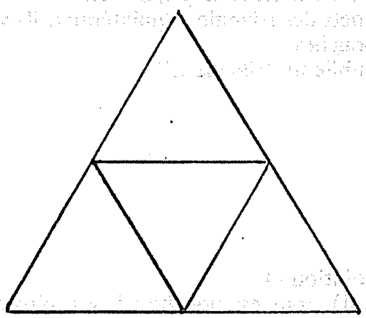


figure 2

Les enfants ont réalisé des patrons. Voici leurs réactions : ... "c'est facile ; il y a 2 méthodes : avec le grand triangle équilatéral de côté 12 cm ou avec le grand parallélogramme formé de 4 triangles équilatéraux..."

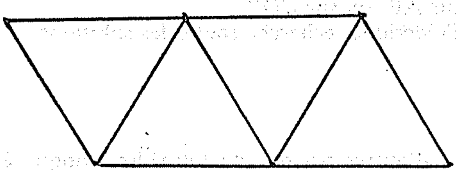


figure 1

Puis, par pliage et collage avec le scotch, le tétraèdre est réalisé.

1.2. Deuxième consigne : Couper les "coins" du tétraèdre en retirant 2 cm, sur les arêtes, à partir de chaque sommet.

Réaction des enfants : ..."c'est facile..." ..."j'ai enlevé 4 petits tétraèdres réguliers...".

1.3. Troisième consigne : Essayer de trouver un patron du tétraèdre tronqué.

Plusieurs solutions sont proposées :

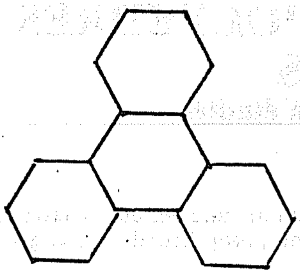


figure 3

Solution a) : Les enfants mettent à plat en coupant le scotch.
..."J'ai 4 hexagones réguliers de 2 cm de côté. Si je ferme, il y a des trous..."

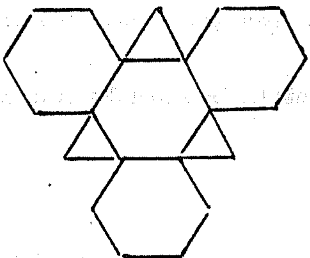


figure 4

Solution b) :
..."Il y a des trous triangulaires.
Si je mets des triangles équilatéraux, ils vont être bouchés.
J'ai oublié un triangle..."

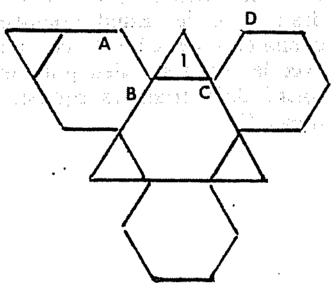


figure 5

Solution c) :
..."Voilà, tout est bouché ; il y a plusieurs possibilités.
Le triangle 1 peut être accroché sur BC, ou sur AB, ou sur CD"...
Frédérique recherche toutes les solutions.

1.4. Quatrième consigne : Rechercher d'autres patrons du tétraèdre tronqué à partir des 2 patrons du tétraèdre régulier.

a) Exemple donné par les enfants :

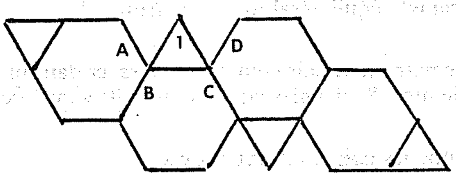


figure 6

Stephan : ..“il faut à tout prix 4 hexagones et 4 triangles et cela marche...”’

François : ...“il faut faire attention de ne pas mettre 2 triangles dans le même trou. (1 sur AB et 1 sur BC ou CD).

b) Les élèves repartent du patron du tétraèdre qu’ils modifient

— on refait un tétraèdre en utilisant le scotch ;

— à chaque “coin” 3 triangles équilatéraux ont été coupés dans la 2ème partie. Cette fois-ci on les numérote sur le tétraèdre sans les couper. On enlève le scotch pour remettre à plat.

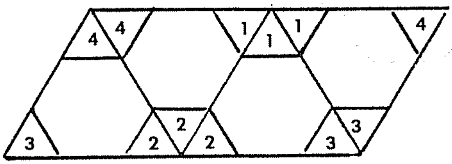


figure 7

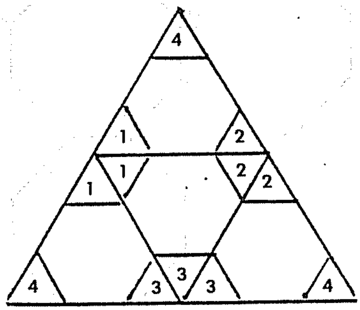


figure 8

1.5. Conclusion des enfants : pour avoir un patron du tétraèdre tronqué, il faut garder :

- les 4 hexagones
- un triangle numéroté 1
- un triangle numéroté 2
- un triangle numéroté 3
- un triangle numéroté 4.

2. TRONQUER UN CUBE

Les enfants ont voulu tenter la même démarche à partir d’un cube. Trois exemples.

2.1. Premier exemple : Tronquer un cube d’arête 6 cm en retirant 2 cm, sur les arêtes, à partir de chaque sommet.

a) *Première étape : construire le cube* à partir d’un patron.

— on plie le patron et on colle avec le scotch

— il y a plusieurs possibilités.

b) *Deuxième étape : couper les coins*

..."J'ai enlevé 8 petits tétraèdres. Ils ne sont pas réguliers car leurs faces sont 3 triangles rectangles isocèles et un triangle équilatéral qui est le trou..."

Le cube est tronqué :

..."il me faut 6 octogones pour le patron. Je sais comment les tracer dans un carré. Il y a 8 trous triangulaires. Si je mets 8 triangles équilatéraux, ils vont être bouchés..."

En enlevant le scotch, après avoir coupé les coins, on obtient ceci :

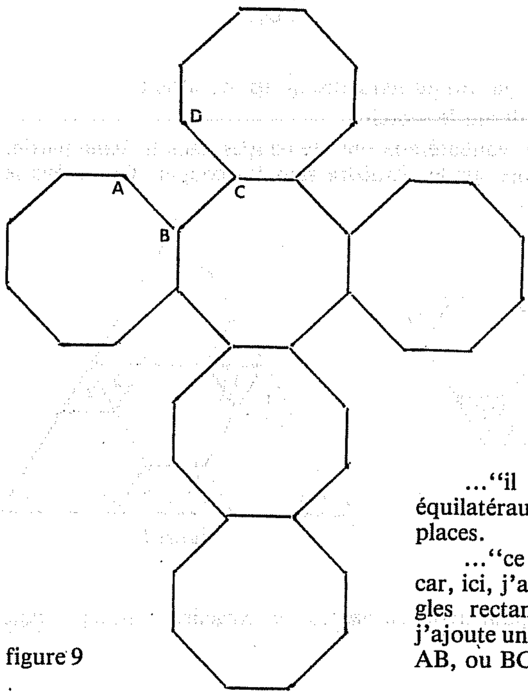


figure 9

..."il faut que j'ajoute 8 triangles équilatéraux. Il faut faire attention à leurs places.

..."ce n'est pas comme le tétraèdre car, ici, j'ai coupé, à chaque coin 3 triangles rectangles isocèles et il faut que j'ajoute un triangle équilatéral attaché sur AB, ou BC, ou CD, pour un trou..."

2.2. Troisième étape : Patron du cube tronqué.

Problème : *Où faut-il construire les 8 triangles équilatéraux, pour que les 8 trous soient bouchés ?*

a) *Tâtonnement des enfants*

Tout d'abord un échec : le patron du cube ne leur suffit pas car ils n'ont pas de place pour construire les triangles équilatéraux alors que dans le cas du tétraèdre, cela suffisait.

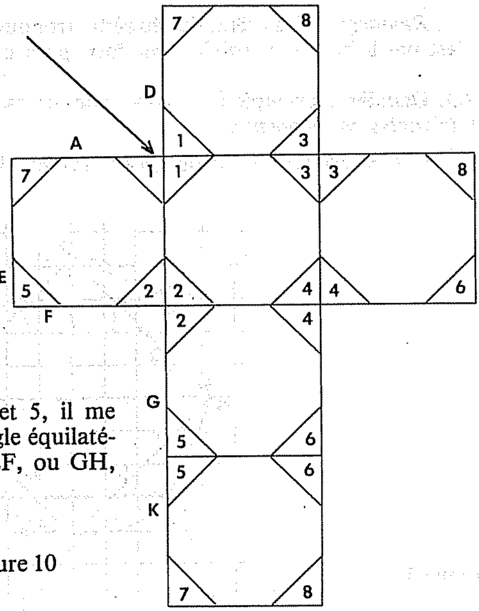
b) *Pour connaître la place des triangles équilatéraux,*

— on refait un cube dans du carton fin à partir d'un patron avec du scotch

— sur les faces du cube, on *numérote* les triangles rectangles qui ont été enlevés sur le premier cube (même numéro à un coin donné).

— on enlève le scotch pour remettre à plat.

...“ici, il faut un triangle équilatéral de côté AB, ou BC, ou CD...”



...“au sommet 5, il me faut un triangle équilatéral de côté EF, ou GH, ou HK...”

figure 10

c) *On recommence* sur une feuille blanche ou quadrillée, sans découper le patron du cube. Il y a de nombreuses possibilités. Chaque enfant choisit son patron.

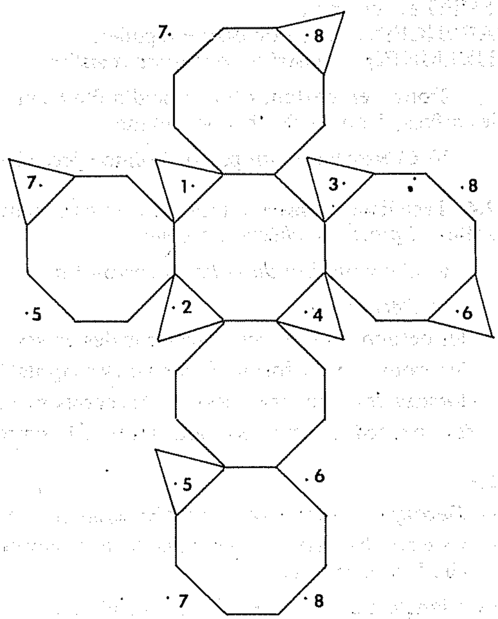


figure 11

Remarque : les arêtes du tétraèdre tronqué sont toutes de même longueur. Ce n'est pas le cas de ce solide. Que faire pour qu'il en soit ainsi ?

2.3. Deuxième exemple : Le cube tronqué est fait avec *6 octogones réguliers* et *8 triangles équilatéraux.*

a) *Construction d'un octogone régulier dans le cercle*

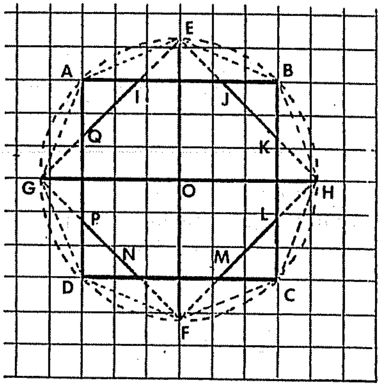


figure 12

Le carré ABCD est inscrit dans le cercle de centre O.
Les diamètres EF et GH sont perpendiculaires aux côtés de ABCD.
EHFG est un carré.
AEBHCFDG est un octogone régulier.
IJKLMNPQ *est aussi un octogone régulier.*

Donc : en partant d'un cube d'arête 6 cm, il faut couper environ 1,7 cm sur les arêtes, à partir de chaque sommet.

b) *Construction du patron* comme précédemment.

2.4. Troisième exemple : Tronquer un cube d'arête *6 cm en retirant 3 cm,* sur les arêtes, *à partir de chaque sommet.*

a) *Construction du cube* en carton fin.

b) *Découpage :*

— les octogones sont remplacés par des carrés

— les trous, ont la forme de 8 triangles équilatéraux

— lorsque les coins sont coupés, les carrés ne se touchent qu'aux sommets.

Il faut procéder autrement pour trouver le patron.

2.5.

— *Découper 6 carrés et 8 triangles équilatéraux* de côtés de même longueur.

— les *assembler* avec du scotch en tenant compte de la *relation de voisinage* "touche" (voir tableau).

Le triangle qui doit être mis au "coin" 1 est appelé t_1 etc...

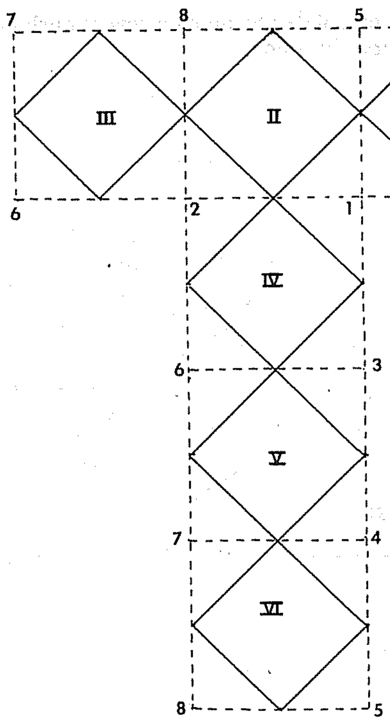


figure 13

Tableau

touche	I	II	III	IV	V	VI
t_1	×	×		×		
t_2		×	×	×		
t_3	×			×	×	
t_4	×				×	×
t_5	×	×				×
t_6			×	×	×	
t_7			×		×	×
t_8		×	×			×

On obtient un solide.

2.6. Mettre à plat la surface du solide obtenu en enlevant quelques morceaux de scotch, ce qui donne un *patron* du solide.

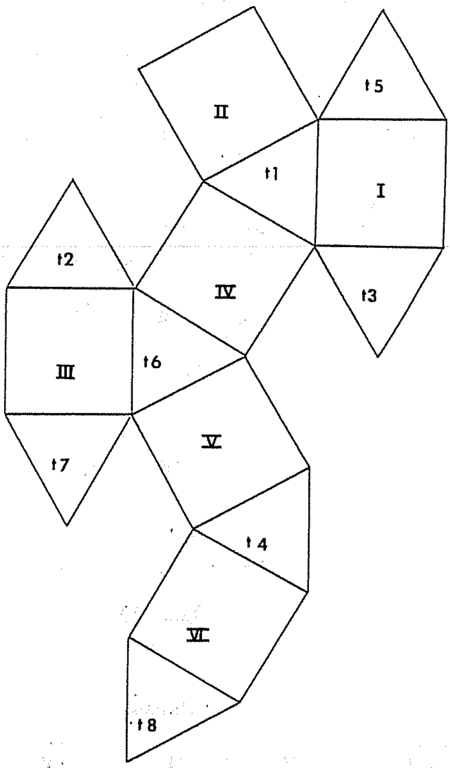


figure 14

3. PROLONGEMENTS

En utilisant le même procédé que précédemment, il est possible d'obtenir d'autres patrons de solides tronqués :

— décaèdre tronqué

— hexaèdre tronqué, octogone régulier tronqué, icosaèdre tronqué. Pour ces exemples, l'utilisation de réseaux triangulaires (triangles équilatéraux) facilite beaucoup la recherche.

De plus, on peut ne pas tronquer à tous les coins du polyèdre initial.

Enfin, on peut couper d'une manière différente d'un coin à un autre.

CHAPITRE VI

ACTIVITÉS SUR DES LIGNES ET DES SURFACES

L'objectif des activités décrites ci-après n'est pas de donner des définitions "à la sauvette" des notions de base telles que droite, plan, ligne, surface mais de faire découvrir, à partir de la manipulation d'objets physiques un certain nombre de propriétés de ces objets, propriétés qu'il sera loisible plus tard de formaliser et d'ordonner en une théorie cohérente. La technologie, qui nous apprend à construire certains de ces objets, utilise dans la pratique ces propriétés.

La description des activités en classe est précédée d'un paragraphe où sont définis quelques savoirs que l'on peut avec les élèves, expliciter et rendre opératoires.

1. DROITE ET PLAN

1.1. La droite

Soit un objet rectiligne, par exemple un fil tendu, ou une règle bien droite ; ou un alignement de points etc. En abstraire la droite "mathématique" consiste d'abord à considérer comme non "pertinentes" un certain nombre de propriétés de cet objet telles que : matière, couleur, diamètre et longueur du fil etc. dans la description que l'on en donne ; ensuite à dresser l'inventaire des propriétés que l'on considère comme pertinentes. Cet inventaire définit la droite "mathématique".

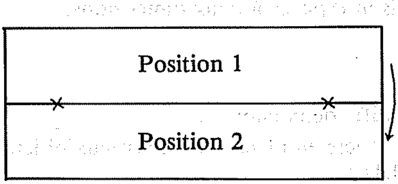


figure 1

a) Le menuisier qui contrôle sa règle par un double tracé (fig. 1) nous suggère une de ces propriétés : si les deux traits se superposent la règle est "droite" ce que nous pouvons traduire par la proposition :
"Si deux droites ont en commun deux points distincts, tous leurs points sont communs" ou encore "Il existe une seule droite passant par deux points distincts".

b) Sur une droite on peut déterminer un point par un seul nombre, par exemple la "distance" de ce point à un point fixe choisi arbitrairement sur cette droite.

La prise de conscience de cette propriété, déjà commencée au cours élémentaire, est renforcée par la graduation d'une droite avec des décimaux.

Cette propriété de pouvoir déterminer un point par un seul nombre n'est pas caractéristique de la seule droite mais de la plupart des courbes que l'on appelle pour cette raison "espaces à une dimension".

1.2. Le plan

Techniquement deux problèmes se posent à propos du plan physique :

- sa construction
- le contrôle de "planéité" d'une surface.

a) A partir de différentes constructions de plans physiques tels que chapes en ciment, planches, tronçonneuses, on peut abstraire différents modes de génération du plan mathématique dont les deux suivantes :

— Plan engendré par une droite mobile s'appuyant sur deux droites fixes concourantes ou parallèles.

— Plan engendré par une droite mobile autour d'un point fixe O et s'appuyant sur une droite fixe ne contenant pas O.

b) L'observation du menuisier... d'autrefois... occupé à "dresser" une planche à la varlope ou de l'ajusteur limant une pièce, contrôlant fréquemment la "planéité" de la surface qu'ils sont en train de réaliser à l'aide de l'arête de la varlope ou d'une règle nous conduit à une propriété du plan mathématique :

"Pour toute paire {A,B} de points du plan, la droite AB est contenue dans ce plan"

Si l'on essaye de réunir par un "trait droit" deux points distincts de la surface d'un cylindre, d'un cône, d'une sphère etc., on s'aperçoit que cette propriété caractérise le plan parmi les surfaces, constituant une définition de celui-ci à partir de la droite.

c) Le système de blocage d'un vasistas ou d'un couvercle de chassis (pour les légumes) fait concevoir une autre propriété du plan :

"Si deux plans ont en commun 3 points non alignés, tous leurs points sont communs"

ou encore

"Il existe un seul plan passant par trois points non alignés".

d) Sur un plan on peut déterminer un point par deux nombres, au moyen par exemple d'un quadrillage.

Cette propriété n'est pas caractéristique du plan ; elle est vraie pour la plupart des surfaces que l'on appelle pour cette raison espaces à deux dimensions.

1.3. La droite et le plan sont illimités

Dire que la droite est illimitée, cela signifie deux choses :

- il est possible d'enrichir un alignement d'objets en plaçant de nouveaux objets soit entre des objets déjà placés soit au delà ;
- la droite n'est pas bornée ; il est toujours possible de placer de nouveaux objets, en les alignant avec les premiers, aussi loin qu'on le veut, on ne peut pas enfermer une droite dans un lieu clos, une salle de classe par exemple ; elle déborde toujours.

De même le plan est illimité.

1.4. Les concepts de droite et de plan se construisent par la prise de conscience des particularités qui les caractérisent parmi les courbes et les surfaces. Cette idée est sous-jacente aux activités qui sont présentées ci-après. Les différents savoirs et savoir-faire sont rassemblés dans le tableau suivant :

Savoir-faire	Savoir
2 - Différentes réalisations de droites dans l'espace	
Contrôle de "linéarité" (1)	(1) Une propriété caractéristique de la droite
3 - Réalisation de portions de surfaces Génération du plan Réalisations d'autres surfaces à l'aide de droites Réalisations de "trames" de surfaces à l'aide de fils tendus	
4 - Contrôle de planéité (2)	(2) Une propriété caractéristique du plan
5 - Tracé de droites sur des surfaces (2)	
6 - Positionnement de lignes (1)	
7 - Positionnement de surfaces (3)	(3) Détermination d'un plan
8 - Reproduction et construction de solides Contrôle de fabrication (4)	(4) Conditions nécessaires et suffisantes

2. DIFFÉRENTES RÉALISATIONS DE DROITES DANS L'ESPACE

Nous appelons réalisation de droite tout objet rectiligne ou alignement de points etc. permettant une approche de la notion de droite.

2.1. Objectifs :

Manipuler des objets rectilignes afin de dégager certaines propriétés de la droite mathématique, notamment constater que deux points distincts de l'espace déterminent une droite.

Définir la droite indépendamment du plan.

2.2. Matériel :

Du papier, de la ficelle, des épingles, un cordeau de peintre, un fil à plomb. Comme support, de la pâte à modeler ou du carton ondulé (plusieurs épaisseurs), ou du polystyrène ou de l'isorel mou etc.

2.3. Déroulement de l'activité :

a) Recherche de plusieurs procédés pour construire des "lignes droites", en faisant le plus largement possible appel à l'expérience des enfants. On peut par exemple organiser une enquête que les élèves conduiront auprès des "grandes personnes". Pour chaque procédé rapporté par les élèves ou proposé par le maître on peut organiser une phase collective de manipulation pour l'information de tous les enfants et une phase individuelle avec réalisation au niveau du groupe ou de l'élève en utilisant le matériel décrit ci-dessus.

Parmi les réalisations de droites on peut citer :

L'alignement de jalons, d'élèves, de lampadaires le long d'une avenue rectiligne, de ceps de vigne, d'arbres fruitiers. Au niveau collectif on pourra faire aligner des élèves ou des objets. Au niveau individuel on peut aligner des têtes d'épingles en utilisant l'un des supports ci-dessus indiqués (matériel). Il serait intéressant que la ligne droite ainsi réalisée ne soit pas "horizontale", un nombre important d'élèves considérant que ligne droite veut dire ligne droite horizontale, peut-être à cause de la pratique scolaire qui consiste à s'aider des traits du cahier pour tracer des droites.

Une ficelle tendue entre deux points de la classe par deux élèves (activité collective), un fil tendu entre les deux épingles "extrêmes" de l'activité précédente (activité individuelle). On constate que le fil tendu touche toutes les têtes d'épingle... si elles sont bien alignées.

Un trait droit tracé au tableau à l'aide d'un cordeau de peintre (activité individuelle), un trait tracé à l'aide d'un fil tendu enduit de craie sur une feuille de papier plane (activité individuelle).

Un trait tracé avec la règle de la classe puis avec la règle de l'élève.

Une feuille de papier pliée soigneusement.

Un fil à plomb.

On pourrait observer éventuellement un rayon de lumière traversant de la fumée ou de la poussière en suspension dans l'air.

b) L'objectif de cette deuxième partie de l'activité est de faire dégager une propriété de la "droite". Utilisons deux ou plusieurs ficelles tendues par le nombre voulu d'élèves. Nous voyons plusieurs lignes droites. Choisissons deux points de la salle de classe, par exemple le coin d'un bureau et le coin d'un banc. Chaque équipe vient successivement tendre son fil entre ces deux points. La question est alors de savoir si toutes ces équipes ont réalisé la même droite ou des droites différentes. Il faut chercher un moyen pour décider entre ces deux éventualités.

Parmi ces moyens on peut signaler celui qui consiste à approcher une chaise de l'un des fils tendus et à faire une marque au point de contact du fil et d'un montant de la chaise. Pour tout autre fil tendu entre les deux points on pourra regarder si le fil touche le montant et si le point de contact est bien le point marqué. On peut utiliser plusieurs chaises ou déplacer la chaise utilisée.

Cette observation devrait permettre de conjecturer que : *"si plusieurs lignes droites passent par deux points A et B, elles passent par les mêmes points de l'espace"*.

On pourra se poser la même question à propos de la ligne réalisée par un fil de cuivre ou de fer aussi rigide que possible et non rectiligne passant par deux points A et B suffisamment rapprochés. (voir aussi § 6).

3. RÉALISATION DE PORTIONS DE SURFACES GÉNÉRATION DU PLAN

3.1. Objectifs :

S'informer sur un procédé de construction d'une surface plane.

Mettre en œuvre ce procédé pour réaliser des surfaces planes.

Réaliser des surfaces non planes par un procédé analogue en modifiant certaines contraintes.

3.2. Matériel :

Sable, fils de différentes couleurs, règles ou pièces de bois rectilignes.

Des boîtes pour réaliser des "coffrages" et des "supports" (voir description ci-dessous).

3.3. Déroulement de l'activité :

Préalablement on peut mener une enquête auprès des parents (maçons, entrepreneurs ou... simples particuliers) :

"Comment fait-on une chape en ciment ?"

Au début de la séquence les élèves-enquêteurs apportent les informations recueillies à leurs camarades.

Ou bien on peut présenter un montage diapo sur ce sujet.

Quel que soit le procédé choisi pour présenter la situation, si l'on possède un bac à sable on peut immédiatement jouer à construire une chape... de sable.

Puis chaque équipe ou élève est doté d'un ou plusieurs "coffrages" et de sable (voir figures, ci-dessous).

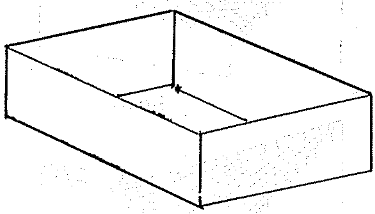


figure 4

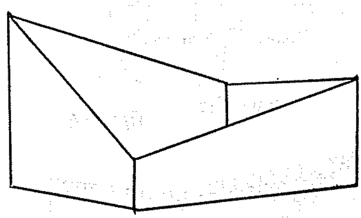


figure 2

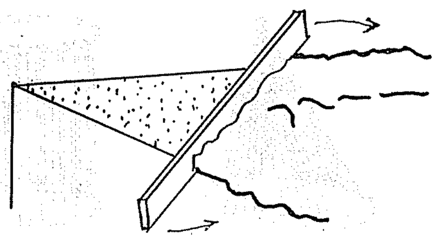


figure 5

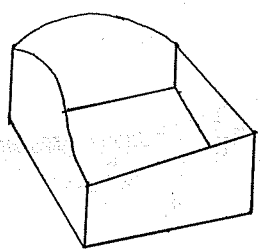


figure 3

Ces coffrages sont remplis de sable. En faisant glisser une règle sur les bords de ce coffrage, on chasse le sable en excès et on obtient une surface.

Les enfants sont invités (fig. 3) à déplacer la règle de différentes façons et à faire des remarques.

Pour certains coffrages (fig. 2), quel que soit le mode de déplacement de la règle on obtient un plan unique, les quatre bords étant parallèles deux à deux. Pour d'autres (fig. 4) on obtient plusieurs plans ou même une surface non plane. C'est également le cas pour le coffrage de la figure 5.

3.4. Réalisation de "trames" de surfaces

On peut également tendre des fils dans l'espace pour réaliser la "trame" de certaines surfaces. Ces fils sont tendus sur des "supports" découpés eux aussi dans des boîtes en carton, les bords étant encochés pour permettre le passage du fil (voir figures ci-dessous).

A ce propos il est bon de préciser qu'on appelle surfaces *réglées* des surfaces engendrées par une droite mobile se déplaçant dans certaines conditions.

C'est ainsi qu'un plan est une surface réglée, que le cylindre, engendré par une droite mobile de direction constante s'appuyant sur une courbe plane dont le plan n'est pas parallèle à la direction de la droite est aussi une surface réglée, de même que le cône et bien d'autres surfaces.

Les fils tendus réalisent certaines positions de la droite mobile engendrant la surface.

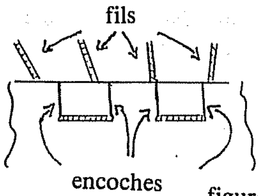


figure 6

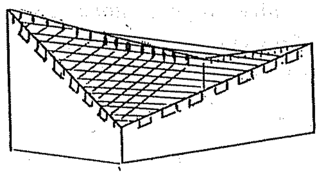


figure 7

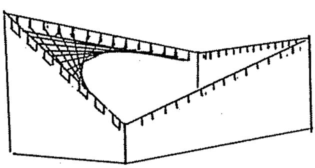


figure 8

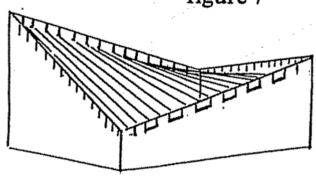


figure 9

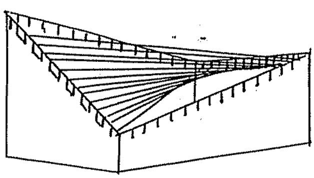


figure 10

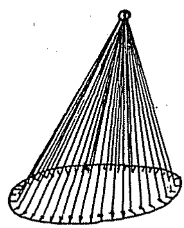


figure 11

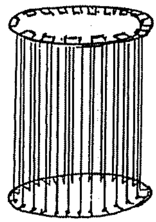


figure 12

Il est important, dans le cas du support (fig. 2) que les "bas" des encoches soient tous "alignés" si l'on désire réaliser la "trame" d'un plan.

Les figures 7, 8, 9 et 10 montrent qu'avec le même support on peut obtenir des "trames" de différentes surfaces. L'utilisation de fils de différentes couleurs permet la superposition de plusieurs "trames" sur le même support.

On pourra organiser une recherche de formes et susciter des remarques.

La figure 11 montre la "trame" d'un cône, la "base" que l'on peut lester, n'étant pas nécessairement un disque ni même un domaine convexe du plan. Un anneau pourra être utilisé pour le sommet. La figure 12 montre la "trame" d'un cylindre, les deux "bases" devant être superposables, y compris les encoches.

Cette activité possède un incontestable caractère esthétique.

4. CONTRÔLE DE PLANÉITÉ

4.1. Objectifs:

Découvrir un test de "planéité" d'une surface.

4.2. Matériel :

Des règles rigides en bois ou en métal.
Des surfaces planes ou supposées planes.

4.3. Déroulement de l'activité :

Comme pour (3.3) on peut mener préalablement une enquête sur le thème : "comment s'assurer qu'une surface est plane ?"

Après exposé du ou des procédés on les illustre par un exemple : contrôle de planéité du tableau. On compare éventuellement ces différents procédés.

Le plus couramment utilisé consiste à utiliser une règle rectiligne en la posant sur la surface ou contre la surface. Si, quelle que soit la position de la règle on ne "voit pas le jour" entre la règle et la surface, celle-ci est déclarée plane.

Chaque élève est invité à contrôler la planéité de diverses surfaces. On s'assure d'abord que la règle est parfaitement rectiligne en se référant par exemple aux têtes d'épingles alignées ou à "l'œil".

5. TRACÉ DE DROITES SUR DES SURFACES

5.1. Objectifs :

Justifier le test ci-dessus
Classer des surfaces selon un critère
Découvrir une propriété caractéristique du plan.

5.2. Matériel :

Des règles rigides.

Des surfaces diverses : portions de surfaces planes, cylindres, cônes, ballons de différentes formes, chambres à air gonflées, emballages divers, etc.

5.3. Déroulement de l'activité :

On marque deux points distincts sur chacune des surfaces. Il s'agit de tracer sur la surface un trait "droit", à la règle, passant par les deux points. Il faut donc que la règle "touche partout" cette surface.

Les élèves sont conduits à faire des remarques telles que : "c'est possible pour toutes les positions de la droite" - "c'est possible pour certaines positions de la droite" - "c'est possible pour aucune position de la droite".

Ces remarques sont notées au tableau, elles peuvent être relevées sur le cahier ou le classeur de géométrie.

Un classement des surfaces utilisées en fonction de la possibilité de tracer une droite ou des droites sur ces surfaces, qui pourra se poursuivre pour tout nouvel apport de surface fait apparaître le plan comme unique représentant d'une classe, celle des surfaces telles que, quels que soient les deux points choisis, la droite est tout entière dans la surface. On peut éventuellement formaliser :

"Pour toute paire {A,B} de points distincts d'un plan,
la droite AB est dans ce plan"

Ainsi peut être justifié le test de contrôle. Ce test sera demandé à tout élève qui, selon la tendance générale, probablement liée au langage courant, refusera d'appeler plan un plan non horizontal. "Peux-tu savoir, en utilisant cette règle, si cette surface est un plan ?"

6. POSITIONNEMENT

6.1. Objectifs :

Rechercher empiriquement le nombre de points permettant de déterminer une courbe connue, en particulier la droite.

Proposer des problèmes de dénombrement de droites (mise en œuvre d'un savoir).

6.2. Matériel :

Règles, gabarits découpés dans du carton ou autres matériaux (voir figures).
Feuilles de papier transparent format 21 × 29,7 partagées en quatre, crayons de couleur.

Voici à titre indicatif quelques gabarits. Le gabarit s'utilise posé sur la feuille de papier transparent, le crayon qui dessine la courbe s'appuyant sur le "bord" du gabarit. La partie "utile" de ce bord peut être soulignée d'un trait de couleur.

Lignes ouvertes

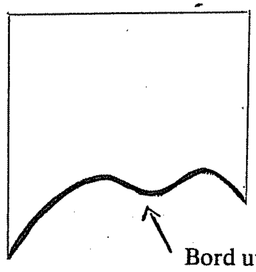


figure 13

Bord utile

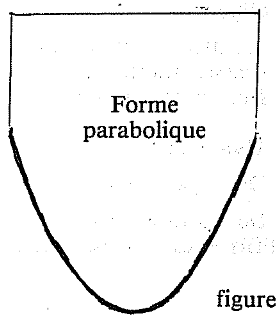


figure 14

Lignes fermées

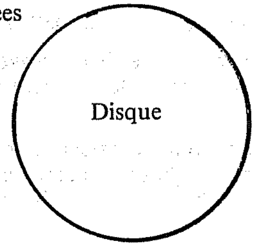


figure 15

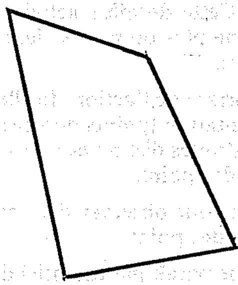


figure 16

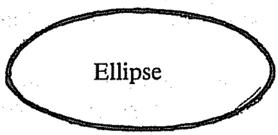


figure 17

6.3. Déroulement de l'activité :

a) Marquer deux points A et B sur une feuille de papier non rayé. Tracer un trait passant par A et B le crayon étant guidé par le bord "utile" du gabarit. Tracer d'autres traits passant par A et B après avoir déplacé le gabarit par glissement ou retournement (on pourra utiliser pour chaque trait un crayon de couleur différente).

On demande aux élèves de faire des remarques.

Pour la plupart des gabarits on voit plusieurs traits distincts passant par A et B. Avec le disque on voit seulement deux cercles "symétriques". Si on utilise une règle bien droite on ne voit qu'un seul trait.

b) Les élèves étant répartis en équipes de 2, chacun reçoit une feuille de papier transparent (voir matériel). L'un des deux élèves, Alain, reçoit en outre un gabarit et trace une ligne sur la feuille en suivant le bord du gabarit. Son équipier, Claude, doit tracer la même ligne, à la même "place" sur sa feuille (c'est-à-dire qu'en superposant les deux feuilles de façon convenable les deux lignes se recouvrent). Pour ce faire, Alain lui "emprunte" sa feuille pour y marquer certains points situés sur la ligne (opérer par transparence, les deux feuilles étant superposées). Puis Alain renvoie à Claude la feuille et le gabarit dont il s'est servi.

L'objectif de cette activité est de rechercher par "tâtonnements" le nombre minimum de points nécessaires pour déterminer une courbe dans le plan de la feuille.

Pour cela il importe :
- que Claude ne voit pas la position du gabarit sur la feuille d'Alain ;
- que les points soient placés avec précision ;
- que ces points ne soient pas les "extrémités" du "trait".

On pourra remarquer qu'il suffit de deux points pour déterminer une droite, de trois points pour déterminer un cercle.

On possède désormais un moyen de contrôler la "rectitude" d'une règle.

c) Cette dernière activité a pour objectif de réinvestir ce "savoir" dans un problème plus ou moins classique : "combien n points déterminent-ils de droites distinctes ?"

Partant de l'action (ficelles tendues entre n enfants), passant par une phase de représentation (points dessinés sur une feuille), on aboutit à la recherche du nombre de droites distinctes passant par ces n points (n petit), en utilisant uniquement la liste des points.

On peut observer des cas particuliers correspondant à des positions remarquables des points.

Il ne paraît pas essentiel de trouver toutes les droites sans erreur mais de montrer que l'on peut manipuler des codages (ici des "noms" de droites) pour répondre à un problème.

Il sera donc intéressant d'observer comment des enfants maîtrisent un langage et éventuellement développent une stratégie pour répondre à un problème.

6.4. A titre d'exercice

Supposons que l'on veuille percer un disque en son centre.

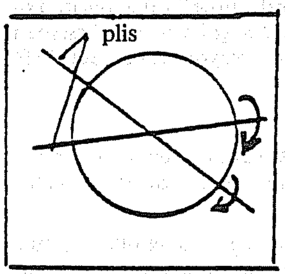


figure 18

1er cas : le disque est "pliable" (par exemple dessiné sur du papier transparent). On peut par deux pliages déterminer avec précision le centre de ce disque (fig. 18). Ainsi pourra apparaître l'importance des diamètres d'un disque etc.

2ème cas : le disque est rigide mais on dispose de papier pour relever son "empreinte". On est donc ramené au cas précédent.

3ème cas : le disque est rigide et l'on ne dispose pas de papier. Pour traiter ce problème on sera conduit à traiter le problème suivant : 3 points non alignés déterminent un cercle. Comment construire ce cercle sans utiliser le gabarit ?

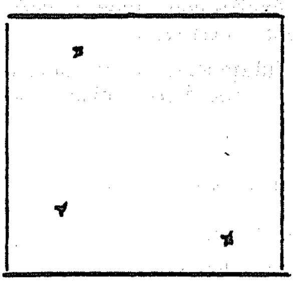


figure 19

Cette recherche débutera par une phase de "tâtonnements". On s'intéressera à toutes les propositions des élèves qui seront immédiatement testées.

Au cas où aucune proposition intéressante n'apparaîtrait, on pourra débloquer la situation en demandant de chercher des pliages amenant deux des trois points en coïncidence.

On pourra éventuellement parler de médiatrice d'un segment, d'axe de symétrie...

On sera conduit à chercher une construction de la médiatrice quand on ne peut pas plier.

7. POSITIONNEMENT

7.1. Objectifs :

Découvrir une propriété remarquable du plan.
Réinvestir ce savoir dans des problèmes.

7.2. Matériel :

Pâte à modeler ou polystyrène ou carton d'emballage.

De petites longueurs de fil de cuivre (fils électriques de récupération) ou brindilles de bois ou pailles.

Des plaques planes de carton rigide ou de bois, ou mieux des couvercles, plans ou non, de matière plastique rigide et transparente. Certaines de ces plaques de bois pourront être munies de trois vis "calantes" (voir fig. 22).

Des surfaces telles que cylindres, cônes, balles de toutes formes.

7.3. Organisation de l'activité :

a) Cette première phase comporte un certain nombre de manipulations et observations.

On cherche, en manipulant par équipe ou individuellement, comment soutenir un des objets ci-dessus décrits, présentant des surfaces planes ou non, les supports étant constitués par les petites tiges — même non rectilignes — de cuivre ou de bois fichées dans de la pâte à modeler ou plusieurs épaisseurs de carton d'emballage. En particulier quel est le nombre minimum de tiges nécessaires pour "tenir" un plan, un cylindre, etc.

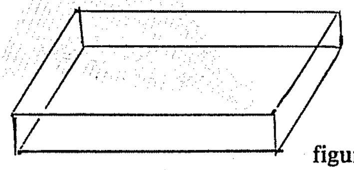


figure 20

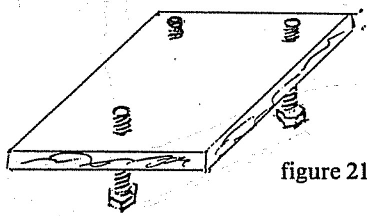


figure 21

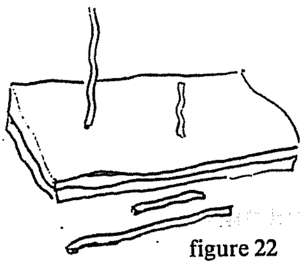


figure 22

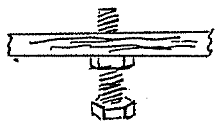


figure 23

Il est bon que ces tiges aient des hauteurs différentes (fig. 21).

On fait des remarques, on analyse des cas particuliers, par exemple celui de plusieurs points alignés. On peut vérifier si plusieurs "plans" différents "posés" sur trois points non alignés passent ou non par les mêmes points de l'espace. On peut pour cela utiliser une quatrième tige "haussée" au contact de l'une des plaques planes et voir si elle touche toutes les autres plaques planes passant par les trois points. Les plaques transparentes permettent un contrôle aisé.

On procède de la même façon avec les autres sortes de surfaces.

On essaie de faire tenir une bille en équilibre sur une plaque parfaitement plane et lisse en réglant la hauteur des ''supports''. Ceux-ci sont constitués par les trois vis calantes (fig. 22).

On peut également faire des observations sur le système de réglage ''horizontal'' d'un projecteur de diapo, le système de blocage d'un vasistas, d'un chassis pour les légumes, etc.

b) Dans cette deuxième phase on s'intéressera aux plans déterminés par un ''système'' de n points de l'espace. Plusieurs tiges de cuivre étant fichées dans la pâte à modeler, on réalisera le plan passant par les extrémités de ces tiges. A cet effet, on utilisera des ''pailles'' plastiques ou des spaghettis, des boules de pâte à modeler servant de lien. On pourra réaliser la trame de ce plan avec les mêmes matériaux ou bien en utilisant des fils tendus collés sur les pailles (voir fig. 24). Se posera alors le problème de l'intersection de deux plans. La recherche du nombre de plans distincts passant par ces points fera intervenir de façon dialectique la manipulation et le ''langage'', c'est-à-dire le codage des plans (ABC), (ABE), etc.

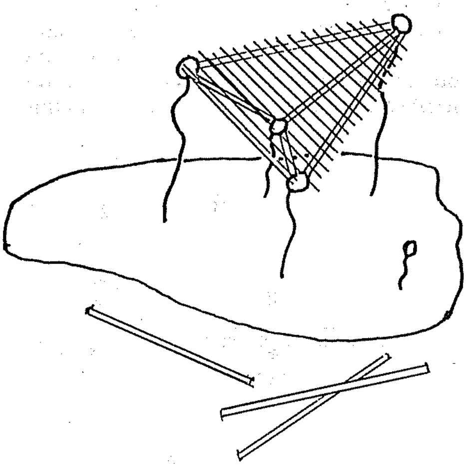


figure 24

Intersection de 2 plans

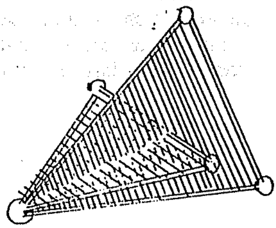


figure 25

8. REPRODUCTION ET CONSTRUCTION DE SOLIDES

8.1. Objectifs :

Obtenir des représentations planes de solides, du type patron, quand cela est possible.

Réfléchir à la nature et à la quantité d'informations nécessaires pour construire une copie d'un solide.

Inventer des techniques et utiliser des instruments.

Provoquer des situations-problèmes, par exemple quel est le rapport périmètre-diamètre pour un disque ?

A l'occasion des contrôles de fabrication, découvrir des conditions suffisantes.

8.2. Matériel :

Les solides utilisés au cours des activités précédentes

Du papier, du carton ; outils et instruments à la demande.

8.3. Déroulement de l'activité :

a) Dans cette première phase de l'activité on demande aux élèves, travaillant individuellement ou par équipes, "d'habiller" les solides à l'aide de papier. Ces solides sont à la disposition des élèves qui peuvent les manipuler et par exemple prendre des "empreintes". On note au passage que certains solides ne peuvent être habillés, c'est-à-dire qu'on ne peut appliquer du papier sur leur surface sans plisser ou déchirer ce papier. C'est le cas des divers ballons, de la chambre à air etc. Cette découverte peut motiver un nouveau classement des solides (cf. classement du paragraphe 5).

A l'usage exclusif des maîtres indiquons que les surfaces sur lesquelles on peut appliquer un plan (non rigide bien entendu) sans "faire de plis" ou sans le "déchirer" dont dites surfaces *développables* ; un solide limité par une surface développable peut rouler sur un plan, le contact dans chaque position ayant lieu en tous les points d'une droite.

b) On peut poursuivre par la copie, en carton, des divers solides proposés. Mais ceux-ci sont maintenant hors de portée des élèves et peuvent même être cachés à leurs regards. Seul un élève a accès au solide et peut fournir à ses camarades toutes informations qu'ils pourront lui demander (nature du solide, dimensions, etc.). Ces informations peuvent être données oralement ou par écrit ou à l'aide de dessins.

c) Au cours de cette activité, de nombreux problèmes apparaissent : par exemple, pour le cylindre de révolution (boîtes de conserves) dont on veut habiller la surface latérale à l'aide d'une bande, si l'on ne dispose que d'un mètre rigide de sorte que l'on ne puisse mesurer que le diamètre de la "base" et non le tour, se pose la question : comment déterminer ce tour ? Une étude particulière peut être consacrée à cette question (*).

d) De même la construction d'un cône de révolution apporte son lot de questions. De nombreux contrôles sont à effectuer en cours de fabrication. Ces activités exigent des élèves un très grand soin, tant dans les divers tracés que dans les découpages.

(*) Voir aussi le film *Boîte à Problème.*

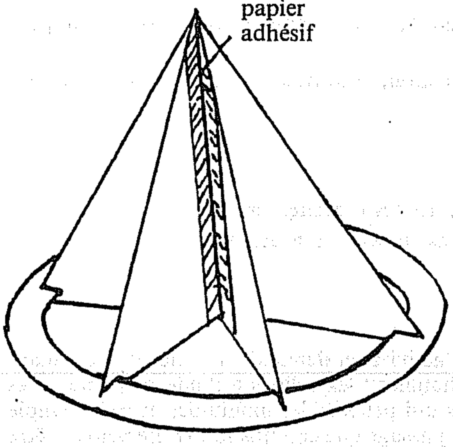


figure 26

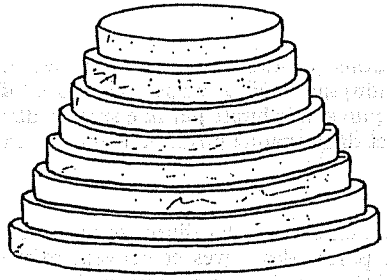


figure 27

e) Pour la sphère, le ballon de rugby et autres surfaces non développables, on ne peut les réaliser en carton sans moule pour "former" le carton. On pourra cependant en construire le "chassis" (ce terme étant utilisé faute de mieux). On donnera comme modèle le chassis d'un cône ou d'un cylindre (fig. 26). Les pièces "méridiennes" sont découpées dans du carton et assemblées deux à deux à l'aide de ruban adhésif. Une ou plusieurs couronnes découpées également dans du carton et convenablement entaillées assurent la rigidité de l'ensemble.

En ce qui concerne la sphère et les autres surfaces se posent des questions telles que forme et dimensions des différentes pièces ; comment répartir régulièrement les entailles sur la couronne ? etc.

On peut également empiler des pièces découpées dans du carton ; ce procédé est utilisé pour fabriquer la maquette d'un terrain dont on possède une carte où figurent les lignes de niveau (fig. 27).

f) *Contrôles*

Pour toutes ces constructions ou copies on cherchera le nombre minimum de contrôles à effectuer pour être certain de la conformité au modèle. Ainsi apparaîtront des notions de conditions suffisantes. Par exemple, peut-on contrôler un rectangle uniquement à l'aide d'un double-décimètre ? d'une équerre ?

CHAPITRE VII

ACTIVITÉS DE REPÉRAGE DANS UN PLAN

Objectifs généraux :

Faire découvrir des procédés de repérage d'un point dans un plan.

1. LA TABLE D'ORIENTATION

1.1. Objectifs spécifiques :

Découvrir le repérage par coordonnées polaires.
Découvrir l'importance des "angles" dans certaines situations.
Utiliser le rapporteur pour fournir et exploiter des informations.

1.2. Matériel :

Plusieurs exemplaires d'une carte de la région, carte d'Etat major, carte I.G.N., carte du département.
Des disques découpés dans du papier non quadrillé.
Des instruments à la demande.

1.3. Description de l'activité :

Les élèves sont répartis en équipes. Certaines reçoivent une carte, d'autres un disque de papier.

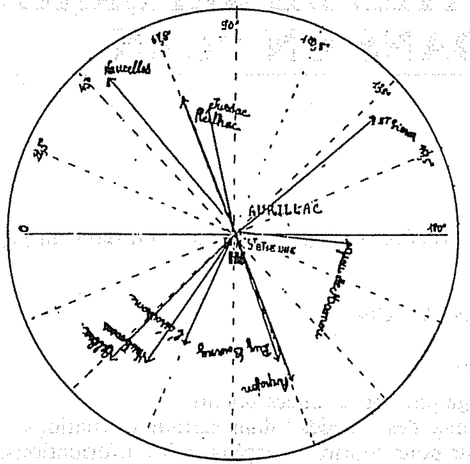
L'activité consiste à réaliser, sur le disque, une "table d'orientation" pour un lieu donné (souligné sur la carte par un point bien visible). Ce point est choisi par les élèves. Il peut être le même pour tous ou non.

Chacune des équipes disposant d'une carte est associée à une équipe ayant reçu un disque. La première doit fournir à la deuxième tous les renseignements permettant la réalisation de la table d'orientation. On choisit d'abord les lieux ou localités qui figureront sur cette table. Puis un dialogue s'installe entre équipes correspondantes ou pour toute la classe.

Quels renseignements fournir ? Quels instruments utiliser ? Comment réaliser la table à partir de ces renseignements. Eventuellement, la table étant réalisée, comme la placer sur le terrain ?

Le système de repérage dit "coordonnées polaires" est parfaitement adapté à ce genre de réalisation. Le lieu d'implantation de la table étant pris comme origine O, un point remarquable de l'horizon A, facile à placer sur la carte, sera choisi. La demi-droite OA servira "d'axe polaire". Tout lieu M à reporter sur la table sera déterminé par l'angle que fait la demi-droite OA et la demi-droite OM et par sa distance au point O, distance qui figurera sur la table à côté de son nom (figure 1).

On peut d'ailleurs prolonger cette activité en demandant non plus la réalisation d'une table d'orientation, mais d'une carte superposable à la carte modèle du moins pour les quelques points considérés, l'organisation de l'activité étant conservée.



Les directions remarquables 0°-180° ; 90° ; 135° ; etc... ont été déterminées par pliage.

figure 1

2. LE BATEAU

2.1. Matériel :

Des feuilles de papier blanc, non rayé, relativement translucide ou même transparent, rectangulaires ou non. Sur chacune de ces feuilles est marqué un point. Pour deux feuilles données ces points sont à des places différentes.

Des instruments de mesure à la demande.

2.2. Description de l'activité :

Les élèves sont placés en situation de communication, c'est-à-dire que l'activité suppose un échange de messages apportant des informations à un correspondant. Chaque enfant ou équipe est d'abord émetteur puis récepteur.

On imagine que le point placé sur la feuille représente un bateau en perdition sur la mer. Le capitaine (élève ou équipe) envoie des messages pour signaler sa position afin qu'on lui porte assistance.

Le récepteur du message peut le renvoyer à l'expéditeur pour demander des informations supplémentaires, des précisions, lever une ambiguïté, etc.

Pour montrer que le message est compris et que les informations sont "pertinentes" le récepteur doit placer un point (de couleur différente) sur sa feuille afin de marquer la position du bateau qu'il doit repérer.

La superposition des feuilles des deux correspondants doit permettre un contrôle des résultats.

Suivant la forme de la feuille, les procédés utilisés peuvent être différents :

a) si la feuille est rectangulaire (fig. 2), on peut déterminer la position du point en donnant sa distance à deux des côtés du rectangle mais cela suppose :
— que tout le monde dispose la feuille de la même façon, donc qu'on oriente la feuille ;
— que l'on sache mesurer, exactement, la distance d'un point à une droite, donc qu'on apprenne à utiliser, par exemple, une équerre à cet effet.

b) si la feuille est découpée selon un contour sinueux (figure 3), d'autres procédés sont concevables :
— distance du point à deux "caps". On parle dans ce cas de coordonnées bipolaires, mais il est à noter que deux points M et M′ ont les mêmes coordonnées ;
— mesure de l'angle CAB et de la distance AB (figure 4). On parle dans ce cas de coordonnées polaires ;
— mesure des angles A et C .

N.B. : Il est évident qu'en modifiant la forme de la feuille on peut éventuellement induire tel de ces systèmes de repérage qui sera mieux adapté que les autres à la situation.

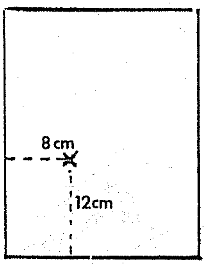


figure 2

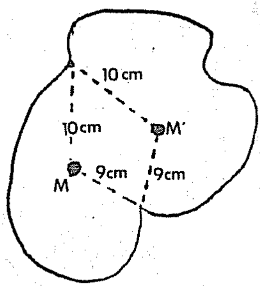


figure 3

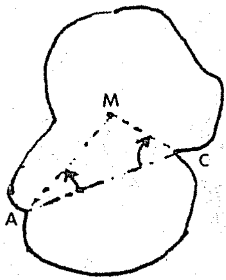


figure 4

2.3. Ces activités peuvent se prolonger :

a) Par le passage au quadrillage de la feuille. Les élèves y parviennent assez facilement,

— d'abord dans certains cas, pour le repérage ci-dessus, ils plient la feuille en largeur et longueur obtenant ainsi un quadrillage grossier qui ne suffit pas en général pour donner une position précise du bateau,

— ou bien si l'on imagine, dans une deuxième phase de l'activité, que le bateau dérive, le capitaine envoyant des messages successifs. Les enfants proposent assez rapidement de quadriller la feuille, par exemple tous les cm, afin d'éviter des mesures fastidieuses.

b) Par des activités de repérage sur des surfaces non planes.

CHAPITRE VIII

PAVAGES

Paver le plan (ou une partie du plan), l'espace (ou une partie de l'espace) c'est en faire un recouvrement, ou le remplir, à partir d'une "forme" de base, sans trou, ni chevauchement.

1. OBJECTIFS

1.1. Etude de formes

La connaissance de ce que l'on appelle "objets géométriques" passe par un "savoir-faire" avec ces objets. Toute activité de pavage implique une analyse des formes utilisées. Dans le plan, l'enfant est conduit à comparer des longueurs, des angles. Dans l'espace, en essayant d'assembler des solides, il est amené en particulier à en étudier les faces.

Il peut essayer de paver une portion de plan à l'aide d'un triangle équilatéral, ou d'un triangle isocèle, ou d'un triangle quelconque... Ces trois types de triangles ne se comportent pas de la même façon ; les pavages obtenus sont différents. Une telle activité amène l'enfant à une connaissance de ces triangles au-delà d'une simple mémorisation de termes.

1.2. Approche de certaines transformations géométriques

Pour placer une pièce, l'enfant tâtonne ; il glisse la pièce, la fait tourner, la retourne. Il acquiert de ce fait une expérience riche en ce qui concerne les déplacements. Cette expérience pourra servir de base à l'étude de certaines transformations : translation, rotation, symétrie.

1.3. Préparation du travail sur la mesure des surfaces ou des volumes

Pour mesurer une surface ou un volume, on réalise un pavé, avec la forme choisie comme unité.

2. PREMIÈRE CHRONIQUE D'ACTIVITÉS EN CLASSE

2.1. Observation de pavages

Une documentation sur les carrelages et les revêtements muraux a été réunie par le maître et les élèves. Une observation des différents échantillons a été faite ; les enfants se sont particulièrement intéressés aux pavages dont tous les pavés sont superposables, et, à la demande de leur maître, ont dessiné d'autres pavages du même type. Voici quelques réalisations :

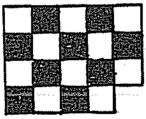


figure 1

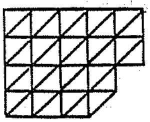


figure 2

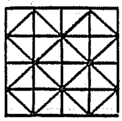


figure 3

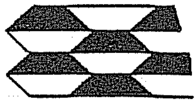


figure 4

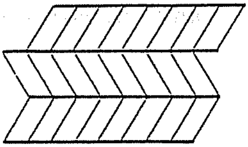


figure 5

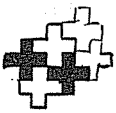


figure 6

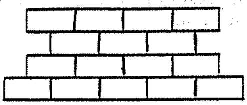


figure 7

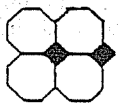


figure 8

Certaines compositions ne sont pas acceptées car tous les pavés ne sont pas pareils, c'est le cas de la réalisation 8 où "il y a des pavés carrés et d'autres pavés qui ont huit côtés".

2.2. Invention de nouveaux pavages

Un enfant propose de dessiner des pavés en forme de "Bouteille" et fait un modèle pour ses camarades :

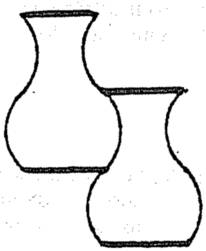


figure 9

Ce modèle est accepté par les uns et refusé avec indignation par les autres qui affirment que pour ces pavés on ne pourra pas recouvrir parfaitement le sol. Il y aura des "jours", il faudra des joints trop larges entre les pavés. D'autres disent qu'on ne pourra pas paver le long des murs, mais ils admettent finalement, que sur les bords des pavages, on aura le droit de casser les pavés.

Pour savoir s'il est possible de paver avec cette forme, les enfants font des essais. Les uns dessinent simplement les bouteilles sur le papier, mais se font accuser de tricher par ceux qui, après avoir découpé le dessin d'une bouteille, le reportent plusieurs fois sur le papier. De leurs essais, ils déduisent que les parties arrondies doivent s'emboîter. Un élève propose de dessiner les bouteilles avec des cercles de même rayon et réalise sur papier quadrillé ceci :

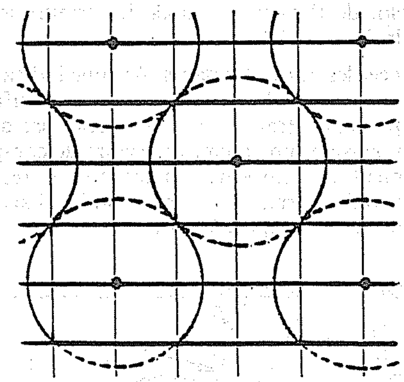


figure 10

Une nouvelle discussion s'engage : les "bouteilles" ne sont pas disposées comme sur le modèle : "certaines ont la tête en bas". Est-il possible de modifier ce pavage pour en obtenir un autre dans lequel toutes les bouteilles sont dans le même sens ?

Après tout ce travail, les enfants sont persuadés que, pour savoir si, avec une certaine forme, le pavage est possible, il faut faire des dessins très précis.

2.3. Réalisation précise d'un pavage

Un modèle de revêtement mural est recopié à main levée (par le maître !) au tableau.

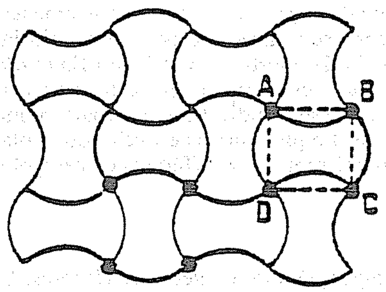


figure 11

Les enfants doivent tracer ce pavage, précisément avec un compas, sur une feuille non quadrillée. Pour les aider le maître leur fait observer que les coins des pavés sont disposés selon les quatre sommets d'un carré.
(Nous avons tracé en pointillé le cadre ABCD, mais cette indication n'avait pas été fournie aux enfants). Cette observation est immédiatement utilisée : le dessin précis du pavage sera plus facile à réaliser sur une feuille quadrillée. Or chaque enfant dispose d'une feuille blanche 21 × 29. Le problème se pose de choisir la taille des carrés du quadrillage sachant que :

— on ne veut pas dessiner trop de pavés (certains proposent de choisir des carrés de 1 cm de côté !)

— on veut bien voir le pavage.

Les enfants se mettent d'accord pour quadriller un rectangle de 25 × 30 avec des carrés de 5 cm de côté. Le maître les invite à centrer ce quadrillage dans leur grande feuille. Ce quadrillage est fait soigneusement en utilisant les instruments habituels : double-décimètre, équerre ; les côtés des carrés sont reportés à l'aide du compas. Au cours d'activités précédentes diverses, les enfants ont compris l'importance de la précision du dessin et il est essentiel d'accorder à ces tracés l'attention et le temps nécessaire pour que chacun parvienne à exécuter un travail soigné. Le maître circule dans la classe, montre comment tenir une règle, un compas, voire un crayon. Il vérifie l'emploi de l'équerre, signale les erreurs et au besoin rectifie le dessin des plus maladroits.

Ce travail étant exécuté il reste à tracer les bords des pavés. Aucune indication n'est donnée aux enfants relativement aux centres des arcs de cercles. Les enfants mettent un certain temps à concevoir que les centres des cercles ne sont pas quelconques et font des essais maladroits en gardant une même ouverture de compas. Cependant presque tous placent finalement les centres des cercles aux centres des carrés, certains découvrent que les centres des carrés sont alignés sur les diagonales. Un enfant place le centre au milieu du côté opposé à l'arc.

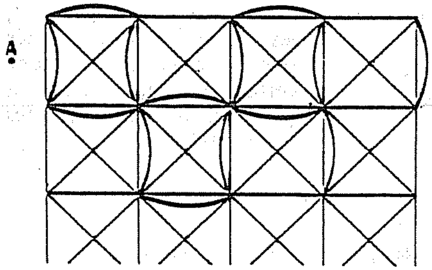


figure 12

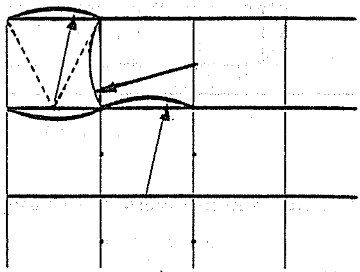


figure 13

Certains centres sont extérieurs au quadrillage. Les enfants sont amenés à imaginer des procédés permettant de les construire avec précision. Un coloriage termine l'exécution de ce travail. On répond à la question : Quelle est l'aire d'un pavé ? Tous sont surpris de découvrir que l'aire est la même que celle d'un carré du quadrillage bien que beaucoup aient imaginé sans indication de la part du maître un découpage démontrant cette propriété. Le plus surpris est celui qui a placé les centres au milieu des côtés ; ses pavés paraissent assez différents de ceux obtenus par ses camarades.

2.4. Pavage à l'aide de "bateaux"

Chaque enfant reçoit deux feuilles polycopiées de couleurs différentes. Sur chaque feuilles sont imprimés sept "bateaux" superposables préparés par le maître. (Les dimensions sont ici données à titre indicatif et ne sont pas portées sur les dessins distribués aux enfants).

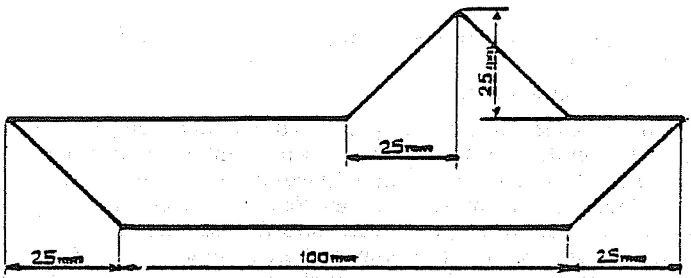


figure 14

- ***Quelle est l'aire d'un bateau ?***

On peut en découper un et réassembler les morceaux comme on le désire pour calculer l'aire en faisant le moins de mesure possible.

- ***Peut-on réaliser un pavage avec les bateaux découpés ?***

(Il est utile de disposer de feuilles supplémentaires pour pouvoir étendre les pavages dans certains cas).

Pour rendre les pavages plus esthétiques on adoptera la régle : Si deux bateaux ne se touchent que par une "pointe" on pourra les choisir de même couleur sinon ils devront être de couleur différente. On peut trouver des pavages très divers dont certains ne peuvent être étendus dans le plan.

Nous nous intéressons par la suite aux pavages qui pourraient être étendus indéfiniment dans le plan, par exemple :

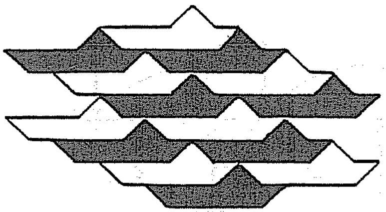


figure 16

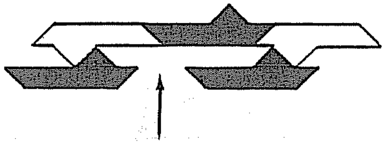


figure 15

Il est impossible de placer un bateau de façon à prolonger le pavage dans la région marquée.

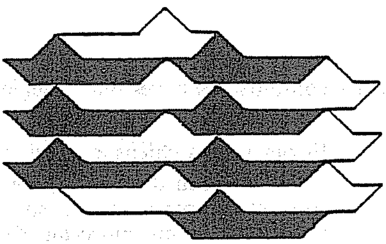


figure 17

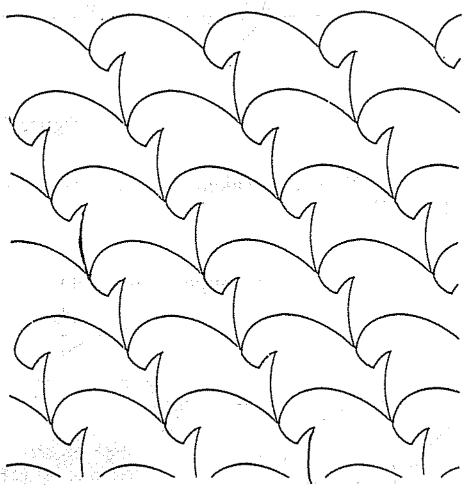


figure 18

2.5. Observation d'un nouveau pavage

On distribue à chaque enfant le pavage de la figure 19 :

• ***Comment a été construit ce pavage ?***

— Les activités précédentes donnent à quelques élèves l'idée de joindre des points qui jouent le même rôle dans tous les pavés et qui sont alignés. Ils obtiennent alors des parallélogrammes (plusieurs réponses sont proposées).

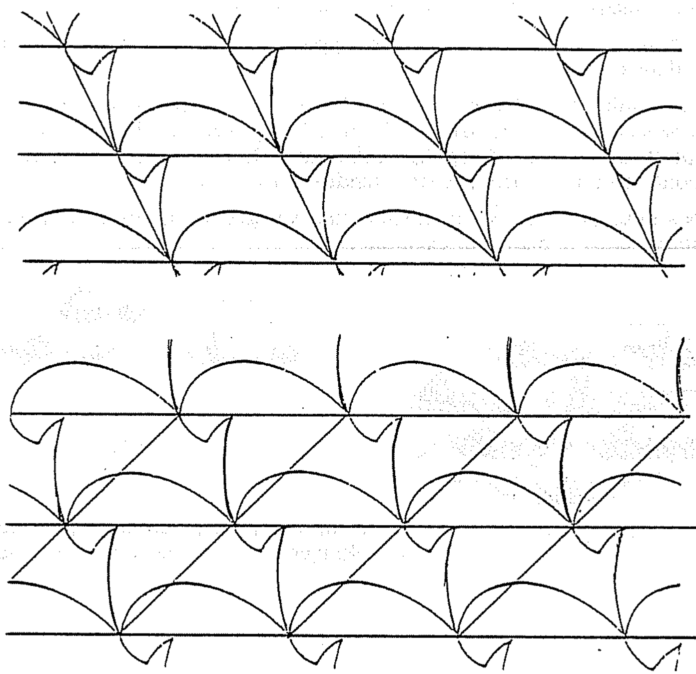


figure 19

— D'autres essaient de reconnaître dans les contours des pavés une "même forme"

on coupe et on déplace

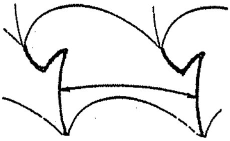


figure 20

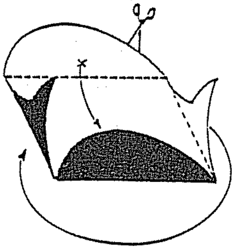


figure 21

Ils ont vu des chiens et disent :

— le "museau du chien", son cou, et sa patte avant, sont "pareils" qu'un morceau de son dos sa queue et sa patte arrière.

— sa tête et son dos sont "pareils".

Quant aux enfants qui n'expriment aucune idée, le maître leur suggère de chercher l'aire d'un pavé en le découpant de façon astucieuse.

Ils constatent que l'aire d'un "chien" est celle d'un parallélogramme. (Le découpage du parallélogramme pour le transformer en rectangle a déjà été rencontré).

Une mise en commun permet de faire l'inventaire et la synthèse des propriétés observées. Les "chiens" sont construits de la façon suivante : on trace un parallélogramme ABCD puis une ligne entre A et B que l'on recopie entre D et C, enfin une ligne entre A et D que l'on recopie entre B et C.

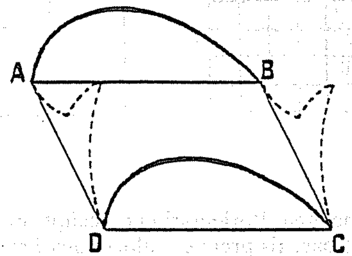


figure 22

Il reste à inventer et à exécuter un pavage en s'inspirant de ce procédé. On peut remarquer que les contours entre A et B, entre A et D peuvent être très variés. Toutefois, pour qu'on obtienne bien un pavé en une seule pièce il est nécessaire que les copies de ces contours entre DC et BC ne recoupent pas les premiers.

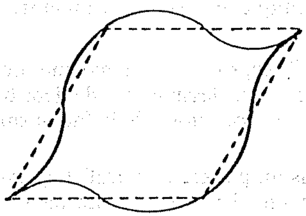


figure 23

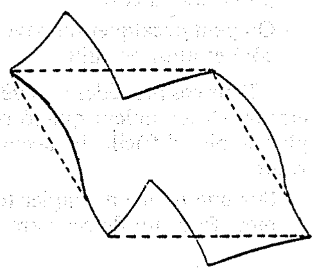


figure 24

2.6. Invention et réalisation d'un pavage

- ***Construction d'un pavé***

Les enfants dessinent avec soin un parallélogramme et tracent deux "côtés" du pavé. La copie de ces côtés pose quelques problèmes techniques. Tous sont convaincus que si l'on opère à main levée le pavage sera mal réalisé. Finalement on se met d'accord pour "décalquer". Des morceaux de papiers calque sont distribués et après quelques essais il est convenu de dessiner le pavé sur le papier calque. La technique adoptée par tous est donc la suivante :

On trace un parallélogramme ABCD sur papier quadrillé (pour faciliter la construction). Sur ce papier on trace les bords AB et AD du pavé. On décalque le dessin obtenu, puis en déplaçant le calque, on le recopie. S'il y a des recoupements on modifie le premier motif.

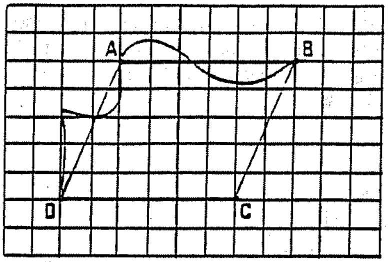


figure 25

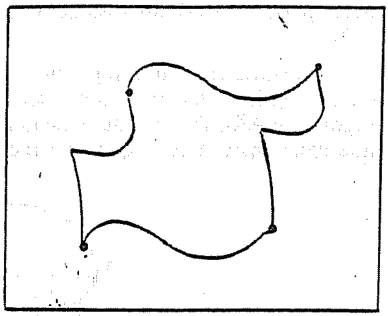


figure 26

Certains enfants changent l'orientation du calque ou le retournent. Les pavés obtenus ne conviennent pas. Ils prennent alors conscience que le déplacement du calque doit se faire sans retournement de la feuille.

• ***Réalisation du pavage***

Diverses techniques sont proposées.

— On peut découper le pavé dans du carton et, en le déplaçant sur une feuille de papier, en faire le tour avec la pointe d'un crayon.

— On peut découper de nombreux pavés en prenant plusieurs épaisseurs et les disposer côte à côte.

— On peut décalquer un pavé puis, en déplaçant le calque, en décalquer un autre à côté et ainsi de suite.

Tous ces procédés se révèlent assez délicats à utiliser, surtout le deuxième. Les erreurs s'accumulent quand on s'éloigne du premier pavé dessiné et il devient de plus en plus difficile de raccorder les pavés. Nous procédons donc de la façon suivante :

— Sur une feuille de papier (quadrillé) nous traçons un pavage de parallélogrammes. Pour un de ces parallélogrammes nous traçons deux bords d'un pavé.

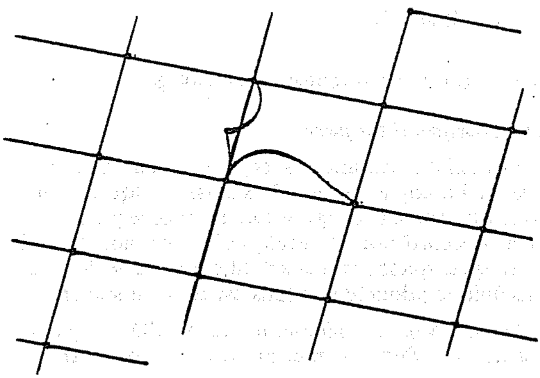


figure 27

Les sommets de ces parallélogrammes sont soigneusement décalqués sur une feuille 21 × 29,7. Ils servent de repères pour déplacer le papier calque et tracer les pavés sans déformation.

Les enfants exécutent alors complètement le pavage sur la feuille de calque. Beaucoup ont tendance à tracer des pavés de forme très tourmentée ce qui n'est pas souhaitable. (La reproduction demande trop de temps). Le maître rectifie les traits trop sinueux mais évite de montrer des modèles. Les enfants doivent en effet imaginer eux-mêmes et individuellement les contours qu'ils adopteront. Il est particulièrement intéressant de demander aux enfants de paver le calque jusqu'aux bords de la feuille, d'observer et de mettre en commun les procédés qu'ils imaginent pour cela. Les activités se terminent par un coloriage des pavages obtenus.

Ce travail qui utilise des notions mathématiques mais comporte des activités de travail manuel (découpage) et de dessin, a été poursuivi pendant une dizaine de séances réparties sur un mois, soit pendant les heures réservées aux mathématiques, soit pendant les activités d'éveil. Il s'agit d'un travail long, méthodique, comportant l'exécution de diverses tâches techniques ; il est impossible de n'y consacrer que quelques séances. Il doit donc être mené parallèlement à d'autres activités.

3. DEUXIÈME CHRONIQUE D'ACTIVITÉS EN CLASSE

3.1. Etude systématique des pavages réalisés avec une forme donnée en vue de dégager les transformations faisant passer le module d'une position à une autre.

Chaque enfant a un module unique, la même forme pour toute la classe, par exemple un parallélogramme (mieux vaut commencer par un parallélogramme sans angle droit et dont les côtés sont de longueurs différentes, c'est-à-dire un parallélogramme qui n'est ni un rectangle ni un losange).

Déroulement

On demande aux enfants de dessiner un pavage à partir du parallélogramme donné, d'observer les déplacements qu'ils imposent au module pour le faire passer d'une position à une autre.

Les pavages réalisés décrivent généralement les types suivants : figures 28, 29, 30 et 31. Les pavages 28 et 31 utilisent uniquement des glissements dans le plan, sans retournement ; c'est toujours la même face du module qu'on voit, et les côtés du parallélogramme conservent toujours la même direction. Le premier pavage montre des bandes suivant deux directions, celles des côtés du parallélogramme. Le module engendre chaque bande en glissant suivant la direction d'un côté. Le quatrième pavage ne montre qu'une seule direction de bande.

Contrairement aux précédents, les pavages 29 et 30 utilisent des retournements (symétries par rapport à un côté) ; ce n'est pas toujours la même face du module qu'on voit. Le deuxième pavage est engendré par des retournements autour du petit côté et des glissements le long de ce côté. Le troisième pavage est engendré par des retournements autour du grand côté et des glissements le long de ce côté.

Ces différents gestes sont explicités lors d'une synthèse collective.

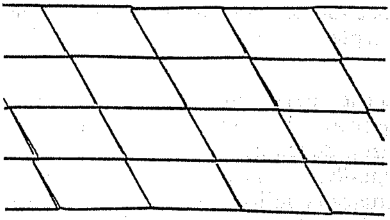


figure 28

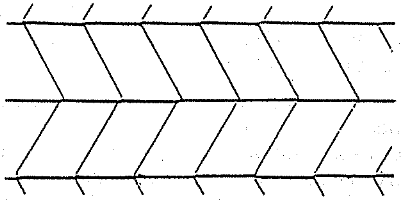


figure 29

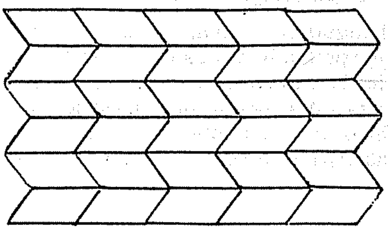


figure 30

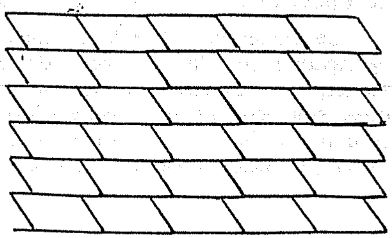


figure 31

3.2. Prolongements

Cas particuliers du parallélogramme

Une fois dégagées les règles de construction des pavages précédents, on demande aux enfants de les utiliser avec un rectangle puis avec un losange.

Ils découvrent alors que certains des pavages précédents sont confondus.

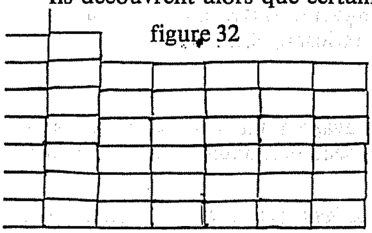


figure 32

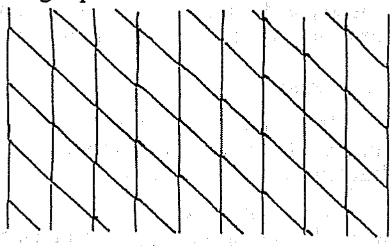


figure 33

3.3. Remarque

Un travail analogue peut être envisagé avec un triangle dont les trois côtés ont des longueurs nettement différentes.

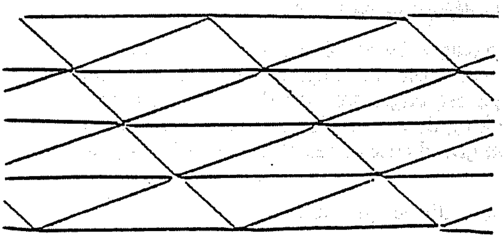


figure 34

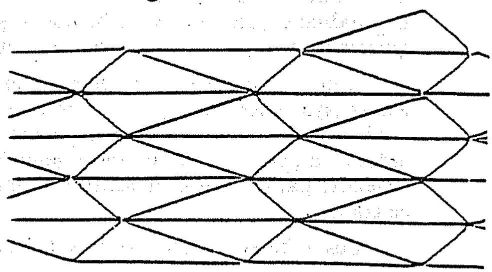


figure 35

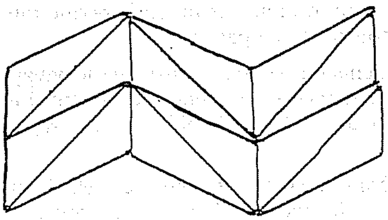


figure 36

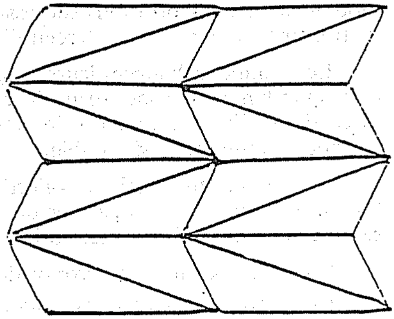


figure 37

Aux transformations rencontrées dans les pavages avec le parallélogramme s'en ajoutent d'autres. Le triangle glissant dans son plan en tournant d'un demi-tour autour du milieu d'un côté permet de former un parallélogramme. Glissant dans son plan en tournant autour d'un sommet, il engendre de belles rosaces.

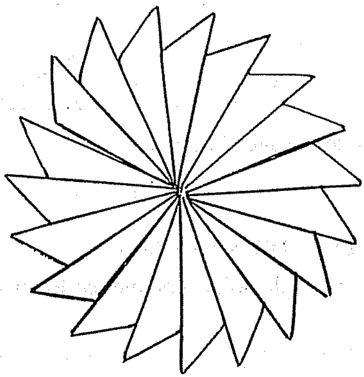


figure 38

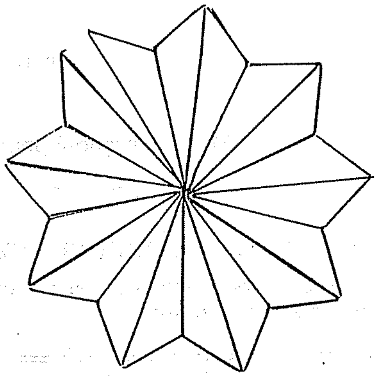


figure 39

3.4. Codage des transformations nécessaires à la construction d'un pavage

En l'absence d'un vocabulaire précis, il est difficile d'approfondir l'étude de ces transformations ; on peut donc se proposer la recherche de codes. Les activités de codage se pratiquent couramment dans les classes. On a ici une situation particulièrement favorable. Pour décrire les pavages qu'ils ont créés les enfants sont amenés à coder les transformations utilisées.

Déroulement

Afin de favoriser la communication, il est nécessaire de choisir pour le module une forme donnant naissance à de nombreux pavages différents, par exemple, un demi-triangle équilatéral.

Le maître demande à chaque enfant de dessiner un pavage, puis demande au groupe de choisir un des pavages réalisés, d'étudier, de classer les déplacements du module entre deux positions successives, et enfin d'imaginer un code permettant de transmettre par écrit la "recette" pour construire ce pavage.

Les groupes échangent leurs messages et chacun essaie de construire le pavage correspondant au message reçu ; ils y réussissent parfois, souvent ils échouent. Les discussions s'instaurent entre les groupes quant à l'intelligibilité du message : légende incomplète, code ambigu...

Au cours d'une synthèse collective, il sera intéressant de mettre en relief tous les codes valables et d'organiser des exercices de traduction de l'un à l'autre. Il serait évidemment sans intérêt d'imposer aux enfants un code.

Voici des exemples de propositions relevées dans la classe :

Les enfants ont désigné les trois côtés du triangle par trois couleurs : rouge(r), noir(n), vert(v), et ont proposé le code suivant :

r : on retourne autour du côté rouge.

n : on retourne autour du côté noir.

v : on retourne autour du côté vert.

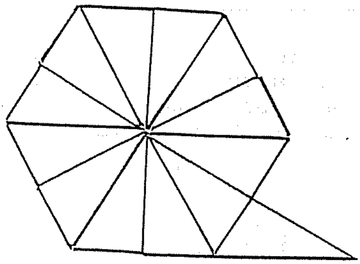


figure 40

Message proposé pour décrire le pavage ci-dessus :

r n r n r n r n r n r v

4. UNE AUTRE TECHNIQUE : UTILISATION D'UN RÉSEAU

Si on dispose déjà d'un pavage ou d'un réseau de points comme par exemple ceux présentés ci-dessous :

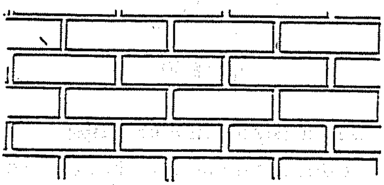


figure 41

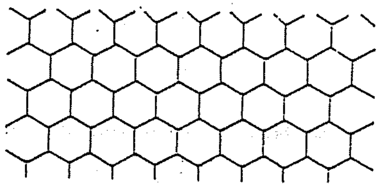


figure 42

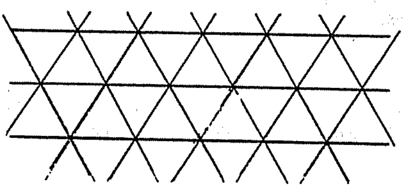


figure 43

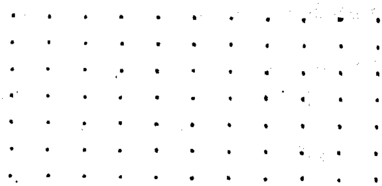


figure 44

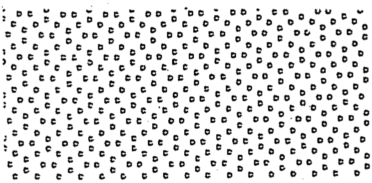


figure 45

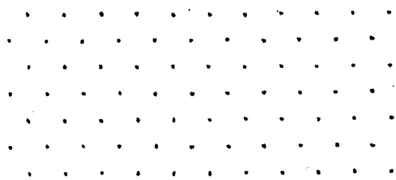


figure 46

on peut joindre certains points ou colorier pour faire apparaître différents pavages.

Ainsi, utiliser le réseau de la figure 46 pour fabriquer

— un pavage constitué d'hexagones non réguliers
— un pavage constitué d'octogones non convexes
— un pavage constitué de pentagones
— un pavage constitué de trapèzes isocèles.

....

5. EN VRAC, A PROPOS DE PAVAGES

— Paver avec divers types de triangles (équilatéraux, rectangles, isocèles, quelconques) : ces divers triangles ne fonctionnent pas de la même manière. Chacun va prendre sa spécificité par son propre fonctionnement, et par différences avec les autres fonctionnements.

— Dans de tels pavages seront visibles des propriétés concernant la somme des angles d'un triangle, les parallèles coupées par une sécante...

— Les pavés réguliers ne fonctionnent pas de la même manière que les autres pavés. Leur régularité prend une signification dans le pavage. Des propriétés particulières les concernant vont apparaître.

— On pourra, à l'occasion d'activités de pavage, découvrir la génération de certains ..... à partir d'autres.

CHAPITRE IX

UN JEU DE PUZZLE

1. PRÉSENTATION

1.1. Objectifs :

— Des approches de la notion d'angle, de demi-droites.

— Recherche et utilisation d'instruments de "transport" d'angle et de "mesure" d'angle.

1.2. Matériel :

Des "pièces" de carton rigide de même teinte, du carton d'emballage par exemple, à contours plus ou moins réguliers.

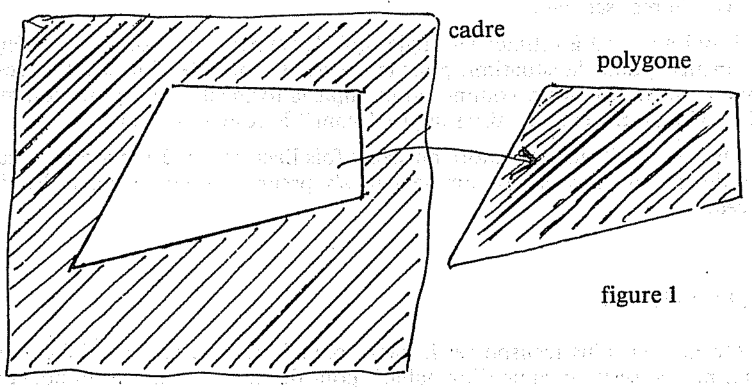


figure 1

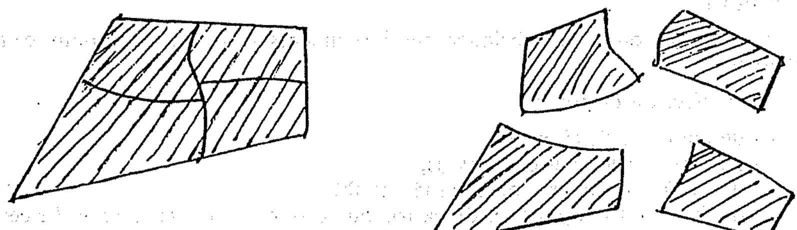


figure 2

Dans chacune de ces pièces on découpe des polygones (triangles divers, quadrilatères, etc...) en respectant le cadre (fig. 1).

Ces polygones sont à leur tour découpés en plusieurs morceaux (fig. 2) qui constituent des polygones mixtilignes, c'est-à-dire que deux côtés consécutifs sont des segments de droite et un ou deux autres des lignes courbes.

On s'arrangera pour que les côtés rectilignes soient suffisamment longs afin de permettre une détermination aisée et précise des angles.

1.3. Déroulement des activités

Au début on montre les différents polygones complets dans leurs cadres respectifs.

Puis les différents morceaux de tous ces polygones sont regroupés en vrac sur une table.

Chaque élève ou équipe d'élèves reçoit l'un des cadres.

L'activité consiste à essayer de reconstruire le polygone correspondant à ce cadre.

Diverses situations peuvent être proposées successivement.

2. SITUATION 1

Les élèves peuvent déplacer le cadre jusqu'auprès de la table sur laquelle sont tous les morceaux. Ils peuvent procéder par tâtonnement, prendre un morceau, l'essayer, le reposer, etc.

L'œil apprend à estimer les angles qui deviennent donc de ce fait éléments "pertinents", dans la situation, pour les élèves. Ce qui n'exclut pas d'autres éléments pertinents possibles comme par exemple la forme des lignes courbes, mais il devient vite assez clair que si les angles "vont" le reste doit "aller".

On peut d'ailleurs reprendre plusieurs fois l'activité en échangeant les cadres et en demandant aux élèves comment ils s'y prennent pour retrouver les divers morceaux.

3. SITUATION 2

3.1. On ne peut plus transporter le cadre pour la recherche des différents morceaux, ni s'en servir comme d'un gabarit pour dessiner le contour du polygone à reconstituer.

par contre, on peut fabriquer des instruments transportables pour cette recherche.

A cet effet on dispose :

— de papier et de ciseaux,
— de papier calque et de crayons,
— d'une fausse-équerre ou d'un té variable,
— de disques découpés dans du carton ou dessinés sur papier calque. Le centre du disque est marqué.

On peut par exemple :

— réaliser des coins en papier par pliage, ou découpage, ou bien les dessiner, chaque coin concrétisant un angle du polygone ;

— réaliser successivement chaque coin à l'aide de la fausse-équerre ou du té variable ;

— faire des marques sur le disque.

3.2. Le maître peut laisser les élèves libres de proposer les instruments. Il peut aussi les suggérer ou les imposer.

La première méthode, aléatoire et certainement plus lente, a quand même l'avantage de mettre les élèves en situation de recherche permettant diverses approches de la notion d'angle.

Les conditions de l'activité sont également différentes suivant que le maître autorise les élèves à se déplacer avec les instruments ou bien leur impose de faire une commande à une équipe chargée de leur procurer les différents morceaux.

Dans le premier cas, ils sont à même de tester l'instrument, d'en estimer la précision, d'en découvrir les éventuels défauts et d'y apporter des modifications et des améliorations.

Dans le deuxième cas, on est certain que des informations implicites telles que la mémorisation de l'angle ne sont pas transportées à leur insu par les élèves pour aider à la recherche et que ce sont bien les seuls instruments qui permettent cette recherche.

3.3. On pourra chercher en commun le nombre minimum d'informations nécessaires pour chaque type de polygone.

Par exemple, à partir de 2 coins d'un triangle, on peut trouver le 3ème (fig. 3) ; à partir de 3 coins d'un quadrilatère, on peut trouver le 4ème (fig. 4).

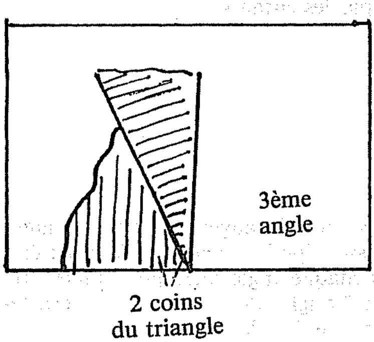


figure 3

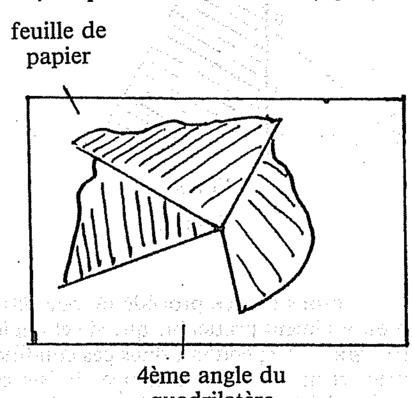


figure 4

On s'en assurera en portant les coins sur une feuille comme l'indique chacune des figures ci-dessus.

Il peut se faire que plusieurs morceaux, appartenant ou non à un même polygone, présentent le même angle. Il est évident que dans ce cas les élèves pourront être autorisés à essayer successivement chacun de ces morceaux.

4. SITUATION 3

On ne peut ni utiliser les cadres, ni faire des copies d'angle par quelque procédé que ce soit.

Par contre on peut faire des "mesures", les instruments étant fournis à la demande des enfants ou proposés par le maître.

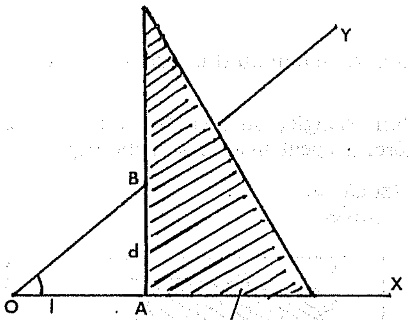
5. QUELQUES PROCÉDÉS DE COMPARAISON DES ANGLES

Plusieurs procédés permettent d'associer un nombre réel à un angle. En voici quelques-uns :

5.1. On dispose d'une équerre et d'un double-décimètre.

Soit à "mesurer" l'angle XOY.

On se fixe un nombre ℓ (par exemple $\ell = 5$). On marque sur l'un des côtés de l'angle un point A à 5 cm du sommet. La distance d(A,B) = d (fig. 5) "mesure" "l'écartement" des 2 côtés de l'angle, le mot "écartement" n'ayant aucun caractère officiel mais étant employé assez spontanément par les enfants.



Equerre

figure 5

Notons que ce procédé ne peut être utilisé que si l'angle considéré est aigu, n'est vraiment praticable que si cet angle est assez "petit", sinon d finit par être très grand. Cependant, dans ces conditions, à chaque angle correspond un écartement et un seul (à la distance choisie près) et 2 angles différents ont des écartements différents. Donc l'écartement d détermine l'angle.

En fait $\frac{d}{\ell}$ détermine ce qu'on appelle la tangente (trigonométrique) de l'angle.

5.2. Compte tenu de ces considérations, on peut fabriquer un instrument permettant une lecture directe de la "mesure" ci-dessus (fig. 6). Un rectangle très

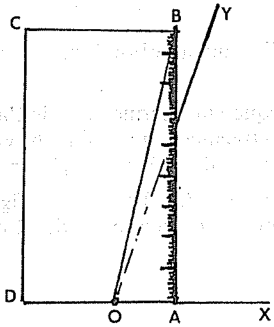


figure 6

"allongé" est découpé dans du papier transparent. Sur l'un des petits côtés on marque un point O à quelques centimètres du bord droit, lequel est gradué par exemple en cm et mm.

En posant cet instrument sur un angle XOY comme l'indique la figure on peut procéder à une lecture directe de l'écartement pour des angles au plus égaux à AOB.

Cet instrument permettrait de déterminer tout angle *saillant* si on prolongeait la graduation sur tout le contour ABCD, c'est-à-dire de A jusqu'à D. On définirait aussi un nouvel "écartement".

5.3. Remarques :

a) Dans chacun des 2 cas, graduation totale ou graduation de AB seulement il permet la *comparaison* de 2 angles.

Soient 2 coins (découpés dans du carton par exemple) C_1 et C_2 et supposons qu'on puisse les disposer comme fig. 7.

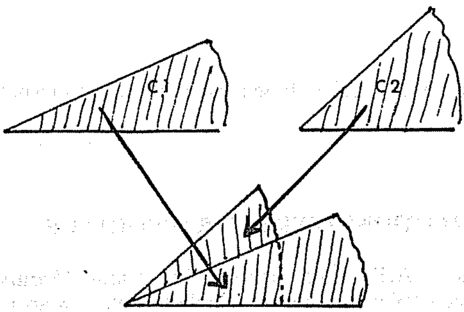


figure 7

On dit alors que C_1 est plus petit que C_2 (on dit aussi que l'angle représenté par C_1 est plus petit que celui représenté par C_2) et il est clair que "l'écartement" de C_1 est inférieur à celui de C_2.

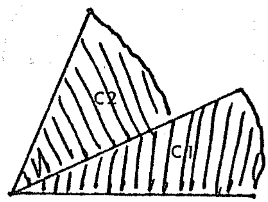


figure 8

b) Par contre si x et y mesurent respectivement les écartements de C_1 et C_2, l'écartement du coin C_3 obtenu en réunissant C_1 et C_2 comme le montre la figure 8 n'est pas x + y.
On ne peut pas dire que l'écartement soit une mesure de l'angle.

5.4. On dispose d'un double-décimètre seulement.

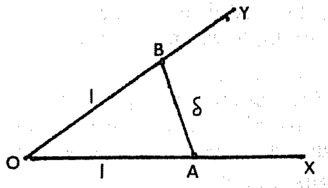


figure 9

On se fixe un nombre ℓ (par exemple $\ell = 5$).

On marque sur chaque côté de l'angle XOY respectivement un point A et un point B tels que $d(0,A) = d(O,B) = 5$.

La distance $d(A,B) = \delta$ (fig. 9) mesure un autre "écartement" des 2 côtés de l'angle.

Notons que le procédé s'applique à un angle quelconque, y compris rentrant, à condition de préciser angle saillant ou angle rentrant.

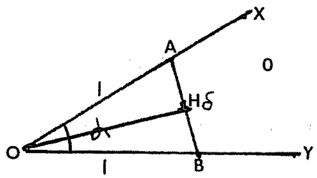


figure 10

Mathématiquement, en utilisant d'anciennes notations (fig. 10)

$$\frac{AH}{AO} = \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$$

donc

$$d(A,B) = \delta = 2\,\ell \sin \frac{\alpha}{2}$$

Cet écartement permet de comparer les angles. Il ne permet pas de les mesurer (voir remarque 5.3.b ci-dessus).

6. MESURE DES ANGLES ET FRACTIONS (VERS LE RAPPORTEUR)

6.1. On rend plus aisée la mesure de d(A,B) si on dispose d'un disque découpé dans du papier calque ou tracé sur ce papier, le centre de ce disque étant marqué (fig. 11).

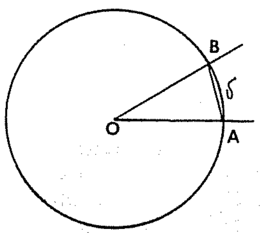


figure 11

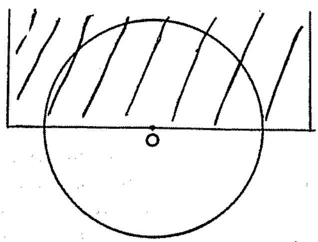


figure 12

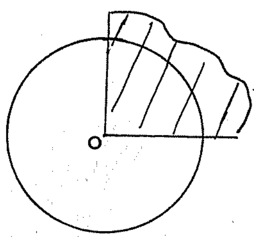


figure 13

6.2. Mais alors, au lieu de déterminer l'écartement $d(A,B) = \delta$, on peut déterminer la portion du disque recouverte par le coin lorsqu'on le pose sur le disque, le sommet de ce coin placé au centre du disque.

En effet, un plan recouvre tout le disque ; un coin plat (feuille de papier) recouvre la moitié du disque (fig. 12) ; un coin droit le quart du disque (fig. 13), etc., ces portions ou "fractions" du disque pouvant être obtenues par pliages successifs.

6.3. L'idée directrice est alors de déterminer, à l'aide de ces fractions de disque, la mesure d'un angle, au besoin par encadrement.

On trouve là une autre approche des fractions.

Ces pliages successifs conduisent aux fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{2^n}$ du disque.

On peut obtenir d'autres fractions à l'occasion de constructions géométriques dites classiques, qu'on pourra explorer avec profit.

6.4. Par exemple, on obtiendra $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$, etc. à l'aide des hexagone, dodécagone, etc. (fig. 14) ; on obtiendra $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}$, etc. à l'aide des pentagone, décagone, etc. (fig. 15).

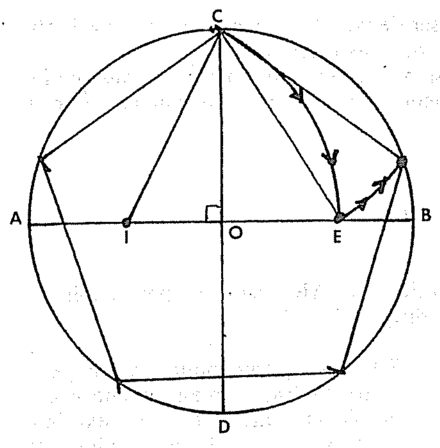


figure 14

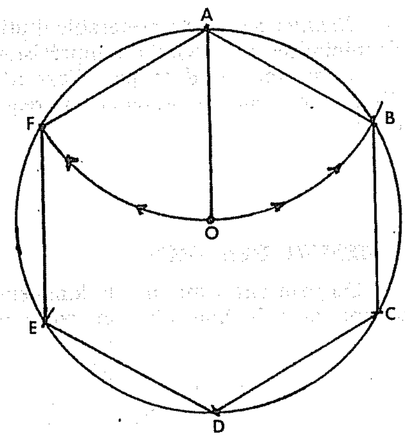


figure 15

I au milieu de AO. Les 2 diamètres perpendiculaires AB et CD peuvent être obtenus par pliage ou construction géométrique.

Ces activités peuvent être l'occasion de lancer une nouvelle activité, le dessin géométrique.

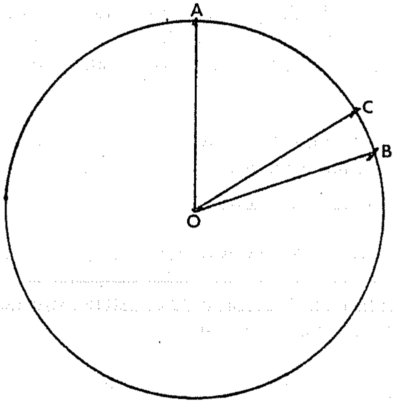


figure 16

On remarquera que si les "secteurs" (AOB) et (AOC) sont respectivement $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{6}$ du disque, alors (BOC) est $\frac{1}{30}$ du disque (fig. 16).

Le partage en 4 de ce secteur donne $\frac{1}{120}$ du disque, c'est-à-dire un secteur de 3° ; on atteint pratiquement le maximum de précision qu'on peut demander aux élèves de CM.

6.5. Il est alors possible de comparer l'instrument obtenu avec un rapporteur du commerce (il en existe de circulaires dont l'utilisation est plus aisée que celle des demi-circulaires).

Remarques: Il est préférable d'utiliser de grands disques pour ce travail afin de minimiser les inévitables imprécisions de construction.

Le partage en deux par pliage n'est pas recommandé pour la construction d'un instrument, car le papier ne redevient jamais plat; il vaut mieux utiliser le dessin.

7. MESURE DES ARCS

On peut enfin mesurer la longueur ℓ de l'arc AB recouvert par le coin, le sommet du coin étant placé au centre du disque (fig. 17).

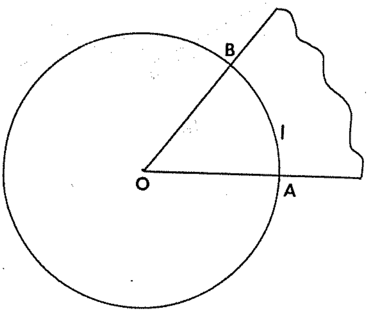


figure 17

7.1. Si on prend pour *unité* le périmètre du disque on est ramené au cas précédent, l'arc AB étant exprimé en encadré à l'aide de fractions de cette unité.

7.2. Mais on peut prendre comme unité un arc *ayant même longueur que le rayon du disque*; cette unité s'appelle le *radian*.

Il sera particulièrement commode d'utiliser comme disque un couvercle de boîte cylindrique en matière transparente, verre ou plastique, ou une section de tuyau rigide en plastique (récupération d'installation sanitaire par exemple).

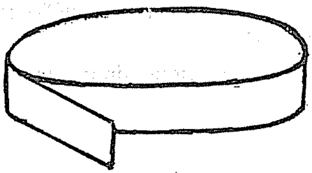


figure 18 a

figure 18 b

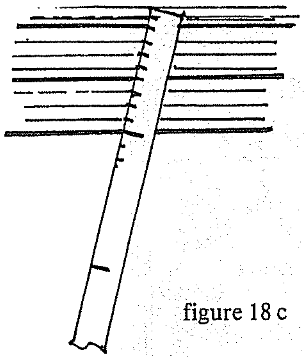


figure 18 c

On prendra une bande de papier pouvant "faire le tour" du couvercle (fig. 18 a).

Sur cette bande on marquera avec précision le diamètre. Un pliage donnera le rayon (fig. 18 b). On pourra utiliser une empreinte du couvcercle pour cette détermination.

Puis, en se servant d'une feuille de papier écolier on pourra partager le rayon, par exemple en dix, chaque intervalle représentant donc $\frac{1}{10}$ de radian, soit entre 5° et 6° (fig. 18 c). On peut d'ailleurs atteindre une graduation plus fine. Il ne reste plus qu'à coller soigneusement la bande graduée sur le pourtour du couvercle. On pourra noter que le tour est compris entre 6,2 et 6,3 radians, si l'on connaît les décimaux.

Le couvercle pourra servir d'instrument de mesure, ou bien il pourra être utilisé pour graduer un disque qui deviendra alors un rapporteur gradué en radians.

Ces remarques peuvent donner l'idée d'activités dont l'objectif n'est pas de fabriquer des instruments de précision, mais de donner aux élèves une bonne expérience de la mesure des angles utilisable dans la vie pratique et aussi fort utile quand on entreprend l'étude de la trigonométrie.

Il n'est pas pour autant question de proscrire le rapporteur classique, bien au contraire, mais on peut espérer que les élèves sauront mieux dominer l'instrument.

N.B. La technique de la bande graduée peut évidemment être utilisée pour partager le tour du disque en n parties.

8. SITUATION 4

On peut reprendre toutes les activités ci-dessus (situations 1 - 2 - 3) en remplaçant la consigne :

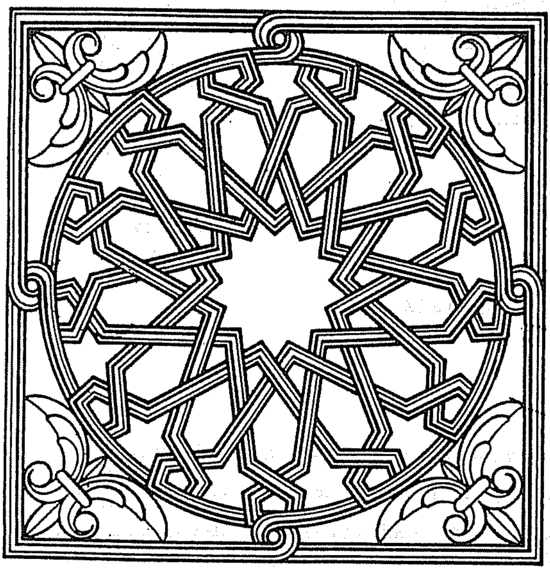
"retrouver tous les "morceaux" du puzzle" par

"construire un polygone s'encastrant exactement dans le cadre".

Un nouveau problème apparaît :

Quels sont les "éléments" déterminant un polygone ? les côtés seuls ? combien de côtés ? les côtés et les angles ? combien d'angles ?

L'activité permettra de répondre à la plupart de ces questions, sinon à la totalité.



CHAPITRE X

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Dans chaque instrument est inscrite une ou plusieurs propriétés géométriques (une règle traduit l'alignement de trois points au moins, un compas reporte la distance de deux points, etc...). Pour reproduire une figure géométrique on est amené à choisir des éléments caractéristiques puis des instruments permettant de les "transporter".

Exemple : parallélogramme ABCD

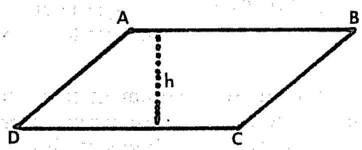


figure 1

a) Construire un segment D′C′ de même longueur que DC. Tracer deux arcs, l'un de centre D′ et de rayon DA, l'autre de centre C′ et de rayon CA. Le point d'intersection, dans le demi-plan supérieur est A′. Puis (A′,AB) et (C′,DA) qui se rencontrent en B′.

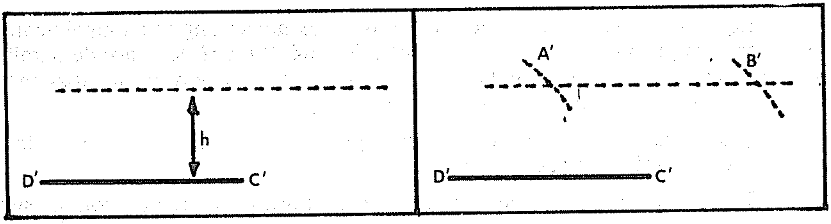


figure 2

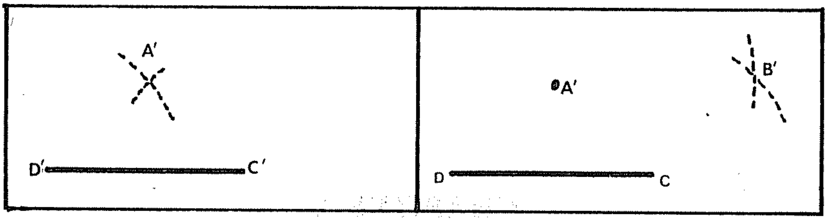


figure 3

b) Construire une parallèle au segment D′C′ (déjà construit) à la distance h. Les arcs (D′,DA) et (C′,DA) rencontrent cette parallèle en A′ et B′. (Attention à la direction des segments D′A′ et C′B′).

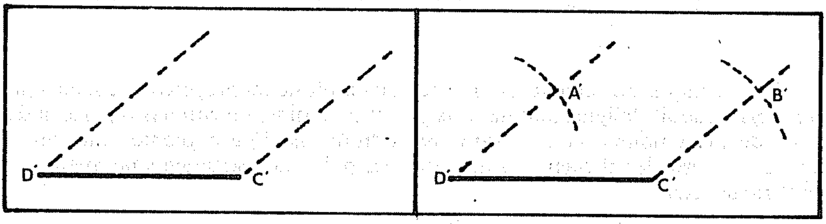


figure 4

c) Segment D′C′ (cf. a). Reporter l'angle D en D′ et en C′ (même orientation). Les arcs (D′,DA) et (C′,DA) rencontrent les deux demi-droites parallèles en A′ et B′.

Ces trois énoncés relatent sommairement trois "algorithmes" de construction, illustrés par les étapes de chaque construction. Il reste à établir les "programmes" de construction, c'est-à-dire à indiquer les instruments nécessaires, et à en préciser le maniement.

1. QUELQUES INSTRUMENTS DISPONIBLES :

- Règle non graduée : alignement de plusieurs points ; peut servir de support au glissement d'une équerre.
- Compas : report d'une longueur quelconque ; tracé d'un arc de cercle (constructions classiques de la bissectrice, de la médiatrice, d'une perpendiculaire, de parallèles, etc..).
- Equerre : report d'un angle droit et de deux autres angles (complémentaires), par exemple 30° et 60° ; par glissement le long d'une règle, tracé de parallèles ; par retournements successifs, construction d'un losange dont une diagonale est donnée (détermination de la médiatrice).
- Fausse équerre : report d'un angle quelconque ; par glissement le long d'une règle : tracé de segments parallèles.
- Té : détermination de perpendiculaires au bord d'une table ; comme support de glissement d'une équerre, ou d'une fausse équerre : détermination de réseaux parallèles.

• Trusquin : tracé de parallèles au bord d'une table.

• Fil : alignement de points (fil tendu) ; report de longueurs (fil à nœuds) ; tracé de cercles et d'ellipses ; par la méthode de la corde à douze nœuds (triangle 3-4-5) : détermination de perpendiculaires.

• Réseau parallèle régulier : partage d'un segment.

• Quadrillages réguliers : transport d'un dessin, symétries, dilatations et réductions.

• calque, rhodoïd : détermination de parallèles, de perpendiculaires, déplacements et symétries d'un dessin.

2. FIABILITÉ, ORDRE DE GRANDEUR

On voit qu'un simple fil tendu peut remplacer la règle et le compas. Mais avec une moindre fiabilité puisqu'il n'est pas inextensible, et que, même tendu, il n'assure pas un alignement aussi précis que la règle. Toutefois pour travailler sur de grandes aires (plate-bandes, carrelages...) il est d'un emploi plus aisé, et évite de nombreux reports. Le type de problème, mais aussi les conditions matérielles de réalisation doivent être l'occasion de s'interroger sur la procédure à employer et les instruments à choisir.

3. EXEMPLES :

3.1. Tracé d'une médiatrice sur un support plan rigide.

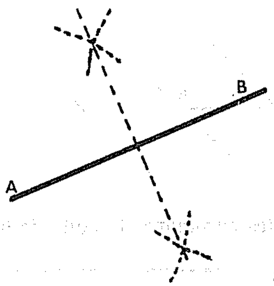


figure 5

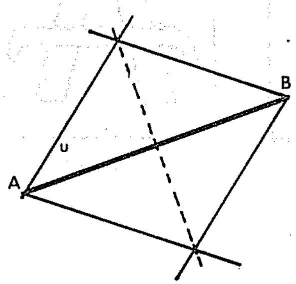


figure 6

a. Reporter A et B sur un calque ; plier A sur B. Reporter le pli sur le support.

b. Compas : ouverture quelconque, supérieure à $\frac{AB}{2}$, soit R. Arcs (A,R) et (B,R), qui se coupent en C et D. Joindre C et D à la règle (fig. 5).

c. Barre de meccano : si la barre est de longueur supérieure à $\frac{AB}{2}$, voir construction précédente. Sinon, on se ramène à la construction précédente après avoir déterminé un segment plus court, de même milieu que AB.

d. Règle disposée selon AB et équerre quelconque. Reporter un angle aigu u de part et d'autre de AB, de sommet A, puis de sommet B. On obtient un losange ACBD. Tracer CD à la règle (fig. 6).

e. Mesurer la longueur AB ; déterminer le milieu M. Règle disposée selon AB et équerre, angle droit en M. Tracer la perpendiculaire en M, de part et d'autre.

3.2. Partage d'un segment en n parties égales (par exemple 3 ou 5).

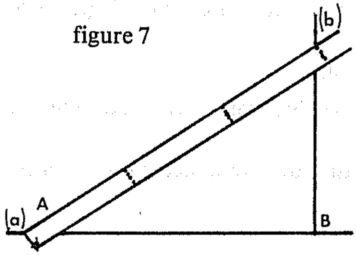


figure 7

Ici, pour n = 3.

a. Pliages : en repliant (a) sur lui-même, on fait apparaître des plis perpendiculaires à AB ; soit (b) le pli perpendiculaire en B. On plie une bande de papier de façon à faire apparaître 3 segments de même longueur ; l'origine du premier est placée en A, l'extrémité du troisième sur (b). On marque les points intermédiaires, puis on abaisse les perpendiculaires (fig. 7).

b. Pliages, règle : plis (b) et (c) perpendiculaires en B et A à (a). On reporte n-1 fois (soit 2) une longueur L sur (c) et une fois L de l'autre côté de AB sur (b). Joindre C et D (fig. 8).

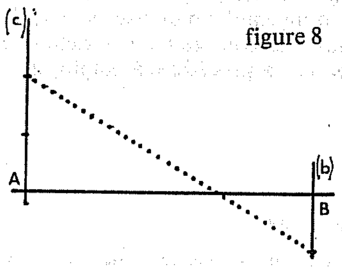


figure 8

c. Réseau parallèle régulier. On dispose le réseau de façon que A soit sur une droite, B sur une autre, et que 3 bandes les séparent. Marquer les intersections (fig. 9).

d. Mesurer AB ; diviser cette mesure par 3. Reporter la partie déterminée au compas, de proche en proche.

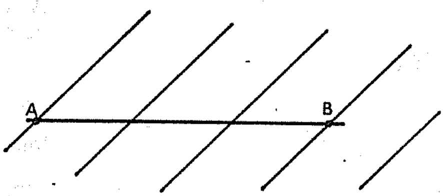


figure 9

3.3. On veut reproduire (le plus fidèlement possible) des panneaux du code de la route :

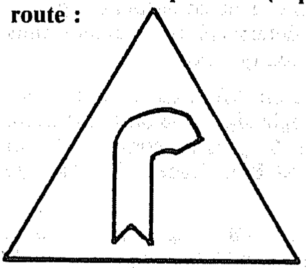


figure 10

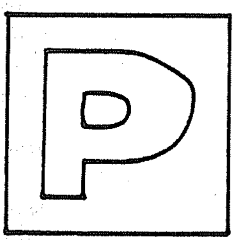


figure 11

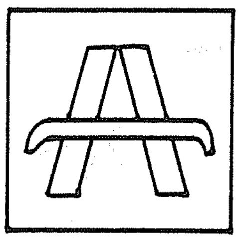


figure 12

— croquis.
— choix de la méthode de tracé et des cotes à relever.
— relevé des cotes.
— réalisation.

3.4. Rosaces, frises.

Une frise ou une rosace étant donnée, déterminer sur un calque les lignes de construction, puis les cotes nécessaires. Algorithme, puis programme de construction. Disparition des lignes de construction et mise en couleurs.

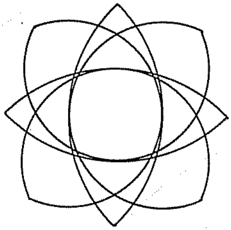


figure 13

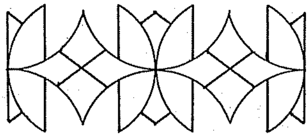


figure 14

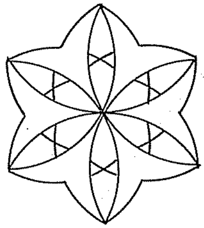


figure 15

Discussion : il est fructueux pour une construction géométrique donnée de chercher la procédure pour laquelle les risques d'erreurs (approximations de mesure, reports,....) sont moindres. Mais il est tout aussi utile, cette procédure étant choisie, de se demander si l'on pourrait se passer de l'un des instruments qu'elle utilise, et comment.

3.5. Pour obtenir une dilatation de ce dessin de rapport 2, est-il nécessaire d'utiliser des mesures ? On peut recourir à une homothétie de rapport 2. Comment choisir le centre O pour éviter d'embrouiller la construction ? Pour obtenir l'image d'un point A, il suffit de reporter (au compas) la longueur OA au-delà de A, sur la demi-droite OA.

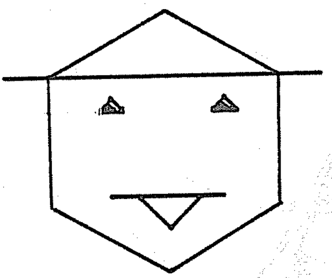


figure 16

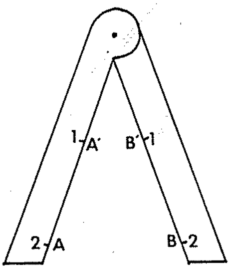
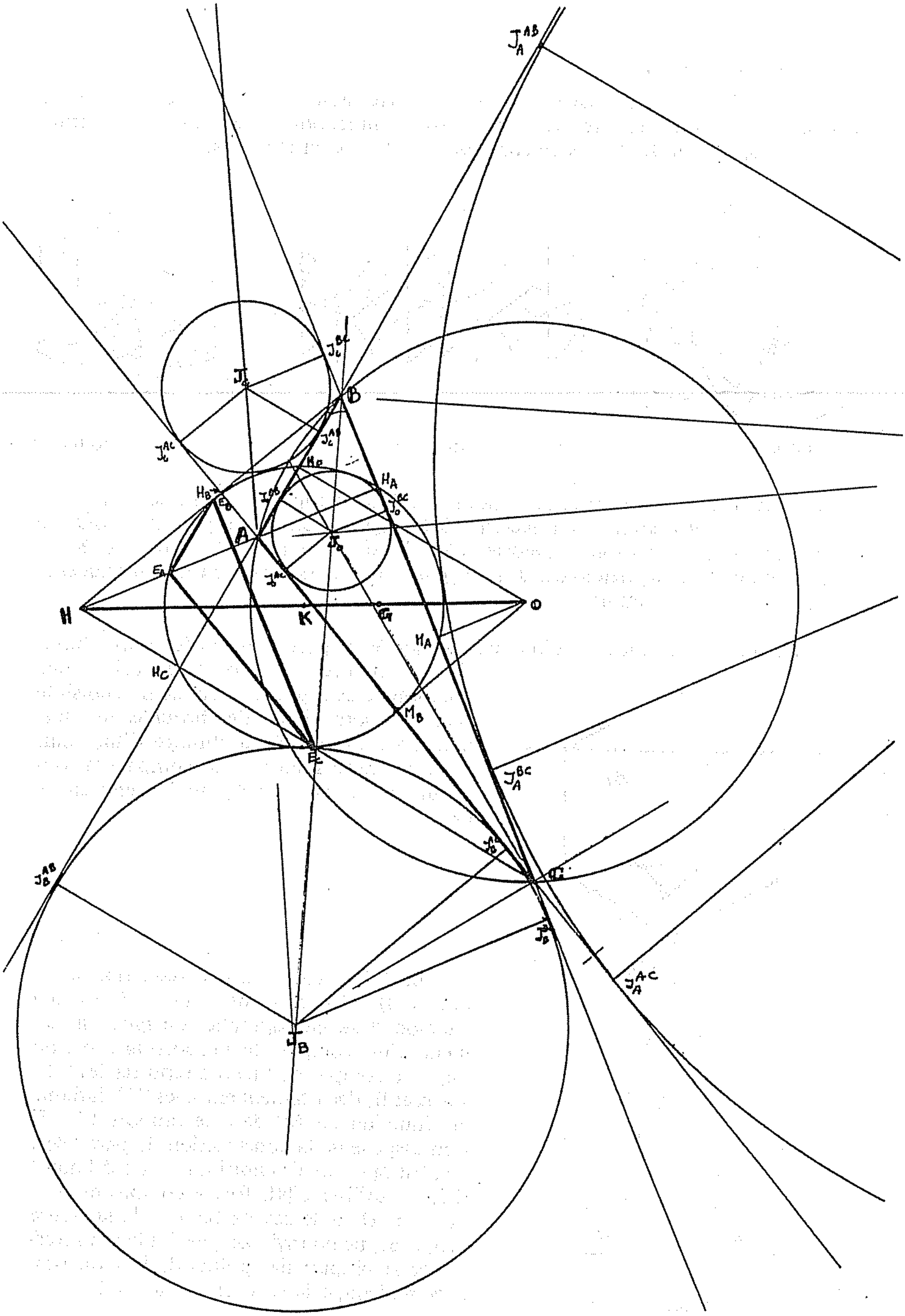


figure 17

Et s'il s'agissait d'une réduction (rapport 1/2) ? On pourrait recourir à la construction d'un pantographe, ou plus simplement d'un compas de proportion : si l'on ouvre le compas de façon à reporter les "2" sur A et B, l'écartement entre les "1" indique la réduction de AB dans le rapport 1/2. Si l'on dispose de la construction de parallèles, il suffit après avoir choisi un centre d'homothétie d'utiliser UNE fois le compas de proportion. Dans le cas particulier de la figure proposée, ne pourrait-on pas d'ailleurs déterminer la plupart des points de la réduction avec seulement la règle et le crayon ?



J_A^{AB}
J_C^{BC}
J_C
B
J_C^{AC}
J_C^{AB}
H_B
H_A
E_B
J_0^{BC}
A
I_0
E_A
J_0^{AC}
H
K
G
O
H_A
H_C
M_B
E_C
J_A^{BC}
J_B^{AB}
C
J_B^{BC}
J_A^{AC}
J_B

CHAPITRE XI

REPRODUCTION DE DESSINS

1. GÉNÉRALITÉS

Dans tous les cas, la reproduction de dessins fait appel, en premier lieu, à l'observation, et au repérage de propriétés : "Quels sont les éléments pertinents de la figure dont la prise en compte permettront une "bonne reproduction" ?".

De plus, selon la consigne donnée, et les conditions matérielles de déroulement, une telle activité vise divers objectifs.

Il peut s'agir de reproduire :

— avec ou sans instrument de mesure
— sur papier uni ou quadrillé
— à une échelle donnée...

Les élèves sont alors amenés à utiliser des instruments de mesure ou le compas à pointe sèche, le compas ; à compter les carreaux, à utiliser la proportionnalité en conservant certaines caractéristiques (angulaires par exemple) et pas d'autres (mesures des longueurs par exemple)...

Remarque : Les dessins proposés ci-après rassemblent parfois, en une seule figure, plusieurs "cas de figure", et peuvent évidemment être décomposés en plusieurs dessins successifs ne relevant chacun que d'un cas.

En particulier, la recherche de propriétés pertinentes peut nécessiter des constructions supplémentaires sur les dessins originaux.

2. EXEMPLES DE DESSINS NÉCESSITANT DES TRACÉS SUPPLÉMENTAIRES

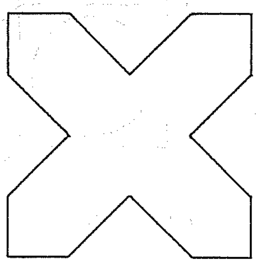


figure 1

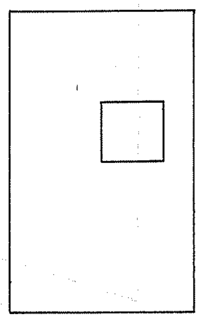


figure 2

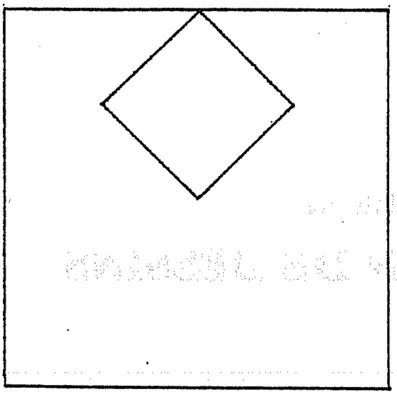


figure 3

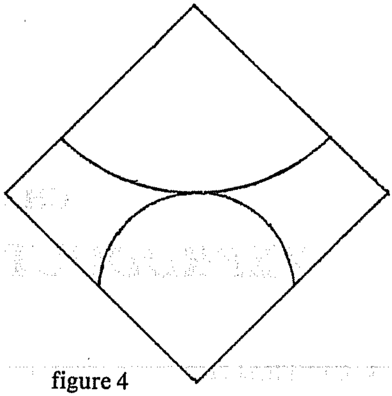


figure 4

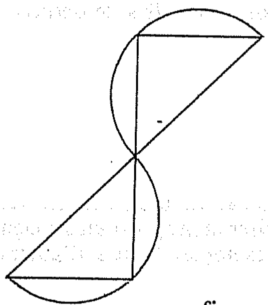


figure 5

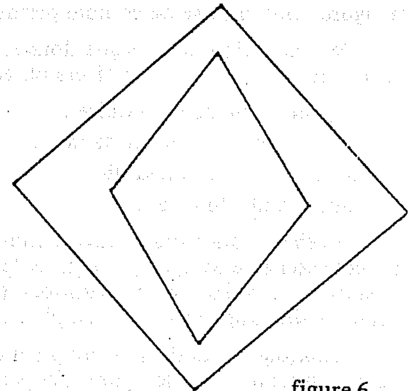


figure 6

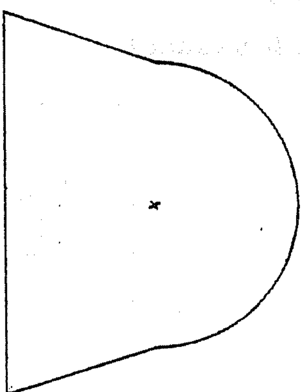


figure 7

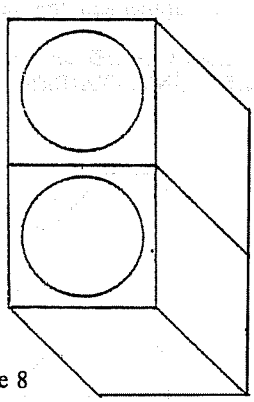


figure 8

3. MISE EN OEUVRE EN CLASSE

3.1. 1er type de séquence : comment reproduire une figure plane ?

a) *But :*

Il s'agit pour les enfants de mettre en évidence des données permettant de reproduire une figure plane.

b) *Description de l'activité :*

Certains enfants ("ÉMETTEURS") sont en possession de figures géométriques planes et doivent transmettre à d'autres ("RÉCEPTEURS") des renseignements écrits (MESSAGE) permettant de reproduire ces figures sans les voir.

c) *Matériel :*

A titre indicatif, nous donnerons les dimensions (en centimètres) de quelques figures distribuées aux émetteurs. Il est nécessaire de ne pas proposer des figures trop petites afin de faire apparaître la nécessité d'une technique de reproduction de l'angle droit (voir 2ème type de séquence).

Quelques exemples de figures sont donnés à la fin de ce chapitre.

Les enfants ont à leur disposition un décimètre, un compas, une paire de ciseaux, une équerre (de préférence faite par pliage d'une feuille de papier) et du papier Canson.

d) *Consigne :*

Au moment de l'explication de ce jeu de communication par le maître, il est nécessaire de préciser :

- que les MESSAGES ne doivent pas comporter de croquis
- que si les RÉCEPTEURS ne comprennent pas l'un des renseignements ou s'ils en désirent d'autres, ils peuvent renvoyer le MESSAGE aux ÉMETTEURS avec leurs questions.

e) *Un exemple d'émission de messages*

(A propos du triangle équilatéral)

Emetteur : 1c 16 cm 2c 16 cm 3c 16 cm
Récepteur : mettez longueur, largeur.
Emetteur : esscuse ses une forme triangulaire
Récepteur : quel est la hauteur de la figure ?
Emetteur : 13,9 cm.

Reproduction réussie !!

f) *A propos du déroulement*

- Il est souhaitable que les enfants travaillent par groupe de 2 ou 3 maximum
- Il est important de proposer plusieurs fois l'activité en échangeant les rôles d'EMETTEURS et des RECEPTEURS et en faisant varier les figures.
- Ne pas oublier de prévoir quelques temps brefs de concertation entre les groupes.

En effet, c'est en *fabriquant plusieurs messages* et en *se concertant* que les enfants vont affiner leur langage et découvrir la pertinence des données permettant de réussir la reproduction de la figure.

3.2. 2ème Type de séquences : Elaboration de diverses techniques de reproduction

a) *Buts :*

Lors des séquences de premier type, les enfants ont explicité les informations qui permettaient de reproduire une figure plane.

Il s'agit maintenant de consolider ces acquisitions par :

— l'élaboration et la comparaison de techniques de construction

— l'utilisation du vocabulaire introduit.

b) *Description de l'activité :*

Le maître demande : "quels renseignements voulez-vous que je vous donne pour construire un carré ?"

Les enfants individuellement ou par groupes, demandent des renseignements et commencent la construction du carré.

Lors de la vérification (par superposition) les enfants sont amenés à formuler la (ou les) technique(s) de construction. La validation s'appuie sur les résultats des premières séquences. Les enfants acquièrent la conviction que telle technique de construction permet de reproduire la figure initiale.

c) *Matériel :*

Le matériel mis à la disposition des enfants est le même que celui utilisé dans les séquences de type 1.

3.3. Remarque

Chacun de ces deux types de leçons peut s'imbriquer afin qu'il n'y ait pas trop de séquences de type 1 sans mise au point de type 2.

Toutefois, dans les séquences de type 1, le travail simultané sur des figures différentes favorise l'explicitation de données qui caractérisent chacune de ces figures.

3.4. Quelques exemples de figures

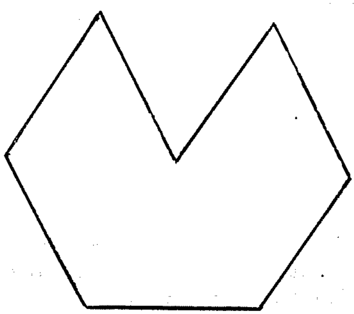


figure 9

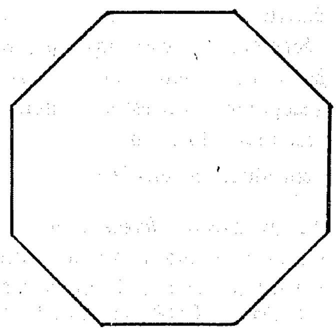


figure 10

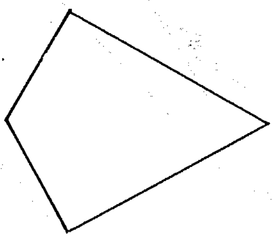


figure 11

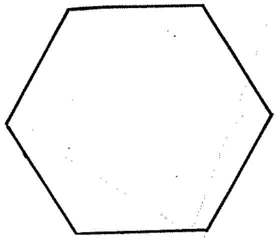


figure 12

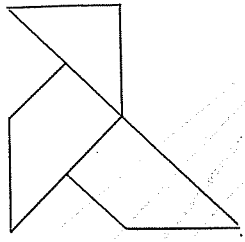


figure 13

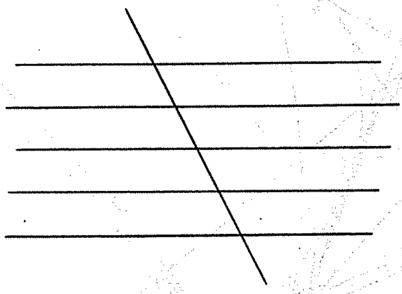


figure 14

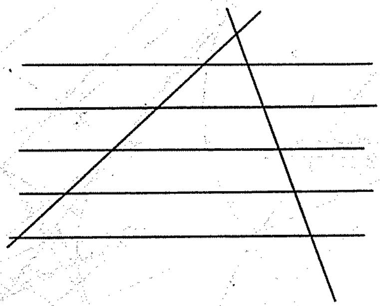


figure 15

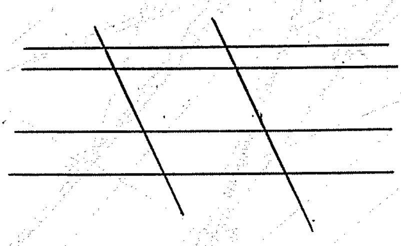


figure 16

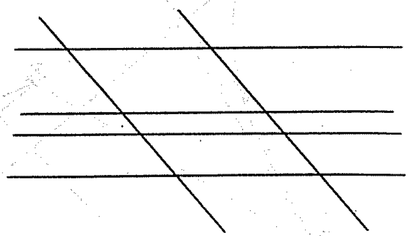
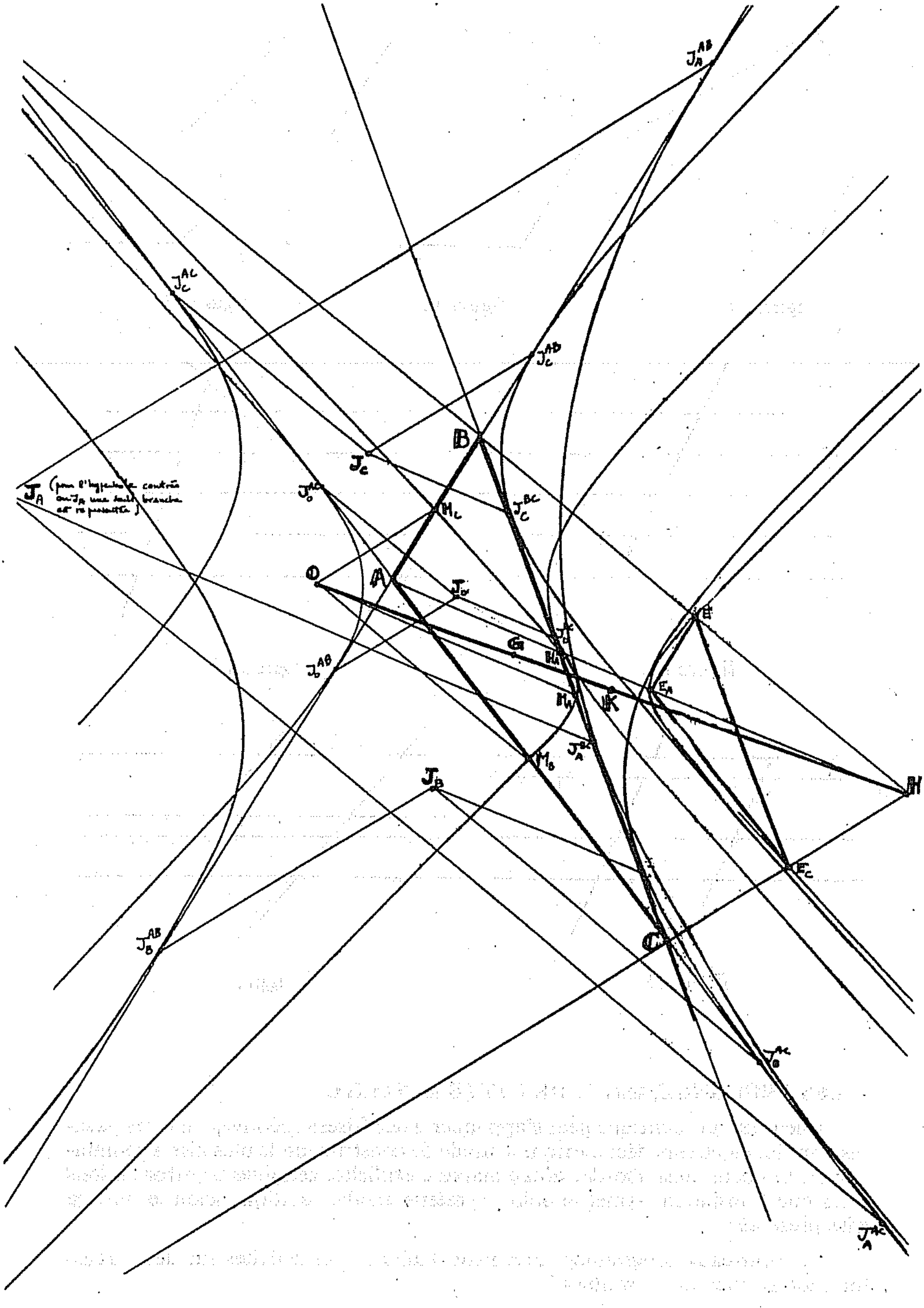


figure 17

4. LES PROLONGEMENTS DE CETTE ACTIVITÉ

Une pratique identique peut s'appliquer à des frises répétitives ou à des pavages dont les émetteurs découvriront le mode de construction le plus aisé à communiquer. On peut ainsi aborder d'une manière explicite, certaines transformations telles que translation, symétrie-point, symétrie axiale, rotation, selon le type de frise présenté.

Les nouveaux programmes prévoient d'ailleurs des activités sur des "transformations ponctuelles simples".



J_A^{AB}
J_C^{AC}
J_C^{AB}
B
J_C
J_A
(pour l'hyperbole centrée en J_A une seule branche est représentée)
J_B^{AC}
J_C^{BC}
M_C
O
A
J_O
J_B^{AB}
J_O'
G
M_A
E
E_A
M_A
K
J_A^{BC}
M_B
J_B
H
E_C
J_B^{AB}
C
J_B^{AC}
J_A^{AC}

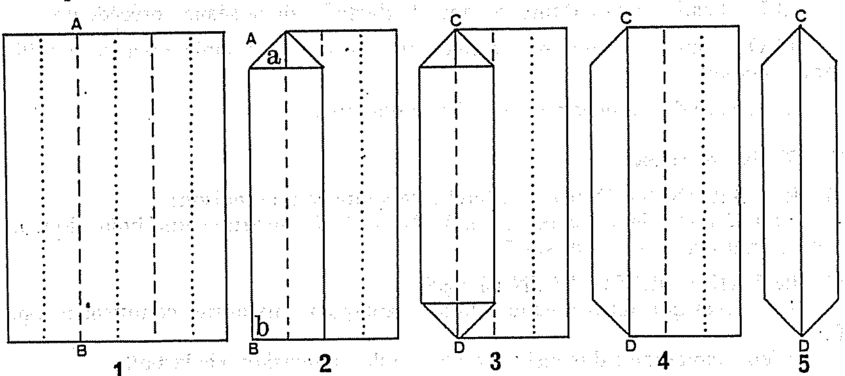
CHAPITRE XII

LA BOÎTE DU PÂTISSIER

1. CONSIGNES DE CONSTRUCTION

1.1. On utilise une feuille de papier 21 × 29,7.
Les plis en creux sont représentés : ------
et les plis en relief : ......

figure 1



a) faire apparaître les cinq plis (équidistants) indiqués fig. 1

b) plier suivant AB, et réaliser les pliages du coin (a), fig. 2

c) réaliser dans le coin (b) les mêmes pliages qu'en (a), fig. 3

d) plier suivant le pli en creux CD, fig. 4

e) mêmes actions dans la partie droite de la feuille. On aboutit au résultat représenté fig. 5

f) il reste à ouvrir la boîte, et à marquer les plis des arêtes :

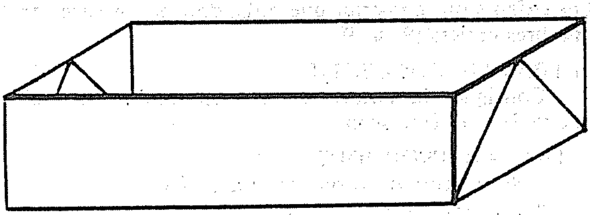


figure 2

1.2. CALCULER les dimensions de la boîte obtenue.

De quelle feuille rectangulaire faudrait-il partir pour obtenir une boîte $7 \times 7 \times 3{,}5$?

Quelles seraient les dimensions de la (ou des) boîte(s) obtenue(s) avec une demi-feuille $21 \times 14{,}85$?

On veut obtenir avec une feuille $21 \times 29{,}7$ une boîte dont le fond soit CARRÉ et le plus grand possible, comment faire, et quelles dimensions obtient-on ?

2. RÉALISATION EN CLASSE

La construction de cette boîte a été proposée dans une classe de C.M.2 :

2.1. Première séance : Examen de la boîte construite, puis dépliée. Ensuite les enfants l'ont construite pendant une séance de T.M.E. en suivant point par point les consignes données par le maître (page précédente).

2.2. Deuxième séance : Utilisation du codage proposé ci-avant.

a) Explication aux enfants. Rappel de l'activité de la séance précédente.

b) On demande de refaire la même boîte que dans la première séance en utilisant le codage.

c) Mesure des dimensions de la boîte obtenue.

2.3. Troisième séance :

a) TRAVAIL INDIVIDUEL (recherche personnelle à la maison)

Première consigne : avec la feuille $21 \times 29{,}7$ construire une boîte dont le fond sera un carré de 7 cm sur 7 cm.

b) TRAVAIL COLLECTIF EN CLASSE

Les élèves qui ont trouvé la solution expliquent aux autres comment ils ont fait :

- leur démarche : dimensions de la feuille, dimensions de la boîte.
- la construction de celle-ci.

c) TRAVAIL INDIVIDUEL

On demande aux enfants de décrire ces activités en les codant (cf. deuxième séance).

2.4. Quatrième séance :

a) TRAVAIL INDIVIDUEL A LA MAISON

Consigne : avec la feuille $21 \times 29{,}7$ construire la boîte à fond carré dont les dimensions du fond sont les plus grandes possibles.

Les enfants ont construit une boîte dont les mesures du fond étaient, en cm, des nombres entiers (9 sur 9).

b) TRAVAIL COLLECTIF

Consigne : la mesure peut être un nombre décimal ; on se reporte aux résultats de la troisième séance.

c) TRAVAIL INDIVIDUEL

- élaboration du projet avec le codage
- construction de la boîte.

2.5. Remarques : Dans la troisième séance les enfants ont d'abord essayé de construire tout de suite la boîte (par tâtonnement). Puis le maître leur a expliqué que s'ils utilisaient toute la feuille ils allaient retrouver la boîte initiale ; les élèves sont revenus à la boîte développée et ont ainsi trouvé les dimensions de la feuille utile. Plus de cent boîtes ont été construites. On a pu constater une excellente participation. Les "meilleurs" élèves de la classe n'ont pas été ceux qui réussissaient toujours le mieux. Deux élèves "moyens" ont été les "moteurs" de l'activité. Les élèves ont pris conscience de la nécessité d'imaginer la boîte construite, c'est-à-dire commencer par l'élaboration d'un projet, pour en trouver les dimensions, puis seulement construire alors la boîte.

3. PROLONGEMENTS

3.1. Variation d'un des paramètres

a) Variation des dimensions de la feuille de papier

— dimensions pour obtenir une boîte à fond carré de côté donné ?
— une boîte de dimensions quelconques peut-elle être obtenue ?
— peut-on utiliser une feuille quelconque ?
— comparaison des dimensions des boîtes obtenues avec une feuille $21 \times 29{,}7$, une demi-feuille, un quart de feuille.

b) Variation du pliage

— boîte à fond sans pli
— nombre minimal de bandes pour construire une boîte ?
— constructions obtenues avec un nombre impair au départ (5 bandes).

3.2. Variation de plusieurs paramètres

a) Forme et pliage

— peut-on réaliser une boîte plus plate ? quand on diminue de moitié la hauteur, de combien augmente la surface du fond ?

b) Dimensions et pliage

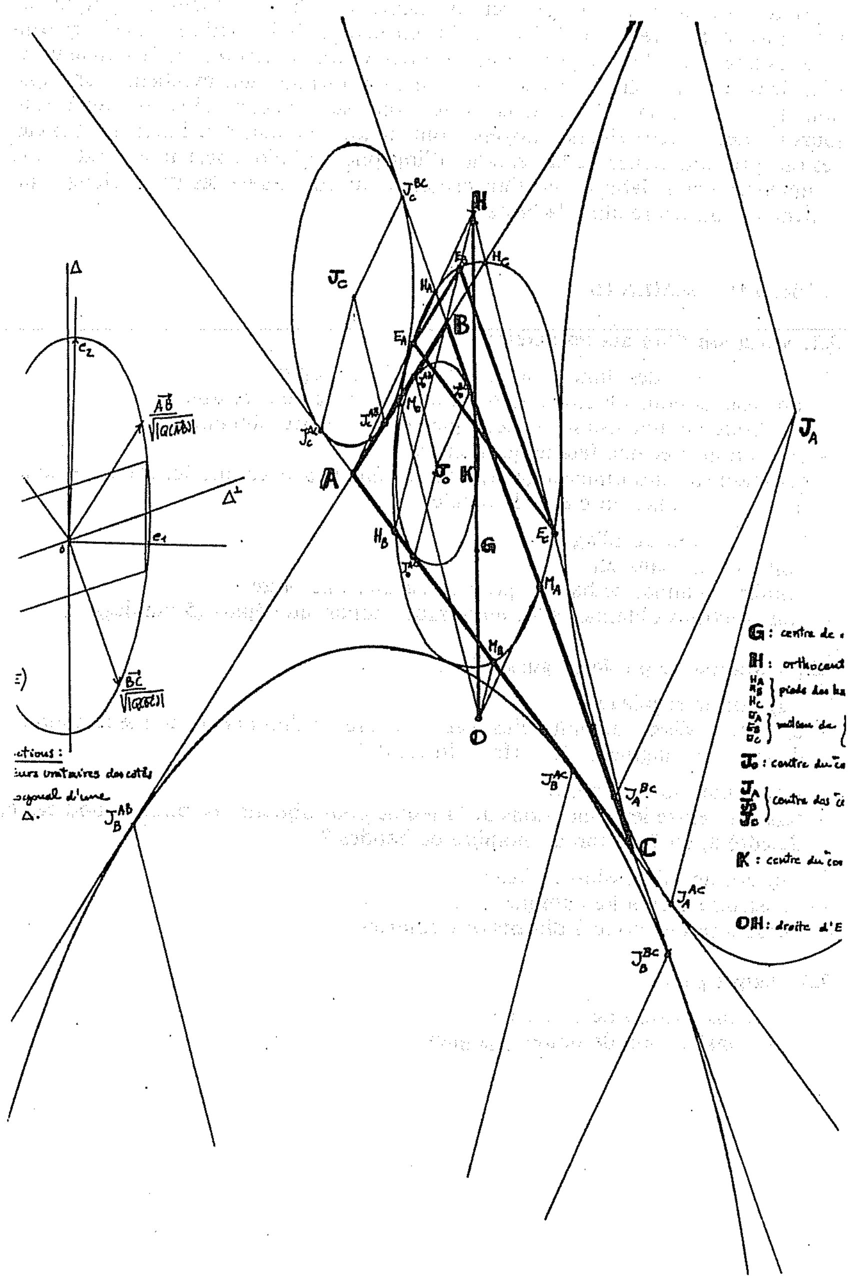
— relations entre les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte à fond carré, de côté a, en fonction du nombre de bandes ?

c) Forme, dimensions, pliage

— construire une boîte cubique
— construire une boîte à dimensions données.

3.3. Autres pistes

— construction de couvercles
— construction de boîtes gigognes.


G : centre de
H : orthocent
K : centre du
OH : droite d'E
A
B
C
O
H
G
K
Δ
Δ⊥

CHAPITRE XIII
LA BOÎTE CADEAU

1. PRÉSENTATION

1.1. But : Construire une boîte cadeau plus grande que celle dont on dispose.

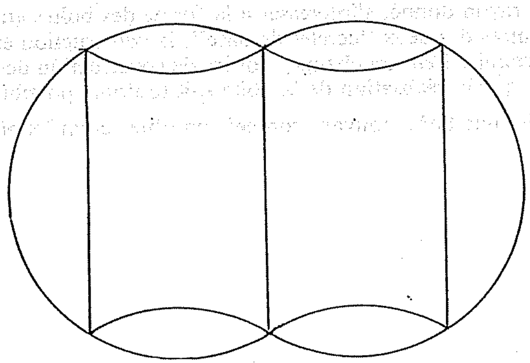
1.2. Objectifs de cette activité géométrique :

- Analyse de la représentation plane (mise à plat) d'un objet obtenu par pliage : reconnaissance d'éléments géométriques.
- Repérage d'éléments pertinents en vue de la construction.
- Construction d'un "patron".
- Choix et utilisation d'instruments pour réaliser correctement la boîte.

1.3. Matériel :

- Une petite boîte cadeau pour chacun des enfants ; le maître n'a pas collé les boîtes mais les a maintenues fermées par un trombone pour faciliter la "mise à plat".

figure 1



Les centres des cercles n'apparaissent pas (le maître a lui utilisé un gabarit pour la construction), seuls figurent les tracés correspondant aux lignes de pliage.

- Papier cartonné, colle, règle, double-décimètre, équerre, compas, ciseaux.

2. DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ

2.1. Première phase

Chaque élève doit construire une boîte analogue à celle donnée ; pour éviter que cette dernière ne soit utilisée comme gabarit, le maître précise que la boîte à réaliser devra être plus grande.

Tracer les arcs "intérieurs" s'avère délicat : les écartements de compas sont souvent choisis un peu au hasard et la pointe du compas est placée par tâtonnement. Les boîtes ainsi réalisées s'ajustent mal, les procédures de construction ne sont donc pas valides, il faut donc les réexaminer et les rectifier.

2.2. Deuxième phase

Les élèves explicitent et analysent collectivement leurs travaux et leurs difficultés : certains ont reconnu des parallèles, des perpendiculaires, des rectangles et leurs diagonales, des points alignés, des diamètres, des segments de même longueur, des parties symétriques...

Des pistes de diverses techniques de construction de la boîte sont ainsi dégagées.

2.3. Troisième phase

Les élèves reprennent alors la construction de la boîte. A l'occasion, le maître interrompt le travail pour soumettre à la classe les difficultés rencontrées par certains : construction de parallèles, construction d'un point situé à la distance r de deux points donnés....

Un très grand soin est demandé aux élèves tant dans les tracés, dans les découpages, que dans les marquages de plis.

3. PROLONGEMENTS POSSIBLES

- Rechercher la procédure pour laquelle les risques d'erreurs sont moindres.
- Pour un rayon donné, s'intéresser à la forme des boîtes en fonction de la distance des centres des deux "cercles de base", la construction est-elle toujours possible ? Pourquoi ? Peut-on changer l'ordre de construction des différents éléments de façon que la réalisation de la boîte soit toujours possible ?
- Construire une boîte pouvant contenir un objet donné (boîte adéquate).

CHAPITRE XIV

COURSE AU TRÉSOR

1. PRÉSENTATION

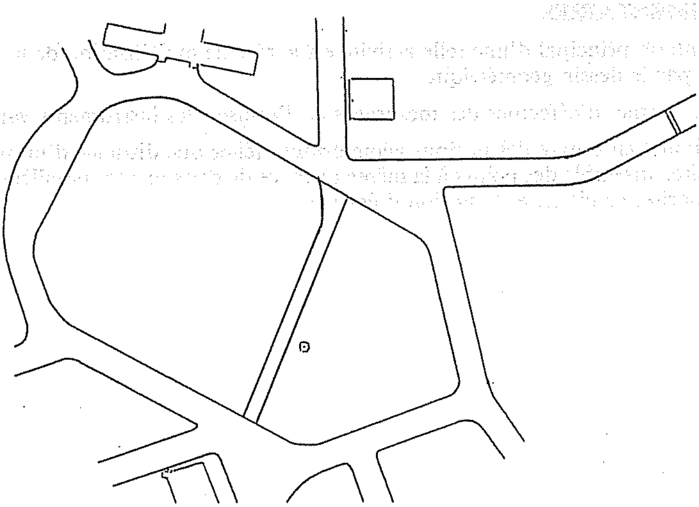
Nous présentons ici succinctement une activité menée dans une classe de CM_1 au deuxième trimestre, qui s'est déroulée sur une dizaine de séances partagées entre la réflexion en classe et le travail sur le terrain.

Une chronique détaillée et une analyse des difficultés sont publiées dans le fascicule *Problème* des aides pédagogiques pour le CM.

2. ETAPE PRÉALABLE (4 séances)

Elaboration par la classe d'un plan à l'échelle $\frac{3}{2\,000}$ de la place herbeuse située devant l'école (plus grande dimension 180 m) à partir d'un plan officiel incomplet à l'échelle $\frac{1}{2\,000}$.

La figure ci-dessous est une réduction de l'originale de dimensions 30 cm, 45 cm.



3. MESSAGE DE LA COURSE AU TRÉSOR

A la recherche du "trésor".
Un "trésor" a été enterré sur la place du Sana qui se trouve en face de l'école.
Si vous voulez le découvrir, il vous suffit de suivre les indications suivantes:

Le "trésor" se trouve:
1. Sur l'axe de la porte donnant sur la place du Sana quand on vient du village.
2. A 8m de l'axe médian du chemin conduisant du dispensaire au château.
3. A 13m et 33cm de la base de l'arbre ayant le tronc le plus épais.

Si vous ne parvenez pas à le découvrir, notez tout ce qui vous dérange dans vos recherches.

4. RÉSUMÉ DE LA CHRONIQUE DES SÉANCES

Première séance. Les élèves ont décidé d'aller sur le terrain et s'y comportent comme à un jeu de piste cherchant des indices — démarche infructueuse.

Deuxième séance en classe; elle est consacrée à l'analyse collective de l'expression "axe médian du chemin" et à des constructions géométriques à la règle et à l'équerre.

Troisième séance en classe; contrôle: constructions individuelles à la règle et à l'équerre.

Quatrième séance sur le terrain; à l'aide de matériel (chaîne d'arpenteur, ficelle, règle plate et plots constitués d'un bâton fixé par du plâtre dans une boîte de conserve), matérialisation de l'axe médian du chemin.

Cinquième séance; interprétation en classe puis sur le terrain de la consigne "à 8m de l'axe médian du chemin".

Sixième séance. interprétation en classe, puis sur le terrain, de la consigne "à 13m et 33cm de la base de l'arbre" — Découverte du trésor.

5. COMMENTAIRES

L'intérêt principal d'une telle activité est le rôle de modélisation de la réalité joué ici par le dessin géométrique.

Elle permet d'effectuer des mesurages et d'utiliser des instruments variés.

Elle met en œuvre des notions géométriques telles que distance d'un point à une droite, ensemble des points à la même distance de deux droites parallèles, perpendicularité, cercle ... et la notion d'échelle.

CHAPITRE XV

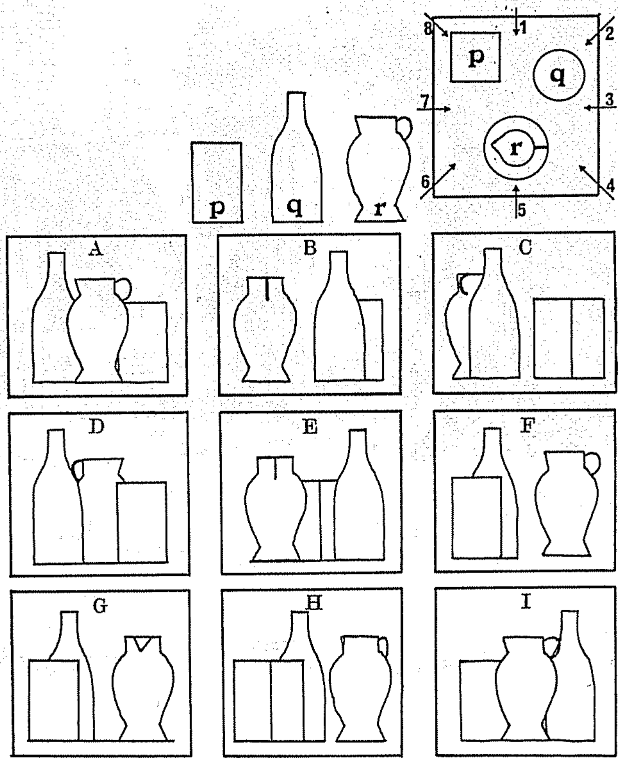
POINTS DE VUE

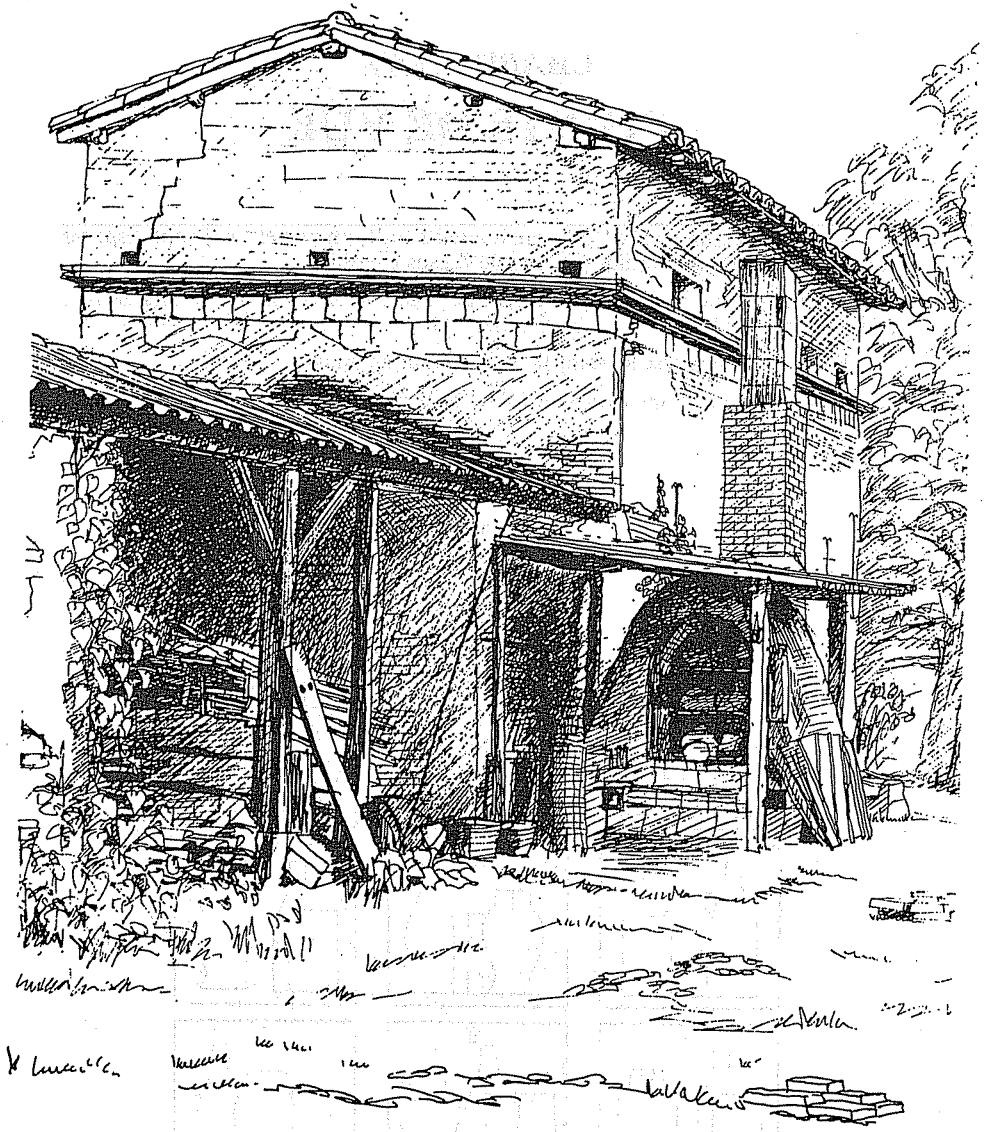
Trois objets (une boîte "p", une bouteille "q", un pichet "r") sont disposés sur une table comme l'indique la vue de dessus ci-contre.

Les images qui suivent représentent des vues, selon différents points de vue. Ainsi l'image "T" est vue de la direction "5".

Déterminer quel est le point de vue de chaque image.

Attention : certaines vues sont FAUSSES. Lesquelles ? Pourquoi ?





CHAPITRE XVI

VUES

1. Un jeu de construction, composé de pavés de bois rainurés et de prismes à base triangulaire, permet de construire une grande variété de maisons de styles différents. Une construction étant réalisée on peut la dessiner ou la photographier selon différents points de vue.

a. Une construction est exposée sur une table. On propose les trois images ci-dessous. Retrouver le point de vue de chaque image (orientation et élévation).

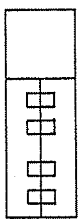


figure 1

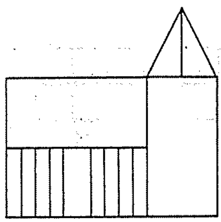


figure 2

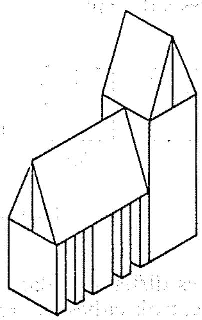


figure 3

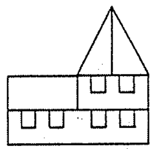
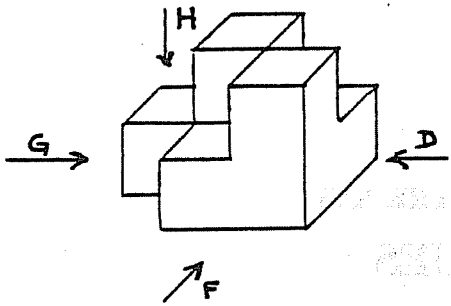


figure 4

b. On propose la vue ci-contre. Construire une ou plusieurs maisons répondant à cette vue. Par quelle autre vue pourrait-on distinguer les différentes réalisations ?

On est ainsi amené à privilégier certains points de vue permettant des représentations plus simples, et plus ou moins porteuses d'informations. On appelle "vue de face" la plus riche en information. De nouvelles conventions permettent d'enrichir encore cette information.

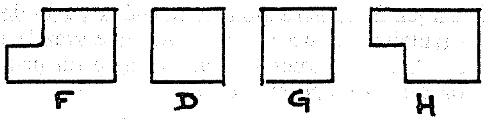
2. Les exercices suivants ont pour support un simple jeu de cubes en bois. Ils ont pour but de déterminer les conventions qui permettront d'indiquer sur chaque dessin le plus d'informations possible, en sorte de pouvoir disposer avec le minimum de vues d'un plan de construction sans ambiguïté. Il est clair qu'une seule vue est généralement insuffisante.



Partons par exemple du solide repésenté ci-contre. Les différentes directions de vue sont représentées par des flèches. On pourrait aussi recourir à des cubes coloriés et orientés de façon que la vue de face soit entièrement rouge, la vue de droite bleue, etc. Voici d'abord les contours extérieurs. Ils ne permettent pas de reconstruire le solide.

figure 5

figure 6



Indiquons alors à l'intérieur de chaque contour les arêtes vues (faces de bout). Ces indications sont-elles suffisantes ?

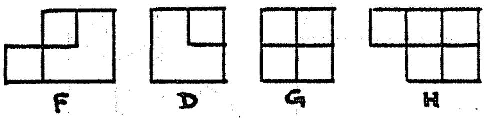


figure 7

On peut signaler les différents plans par des numéros ou un camaïeu. Par exemple : en vue de face, trois cubes au premier plan, deux au second plan. Est-ce que ces indications sont suffisantes ? Peut-on ne conserver que trois vues parmi les quatre ? Deux ?

La convention des traits discontinus est plus difficile ; elle revient à signaler sur une même vue les informations portées sur deux vues opposées.

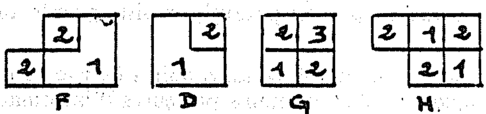


figure 8

Bibliographie

Géométrie CM

— *Espace et géométrie* — F. BOULE — Cedic - Nathan.
— *Forme espace et symétrie* — HOLDEN — Cedic - Nathan.
— *Polycubes* — J. MEENS - P.J. TORBIJN — Cedic - Nathan.
— *Surprenants triangles* — Cedic - Nathan.
— *Le triangle à l'école élémentaire* — APMEP.
— *Activités géométriques au cours moyen* — C.R.D.P. Lille.
— *Activités géométriques à l'école élémentaire et au 1^er^ cycle* — IREM - Paris-Nord.
— *Le cube* — IREM - Poitiers.
— *Ermel Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire* — C.M. Tome 3 - Hatier.
— *Grand N* — Tome 2 - Spécial C.M. — C.R.D.P. Grenoble.

MATÉRIEL :

— *Plot - Polyèdres n° 1 et 2* - IREM d'Orléans.
— *Volumes à construire* - Nathan.
— *Polyèdres* - O.C.D.L.
— *Structures* - Nathan.
— *Mathémacubes* - Hachette.

ATELIERS DE PÉDAGOGIE : films du C.N.D.P.

— *"Des angles pas toujours droits"*
— *Pavage*
— *Boîte à Problème.*

QU'EST-CE QUE L'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe près de 13 000 enseignants concernés par les mathématiques (''de la Maternelle à l'Université'').

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, ''de la Maternelle à l'Université'', mettent en commun leurs expériences pédagagiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen*, en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte*, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec les Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies, (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3e, Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

---

* et dans le Texte d'Orientation 1978.

MOTS VI - Grandeur - Mesure

Cette brochure A.P.M.E.P. (n° 46) comporte trois parties :

• Grandeur et nombre. Mesures d'une grandeur

Partant de l'expérience physique, on précise ici les relations qu'entretiennent les grandeurs et les nombres. Ainsi se dégagent les notions de grandeurs de même nature et de grandeurs mesurables.

A son habitude, la commission recense les usages, examine les expressions courantes, critique souvent, déconseille parfois. Elle souhaite ainsi fournir au lecteur des informations suffisantes pour qu'il effectue ses choix en connaissance de cause.

• Les grandeurs entre elles.

Se référant toujours à l'expérience, cette deuxième partie étudie les relations entre certaines grandeurs.

Quotients et produits conduisent à préciser l'algèbre des grandeurs. Après quoi, on effectue une incursion prudente dans les délicates questions d'homogénéité et de dimension physique.

• Considérations pédagogiques

Ce titre paraîtra inhabituel aux fervents de nos MOTS. Au risque de nous répéter, soulignons que, conformément à nos habitudes, cette troisième partie ne dresse pas un catalogue de ce qu'il faut faire ou de ce qu'il ne faut pas faire.

Tout au plus y trouvera-t-on — à la lumière de ce qui précède et avec toute la prudence qui s'impose à propos de ces questions délicates — une brève analyse de certains usages et expressions.

Les auteurs y formulent parfois des souhaits, plus souvent des mises en garde contre des confusions toujours possibles, rarement des condamnations.

*

* *

Nous espérons que cette brochure intéressera un large public.

Les maîtres de l'Ecole Elémentaire pourront y voir comment leur enseignement à propos des grandeurs et des mesures se prolonge dans une perspective qui englobe sciences expérimentales et mathématiques.

Quant aux maîtres du Second Degré — tant mathématiciens que physiciens —, puisse cette brochure, en un temps où on parle beaucoup d'interdisciplinarité, leur fournir l'occasion d'échanges dont les élèves tireront profit.

La Commission MOTS

N° ISBN : 2 - 902680 - 26 - 0

Imprimerie VAUDREY - LYON